Uebungsblatt 07

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash

Aufgabe 1

a. Behauptung: $\forall e \in REG(\Sigma)\ \exists\ e^r \in REG(\Sigma)$: $L(e^r) = L(e)^r$

Induktionsbeweis

IA:

Falls $e \equiv \emptyset$: Setze $e^r \equiv \emptyset$. Es gilt:

$L(e^r) = L(\emptyset) = \{\} = L(\emptyset)^r = L(e)^r$

Falls $e \equiv \epsilon$: Setze $e^r \equiv \epsilon$. Es gilt:

$L(e^r) = L(\epsilon) = \{\epsilon\} = \{\epsilon^r\} = L(\epsilon)^r = L(e)^r$

(da $\epsilon^r = \epsilon$ aus der ersten Definition von Reversewort)

Falls $e \equiv a$ ($a \in \Sigma$ beliebig). Setze $e^r = a$. Es gilt:

$L(e^r) = L(a) = \{a\} = \{a^r\} = L(a)^r = L(e)^r$

(da $a^r = a$ für jedes $a \in \Sigma$).

IV:

Seien $e, f \in REG(\Sigma)$ sodass $\exists\ e^r, f^r \in REG(\Sigma) : L(e^r) \equiv L(e)^r$ und $L(f^r) = L(f)^r$

IS:

Fall 1: Alternative

Sei $g = e + f$, also $g \in REG(\Sigma)$. Setze $g^r = e^r + f^r$ (daher ist $g^r \in REG(\Sigma)$). Es gilt:

$L(g)^r = L(e+f)^r = \{w^r : w \in L(e) \cup L(f)\}$ //Definition von L^r und $L(e+f)$

$L(g^r) = L(e^r + f^r) = \{w : w \in L(e^r) \cup L(f^r)\}$ //Definition von und $L(e+f)$

$= \{w : w \in L(e)^r \cup L(f)^r\}$ //IV

$= \{w^r : w \in L(e) \cup L(f)\}$ //Definition von L^r

$\Rightarrow L(g)^r = L(g^r)$

Fall 2: Konkatenation

Sei $g = ef$, also $g \in REG(\Sigma)$. Setze $g^r = f^r e^r$ (daher ist $g^r \in REG(\Sigma)$). Es gilt:

$L(g)^r = L(ef)^r = \{w^r : w \in L(e) \circ L(f)\}$ //Definition von L^r und $L(ef)$

$L(g^r) = L(f^r e^r) = \{w : w \in L(f^r) \circ L(e^r)\}$ //Definition von $L(ef)$

$= \{w : w \in L(f)^r \circ L(e)^r\}$ //IV

$= \{uv : u \in L(f)^r, v \in L(e)^r\}$ //Definition von $L_1 \circ L_2$

$= \{m^r n^r : m \in L(f), n \in L(e)\}$ //Definition von L^r

$= \{(nm)^r : n \in L(e), m \in L(f)\}$ Definition von Reversewort

$= \{w^r : w \in L(e) \circ L\{f\}\}$ //Definition von $L_1 \circ L_2$

$\Rightarrow L(g^r) = L(g)^r$

Fall 3: Kleene-Star

Sei $g = e^*$, also $g \in REG(\Sigma)$. Setze $g^r = (e^r)^*$ (daher ist $g^r \in REG(\Sigma)$). Es gilt:

$L(g)^r = L(e^*)^r = \{w^r : w \in L(e^*)\}$ Definition von L^r

$L(g^r) = L((e^r)^*)$

$= \{w : w \in L(e^r)^*\}$ //Definition von $L(e^*)$

$= \{w : w \in (L(e)^r)^*\}$ //IV

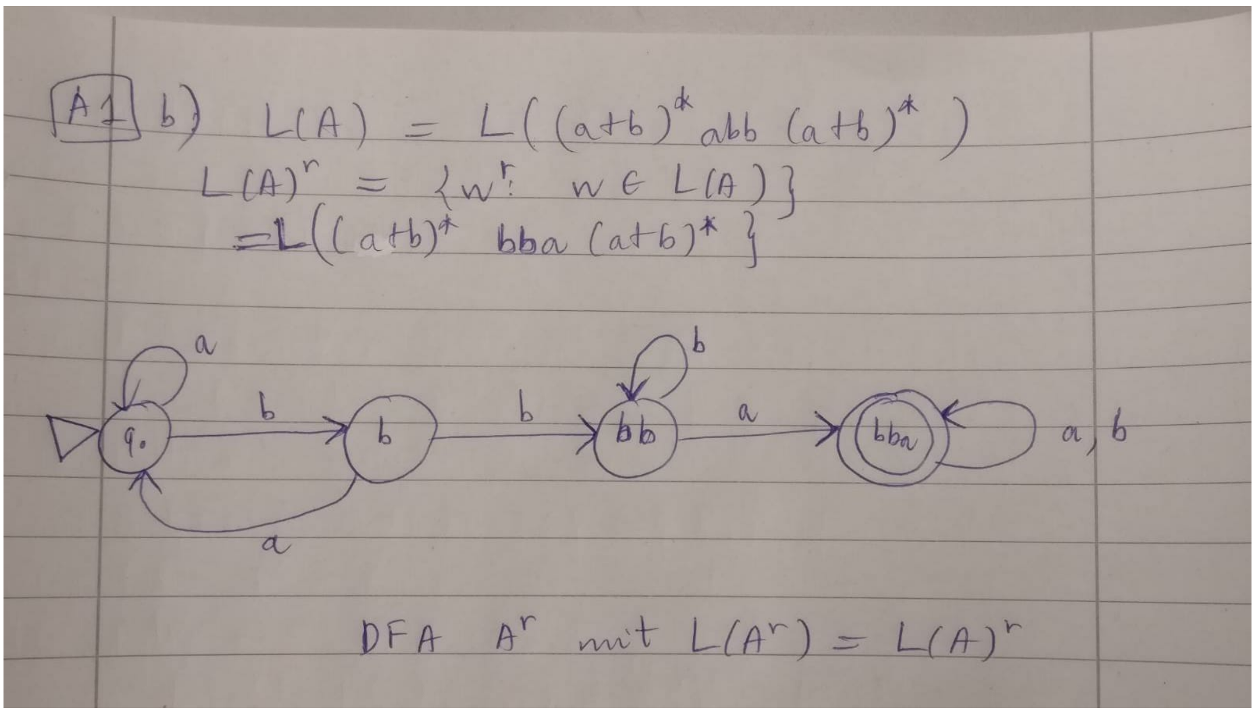
$= \{w^r : w \in L(e)^*\}$ //Basiert auf Fall 2 mit $f \equiv e$

$= \{w^r : w \in L(e^*)\}$ //Definition von $L(e^*)$

$\Rightarrow L(g)^r = L(g^r)$

Damit wird die Behauptung bewiesen $\square$

b.



c. $L(e) = L(A) \cap L(A)^r$

$= \{w : w \in L(A) \wedge w \in L(A)^r\}$

$= \{\ w : w \in L(A), w = w^r\}$ ist die Sprache der Palindrome von $L(A)$

Da die Sprache der Palindrome nicht von einem endlichen Automat erkennt werder kann (als bewiesen im Übungszettel 6, Aufgabe 4 mithilfe der Pumpinglemmas) ist es unmöglich, einen regulären Ausdruck e mit $L(e) = L(A) \cap L(A)^r$ zu finden.

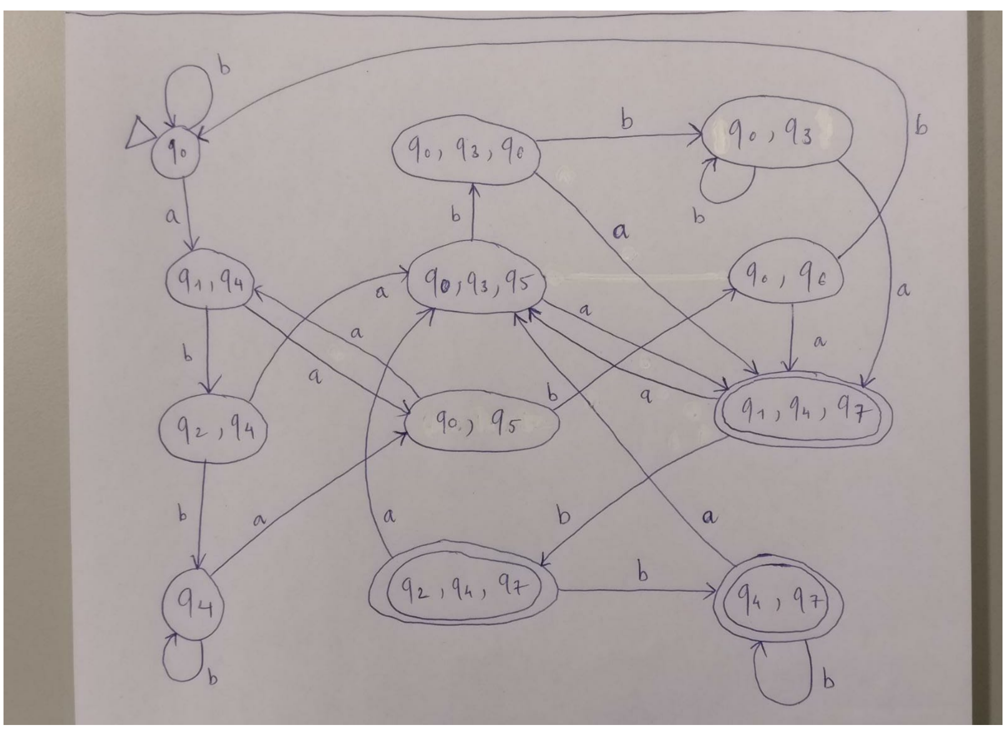
Aufgabe 2

- Aus dem NFA A:

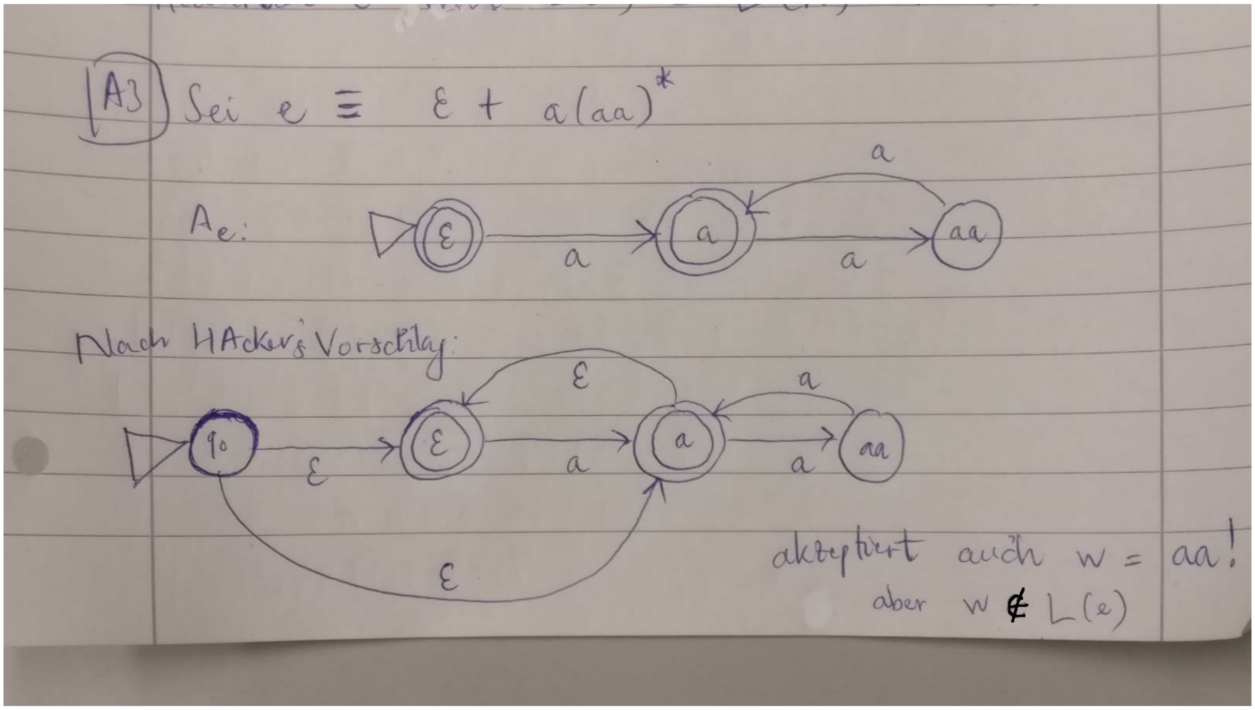
	a	b
q_0	q_1, q_4	q_0
q_1		q_2
q_2	q_3	
q_3	q_7	q_3
q_4	q_0, q_5	q_4
q_5		q_6
q_6	q_7	
$\boldsymbol{q_7}$	q_3	q_7

- Mache einen DFA (Mit dem Anfangszustand q_0 anfangen):

	a	b
q_0	$\{q_1, q_4\}$	q_0
$\{q_1, q_4\}$	$\{q_0, q_5\}$	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_0, q_5\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_0, q_6\}$
$\{q_2, q_4\}$	$\{q_3, q_0, q_5\}$	q_4
$\{q_0, q_6\}$	$\{q_1, q_4, q_7\}$	q_0
$\{q_3, q_0, q_5\}$	$\{q_7, q_1, q_4\}$	$\{q_3, q_0, q_6\}$
q_4	$\{q_0, q_5\}$	q_4
$\boldsymbol{\{q_1, q_4, q_7\}}$	$\{q_0, q_5, q_3\}$	$\{q_2, q_4, q_7\}$
$\{q_3, q_0, q_6\}$	$\{q_7, q_1, q_4\}$	$\{q_3, q_0\}$
$\boldsymbol{\{q_2, q_4, q_7\}}$	$\{q_3, q_0, q_5\}$	$\{q_4, q_7\}$
$\{q_3, q_0\}$	$\{q_7, q_1, q_4\}$	$\{q_3, q_0\}$
$\boldsymbol{\{q_4, q_7\}}$	$\{q_0, q_5, q_3\}$	$\{q_4, q_7\}$



Aufgabe 3



A3 Sei $e \equiv \varepsilon + a(aa)^*$

A_e:

Nach HAcker's Vorschlag:

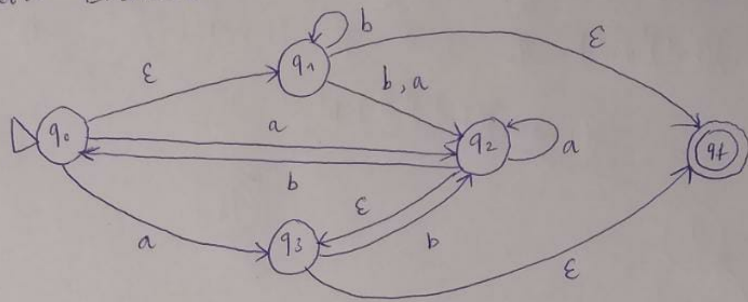
akzeptiert auch w = aa!

aber $w \notin L(e)$

Aufgabe 4

$\boxed{A4}$

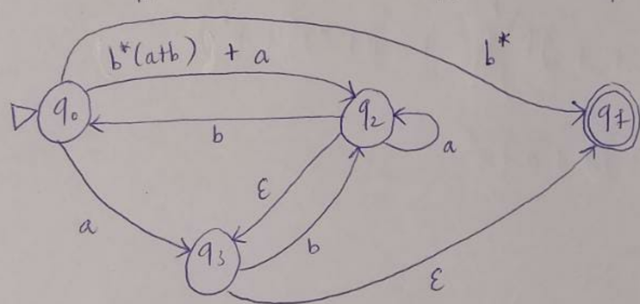
1. Ersetze Endzustände durch einen neuen Endzustand q_f



2. Elimination innerer Knoten

- Eliminiere q_1: Es gibt 2 Läufe über q_1:

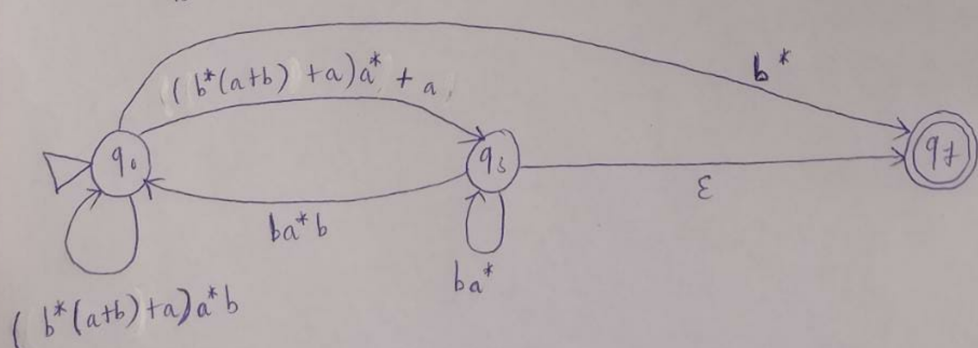
  $q_0 \; \varepsilon b^* (a+b) \; q_2$ und $q_0 \; \varepsilon b^* \varepsilon \; q_f$



- Eliminiere q_2: Es gibt 4 Läufe über q_2:

  $q_0 \; (b^*(a+b)+a)a^*b \; q_0$ und $q_0 \; (b^*(a+b)+a)a^*\varepsilon \; q_3$ und

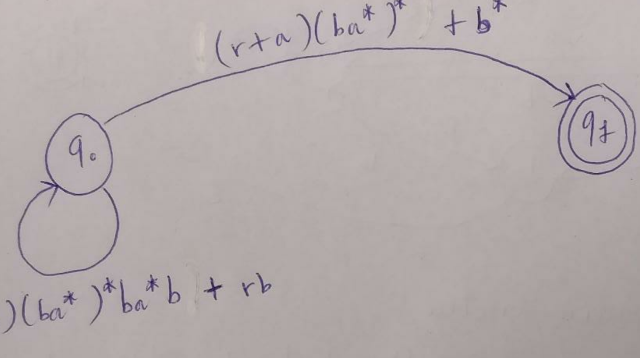
  $q_3 \; ba^*\varepsilon \; q_3$ und $q_3 \; ba^*b \; q_0$



- Eliminiere q_3: Es gibt 2 Läufe über q_3:

Setze Bezeichner $r = (b^*(a+b) + a)a^*$. Dann:

$q_0 \quad (r+a)(ba^*)^* ba^* b \quad q_0$ und $q_0 \quad (r+a)(ba^*)^* \varepsilon \quad q_f$



4. Ersetze den Automat durch regulären Ausdruck.

$$\left(\left((r+a)(ba^*)^+ + r\right)b\right)^*\left((r+a)(ba^*)^* + b^*\right)$$

mit $r = (b^*(a+b) + a)a^*$