

Uebungsblatt 05

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash

Aufgabe 1

- $((a^+ + b^+ a^*)(b + bba^+)^*)^?$
- $a^*(ba^* + bb^+ a)^*$
- $(b^* ab^* ab^* ab^* ab^* ab^*)^*$

Aufgabe 2

- Behauptung: L_1 ist nicht regulär, also

$L_1 = \{a^m \mid m > 0 \text{ ist ein Quadratzahl}\}$ ist nicht durch einen deterministischen endlichen Automaten erkennbar.

- Angenommen, L_1 wäre regulär. Dann gäbe es ein k wie im Pumping Lemma. Jeder k -große ($|w| \geq k$) Wort $w \in L_1$ hätte im k -vorderen Bereich ($|xy| \leq k$) ein nicht leeres Teilwort y , das sich "aufpumpen" lässt.
 - Mit dem k von oben betrachten wir jetzt das Wort $w = (a^k)^k$
- Es ist in L_1
 - Es ist k -gross ($|w| = k^2 \geq k$)
- Es muss im k -vorderen Bereich ein Teilwort geben, das sich aufpumpen lässt. Aber wenn wir einen nichtleeren Teil y aufpumpen bekommen wir ein neues Wort w' , dessen Länge $|w'|$ keine Quadratzahl ist.

Genauer zu sagen: $|w| = k^2$

Das nächste Wort mit der kleinsten Länge, die aber noch größer als k^2 ist, ist $w_0 = (a^{(k+1)})^{k+1}$ mit $|w_0| = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

Da $0 < |y| \leq k$ gilt $|w'| = k^2 + |y| \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1$, also $w' \notin L_1$. Widerspruch!

Es gibt daher keinen endlichen Automaten A mit $L_1 = L(A)$.

Daraus folgt: L_1 ist nicht regulär. \square

- $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$

Äquivalenzklassen von $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$

- $[e] = \{e\}, [a] = \{a\}, [aa] = \{aa\}, \dots, [a^k] = \{a^k\} (k \in \mathbb{N}), \dots$
- $[ab] = \{ab, a^2 b^2, \dots\}, [a^2 b] = \{a^2 b, a^3 b^2, a^4 b^3, \dots\}, [a^3 b] = \{a^3 b, a^4 b^2, a^5 b^3, \dots\}, \dots, [a^k b] = \{a^{k+i-1} b^i \mid i \geq 1\} (k \in \mathbb{N}), \dots$
- $\Sigma^* - L_2 = \{bx, a^n b^m, xbay \mid x, y \in \Sigma^* \wedge n, m \in \mathbb{N} \wedge m > n\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, also diese Äquivalenzklasse enthält alle Wörter, die nicht in L_2 sind.

Aufgabe 3

a.

- Automat A hat keine nicht erreichbaren Zustände.
- $\Sigma_A = \{a, b\}$, $F = \{q_2, q_5, q_6\}$, $Q - F = \{q_0, q_1, q_3, q_4\}$
- Wir beginnen damit, in der Tabelle die Paare zu markieren, bei denen einer in F ist und der andere nicht.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	\diagdown		x			x	x
q_1	\diagdown	\diagdown	x			x	x
q_2	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x		
q_3	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown		x	x
q_4	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x
q_5	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	
q_6	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown

- Als nächstes wählen wir $e := a \in \Sigma_A$ und markieren alle (q_i, q_j) ($i < j$) für die $(\delta(q_i, e), \delta(q_j, e))$ schon markiert ist

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	\diagdown		x			x	x
q_1	\diagdown	\diagdown	x			x	x
q_2	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x	x	x
q_3	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown		x	x
q_4	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x
q_5	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	
q_6	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown

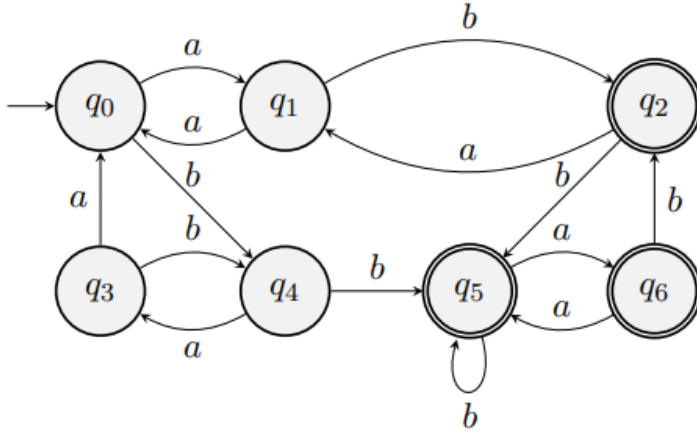
- Wir wiederholen das gleiche mit $e := b$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	\diagdown	x	x		x	x	x
q_1	\diagdown	\diagdown	x	x	x	x	x
q_2	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x	x	x
q_3	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x	x
q_4	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x
q_5	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x
q_6	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown

- Erneute Versuche mit $e := a$ und $e := b$ bringen eine neue Tabelle, in der alle Feldern markiert sind.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	\diagdown	x	x	x	x	x	x
q_1	\diagdown	\diagdown	x	x	x	x	x
q_2	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x	x	x
q_3	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x	x
q_4	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x	x
q_5	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	x
q_6	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown	\diagdown

- Die nicht markierten Position in der oberen tabelle zeigen, welche Zustände äquivalent sind (Es gibt aber keine). Hier bestehen die Äquivalenzklassen von \sim aus $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_4\}, \{q_5\}, \{q_6\}$. Das Automat A ist schon minimal.



b. Z.z: Der Minimalautomat A/\sim besitzt eine minimale Anzahl an Zuständen

- Sei L die Sprache, die der Automat A erkennt.

Nach Nerode-Lemma, da A ein DFA ist, gibt es eine minimale endliche Menge von n Worten, die paarweise L-trennbar sind, und daraus folgt, jeder Automat, der L erkennt, hat mindesten n Zustände (inklusive A/\sim)

- n ist aber auch die Anzahl der Äquivalenzklassen ($|R_L|$ - der Index der Sprache L) von L, denn diese n Worte sind paarweise L-trennbar. Zwei Worte $u, v \in \Sigma^*$ sind in derselben Äquivalenzklasse von L ($u R_L v$) bzgl. L-Trennbarkeit, genau dann wenn $\forall w \in \Sigma^* : (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L)$
- Der Minimalautomat A/\sim wird als der Faktorautomat ohne die nicht erreichbaren Zustände

$A/\sim := (Q/\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0]_\sim, F_\sim)$ mit $Q/\sim := \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$ aus $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

definiert, indem man verhaltensgleiche Zustände identifiziert. Da A/\sim auch L erkennt, und aus der Eigenschaft: in A/\sim sind je zwei verschiedene Zustände trennbar, muss es gelten: die Anzahl der Zuständen in A/\sim ist gleich der Anzahl der Äquivalenzklassen von L, also $|Q/\sim| = n$. D.h der Minimalautomat A/\sim besitzt eine minimale Anzahl an Zuständen.

Aufgabe 4

Z.z: $\forall w \in \Sigma^* : \delta_{A \times B}^*((p, q), w) = (\delta_A^*(p, w), \delta_B^*(q, w))$

Induktionbeweis:

IA: $w = \epsilon$

$LHS = \delta_{A \times B}^*((p, q), \epsilon) = (p, q)$ // Ausdehnung von δ auf Worte, 1. Fall in Definition von δ^*

$RHS = (\delta_A^*(p, \epsilon), \delta_B^*(q, \epsilon)) = (p, q)$ // 1. Fall in Definition von δ^*

IV: $\forall u \in \Sigma^* : \delta_{A \times B}^*((p, q), u) = (\delta_A^*(p, u), \delta_B^*(q, u))$

IS: Z.z: $\forall a \in \Sigma, \forall u \in \Sigma^* : \delta_{A \times B}^*((p, q), a.u) = (\delta_A^*(p, a.u), \delta_B^*(q, a.u))$

$LHS = \delta_{A \times B}^*((p, q), a.u)$

$= \delta_{A \times B}^*(\delta_{A \times B}((p, q), a), u)$ // 2. Fall in Definition von δ^*

$= \delta_{A \times B}^*((\delta_A(p, a), \delta_B(q, a)), u)$ // Definition von $\delta_{A \times B}((p, q), a)$ Folie 43 Kap 4

$= (\delta_A^*(\delta_A(p, a), u), (\delta_B^*(\delta_B(q, a), u))$ // IV

$= (\delta_A^*(p, a.u), \delta_B^*(p, a.u))$ // 2. Fall in Definition von δ^*

$= RHS.$

Also $\forall w \in \Sigma^* : \delta_{A \times B}^*((p, q), w) = (\delta_A^*(p, w), \delta_B^*(q, w)) \quad \square$