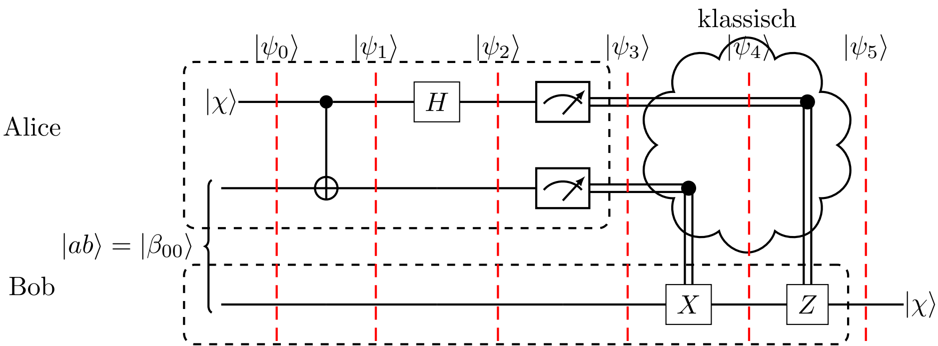
Kapitel 2

Verschränkung in der Anwendung

2.1 Teleportation

Ähnlich wie in der klassischen Informatik sollen auch QuBits zwischen mehreren Parteien ausgetauscht werden können. Die Schwierigkeit besteht darin, das QuBit zu übertragen, ohne die Superposition zu verlieren, wobei gleichzeitig das *No Cloning Theorem* beachtet werden muss. Man kann ein QuBit aber von Alice zu Bob *teleportieren*, wenn zuvor zwei QuBits $|a\rangle$ und $|b\rangle$ verschränkt wurden und je eines davon zu Alice bzw. Bob transportiert wurde. Der Schaltkreis sieht dann wie folgt aus:



Die QuBits von Alice $|a\rangle$ und Bob $|b\rangle$ sind im Bell-Zustand $|\beta_{00}\rangle$ verschränkt. Der Nachweis einer erfolgreichen Teleportation zeigt sich, wenn man $|\chi\rangle = \chi_0 |0\rangle + \chi_1 |1\rangle$ verwendet:

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi_0\rangle = |\chi\rangle |\beta_{00}\rangle &= (\chi_0 |0\rangle + \chi_1 |1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_0 |000\rangle + \chi_0 |011\rangle + \chi_1 |100\rangle + \chi_1 |111\rangle) \\ &\left(= \frac{\chi_0}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\chi_1}{\sqrt{2}} (|100\rangle + |111\rangle)\right) \end{aligned}} \quad (2.1)$$

Nun wird mit $|\chi\rangle$ als Control-Bit CNOT auf $|a\rangle$ angewendet:

$$\begin{aligned} CNOT\,|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_0\,|000\rangle + \chi_0\,|011\rangle + \chi_1\,|110\rangle + \chi_1\,|101\rangle) = \\ &\left(= \frac{\chi_0}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) + \frac{\chi_1}{\sqrt{2}}(|110\rangle + |101\rangle)\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dann wendet man eine Hadamard-Transformation auf $|\chi\rangle$ an.

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= (H \otimes I \otimes I)\,|\psi_1\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right)\frac{\chi_0}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right)\frac{\chi_1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \\ &= \frac{\chi_0}{2}(|000\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |111\rangle) + \frac{\chi_1}{2}(|010\rangle + |001\rangle - |110\rangle - |101\rangle) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Durch eine Umformung wird es einfacher, das Ergebnis der Messungen abzulesen:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(&|00\rangle\,(\chi_0\,|0\rangle + \chi_1\,|1\rangle) + |01\rangle\,(\chi_0\,|1\rangle + \chi_1\,|0\rangle) \\ &+ |10\rangle\,(\chi_0\,|0\rangle - \chi_1\,|1\rangle) + |11\rangle\,(\chi_0\,|1\rangle - \chi_1\,|0\rangle)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Durch das Messen geht der Zustand von $|\chi\rangle$ verloren. Das Ergebnis der Messung wird über einen klassischen Kanal von Alice an Bob übertragen (klassische Übertragungen werden im Schaltkreismodell als Doppelstrich gekennzeichnet). In Abhängigkeit von der Messung, werden das X- und/oder das Z-Gatter auf $|b\rangle$ angewendet:

(2.5)

Messung	$\lvert b\rangle$ zum Zeitpunkt $\lvert\psi_3\rangle$	Operation	Ergebnis $\lvert\psi_5\rangle$ ($\lvert b\rangle$)
$\lvert 00\rangle$	$\chi_0\,\lvert 0\rangle + \chi_1\,\lvert 1\rangle$	(keine)	$\chi_0\,\lvert 0\rangle + \chi_1\,\lvert 1\rangle$
$\lvert 01\rangle$	$\chi_0\,\lvert 1\rangle + \chi_1\,\lvert 0\rangle$	X	$\chi_0\,\lvert 0\rangle + \chi_1\,\lvert 1\rangle$
$\lvert 10\rangle$	$\chi_0\,\lvert 0\rangle - \chi_1\,\lvert 1\rangle$	Z	$\chi_0\,\lvert 0\rangle + \chi_1\,\lvert 1\rangle$
$\lvert 11\rangle$	$\chi_0\,\lvert 1\rangle - \chi_1\,\lvert 0\rangle$	$Z \cdot X$	$\chi_0\,\lvert 0\rangle + \chi_1\,\lvert 1\rangle$

Unabhängig von der Messung befindet sich $|b\rangle$ also im gleichen Zustand, in welchem sich χ vor der Teleportation befand (nämlich $\chi_1\,|0\rangle + \chi_2\,|1\rangle$). Das No-Cloning-Theorem wird nicht verletzt, da durch die Messung der Zustand von $|\chi\rangle$ verloren gegangen ist.

2.2 Dichte Kodierung

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft im Quanten Computing ist die sogenannte *dichte Kodierung* (engl. *superdense coding*). Sie erlaubt die Übertragung von zwei klassischen Bits mit