Uebungsblatt 09

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash

Aufgabe 1

a. $\exists c.(c > 0 \wedge \exists n_0(\forall n(n \geq n_0 \rightarrow |f(n)| \leq c.|g(n)|)))$

b. $\exists ! x.P(x) := x(P(x) \wedge \forall y.(P(y) \rightarrow x = y))$

$\forall x.(\exists y.(G(x, y) \wedge \forall z.(G(x, z) \rightarrow y = z)))$

Aufgabe 2

Wähle $U = (\mathbb{N}, \{+^{\mathbb{N}}\}, \{>^{\mathbb{N}}\})$

Behauptung: F_2 gilt in U aber F_1 nicht: ($U \vDash F_2$ und $U \nvDash F_1$)

In kurzformen dargestellt:

$F_1 = \forall y \in \mathbb{N}.\exists x \in \mathbb{N}.x + x > y$

$F_1 = \forall x \in \mathbb{N}.\forall y \in \mathbb{N}.x + x > y$

Beweis: Für jede Belegung α ist

$\hat{\alpha}(F_2) = min_{a \in \mathbb{N}} \hat{\alpha}_{[y \mapsto a]}(\exists x \in \mathbb{N}.x + x > y)$

Wir betrachten:

$\hat{\alpha}(\exists x \in \mathbb{N}.x + x > a)$ mit a beliebig in $\mathbb{N}$:

$\hat{\alpha}(\exists x \in \mathbb{N}.x + x > a)$

$= max_{a' \in \mathbb{N} \hat{\alpha}_{[x \mapsto a']}(x+x>a)} = 1^{\mathbb{B}}$

(da es sich immer ein $a' \in \mathbb{N}$ befindet, welches gröser als $\frac{a}{2}$ ist, also $2a' > a$)

$\Rightarrow \hat{\alpha}(F_2) = 1^{\mathbb{B}}$ für jede Belegung α

$\Leftrightarrow U \vDash_{\alpha} F_2$ für jede Belegung α

$\Leftrightarrow U \vDash F_2$

Sei α eine beliebige Belegung. Es gilt:

$\hat{\alpha}(F_1) = max_{a \in \mathbb{N}} \hat{\alpha}_{[x \mapsto a]}(\forall y \in \mathbb{N}.x + x > y)$

Wir betrachten $\hat{\alpha}(\forall y \in \mathbb{N}.a + a > y)$ mit a beliebig in $\mathbb{N}$

$\hat{\alpha}(\forall y \in \mathbb{N}.a + a > y)$

$= min_{a' \in \mathbb{N}} \hat{\alpha}_{[y \mapsto a']}(a + a > y)$

$= 0$

(wenn $a' = 3a$ bspw ist $\hat{\alpha}_{[y \mapsto 3a]}(a + a > y = 0^{\mathbb{B}})$)

$\Rightarrow Es existiere ine Belegung \alpha so dass \hat{\alpha}(F_1) = 0^{\mathbb{B}}$ (Tatsächlich gilt dies für jede Belegund α)

$\Leftrightarrow U \nvDash F_1$

Aufgabe 3

a. $\hat{\alpha}(F)$

$= \hat{\alpha}((((x.y)+1) \leq x+y \rightarrow x \leq y))$

$!\hat{\alpha}(((x.y)+1) \leq x+y) \| \hat{\alpha}(x \leq y)$ // Formelsemantik für $\rightarrow -Formel$

Es gilt: $\hat{\alpha}(((x.y)+1) \leq x+y)$

$\Leftrightarrow (\hat{\alpha}((x.y)+1), \hat{\alpha}(x+y)) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // Formelsemantik fü atomare Formel $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (\hat{\alpha}(x.y) +^{\mathbb{R}} \hat{\alpha}(1), \hat{\alpha}(x) +^{\mathbb{R}} \hat{\alpha}(y)) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // Termsemantik fü Funktionzeichnen

$\Leftrightarrow ((\hat{\alpha}(x).^{mathbbR}\alpha(y)) +^{\mathbb{R}} 1^{mathbbR}, \alpha(x) +^{mathbbR} \hat{\alpha}(y)) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // Termsemantik fü Funktionzeichnen

$((\alpha(x).^{\mathbb{R}}\alpha(y)) +^{mathbbR} 1^{\mathbb{R}}, \alpha(x) +^{\mathbb{R}} \alpha(y)) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // Termsemantik für Variablen und Konstanten

$\Leftrightarrow ((3.2)+1, 3+2) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // $\alpha(x) = 3, \alpha(y) = 2$

$\Leftrightarrow (7,5) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // Berechnung der Werte Aber $(7,5) \notin \leq^{\mathbb{R}}$ $(da 7 > 5)$

$\Rightarrow \hat{\alpha}(((x.y)+1) \leq x+y) = 0^{\mathbb{B}}$

Es gilt $\hat{\alpha}(x \leq y) \Leftrightarrow (\hat{\alpha}(x), \hat{\alpha}(y)) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // Formelsemantik für atomare Folrmeln mit Relation

$\Leftrightarrow (\alpha(x), \alpha(y)) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // Termsemantik fü Variablen

$\Leftrightarrow (3,2) \in \leq^{\mathbb{R}}$ // $\alpha(x) = 3, \alpha(y) = 2$

Aber $(3,2) \notin \leq^{\mathbb{R}}$ (da $3 > 2$)

$\Rightarrow \hat{\alpha}(x \leq y) = 0^{\mathbb{B}}$

$\Rightarrow \hat{\alpha}(F) = !0^{\mathbb{B}} \| 0^{\mathbb{B}} = 1^{\mathbb{B}} \| 0^{\mathbb{B}} = 1^{\mathbb{B}}$

b. $F = (((x \wedge y) \vee 1) \leq x \vee y \rightarrow x \leq y)$

$= (1 \leq x \vee y \rightarrow x \leq y)$

$b \vDash_{\alpha} F$ gdw. $\hat{\alpha}(F) = 1^{\mathbb{B}}$

$\hat{\alpha}(F) = \hat{\alpha}((1 \leq x \vee y \rightarrow x \leq y))$

$= !\hat{\alpha}(1 \leq x \vee y) \| \hat{\alpha}(x \leq y)$

Es gilt $\hat{\alpha}(1 \leq x \vee y)$

$\Leftrightarrow (\hat{\alpha}(1), \hat{\alpha}(x \vee y)) \in \leq^{\mathbb{B}}$

$\Leftrightarrow (\hat{\alpha}(1), \hat{\alpha}(x) \| \hat{\alpha}(y)) \in \leq^{\mathbb{B}}$

$\Leftrightarrow (1^{\mathbb{B}}, \hat{\alpha}(x) \| \hat{\alpha}(y)) \in \leq^{\mathbb{B}}$

Es gilt $\hat{\alpha}(x \leq y)$

$\Leftrightarrow (\hat{\alpha}(x), \hat{\alpha}(y)) \in \leq^{\mathbb{B}}$

$\Leftrightarrow (\alpha(x), \alpha(y)) \in \leq^{\mathbb{B}}$

Fallunterscheidug: (um $\hat{\alpha}(F) = 1^{\mathbb{B}}$ erreichen zu können)

1. Fall: $\hat{\alpha}(1 \leq x \vee y) = 0^{\mathbb{B}}$ und $\hat{\alpha}(x \leq y) = 0^{\mathbb{B}}$ (dabei gilt $\hat{\alpha}(F) = !0 \| 0 = 1 \| 0 = 1$)

$\hat{\alpha}(1 \leq x \vee y) = 0^{\mathbb{B}}$

gdw $\alpha(x) \| \alpha(y) = 0^{\mathbb{B}}$ (da $(1,0) \notin \leq^{\mathbb{B}}$)

gdw $\alpha(x) = 0^{\mathbb{B}}$ und $\alpha(y) = 0^{\mathbb{B}}$ **(*)**

$\hat{\alpha}(x \leq y) = 0^{\mathbb{B}}$

gdw $\alpha(x) = 1^{\mathbb{B}} und \alpha(y) = 0^{\mathbb{B}}$

da $\alpha(x)$ nur einen Wahrheitswert aufnehmen kannst, verwerfe Fall 1

Fall 2: $\hat{\alpha}(1 \leq x \vee y) = 1^{\mathbb{B}}$ und $\hat{\alpha}(x \leq y) = 1^{\mathbb{B}}$ (dabei gilt $\hat{\alpha}(F) = !1 \| 1 = 0 \| 1 = 1$)

$\hat{\alpha}(1 \leq x \vee y) = 1^{\mathbb{B}}$

gdw $\alpha(x) \| \alpha(y) = 1^{\mathbb{B}}$

gdw $\alpha(x) = 1^{\mathbb{B}}$ oder $\alpha(y) = 1^{\mathbb{B}}$

$\hat{\alpha}(x \leq y) = 1^{\mathbb{B}}$

gdw $\alpha(x) = 0^{\mathbb{B}}$ oder $\alpha(y) = 1^{\mathbb{B}}$ **(**)**

Also Fall 2 passiert gdw $\alpha(y) = 1^{\mathbb{B}}$

Fall 3 $\hat{\alpha}(1 \leq x \vee y) = 0^{\mathbb{B}}$ und $\hat{\alpha}(x \leq y) = 1^{\mathbb{B}}$ (dabei gilt $\hat{\alpha}(F) = !0 \| 1 = 1 \| 1 = 1$) aus **(*)** und **(**)**

Die gesuchten Belegungen sind also

α_1 mit $\alpha_1(x) = 0^{\mathbb{B}}, \alpha_1(y) = 1^{\mathbb{B}}$

α_2 mit $\alpha_2(x) = 0^{\mathbb{B}}, \alpha_2(y) = 0^{\mathbb{B}}$

α_3 mit $\alpha_3(x) = 1^{\mathbb{B}}, \alpha_3(y) = 1^{\mathbb{B}}$

Aufgabe 4

a. $\hat{\alpha}(\exists x.x + x = y)$

$= max_{a \in \mathbb{N}} \hat{\alpha}_{[x \mapsto a]}(x + x = y)$ //Formelsemantik für Formel mit quantor $\exists$

$= max_{a \in \mathbb{N}} \hat{\alpha}(a + a = y)$ // Modifikation von Belegung $a \in \mathbb{N}$

Es gilt:

$\hat{\alpha}(a + a = y) \Leftrightarrow (\hat{\alpha}(a + a), \hat{\alpha}(y)) \in =^{\mathbb{N}}$ // Formelsemantik fü atomare Formel mit Relation

$\Leftrightarrow (\alpha(a) +^{\mathbb{N}} \alpha(a), \alpha(y)) \in =^{\mathbb{N}}$ // Termsemantik fü Variablen und Konstanten

$\Leftrightarrow (a + a, 2) \in =^{\mathbb{N}}$ // $\alpha(y) = 2$

Für $a = 1 \in \mathbb{N}$ ist $(a + a, 2) \in =^{\mathbb{N}}$ wahr

$\Rightarrow \hat{\alpha}(\exists x.x + x = y) = 1^{\mathbb{B}}$

b. Sei $U = (A, \mathcal{F}, \mathcal{R})$

$U \vDash_{\alpha} \exists x. \exists y.F)$

$\Leftrightarrow$ Für mindesten ein $a \in A$ gilt

$U \vDash_{\alpha[x \mapsto a]} (\exists y.F)$

$\Leftrightarrow$ Für mindestens ein $a \in A$ und ein $a' \in A$ gilt

$U \vDash_{\alpha[x \mapsto a, y \mapsto a']} (F)$

$\Leftrightarrow$ Für mindestens ein $a \in A$ gilt

$U \vDash_{\alpha[y \mapsto a']} (\exists x.F)$

$\Leftrightarrow U \vDash \exists y.\exists x.F$

c. Sei $U = (A, \mathcal{F}, \mathcal{R})$

$U \vDash_{\alpha} \exists x.\forall x.F$

$\Leftrightarrow$ Für mindestens ein $a \in A$ gilt

$U \vDash_{\alpha[x \mapsto a]} (\forall x.F)$

$\Leftrightarrow$ Für mindestens ein $a \in A$ gilt

$\hat{\alpha}_{[x \mapsto a]}(\forall x.F) = 1^{\mathbb{B}}$

$\Leftrightarrow \hat{\alpha}(\forall x.F) = 1^{\mathbb{B}} \Leftrightarrow U \vDash_{\alpha} \forall x.F$ (da Belegungen nur von freien Variablen abhängig sind)