

部分分数分解について

真中遥道

2021 年 4 月 30 日

1 部分分数分解

塾講師のアルバイトで有理関数の積分を教えるときに、部分分数分解についてある知見を得た。調べてみたところ割と有名事実みたいだが、自力で証明できたのが嬉しかったので記録を残しておく。ある知見とは次の定理である。

定理 1 (部分分数分解). $f(x), g(x) \neq 0$ を \mathbb{C} 上多項式とし, $f(x)$ の次数を m , $g(x)$ の次数を n , 因数分解を

$$g(x) = a \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{\lambda_i} \quad (a \neq 0, i \neq j \text{ のとき } \alpha_i \neq \alpha_j)$$

とする. 任意の有理式 $f(x)/g(x)$ に対し $a_0, \dots, a_{m-n}, b_{1,1}, \dots, b_{k,\lambda_k}$ が存在し, 次の形に部分分数分解できる.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}.$$

なお $m - n < 0$ のとき右辺第一項は空和として 0 とする.

要約すれば, どんな有理関数でもいい形に部分分数分解できるということである. これを示そうと思う. 多項式は \mathbb{C} 上のものとする. 次の三つの定理は既知とする.

定理 2 (除法の原理). 多項式 $f(x), g(x) \neq 0$ に対し, 商と呼ばれる多項式 $q(x)$ と余りと呼ばれる多項式 $r(x)$ が存在し次を満たす.

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \text{ かつ } \deg r < \deg g$$

定理 3 (ベズーの等式 (の系?)). 共通の根を持たない多項式 $f(x), g(x)$ に対して

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

を満たすような多項式 $u(x), v(x)$ が存在する.

定理 4 (代数学の基本定理 (の系?)). 任意の多項式は一次式の積に分解できる.

定理 3 を用いると次が示せる.

補題 5. $f(x)$ を多項式, $g(x), h(x)$ を共通の根を持たない多項式とすると, ある多項式 $a(x), b(x)$ が存在し次が成り立つ.

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{a(x)}{g(x)} + \frac{b(x)}{h(x)}$$

証明. $u(x)g(x) + v(x)h(x) = 1$ となる多項式 $u(x), v(x)$ が存在する. $a(x) = f(x)v(x), b(x) = f(x)u(x)$ とすれば $a(x), b(x)$ は多項式で $f(x)/(g(x)h(x)) = a(x)/g(x) + b(x)/h(x)$ を満たす. \square

補題 6. 任意の m 次多項式 $f(x)$ と自然数 n , 複素数 α に対し複素数 $a_{m-n}, \dots, a_0, b_1, \dots, b_n$ 次が成り立つ.

$$\frac{f(x)}{(x - \alpha)^n} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(x - \alpha)^i}$$

証明. $f(x) = f_0(x)$ とおく. $i = 0, \dots, n-1$ について, $f_i(x)$ を $(x - \alpha)$ で割った商を f_{i+1} , 余りを b_{n-i} とし, $\sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i = f_n(x)$ とすれば $a_{m-n}, \dots, a_0, b_1, \dots, b_n$ は上式を満たす. \square

補題 5, 6 を用いて定理 1 を示す.

定理 1 (部分分数解 (再掲)). $f(x), g(x) \neq 0$ を \mathbb{C} 上多項式とし, $f(x)$ の次数を m , $g(x)$ の次数を n , 因数分解を

$$g(x) = a \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{p_i} \quad (a \neq 0, i \neq j \text{ のとき } \alpha_i \neq \alpha_j)$$

とする. 任意の有理式 $f(x)/g(x)$ に対し $a_0, \dots, a_{m-n}, b_{1,1}, \dots, b_{k,p_k}$ が存在し, 次の形に部分分数分解できる.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}.$$

なお $m - n < 0$ のとき右辺第一項は空和として 0 とする.

証明. 補題 5 を繰り返し用いれば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{u_i(x)}{(x - \alpha_i)^{p_i}}$$

を満たす $u_1(x), \dots, u_k(x)$ が存在することが分かる. 定理 6 により上式の各項 $u_i(x)/(x - \alpha_i)^{p_i}$ は多項式 $v_i(x)$ と $b_{i,j}$ を用いて

$$\frac{u_i(x)}{(x - \alpha_i)^{p_i}} = v_i(x) + \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}$$

と表せる. よって i について和を取れば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^k v_i(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}$$

となる. $\sum_{i=1}^k v_i(x)$ の次数について調べる. 両辺に $g(x)$ を掛けると左辺の次数は m である. 両辺の次数比較により $m \geq n$ のとき $g(x) \sum_{i=1}^k v_i(x)$ の次数は n でなければならず, ゆえに $\deg \sum_{i=1}^k v_i(x) = m - n$ となる. また $m < n$ のときは次数の比較により $\sum_{i=1}^k v_i(x) = 0$ となる. よって $\sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i = \sum_{i=1}^k v_i(x)$ とすれば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}.$$

が成り立つ. \square

晴れて定理 1 が証明できた.