Uebungsblatt 03

Truong (Hoang Tung Truong, 3080216), Testfran (Minh Kien Nguyen, 3157116), Hamdash

Aufgabe 1

$F \to G$ ist unerfüllbar

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $\hat{\alpha}(F \to G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $!\hat{\alpha}(F)\ \hat{\alpha}(G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $!\hat{\alpha}(F) = 0$ und $\hat{\alpha}(G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $\hat{\alpha}(F) = 1$ und $\hat{\alpha}(G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt F ist allegemeingültig und G ist unerfüllbar

Aufgabe 2

1. $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}$
   $= (A_1 \to A_2) \wedge A_3 \to (\neg(A_1 \vee A_2) \vee \neg(A_1 \to A_2))$
   $= (A_1 \to A_2) \wedge A_3 \to ((\neg A_1 \vee \neg A_2) \vee \neg(A_1 \to A_2))$
   $= (A_1 \to A_2) \wedge A_3 \to \neg A_2$
   $= \neg((\neg A_1 \vee A_2) \wedge A_3) \vee \neg A_2$
   $= (A_1 \wedge \neg A_2 \vee \neg A_3) \vee \neg A_2$
   $= (A_1 \wedge \neg A_2) \vee \neg A_2 \vee \neg A_3$
   $= \neg A_2 \vee \neg A_3$
2. $\alpha(G_1) = (A_1 \to A_2)_{[1/A_1, 0/A_2]} = 1 \to 0 = 0$
   $= \alpha(G_2) = (A_1 \vee A_2)_{[1/A_1, 0/A_2]} = 1 \vee 0 = 1$
   $= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]} = [A_1 \mapsto 0, A_2 \mapsto 1, A_3 \mapsto 1]$
3. $\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]})$
   $= \alpha(\neg A_2 \vee \neg A_3)$
   $= !\alpha(A_2) \mid !\alpha(A_3)$
   $= !0 \mid !1 = 1 \mid 0 = 1$
4. $(\alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1)]})_{[A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}$
   $= (\alpha_{[A_1 \mapsto 0]})_{[A_2 \mapsto 1]}$
   $= \alpha_{[A_1 \mapsto 0, A_2 \mapsto 1]}$
   $= [A_1 \mapsto 0, A_2 \mapsto 1, A_3 \mapsto 1]$

Aufgabe 3

1. Definition von $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}$ (Annahme: A_1, A_2 seien atomare Formeln)

- Ist F eine atomare Formel:
  Falls $F = A_1$ dann $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} := G_1$
  Falls $F = A_2$ dann $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} := G_2$
  Falls $F \neq A_1$ und $F \neq A_2$ dann $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} := F$
- Ist $F = \neg F_1$, dann $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} = \neg F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]}$
- Ist $F = F_1 \odot F_2$ eine zusammengesetzte Formel ($\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, ...\}$) dann
  $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} = (F_1 \odot F_2)_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}$
  $:= F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]} \odot F_{2[G_1/A_1, G_2/A_2]}$

2. Beweis (Annahme: A_1, A_2 seien atomare Formeln)

- Ist F eine atomare Formel
  Falls $F = A_1$ dann
  $\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha(G_1)$
  $= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1)]}(A_1)$
  $\alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$
  Falls $F = A_2$ dann
  $\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha(G_2)$
  $= \alpha_{[A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(A_2)$
  $\alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$
  Falls $F \neq A_1$ und $F \neq A_2$ dann
  $\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha(F)$
  $\alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$
- Ist $F = \neg F_1$, dann mit der Annahme: $\alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$ gilt:
  $\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) =!\alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]})$ **(1)**
  $=!\alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto (G_2)](F_1)}$
  $= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto (G_2)](\neg F_1)}$
  $= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto (G_2)](F)}$
- Ist $F = F_1 \odot F_2$ eine zusammengesetzte Formeln ($\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, ...\}$) und $\alpha(F_{2[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_2)$ und **(1)** gilt
  $\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]} \odot F_{2[G_1/A_1, G_2/A_2]})$
  $= \alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]}) \odot \alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]})$
  $= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_1) \odot \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_2)$
  $= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_1 \odot F_2) = \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$ $\square$

Aufgabe 4

a. $ite(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$

- $\neg$ Junktor: $\neg x = ite(x, \bot, \top) = (x \wedge \bot) \vee (\neg x \wedge \top)$

- $\vee$ Junktor: $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$
  $= ite((\neg x \wedge \neg y), \perp, \top)$
  $= ite(ite(\neg x, \neg y, \perp), \perp, \top)$
  $= ite(ite(ite(x, \perp, \top), ite(y, \perp, \top), \perp), \perp, \top)$
- $\rightarrow$ Junktor: $x \rightarrow y = \neg x \vee y = \neg(x \wedge \neg y)$
  $= ite((x \wedge \neg y), \perp, \top)$
  $= ite(ite(x, ite(y, \perp, \top), \perp), \perp, \top)$
- $\leftrightarrow$ Junktor: $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
  $= ite(x, y, \neg y)$

b. Behauptung: $\vee, \wedge$ sind zeistellige monotone boolesche Funktionen

Beweis: $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{B} : \forall i \in 1, 2 :$ (durch $a_i \leq b_i \Rightarrow f(a_1, a_2) \leq f(b_1, b_2)$, Wahrheistabelle), also

a_1	a_2	b_1	b_2	$a_1 \vee a_2$	$b_1 \vee b_2$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Aus der Eigenschaft, dass die Komposition von monotonen Funktionen wieder eine monotone Funktionen ist, können wir schließen, dass die Komposition von $\vee, \wedge, \perp, \top$ wieder eine monotone Funktion ist **(1)**

Behauptung : $\neg$ ist keine monotone boolesche Funktion

Beweis: (durch Wahrheistabelle) Für $\neg$ gilt $\forall a_1, b_1 \in \mathbb{B} : a_1 \neq b_1 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$

a_1	b_1	$\neg a_1$	$\neg b_1$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	0	0

(1) (2) $\Rightarrow$ Aus $\{\vee, \wedge, \perp, \top\}$ können wir $\neg$ nicht erreichen.

Also $\{\vee, \wedge, \perp, \top\}$ ist keine ausreichende Menge von Junktoren