Uebungsblatt 02

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash

Aufgabe 1

a.

$\emptyset^* = \{\epsilon\}$

$\emptyset^+ = \emptyset \circ \emptyset^* = \{\} \circ \{\epsilon\} = \{\}$

b.

ϵ: (das leere Wort) ist ein Wort, das aus keinem einzigen Zeichen besteht. Das leere Wort ϵ ist also eine leere Folge von Zeichen.

$\emptyset$: (die leere Menge) ist eine Menge, die keine Elemente enthält.

$\{\epsilon\}$: ist eine Menge, die ein Element enthält, welches das leere Wort ϵ ist.

c.

Für L = $\{\epsilon\}$ ist L^* endlich, da in diesem Fall $L^* = \{\epsilon\}$, d.h $|L^*| = 1$

d.

Sei $\Sigma = \{a, b\}, L = \{a\}$ und $L' = \{b\}$

Es gilt: $L \circ L = \{a\} \circ \{a\} = \{aa\} \neq \{a\} = L$

Es gilt: $L \circ L' = \{a\} \circ \{b\} = \{ab\} \neq \{ba\} = \{b\} \circ \{a\} = L' \circ L$

Aufgabe 2:

- Definition:

Ein Wort $u = c_0c_1...c_{n-1}$ ist enthalten in w $\Leftrightarrow \exists v_0, v_1, ..., v_n : w = v_0c_0v_1...c_{n-1}v_n$

- Rekursive Definition:

Sei a beliebig in Σ und seien w, u beliebige Worte in Σ^*

ϵ enthalten in w $\Leftrightarrow$ true

a.u enthalten in w $\Leftrightarrow \exists s, r \in \Sigma^* : w = s \circ r \wedge a$ suffix $s \wedge u$ enthalten in r

Aufgabe 3:

a. **Behauptung:** $\forall u, v, w \in \Sigma^* : (u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$

Induktionsanfang:

$P(\epsilon) = \forall v, w \in \Sigma^* : (\epsilon \circ v) \circ w = \epsilon \circ (v \circ w)$

$P(\epsilon) \Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : (\epsilon \circ v) \circ w = \epsilon \circ (v \circ w) \Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : v \circ w = v \circ w$ // Fall 1 in Definition von $\circ$ (Konkatenation)

$\Leftrightarrow true$

Induktionsschritt:

$\forall a \in \Sigma . \forall u' \in \Sigma^* : P(u') \rightarrow P(a.u')$

$P(a.u') \Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : (a.u' \circ v) \circ w = a.u' \circ (v \circ w)$

$\Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : a.(u' \circ v) \circ w = a.(u' \circ (v \circ w))$ // Fall 2 in Definition von $\circ$ (Konkatenation)

$\Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : a.((u' \circ v) \circ w) = a.(u' \circ (v \circ w))$ // Fall 2 in Definition von $\circ$ (Konkatenation)

$\Leftrightarrow \forall v, w \in \Sigma^* : a.(u' \circ (v \circ w)) = a.(u' \circ (v \circ w))$ // Induktionsvoraussetzung

$\Leftrightarrow true$

Induktionsschluss: $\forall w \in \Sigma^* . P(w)$

b. **Behauptung:** $\forall u, v \in \Sigma^* : |u \circ v| = |u| + |v|$

Beweis mittel Induktion uber u, wahle $P(u) = \forall v \in \Sigma^* : |u \circ v| = |u| + |v|$

Induktionsanfang:

$P(\epsilon) := \forall v \in \Sigma^* : |\epsilon \circ v| = |\epsilon| + |v|$

$\Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : |v| = 0 + |v|$ // Definition von $\circ$ Fall 1 und Definition von Länge Fall 1

$\Leftrightarrow true$

Induktionsschritt:

$\forall a \in \Sigma : \forall u' \in \Sigma^* : P(u') \rightarrow P(a.u')$

$P(a.u') \Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : |a.u' \circ v| = |a.u'| + |v|$

$\Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : |a.(u' \circ v)| = 1 + |u'| + |v|$ // Definition von $\circ$ Fall 2 und Definition von Länge Fall 2

$\Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : 1 + |u' \circ v| = 1 + |u'| + |v|$ // Definition von Länge Fall 2

$\Leftrightarrow \forall v \in \Sigma^* : |u' \circ v| = |u'| + |v|$ // Induktionsvoraussetzung

$\Leftrightarrow true$

Induktionsschluss:

$\forall u, v \in \Sigma^* : |u \circ v| = |u| + |v|$

Aufgabe 4:

a.

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |\Sigma^n| = |\Sigma|^n$

Induktionsanfang:

Für $n = 0$: $|\Sigma^0| = |\{\epsilon\}|$ // ϵ ist das einzige Wort, das die Länge 0 hat

$= 1$

$|\Sigma|^0 = 1$ // $\forall a \in \mathbb{N}_0 : a^0 = 1$

$\Rightarrow |\Sigma^0| = |\Sigma|^0 \Leftrightarrow true$

Induktionsvoraussetzung:

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |\Sigma^n| = |\Sigma|^n$

Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |\Sigma^{n+1}| = |\Sigma|^{n+1}$

Es gilt: $|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma|^{n+1}$

$\Leftrightarrow |\Sigma^n \circ \Sigma| = |\Sigma|^{n+1}$ // Definition von $\circ$ für Sprachen Fall 2

$\Leftrightarrow |\Sigma^n|.|\Sigma| = |\Sigma|^{n+1}$ // Produktregeln bei endlichen Kardinalitäten (da Σ endlich ist)

$\Leftrightarrow |\Sigma|^n.|\Sigma| = |\Sigma|^{n+1}$ // Induktionsvoraussetzung

$\Leftrightarrow |\Sigma|^{n+1} = |\Sigma|^{n+1}$

$\Leftrightarrow true$

Induktionsschluss

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |\Sigma^n| = |\Sigma|^n$

b. **Behauptung:**

$\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| = 1$ gilt $|\Sigma^{\leq n}| = n + 1$ (1)

$\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| \neq 1$ gilt $\Sigma^{\leq n} = \frac{|\Sigma|^{n+1}-1}{|\Sigma|-1}$ (2)

Induktionsanfang für (1)

Für $n = 0$:

LHS $= |\Sigma^{\leq 0}| = |\{\epsilon\}| = 1 = 0 + 1 = RHS$

Induktionsvoraussetzung:

$\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| = 1$ gilt $|\Sigma^{\leq n}| = n + 1$

Induktionsschritt

$\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| = 1$ gilt $|\Sigma^{\leq (n+1)}| = (n + 1) + 1$

LHS $= |\Sigma^{\leq (n+1)}|$

$= |\Sigma^{\leq n} \cup \Sigma^{n+1}|$

$= |\Sigma^{\leq n}| + |\Sigma^{n+1}|$ // Summenregel bei endlichen Kardinalitäten und $\Sigma^{\leq n} \cap \Sigma^{n+1} = \emptyset$

$= n + 1 + |\Sigma|^{n+1}$ // Induktionsvoraussetzung und bewiesene Aufgabe 4A

$= (n + 1) + 1^{n+1}$ // $|\Sigma| = 1$

$= (n+1)+1$

$= RHS$

Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| = 1$ gilt $|\Sigma^{\leq n}| = n+1$

Induktionsanfang für (2)

Für $n = 0$

$LHS = |\Sigma^{\leq 0}| = |\{\epsilon\}|$

$= 1$

$= \frac{|\Sigma|-1}{|\Sigma|-1} = \frac{|\Sigma|^{0+1}-1}{|\Sigma|-1} = RHS$

Induktionsvoraussetzung: $\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| \neq 1$ gilt

$|\Sigma^{\leq n}| = \frac{|\Sigma|^{n+1}-1}{|\Sigma|-1}$

Induktionsschritt: $\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| \neq 1$ gilt

$|\Sigma^{\leq (n+1)}| = \frac{|\Sigma|^{(n+1)+1}-1}{|\Sigma|-1}$

$LHS = |\Sigma^{\leq (n+1)}|$

$= |\Sigma^{\leq n} \cup \Sigma^{(n+1)}|$

$= |\Sigma^{\leq n}| + |\Sigma^{(n+1)}|$ // Summenregel bei endlichen Kardinalitäten und $\Sigma^{\leq n} \cap \Sigma^{n+1} = \emptyset$

$= \frac{|\Sigma|^{n+1}-1}{|\Sigma|-1} + |\Sigma|^{n+1}$ // Induktionsvoraussetzung und bewiesene Aufgabe 4A

$= \frac{|\Sigma|^{n+1}-1+|\Sigma|^{n+1}(|\Sigma|-1)}{|\Sigma|-1}$

$= \frac{|\Sigma|^{(n+1)+1}-1}{|\Sigma|-1} = RHS$

Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N}_0, |\Sigma| \neq 1$ gilt: $|\Sigma^{\leq n}| = \frac{|\Sigma|^{n+1}-1}{|\Sigma|-1}$

Aufgabe 5:

a. Ja

Wir können (gleichzeitig) den Gast, der sich gerade in Raum 1 befindet, in Raum 2, und den Gast, der sich gerade in Raum 2 befindet, in Raum 3 usw. verschieben (also jeden Gast von seinem aktuellen Raum n in Raum n + 1 verschieben). Dann ist Raum 1 leer und der neue Gast kann in diesen Raum versetzt werden.

b. Ja

Wir verschieben einfach die Person, die Raum 1 belegt, in Raum 2, die Person, die Raum 2 belegt, in Raum 4 und im Allgemeinen die Person, die Raum n belegt, in Raum 2n (alle geraden Zimmer), und alle ungeraden Zimmer (die abzählbar unendlich viel sind) sind für die neuen Gäste frei.

c. Ja

Wir verschieben zunächst im Allgemeinen die Person, die Raum n belegt, in Raum 2^n $(n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$. Für den ersten Zug versetzen wir den i-ten Gast $(i \in \mathbb{N}, i \neq 0)$ in Raum 3^i, für den zweiten Zug den i-ten Gast in Raum 5^i und so weiter (also für den n-ten Zug und den i-ten Gast verwenden wir den Raum c^i, wobei c die n-te ungerade Primzahl ist).