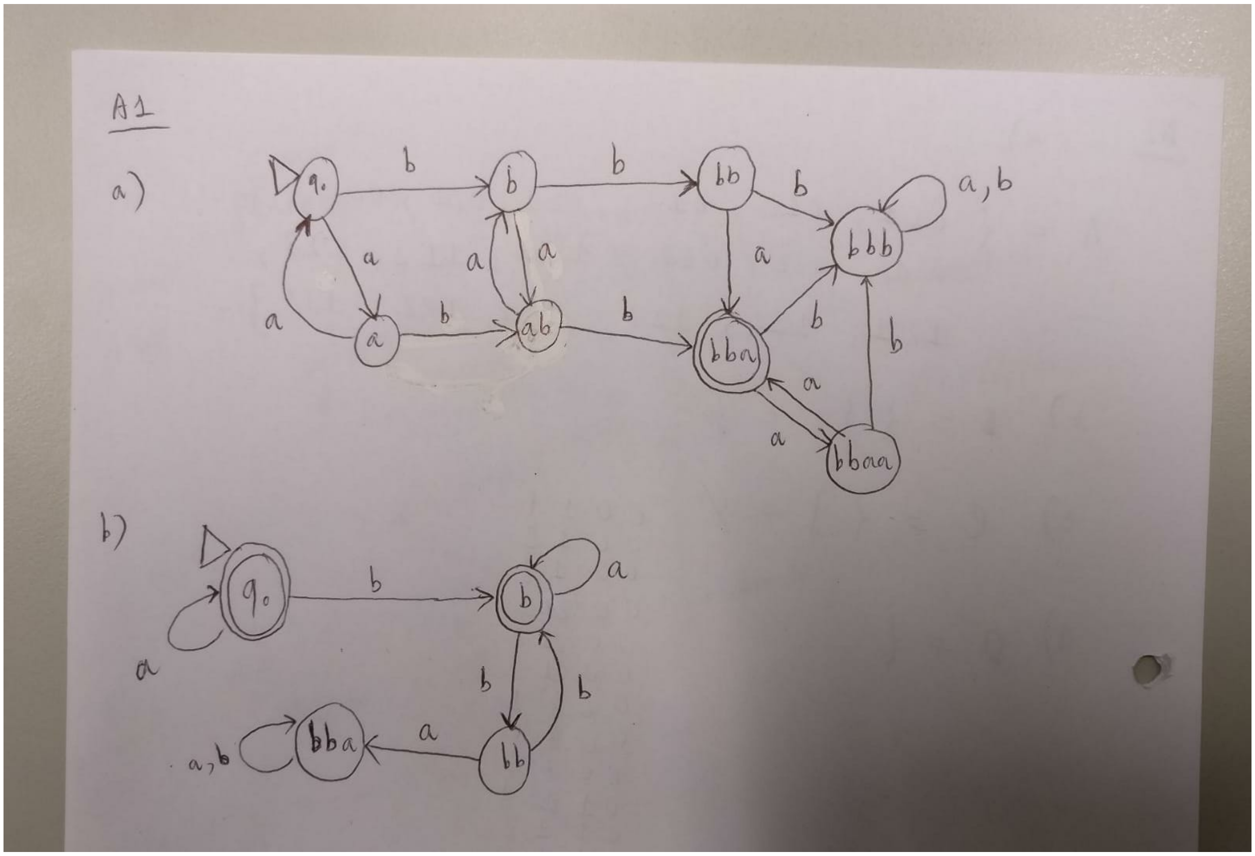
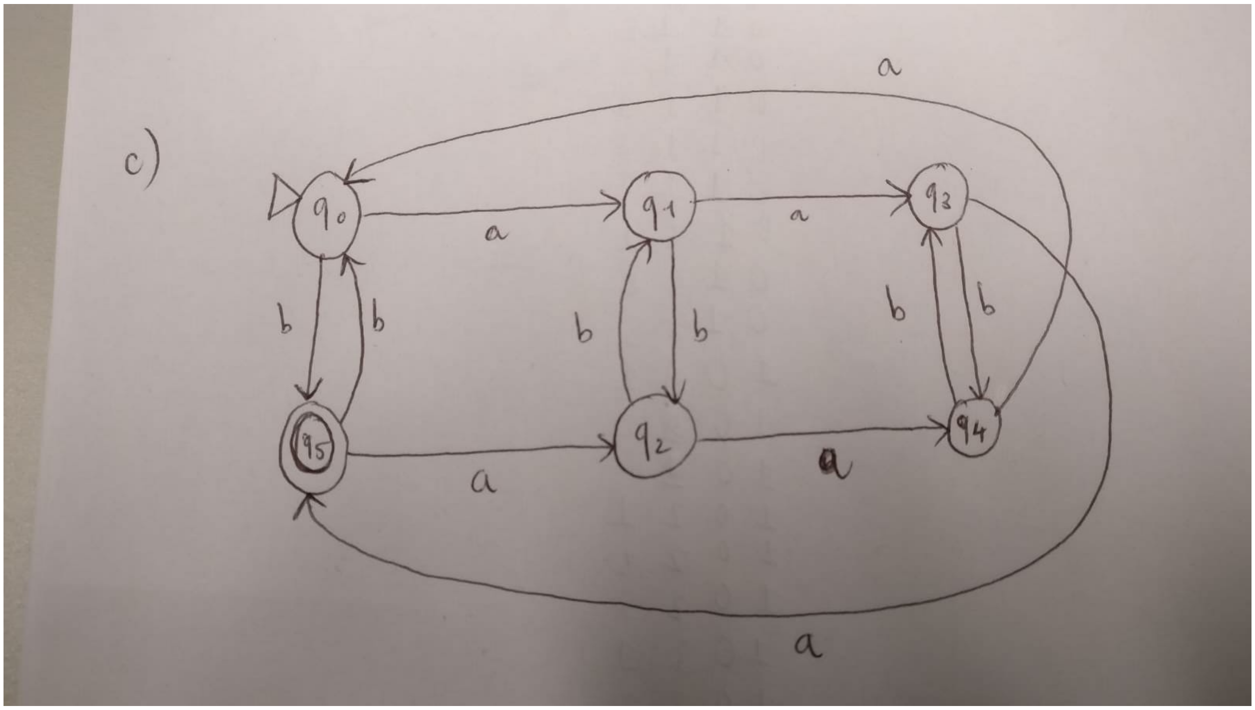
Uebungsblatt 04

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash

Aufgabe 1





Aufgabe 2

a. A = { 011, 012, 013, 021, 022, 023, 031, 032, 033, 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133}

b. B = { } = ∅, da die Länge der Wörte aus L_2 gerade ist.

c. C = { } = ∅, da die Länge der Wörte aus L_1 ungerade ist.

d. D = {

0011, 0012, 0013, 0021, 0022, 0023, 0031, 0032, 0033,

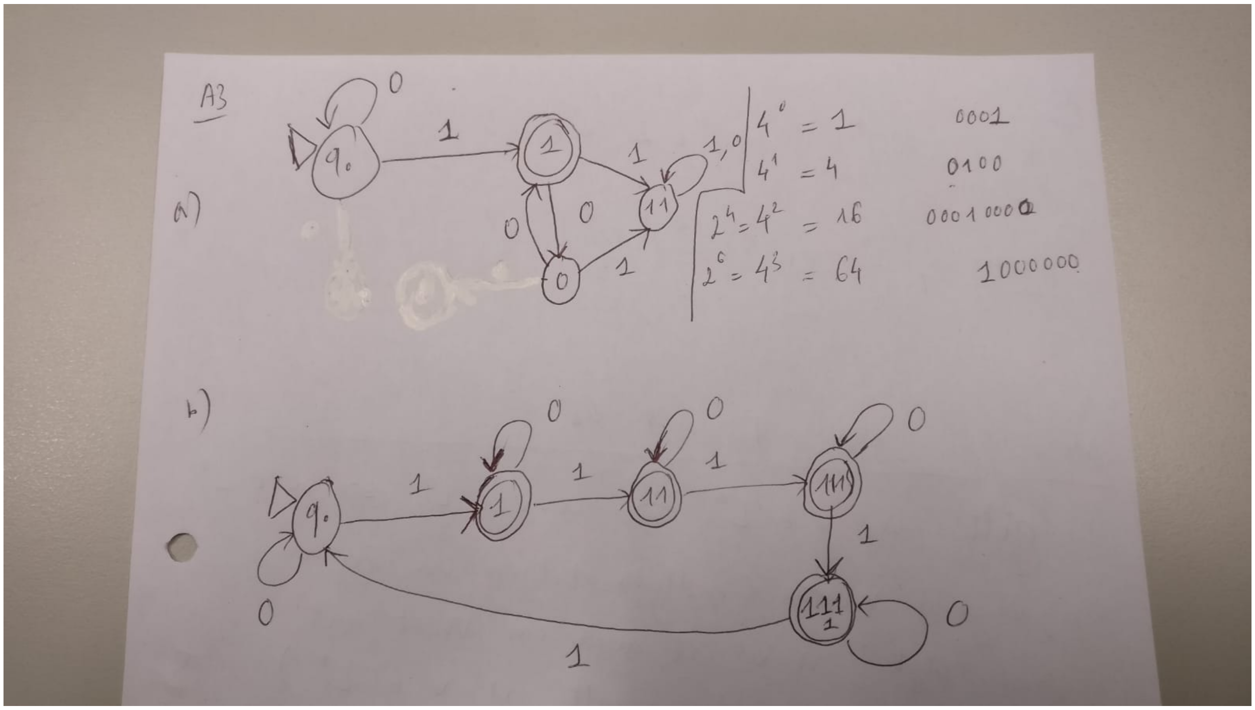
0111, 0112, 0113, 0121, 0122, 0123, 0131, 0132, 0133,

1011, 1012, 1013, 1021, 1022, 1023, 1031, 1032, 1033,

1111, 1112, 1113, 1121, 1122, 1123, 1131, 1132, 1133,

}

Aufgabe 3



Aufgabe 4

a. Sei w beliebig in L

$L^* = \cup_{n\geq 0} L^n$

$= \{\epsilon\} \cup L \cup L^2 \cup ...$

$\Rightarrow w \in L^*$

Also $\forall w \in L : w \in L^* \Leftrightarrow L \subseteq L^* \square$

b. $L^* := \cup_{n\geq 0} L$

$= \{\epsilon\} \cup L^1 \cup L^2 \cup ...$

$\Rightarrow \epsilon \in L^* \square$

c. $L^* \circ L^* := \{u \circ v \mid u, v \in L^*\}$

Aus Definition, sei $w = u \circ v$ beliebig in $L^* \circ L^*$ mit $u, v \in L^*$

Es gilt $u, v \in L^* \Rightarrow u \circ v \in L^* \Leftrightarrow w \in L^*$

(u, v sind Worte (endliche Folgen von Zeichen). Daraus folgt: $u \circ v$ ist auch ein Wort mit endlichen Länge und es gilt $u \circ v \in L^*$)

Also $\forall w \in L^* \circ L^* : w \in L^*$, d.h $L^* \circ L^* \subseteq L^*$

d. Zu zeigen: $L^* \subseteq L^{'}$, d.h $\cup_{n\geq 0} L^n \subseteq L^{'}$

Induktionsbeweis:

IA: $n = 0$

$LHS = L^0 = \{\epsilon\} \subseteq L^{'} = RHS$ (da $\epsilon \in L^{'}$)

IV: $\cup_{0 \leq i \leq n} L^i \subseteq L^{'}$

IS: Zu zeigen: $\cup_{0 \leq i \leq (n+1)} L^i \subseteq L^{'}$

$\cup_{0 \leq i \leq (n+1)} L^i = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup ... \cup L^n \cup L^{n+1}$

$= \cup_{0 \leq i \leq n} L^i \cup L^{n+1}$

$\subseteq (L^{'} \cup L^{n+1})$

Da $L \subseteq L^{'}$ und $\circ$ ist monoton, gilt $L^{n+1} \subseteq (L^{'})^{n+1} \subseteq L^{'}$ (da $L^{'} \circ L^{'} \subseteq L^{'}$)

Also: $\cup_{0 \leq i \leq (n+1)} L^i \subseteq (L^{'} \cup L^{n+1}) \subseteq (L^{'} \cup L^{'}) = L^{'}$, d.h $\cup_{0 \leq i \leq (n+1)} L^i \subseteq L^{'} \square$

e. Behauptung der Gesamtaufgabe:

Für $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:

1. "L^* umfasst L": $L \subseteq L^*$ (gezeigt in Teilaufgabe a)

2. "L^* enthält ϵ": $\epsilon \in L^*$ (gezeigt in Teilaufgabe b)

3. "Abgeschlossenheit unter Konkantenation":

$L^* \circ L^* \subseteq L^*$ (gezeigt in Teilaufgabe c)

4. "L^* ist die kleinste Sprache, die **(1)**, **(2)**, **(3)** erfüllt", also für alle Sprachen $L^{'}$, die **(1)**,**(2)**,**(3)** erfüllen gilt $L^* \subseteq L^{'}$

$\forall L^{'} \mid L \subseteq L^{'} \wedge \epsilon \in L^{'} \wedge L^{'} \circ L^{'} \subseteq L^{'}$ gilt $L^* \subseteq L^{'}$ (gezeigt in Teilaufgabe d)