

Uebungsblatt 03

Truong (Hoang Tung Truong, 3080216), Testfran (Minh Kien Nguyen, 3157116), Hamdash

Aufgabe 1

$F \rightarrow G$ ist unerfüllbar

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $\hat{\alpha}(F \rightarrow G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $\hat{\alpha}(\neg F \vee G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $!\hat{\alpha}(F) \mid \hat{\alpha}(G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $!\hat{\alpha}(F) = 0$ und $\hat{\alpha}(G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt $\hat{\alpha}(F) = 1$ und $\hat{\alpha}(G) = 0$

genau dann wenn für alle passenden Belegungen α gilt F ist allgemeingültig und G ist unerfüllbar

Aufgabe 2

1. $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}$
$$= (A_1 \rightarrow A_2) \wedge A_3 \rightarrow (\neg(A_1 \vee A_2) \vee \neg(A_1 \rightarrow A_2))$$
$$= (A_1 \rightarrow A_2) \wedge A_3 \rightarrow ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2))$$
$$= (A_1 \rightarrow A_2) \wedge A_3 \rightarrow \neg A_2$$
$$= \neg((\neg A_1 \vee A_2) \wedge A_3) \vee \neg A_2$$
$$= (A_1 \wedge \neg A_2 \vee \neg A_3) \vee \neg A_2$$
$$= (A_1 \wedge \neg A_2) \vee \neg A_2 \vee \neg A_3$$
$$= \neg A_2 \vee \neg A_3$$
2. $\alpha(G_1) = (A_1 \rightarrow A_2)_{[1/A_1, 0/A_2]} = 1 \rightarrow 0 = 0$
 $\alpha(G_2) = (A_1 \vee A_2)_{[1/A_1, 0/A_2]} = 1 \vee 0 = 1$
 $\alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]} = [A_1 \mapsto 0, A_2 \mapsto 1, A_3 \mapsto 1]$
3. $\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]})$
$$= \alpha(\neg A_2 \vee \neg A_3)$$
$$= !\alpha(A_2) \mid !\alpha(A_3)$$
$$=!0 \mid !1 = 1 \mid 0 = 1$$
4. $(\alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1)]})_{[A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}$
$$= (\alpha_{[A_1 \mapsto 0]})_{[A_2 \mapsto 1]}$$
$$= \alpha_{[A_1 \mapsto 0, A_2 \mapsto 1]}$$
$$= [A_1 \mapsto 0, A_2 \mapsto 1, A_3 \mapsto 1]$$

Aufgabe 3

1. Definition von $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}$ (Annahme: A_1, A_2 seien atomare Formeln)

- Ist F eine atomare Formel:
 Falls $F = A_1$ dann $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} := G_1$
 Falls $F = A_2$ dann $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} := G_2$
 Falls $F \neq A_1$ und $F \neq A_2$ dann $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} := F$
- Ist $F = \neg F_1$, dann $F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} := \neg F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]}$
- Ist $F = F_1 \odot F_2$ eine zusammengesetzte Formel ($\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \dots\}$) dann

$$F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]} = (F_1 \odot F_2)_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}$$

$$:= F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]} \odot F_{2[G_1/A_1, G_2/A_2]}$$

2. Beweis (Annahme: A_1, A_2 seien atomare Formeln)

- Ist F eine atomare Formel
 Falls $F = A_1$ dann

$$\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha(G_1)$$

$$= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1)]}(A_1)$$

$$= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$$
 Falls $F = A_2$ dann

$$\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha(G_2)$$

$$= \alpha_{[A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(A_2)$$

$$= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$$
 Falls $F \neq A_1$ und $F \neq A_2$ dann

$$\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha(F)$$

$$= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$$
- Ist $F = \neg F_1$, dann mit der Annahme **(1)**: $\alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_1)$ gilt:

$$\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \neg \alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]})$$

$$= \neg \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_1)$$

$$= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(\neg F_1)$$

$$= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F)$$
- Ist $F = F_1 \odot F_2$ eine zusammengesetzte Formeln ($\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \dots\}$) und mit der Annahme

$$\alpha(F_{2[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_2)$$
 und **(1)** gilt

$$\alpha(F_{[G_1/A_1, G_2/A_2]}) = \alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]} \odot F_{2[G_1/A_1, G_2/A_2]})$$

$$= \alpha(F_{1[G_1/A_1, G_2/A_2]}) \odot \alpha(F_{2[G_1/A_1, G_2/A_2]})$$

$$= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_1) \odot \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_2)$$

$$= \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F_1 \odot F_2) = \alpha_{[A_1 \mapsto \alpha(G_1), A_2 \mapsto \alpha(G_2)]}(F) \quad \square$$

Aufgabe 4

a. $ite(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$

- \neg Junktor: $\neg x = ite(x, \perp, \top) = (x \wedge \perp) \vee (\neg x \wedge \top) = (\perp \vee \neg x) = \neg x$
- \vee Junktor: $x \vee y = \top \wedge (x \vee y)$
 $= (x \vee \neg x) \wedge (x \vee y)$
 $= x \vee (\neg x \wedge y)$
 $= (x \wedge \top) \vee (\neg x \wedge y)$
 $= ite(x, \top, y)$
- \rightarrow Junktor: $x \rightarrow y = \neg x \vee y$
 $= \top \wedge (y \vee \neg x)$
 $= (x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg x)$
 $= (x \wedge y) \vee \neg x$
 $= (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \top)$
 $= ite(x, y, \top)$
- \leftrightarrow Junktor: $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
 $= ite(x, y, ite(y, \perp, \top))$

b. Behauptung: \vee, \wedge sind zweistellige monotone boolesche Funktionen

Beweis (durch Wahrheitstabelle): $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{B} : \forall i \in \{1, 2\} : a_i \leq b_i \Rightarrow f(a_1, a_2) \leq f(b_1, b_2)$, also

a_1	a_2	b_1	b_2	$a_1 \vee a_2$	$b_1 \vee b_2$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Aus der Eigenschaft, dass die Komposition von monotonen Funktionen wieder eine monotone Funktionen ist, können wir schließen, dass die Komposition von $\vee, \wedge, \perp, \top$ wieder eine monotone Funktion ist **(1)**

Behauptung : \neg ist keine monotone boolesche Funktion **(2)**

Beweis: (durch Wahrheitstabelle) Für \neg gilt $\forall a_1, b_1 \in \mathbb{B} : a_1 \leq b_1 \Rightarrow f(a_1) \geq f(b_1)$

a_1	b_1	$\neg a_1$	$\neg b_1$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	0	0

(1) (2) \Rightarrow Aus $\{\vee, \wedge, \perp, \top\}$ können wir \neg nicht erreichen.

Also $\{\vee, \wedge, \perp, \top\}$ ist keine ausreichende Menge von Junktoren