Uebungsblatt 02

Truong (Hoang Tung Truong, 3080216), Testfran (Minh Kien Nguyen, 3157116), Hamdash

Aufgabe 3

a. Sei $T(Fm)$ Schachtelungstiefe einer Formel Fm:

1. $T(Fm) := 0$ Falls Fm eine atomare Formel ist
2. $T(Fm) := 1 + Max(T(Fm_1), T(Fm_2))$ falls
   $Fm = (Fm_1 \vee Fm_2)$ oder
   $Fm = (Fm_1 \wedge Fm_2)$ oder
   $Fm = (Fm_1 \rightarrow Fm_2)$ oder
   $Fm = (Fm_1 \leftrightarrow Fm_2)$

3. $T(Fm) := T(Fm_1)$ falls $Fm = \neg Fm_1$

b. **Behauptung:** Die Anzahl der Klammern in einer aussagenlogischen Formel ist stets gerade.

Definiere für beliebige Formel Fm:
$K(Fm)$ = Anzahl der Klammern in der Formel Fm:

1. $K(Fm) := 0$ Falls Fm eine atomare Formel ist
2. $K(Fm) := 2 + K(Fm_1) + K(Fm_2)$ falls
   $Fm = (Fm_1 \vee Fm_2)$ oder
   $Fm = (Fm_1 \wedge Fm_2)$ oder
   $Fm = (Fm_1 \rightarrow Fm_2)$ oder
   $Fm = (Fm_1 \leftrightarrow Fm_2)$

3. $K(Fm) := K(Fm_1)$ falls $Fm = \neg Fm_1$

Behauptung: $\forall Fm$ gilt $2|K(Fm)$

Hier $E(Fm) := (2|K(Fm))$

Beweis:

1. Ist $Fm = A$ atomar, dann gilt $K(A) = 0$ und daraus $2|K(A)$, also es gilt $E(A)$

   Annahme: Seien Fm_1, Fm_2 beliebige Formel

   Es gelten $E(Fm_1)$ und $E(Fm_2)$ also $(2|K(Fm_1))$ und $(2|K(Fm_2))$

2. **Induktionsschritt:** Für $Fm = Fm_1 \vee Fm_2$ gilt:

$K(Fm) = 2 + K(Fm_1) + K(Fm_2)$

Aus $2|2, 2|K(Fm_1)$ und $2|K(Fm_2)$ folgt $2|K(Fm)$, d.h es gilt $E(Fm_1 \vee Fm_2)$

analog mit $(\wedge), (\rightarrow)$ und $(\leftrightarrow)$

3. Für $Fm = \neg Fm_1$ gilt $K(Fm) = K(Fm_1)$

   Aus $2|K(Fm_1)$ folgt $2|K(Fm)$, d.h es gilt $E(Fm)$

Also $\forall Fm$ gilt $2|K(Fm)$

Aufgabe 4

Behauptung: Für alle F mit $A \notin Var(F)$ und jede Belegung α gilt $\hat{\alpha}_[A \mapsto 0](F) = \hat{\alpha}(F)$

Beweis:

1. Ist $F = At$ atomar, dann gilt

$RHS = \hat{\alpha}(F) = \hat{\alpha}(At) = \alpha(At)$

$LHS = \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F) = \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(At) = \alpha_{[A \mapsto 0]}(At) = \alpha(At)$ (da $A \notin Var(F) \Rightarrow A \neq At$)

also $\hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(At) = \hat{\alpha}(At)$

Annahme: Seien F_1, F_2 beliebige Formel mit $A \notin Var(F_1)$ und $A \notin Var(F_2)$

Es gelten $\hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_1) = \hat{\alpha}(F_1)$ und $\hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_2) = \hat{\alpha}(F_2)$

2. **Induktionsschritt:**

- Für $F = F_1 \vee F_2$ gilt: $LHS = \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F) = \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_1 \vee F_2)$
  $= \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_1) \mid \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_2)$
  $= \hat{\alpha}(F_1) \mid \hat{\alpha}(F_2)$
  $= \hat{\alpha}(F_1 \vee F_2) = \hat{\alpha}(F) = RHS$
- Für $F = F_1$ und F_2 gilt:
  $LHS = \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_1 \wedge F2)$
  $= \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_1) \& \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_2)$
  $= \hat{\alpha}(F_1) \& \hat{\alpha}(F_2)$
  $= \hat{\alpha}(F_1 \wedge F_2) = \hat{\alpha}(F) = RHS$
- Für $\leftrightarrow$ *analog*

3. Für $F = \neg F_1$ gilt:

$LHS = \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F) = \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(\neg F_1)$

$= ! \hat{\alpha}_{[A \mapsto 0]}(F_1)$

$= ! \hat{\alpha}(F_1) = \hat{\alpha}(\neg F_1) = \hat{\alpha}(F) = RHS$

Also: Für alle F mit $A \notin Var(F)$ und jede Belegung α gilt $\hat{\alpha}_[A \mapsto 0](F) = \hat{\alpha}(F)$