

部分分数分解について

真中遙道

2021年4月30日

1 部分分数分解

塾講師のアルバイトで有理関数の積分を教えるときに、部分分数分解についてある知見を得た。調べてみたところ割と有名事実みたいだが、自力で証明できたのが嬉しかったので記録を残しておく。ある知見とは次の定理である。

定理 1 (部分分数解). $f(x), g(x) \neq 0$ を \mathbb{C} 上多項式とし、 $f(x)$ の次数を m , $g(x)$ の次数を n , 因数分解を

$$g(x) = a \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{\lambda_i} \quad (a \neq 0, i \neq j \text{ のとき } \alpha_i \neq \alpha_j)$$

とする。任意の有理式 $f(x)/g(x)$ に対し $a_0, \dots, a_{m-n}, b_{1,1}, \dots, b_{k,\lambda_k}$ が存在し、次の形に部分分数分解できる。

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}.$$

なお $m - n < 0$ のとき右辺第一項は空和として 0 とする。

要約すれば、どんな有理関数もいい形に部分分数分解できるということである。これを示そうと思う。多項式は \mathbb{C} 上のものとする。次の三つの定理は既知とする。

定理 2 (除法の原理). 多項式 $f(x), g(x) \neq 0$ に対し、商と呼ばれる多項式 $q(x)$ と余りと呼ばれる多項式 $r(x)$ が存在し次を満たす。

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \text{かつ } \deg r < \deg g$$

定理 3 (ベズーの等式 (の系?)). 共通の根を持たない多項式 $f(x), g(x)$ に対して

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

を満たすような多項式 $u(x), v(x)$ が存在する。

定理 4 (代数学の基本定理 (の系?)). 任意の多項式は一次式の積に分解できる。

定理 3 を用いると次が示せる。

補題 5. $f(x)$ を多項式, $g(x), h(x)$ を共通の根を持たない多項式とするとき, ある多項式 $a(x), b(x)$ が存在し次が成り立つ.

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{a(x)}{g(x)} + \frac{b(x)}{h(x)}$$

証明. $u(x)g(x) + v(x)h(x) = 1$ となる多項式 $u(x), v(x)$ が存在する. $a(x) = f(x)v(x), b(x) = f(x)u(x)$ とすれば $a(x), b(x)$ は多項式で $f(x)/(g(x)h(x)) = a(x)/g(x) + b(x)/h(x)$ を満たす. \square

補題 6. 任意の m 次多項式 $f(x)$ と自然数 n , 複素数 α に対し複素数 $a_{m-n}, \dots, a_0, b_1, \dots, b_n$ 次が成り立つ.

$$\frac{f(x)}{(x - \alpha)^n} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(x - \alpha)^i}$$

証明. $f(x) = f_0(x)$ とおく. $i = 0, \dots, n-1$ について, $f_i(x)$ を $(x - a)$ で割った商を f_{i+1} , 余りを b_{n-i} とし, $\sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i = f_n(x)$ とすれば $a_{m-n}, \dots, a_0, b_1, \dots, b_n$ は上式を満たす. \square

補題 5, 6 を用いて定理 1 を示す.

定理 1 (部分分数解 (再掲)). $f(x), g(x) \neq 0$ を \mathbb{C} 上多項式とし, $f(x)$ の次数を m , $g(x)$ の次数を n , 因数分解を

$$g(x) = a \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{p_i} \quad (a \neq 0, i \neq j \text{ のとき } \alpha_i \neq \alpha_j)$$

とする. 任意の有理式 $f(x)/g(x)$ に対し $a_0, \dots, a_{m-n}, b_{1,1}, \dots, b_{k,p_k}$ が存在し, 次の形に部分分数分解できる.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}.$$

なお $m - n < 0$ のとき右辺第一項は空和として 0 とする.

証明. 補題 5 を繰り返し用いれば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{u_i(x)}{(x - \alpha_i)^{p_i}}$$

を満たす $u_1(x), \dots, u_k(x)$ が存在することが分かる. 定理 6 により上式の各項 $u_i(x)/(x - \alpha_i)^{p_i}$ は多項式 $v_i(x)$ と $b_{i,j}$ を用いて

$$\frac{u_i(x)}{(x - \alpha_i)^{p_i}} = v_i(x) + \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}$$

と表せる. よって i について和を取れば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^k v_i(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}$$

となる. $\sum_{i=1}^k v_i(x)$ の次数について調べる. 両辺に $g(x)$ を掛けると左辺の次数は m である. 両辺の次数比較により $m \geq n$ のとき $g(x) \sum_{i=1}^k v_i(x)$ の次数は n でなければならず, ゆえに $\deg \sum_{i=1}^k v_i(x) = m - n$ となる. また $m < n$ のときは次数の比較により $\sum_{i=1}^k v_i(x) = 0$ となる. よって $\sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i = \sum_{i=1}^k v_i(x)$ とすれば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x - \alpha_i)^j}.$$

が成り立つ. \square

晴れて定理 1 が証明できた。