



Uebungsblatt 02

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash



Aufgabe 1

a.

$$\emptyset^* = \{\epsilon\}$$

$$\emptyset^+ = \emptyset \circ \emptyset^* = \{\} \circ \{\epsilon\} = \{\}$$



b.

ϵ : (das leere Wort) ist ein Wort, das aus keinem einzigen Zeichen besteht. Das leere Wort ϵ ist also eine leere Folge von Zeichen.

\emptyset : (die leere Menge) ist eine Menge, die keine Elemente enthält.

$\{\epsilon\}$: ist eine Menge, die ein Element enthält, welches das leere Wort ϵ ist.

c.

Für $L = \{\epsilon\}$ ist L^* endlich, da in diesem Fall $L^* = \{\epsilon\}$, d.h. $|L^*| = 1$



d.

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{a\}$ und $L' = \{b\}$

Es gilt: $L \circ L = \{a\} \circ \{a\} = \{aa\} \neq \{a\} = L$

Es gilt: $L \circ L' = \{a\} \circ \{b\} = \{ab\} \neq \{ba\} = \{b\} \circ \{a\} = L' \circ L$



Aufgabe 2:

- Definition:

Ein Wort $u = c_0c_1\dots c_{n-1}$ ist enthalten in $w \Leftrightarrow \exists v_0, v_1, \dots, v_n : w = v_0c_0v_1\dots c_{n-1}v_n$

- Rekursive Definition:

Sei a beliebig in Σ und seien w, u beliebige Worte in Σ^*

ϵ enthalten in $w \Leftrightarrow \text{true}$

$a.u$ enthalten in $w \Leftrightarrow \exists s, r \in \Sigma^* : w = s \circ r \wedge a \text{ suffix } s \wedge u \text{ enthalten in } r$



Aufgabe 3:

a. **Behauptung:** $\forall u, v, w \in \Sigma^* : (u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$

Induktionsanfang:

$$P(\epsilon) = \forall v, w \in \Sigma^* : (\epsilon \circ v) \circ w = \epsilon \circ (v \circ w)$$

$$P(\epsilon) \Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : (\epsilon \circ v) \circ w = \epsilon \circ (v \circ w) \Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : v \circ w = v \circ w \text{ // Fall 1 in Definition von } \circ \text{ (Konkatenation)}$$

$$\Leftrightarrow \text{true}$$

Induktionsschritt:

$$\forall a \in \Sigma. \forall u' \in \Sigma^* : P(u') \rightarrow P(a.u')$$

$$P(a.u') \Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : (a.u' \circ v) \circ w = a.u' \circ (v \circ w)$$

$$\Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : a.(u' \circ v) \circ w = a.(u' \circ (v \circ w)) \text{ // Fall 2 in Definition von } \circ \text{ (Konkatenation)}$$

$$\Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : a.((u' \circ v) \circ w) = a.(u' \circ (v \circ w)) \text{ // Fall 2 in Definition von } \circ \text{ (Konkatenation)}$$

$$\Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : a.(u' \circ (v \circ w)) = a.(u' \circ (v \circ w)) \text{ // Induktionsvoraussetzung}$$

$$\Leftrightarrow \text{true}$$

$$\text{Induktionsschluss: } \forall w \in \Sigma^*. P(w)$$

b. **Behauptung:** $\forall u, v \in \Sigma^* : |u \circ v| = |u| + |v|$

Beweis mittel Induktion über u , wähle $P(u) = \forall v \in \Sigma^* : |u \circ v| = |u| + |v|$

Induktionsanfang:

$$P(\epsilon) := \forall v \in \Sigma^* : |\epsilon \circ v| = |\epsilon| + |v|$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : |v| = 0 + |v| \text{ // Definition von } \circ \text{ Fall 1 und Definition von Länge Fall 1}$$

$$\Leftrightarrow \text{true}$$

Induktionsschritt:

$$\forall a \in \Sigma : \forall u' \in \Sigma^* : P(u') \rightarrow P(a.u')$$

$$P(a.u') \Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : |a.u' \circ v| = |a.u'| + |v|$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : |a.(u' \circ v)| = 1 + |u'| + |v| \text{ // Definition von } \circ \text{ Fall 2 und Definition von Länge Fall 2}$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : 1 + |u' \circ v| = 1 + |u'| + |v| \text{ // Definition von Länge Fall 2}$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : |u' \circ v| = |u'| + |v| \text{ // Induktionsvoraussetzung}$$

$$\Leftrightarrow \text{true}$$

Induktionsschluss:

$$\forall u, v \in \Sigma^* : |u \circ v| = |u| + |v|$$

Aufgabe 4:

a.

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |\Sigma^n| = |\Sigma|^n$

Induktionsanfang:

Für $n = 0$: $|\Sigma^0| = |\{\epsilon\}|$ // ϵ ist das einzige Wort, das die Länge 0 hat
 $= 1$

$$|\Sigma|^0 = 1 \text{ // } \forall a \in \mathbb{N}_0 : a^0 = 1$$

$$\Rightarrow |\Sigma^0| = |\Sigma|^0 \Leftrightarrow \text{true}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |\Sigma^n| = |\Sigma|^n$$

Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |\Sigma^{n+1}| = |\Sigma|^{n+1}$

Es gilt: $|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma|^{n+1}$

$$\Leftrightarrow |\Sigma^n \circ \Sigma| = |\Sigma|^{n+1} \text{ // Definition von } \circ \text{ für Sprachen Fall 2}$$

$$\Leftrightarrow |\Sigma^n| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^{n+1} \text{ // Produktregeln bei endlichen Kardinalitäten (da } \Sigma \text{ endlich ist)}$$

$$\Leftrightarrow |\Sigma|^n \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^{n+1} \text{ // Induktionsvoraussetzung}$$

$$\Leftrightarrow |\Sigma|^{n+1} = |\Sigma|^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \text{true}$$

Induktionsschluss

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |\Sigma^n| = |\Sigma|^n$$

b. **Behauptung:**

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| = 1 \text{ gilt } |\Sigma^{\leq n}| = n + 1 \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| \neq 1 \text{ gilt } |\Sigma^{\leq n}| = \frac{|\Sigma|^{n+1} - 1}{|\Sigma| - 1} \quad (2)$$

Induktionsanfang für (1)

Für $n = 0$:

$$\text{LHS} = |\Sigma^{\leq 0}| = |\{\epsilon\}| = 1 = 0 + 1 = \text{RHS}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| = 1 \text{ gilt } |\Sigma^{\leq n}| = n + 1$$

Induktionsschritt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| = 1 \text{ gilt } |\Sigma^{\leq (n+1)}| = (n + 1) + 1$$

$$\text{LHS} = |\Sigma^{\leq (n+1)}|$$

$$= |\Sigma^{\leq n} \cup \Sigma^{n+1}|$$

$$= |\Sigma^{\leq n}| + |\Sigma^{n+1}| \text{ // Summenregel bei endlichen Kardinalitäten und } \Sigma^{\leq n} \cap \Sigma^{n+1} = \emptyset$$

$$= n + 1 + |\Sigma|^{n+1} \text{ // Induktionsvoraussetzung und bewiesene Aufgabe 4A}$$

$$= (n + 1) + 1^{n+1} \text{ // } |\Sigma| = 1$$

$$= (n+1) + 1$$

$$= RHS$$

Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| = 1$ gilt $|\Sigma^{\leq n}| = n+1$

Induktionsanfang für (2)

Für $n = 0$

$$LHS = |\Sigma^{\leq 0}| = |\{\epsilon\}|$$

$$= 1$$

$$= \frac{|\Sigma|-1}{|\Sigma|-1} = \frac{|\Sigma|^{0+1}-1}{|\Sigma|-1} = RHS$$

Induktionsvoraussetzung: $\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| \neq 1$ gilt

$$|\Sigma^{\leq n}| = \frac{|\Sigma|^{n+1}-1}{|\Sigma|-1}$$

Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| \neq 1$ gilt

$$|\Sigma^{\leq (n+1)}| = \frac{|\Sigma|^{(n+1)+1}-1}{|\Sigma|-1}$$

$$LHS = |\Sigma^{\leq (n+1)}|$$

$$= |\Sigma^{\leq n} \cup \Sigma^{(n+1)}|$$

$$= |\Sigma^{\leq n}| + |\Sigma^{(n+1)}| \quad // \text{ Summenregel bei endlichen Kardinalitäten und } \Sigma^{\leq n} \cap \Sigma^{n+1} = \emptyset$$

$$= \frac{|\Sigma|^{n+1}-1}{|\Sigma|-1} + |\Sigma|^{n+1} \quad // \text{ Induktionsvoraussetzung und bewiesene Aufgabe 4A}$$

$$= \frac{|\Sigma|^{n+1}-1+|\Sigma|^{n+1}(|\Sigma|-1)}{|\Sigma|-1}$$

$$= \frac{|\Sigma|^{(n+1)+1}-1}{|\Sigma|-1} = RHS$$

Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| \neq 1$ gilt: $|\Sigma^{\leq n}| = \frac{|\Sigma|^{n+1}-1}{|\Sigma|-1}$



Aufgabe 5:

a. Ja

Wir können (gleichzeitig) den Gast, der sich gerade in Raum 1 befindet, in Raum 2, und den Gast, der sich gerade in Raum 2 befindet, in Raum 3 usw. verschieben (also jeden Gast von seinem aktuellen Raum n in Raum $n+1$ verschieben). Dann ist Raum 1 leer und der neue Gast kann in diesen Raum versetzt werden.

b. Ja

Wir verschieben einfach die Person, die Raum 1 belegt, in Raum 2, die Person, die Raum 2 belegt, in Raum 4 und im Allgemeinen die Person, die Raum n belegt, in Raum $2n$ (alle geraden Zimmer), und alle ungeraden Zimmer (die abzählbar unendlich viel sind) sind für die neuen Gäste frei.

c. Ja

Wir verschieben zunächst im Allgemeinen die Person, die Raum n belegt, in Raum 2^n ($n \in \mathbb{N}, n \neq 0$). Für den ersten Zug versetzen wir den i -ten Gast ($i \in \mathbb{N}, i \neq 0$) in Raum 3^i , für den zweiten Zug den i -ten Gast in Raum 5^i und so weiter (also für den n -ten Zug und den i -ten Gast verwenden wir den Raum c^i , wobei c die n -te ungerade Primzahl ist).

