Uebungsblatt 09

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash

Aufgabe 1

a. $\exists c.(c > 0 \land \exists n_0(\forall n(n \geq n_0 \rightarrow |f(n)| \leq c.|g(n)|)))$

b. $\exists! x.P(x) := x(P(x) \land \forall y.(P(y) \rightarrow x = y))$

$\forall x.(\exists y.(G(x, y) \land \forall z.(G(x, z) \rightarrow y = z)))$

Aufgabe 2

Whle $U = (\mathbb{N}, \{+^{\mathbb{N}}\}, \{>^{\mathbb{N}}\})$

Behauptung: F_2 gilt in U aber F_1 nicht: ($U \vDash F_2$ und $U \nvDash F_1$)

In kurzformen dargestellt:

$F_1 = \forall y \in \mathbb{N}.\exists x \in \mathbb{N}.x + x > y$

$F_1 = \forall x \in \mathbb{N}.\forall y \in \mathbb{N}.x + x > y$

Beweis: Fr jede Belegung α ist

$\hat{\alpha}(F_2) = min_{a \in \mathbb{N}} \hat{\alpha}_{[y \mapsto a]}(\exists x \in \mathbb{N}.x + x > y)$

Wir betrachten:

$\hat{\alpha}(\exists x \in \mathbb{N}.x + x > a)$ mit a beliebig in $\mathbb{N}$:

$\hat{\alpha}(\exists x \in \mathbb{N}.x + x > a)$

$= max_{a' \in \mathbb{N} \hat{\alpha}_{[x \mapsto a']}(x+x>a)} = 1^{\mathbb{B}}$

(da es sich immer ein $a' \in \mathbb{N}$ befindet, welches grser als $\frac{a}{2}$ ist, also $2a' > a$)

$\Rightarrow \hat{\alpha}(F_2) = 1^{\mathbb{B}}$ fr jede Belegung α

$\Leftrightarrow U \vDash_\alpha F_2$ fr jede Belegung α

$\Leftrightarrow U \vDash F_2$

Sei α eine beliebegi BElegung. Es gilt:

$\hat{\alpha}(F_1) = max_{a \in \mathbb{N}} \hat{\alpha}_{[x \mapsto a]}(\forall y \in \mathbb{N}.x + x > y)$

Wir betrachten $\hat{\alpha}(\forall y \in \mathbb{N}.a + a > y)$ mit a beliebig in $\mathbb{N}$

$\hat{\alpha}(\forall y \in \mathbb{N}.a + a > y)$

$= min_{a' \in \mathbb{N}} \hat{\alpha}_{[y \mapsto a']}(a + a > y)$

$= 0$

(wenn $a' = 3a$ bspw ist $\hat{\alpha}_{[y \mapsto 3a]}(a + a > y = 0^{\mathbb{B}})$)

$\Rightarrow Esexistiereine Belegung \alpha sodass \hat{\alpha}(F_1) = 0^{\mathbb{B}}$ (Tatschlich gilt dies f jede Belegund α)

$\Leftrightarrow U \nvDash F_1$

Aufgabe 3