Uebungsblatt 05

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash

Aufgabe 1

a. $((a^+ + b^+a^*)(b + bba^+)^*)?$
b. $a^*(ba^* + bb^+a)^*$
c. $(b^*ab^*ab^*ab^*ab^*ab^*)^*$

Aufgabe 2

a. Behauptung: L_1 ist nicht regulär, also

$L_1 = \{a^m \mid m > 0$ ist ein Quadratzahl $\}$ ist nicht durch einen determinitischen endlichen Automaten erkennbar.

- Angenommen, L_1 wäre regulär. Dann gäbe es ein k wie im Pumping Lemma. Jeder k-große ($|w| \geq k$) Wort $w \in L_1$ hätte im k-vorderen Bereich ($|xy| \leq k$) ein nicht leeres Teilwort y, das sich "aufpumpen" lässt.
- Mit dem k von oben betrachten wir jetzt das Wort $w = (a^k)^k$

1. Es ist in L_1
2. Es ist k-gross ($|w| = k^2 \geq k$)

- Es musst im k-vorderen Bereich ein Teilwort geben, das sich aufpumpen lässt. Aber wenn wir einen nichtleeren Teil y aufpumpen bekommen wir ein neues Wort $w^{'}$, dessen Länge $|w^{'}|$ keine Quadratzahl ist.

Genauer zu sagen: $|w| = k^2$

Das näschste Wort mit der kleinsten Länge, die aber noch größer als k^2 ist, ist $w_0 = (a^{(k+1)})^{k+1}$ mit $|w_0| = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

Da $0 < |y| \leq k$ gilt $|w^{'}| = k^2 + |y| \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1$, also $w^{'} \notin L_1$. Widerspruch!

Es gibt daher keinen endlichen Automaten A mit $L_1 = L(A)$.

Daraus folgt: L_1 ist nicht regulär. $\square$

b. $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$

Äquivalenzklassen von $L_2 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$

- $[\epsilon] = \{\epsilon\}, [a] = \{a\}, [aa] = \{aa\}, ..., [a^k] = \{a^k\}(k \in \mathbb{N}), ...$
- $[ab] = \{ab, a^2b^2, ...\}, [a^2b] = \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, ...\}, [a^3b] = \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, ...\}, ...,$
  $[a^kb] = \{a^{k+i-1}b^i | i \geq 1\}(k \in \mathbb{N}), ...$
- $\Sigma^* - L_2 = \{bx, a^nb^m, xbay \mid x, y \in \Sigma^* \wedge n, m \in \mathbb{N} \wedge m > n\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, also diese Äquivalenzklasse enthält alle Wörte, die nicht in L_2 sind.

Aufgabe 3

a.

- Automat A hat keine nicht erreichbaren Zustände.
- $\Sigma_A = \{a, b\}, F = \{q_2, q_5, q_6\}, Q - F = \{q_0, q_1, q_3, q_4\}$
- Wir beginnen damit, in der Tabelle die Paare zu markieren, bei denen einer in F ist und der andere nicht.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	\		x			x	x
q_1	\	\	x			x	x
q_2	\	\	\	x	x		
q_3	\	\	\	\		x	x
q_4	\	\	\	\	\	x	x
q_5	\	\	\	\	\	\	
q_6	\	\	\	\	\	\	\

- Als nächstes wählen wir $e := a \in \Sigma_A$ und markieren alle (q_i, q_j) $(i < j)$ für die $(\delta(q_i, e), \delta(q_j, e))$ schon markiert ist

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	\		x			x	x
q_1	\	\	x			x	x
q_2	\	\	\	x	x	x	x
q_3	\	\	\	\		x	x
q_4	\	\	\	\	\	x	x
q_5	\	\	\	\	\	\	
q_6	\	\	\	\	\	\	\

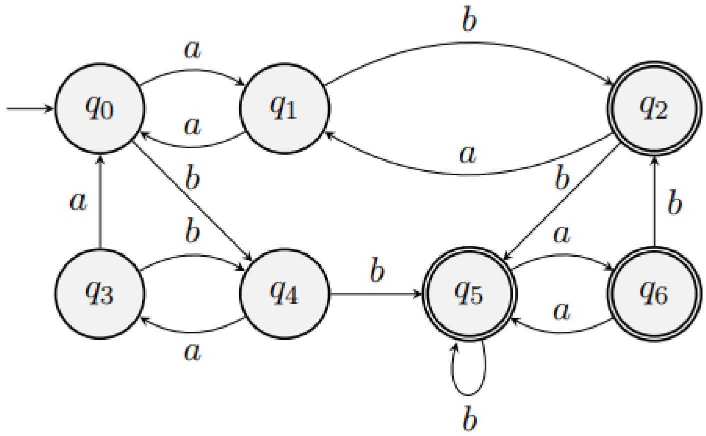
- Wir wiederholen das gleiche mit $e := b$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	\	x	x		x	x	x
q_1	\	\	x	x	x	x	x
q_2	\	\	\	x	x	x	x
q_3	\	\	\	\	x	x	x
q_4	\	\	\	\	\	x	x
q_5	\	\	\	\	\	\	x
q_6	\	\	\	\	\	\	\

- Erneute Versuche mit $e := a$ und $e := b$ bringen eine neue Tabelle, in der alle Feldern markiert sind.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	\	x	x	x	x	x	x
q_1	\	\	x	x	x	x	x
q_2	\	\	\	x	x	x	x
q_3	\	\	\	\	x	x	x
q_4	\	\	\	\	\	x	x
q_5	\	\	\	\	\	\	x
q_6	\	\	\	\	\	\	\

- Die nicht markierten Position in der oberen tabelle zeigen, welche Zustände äquivalent sind (Es gibt aber keine). Hier bestehen die Äquivalenzklassen von $\sim$ aus $\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_4\}, \{q_5\}, \{q_6\}$. Das Automat A ist schon minimal.



b. Z.z: Der Minimalautomat $A/\sim$ besitzt eine minimale Anzahl an Zuständen

- Sei L die Sprache, die der Automat A erkennt.

  Nach Nerode-Lemma, da A ein DFA ist, gibt es eine minimale endliche Menge von n Worten, die paarweise L-trennbar sind, und daraus folgt, jeder Automat, der L erkennt, hat mindesten n Zustände (inklusiv $A/\sim$)

- n ist aber auch die Anzahl der Äquivalenzklassen($|R_L|$ - der Index der Sprache L) von L, denn diese n Worte sind paarweise L-trennbar. Zwei Worte $u, v \in \Sigma^*$ sind in derselben Äquivalenzklasse von L (u R_L v) bzgl. L-Trennbarkeit, genau dann wenn $\forall w \in \Sigma^* : (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L)$

- Der Minimalautomat $A/\sim$ wird als der Faktorautomat ohne die nicht erreichbaren Zustände

  $A/\sim := (Q/\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0]_\sim, F_\sim)$ mit $Q/\sim := \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$ aus $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

  definiert, indem man verhaltensgleiche Zustände identifiziert. **Da:**

  - $A/\sim$ **auch L erkennt** ($\forall w \in L : \delta^*_\sim([q_0]_\sim, w) \in F_\sim$),
  - **Und aus der Eigenschaft: in $A/\sim$ sind je zwei verschiedene Zustände trennbar** ($\forall p, q \in Q/\sim, p \neq q : \exists w \in \Sigma^* : (\delta^*_\sim(p, w) \in F_\sim \wedge \delta^*_\sim(q, w) \notin F_\sim) \vee (\delta^*_\sim(p, w) \notin F_\sim \wedge \delta^*_\sim(q, w) \in F_\sim)$),
  - **Und aus der dieser Eigenschaft entsprechenden Definition von L-Trennbarkeit** (zwei beliebige Worte $u, v \in \Sigma^*$ heißen L-trennbar und sind daher in unterschiedlichen Äquivalenzklassen von L, genau dann wenn $\exists w \in \Sigma^* : (uw \in L \wedge vw \notin L) \vee (uv \notin L \wedge vw \in L)$), genau dann wenn $(\delta^*_\sim([q_0], uw) \in F_\sim \wedge \delta^*_\sim([q_0], vw) \notin F_\sim) \vee (\delta^*_\sim([q_0], uw) \notin F_\sim \wedge \delta^*_\sim([q_0], vw) \in F_\sim)$
  - **muss es gelten: die Anzahl der Zuständen in $A/\sim$ ist gleich der Anzahl der Äquivalenzklassen von L, also $|Q/\sim| = n$. D.h der Minimalautomat $A/\sim$ besitzt eine minimale Anzahl an Zuständen.**

Aufgabe 4

Z.z: $\forall w \in \Sigma^* : \delta^*_{A\times B}((p,q),w) = (\delta^*_A(p,w), \delta^*_B(q,w))$

Induktionbeweis:

IA: $w = \epsilon$

$LHS = \delta^*_{A\times B}((p,q),\epsilon) = (p,q)$ //Ausdehnung von δ auf Worte, 1. Fall in Definition von δ^*

$RHS = (\delta^*_A(p,\epsilon), \delta^*_B(q,\epsilon)) = (p,q)$ // 1. Fall in Definition von δ^*

IV: $\forall u \in \Sigma^* : \delta^*_{A\times B}((p,q),u) = (\delta^*_A(p,u), \delta^*_B(q,u))$

IS: Z.z: $\forall a \in \Sigma, \forall u \in \Sigma^*$: $\delta^*_{A\times B}((p,q),a.u) = (\delta^*_A(p,a.u), \delta^*_B(q,a.u))$

$LHS = \delta^*_{A\times B}((p,q),a.u)$

$= \delta^*_{A\times B}(\delta_{A\times B}((p,q),a),u)$ // 2. Fall in Definition von δ^*

$= \delta^*_{A\times B}((\delta_A(p,a), \delta_B(q,a)),u)$ // Definition von $\delta_{A\times B}((p,q),a)$ Folie 43 Kap 4

$= (\delta^*_A(\delta_A(p,a),u), (\delta^*_B(\delta_B(q,a),u)$ // IV

$= (\delta^*_A(p,a.u), \delta^*_B(p,a.u))$ // 2. Fall in Definition von δ^*

$= RHS.$

Also $\forall w \in \Sigma^* : \delta^*_{A\times B}((p,q),w) = (\delta^*_A(p,w), \delta^*_B(q,w))$ $\square$