代数拡大と部分環の商体

J.K.，真中遥道

2024 年 6 月 11 日

命題 1.

L/K を体の拡大とする．以下は同値である．

(1) L/K は代数拡大である．

(2) L の任意の部分環 A, B について，

$$\mathrm{Frac}(A)=\mathrm{Frac}(B)=L, \mathrm{Frac}(A\cap B\cap K)=K \implies \mathrm{Frac}(A\cap B)=L.$$

証明. **(1)$\Longrightarrow$(2)** A, B を仮定を満たす L の部分環とする．任意に $a\in A$ をとる．$L=K(B)$ であるので $f\in K[X_1,\dots,X_n], b_1\dots,b_n\in B$ が存在して $a=f(b_1,\dots,b_n)$ となる．$\mathrm{Frac}(A\cap B\cap K)=K$ ゆえ $tf\in(A\cap B\cap K)[X_1,\dots,X_n]$ なる $t\in A\cap B\cap K\setminus\{0\}$ が存在し，この t について $ta=tf(b_1,\dots,b_n)\in A\cap B$ となる．よって $\mathrm{Frac}(A\cap B)\supseteq K(ta)=K(a)$．$L=K(A)$ ゆえ $\mathrm{Frac}(A\cap B)=L$.

(1)$\Longleftarrow$(2) L/K を超越拡大とし，(2) の前件を満たすが後件を満たさない L の部分環 A, B を構成する．L/K の超越基底を S とおく．すなわち S は K 上代数的独立であり $L/K(S)$ は代数拡大である．$x\in S$ を取り，

$$A':=K(S\setminus\{x\})[x],\quad B':=K(S\setminus\{x\})[1/x]$$

とする．任意の L の元は適当な A' の元を掛ければ A' 上整とできる. これは B' も同様である. そこで $A=\overline{A'}, B=\overline{B'}$ を L における整閉包とすれば, $\mathrm{Frac}(A)=\mathrm{Frac}(B)=L$ かつ $\mathrm{Frac}(A\cap B\cap K)=K$ となり A, B は前件を満たす．$A\cap B$ は $A'\cap B'=K(S\setminus\{x\})$ の L での整閉包である．なぜなら $A\cap B$ の元は A', B' 上整であり，A', B' が整閉であることからその元の $K(S)=\mathrm{Frac}(A')=\mathrm{Frac}(B')$ 上の最小多項式は $A'[X]\cap B'[X]=(A'\cap B')[X]$ の元となるからである．ここでもし $x\in\mathrm{Frac}(A\cap B)$ なら，ある $t\in A\cap B$ が存在して $tx\in A\cap B$ となる．t, tx は $K(S\setminus\{x\})$ 上代数的ゆえ x も同様であるが，これは S が K 上代数的独立であることに矛盾する．よって $x\notin\mathrm{Frac}(A\cap B)$ ゆえ $\mathrm{Frac}(A\cap B)\subsetneq L$. □