

\* Gegenannahme: zeigen wir, dass  $\{v, n, \perp, T\}$  ausreichende Menge von Junktoren ist:

Gegenbeispiel für  $T$ :

$$0 \leq 0 \rightarrow 0 = 1 = f(0) = f(0) = 1$$

$$0 \leq 1 \rightarrow 0 = 1 = f(0) = f(1) = 1$$

$$1 \leq 1 \rightarrow 0 = 1 = f(1) = f(1) = 1$$

Gegenbeispiel für  $\perp$ :

$$0 \leq 0 \rightarrow 0 = 0 = f(0) = f(0) = 0$$

$$0 \leq 1 \rightarrow 0 = 0 = f(0) = f(1) = 0$$

$$1 \leq 1 \rightarrow 0 = 0 = f(1) = f(1) = 0$$

wir sehen bereits für  $B \rightarrow \{0, 1\}$  mit den Junktoren  $T$  und  $\perp$ , dass beispielsweise die 0 nicht auf die 1 oder die 1 auf die 0 abgebildet werden können. Dies wäre nur mithilfe des Junktoren  $\neg$  möglich. Da  $\{v, n, \perp, T\}$  nicht den Junktoren  $\neg$  enthält, ist die Menge der Junktoren nicht ausreichend, da die Gegenannahme falsch ist, das folgt, dass die ursprüngliche Annahme  $\{v, n, \perp, T\}$  kein ausreichende Menge von Junktoren  $\Rightarrow$  deshalb wahr ist.  $\square$



# Aufgabe 4:

9) Für  $\wedge : x \wedge y := \text{ite}(x, y, \perp)$   
 $\text{ite}(x, y, \perp) := (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \perp)$   
 $\Leftrightarrow (x \wedge y) \vee \perp$   
 $\Leftrightarrow (x \vee \perp) \wedge (y \vee \perp)$   
 $\Leftrightarrow x \wedge y \quad \square$

Für  $\vee : x \vee y := \text{ite}(x, T, y)$   
 $\text{ite}(x, T, y) := (x \wedge T) \vee (\neg x \wedge y)$   
 $\Leftrightarrow x \vee (\neg x \wedge y)$   
 $\Leftrightarrow (x \vee \neg x) \wedge (x \vee y)$   
 $\Leftrightarrow (T \wedge x) \vee (T \wedge y)$   
 $\Leftrightarrow x \vee y \quad \square$

Für  $\Rightarrow : x \Rightarrow y := \text{ite}(x, y, T)$   
 $\text{ite}(x, y, T) := (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge T)$   
 $\Leftrightarrow (x \wedge y) \vee \neg x$   
 $\Leftrightarrow (x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg x)$   
 $\Leftrightarrow T \wedge (y \vee \neg x)$   
 $\Leftrightarrow (T \wedge y) \vee (T \wedge \neg x) \Leftrightarrow y \vee \neg x$   
 $\Leftrightarrow \neg x \vee y$   
 $\Leftrightarrow x \Rightarrow y \quad \square$

Für  $\neg : \neg x := \text{ite}(x, \perp, T)$   
 $\text{ite}(x, \perp, T) := (x \wedge \perp) \vee (\neg x \wedge T)$   
 $\Leftrightarrow \perp \vee \neg x$   
 $\Leftrightarrow \neg x \quad \square$

Für  $\Leftrightarrow : x \Leftrightarrow y := \text{ite}(\text{ite}(x, y, T), \text{ite}(y, x, T), \perp)$   
 $\text{ite}(\text{ite}(x, y, T), \text{ite}(y, x, T), \perp) := ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)) \vee (\neg(x \rightarrow y) \wedge \perp)$   
 $\Leftrightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)) \vee \perp$   
 $\Leftrightarrow ((x \rightarrow y) \vee \perp) \wedge ((y \rightarrow x) \vee \perp)$   
 $\Leftrightarrow (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \quad \square$