

Uebungsblatt 05

Truong (Hoang Tung Truong), Testfran (Minh Kien Nguyen), Hamdash

Aufgabe 1

- $(a^+ + b^+ a^*)(b + bba^+)^*$
- $a^*(ba^* + bb^+ a)^*$
- $(b^* ab^* ab^* ab^* ab^* ab^*)^*$

Aufgabe 2

- Behauptung: L_1 ist nicht regulär, also

$L_1 = \{a^m \mid m > 0 \text{ ist ein Quadratzahl}\}$ ist nicht durch endlichen Automaten erkennbar.

- Angenommen, L_1 wäre regulär. Dann gäbe es ein k wie im Pumping Lemma. Jeder k -große ($|w| \geq k$) Wort $w \in L_1$ hätte im k -vorderen Bereich ($|xy| \leq k$) ein nichtleere Teilwort y , das sich “aufpumpen” lässt.
 - Mit dem k von oben betrachten wir jetzt das Wort $w = (a^k)^k$
- Es ist in L_1
 - Es ist k -gross ($|w| \geq k^2$)
- Es müsste im k -vorderen Bereich ein Teilwort haben, das sich aufpumpen lässt. Aber wenn wir einen nichtleeren Teil y aufpumpen bekommen wir ein neues Wort w' , dessen Länge $|w'|$ keine Quadratzahl ist.

Spezifischer: $|w| = k^2$

Das Wort mit der kleinsten Länge, die aber größer als k^2 ist, ist $w_0 = (a^{(k+1)})^{k+1}$

mit $|w_0| = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

Da $0 < |y| \leq k$ gilt $|w'| = k^2 + |y| \leq k^2 + k < k^2 + 2k + 1$, also $w' \notin L_1$. Widerspruch!

Es gibt daher keinen endlichen Automaten A mit $L_1 = L(A)$.

Daraus folgt: L_1 ist nicht regulär. \square

- $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$

Äquivalenzklassen von $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$

- $[e] = \{e\}, [a] = \{a\}, [aa] = \{aa\}, \dots, [a^k] = \{a^k\} (k \in \mathbb{N})$
- $[ab] = \{ab, a^2 b^2, \dots\}, [a^2 b] = \{a^2 b, a^3 b^2, a^4 b^3, \dots\},$
 $[a^3 b] = \{a^3 b, a^4 b^2, a^5 b^3, \dots\}, \dots, [a^k b] = \{a^{k+i-1} b^i \mid i \geq 1\} (k \in \mathbb{N})$
- $\Sigma^* - L_2$ mit $\Sigma = \{a, b\} = \{bx, a^n b^m, xbay \mid x, y \in \Sigma^* \wedge n, m \in \mathbb{N} \wedge m > n\}$

Aufgabe 3

a.

- Automat A hat keine nicht erreichbaren Zustände.
- $\Sigma_A = \{a, b\}$, $F = \{q_2, q_5, q_6\}$, $Q - F = \{q_0, q_1, q_3, q_4\}$
- Wir beginnen damit, in der tabelle die Paare zu markieren, bei denen einer in F ist und der andere nicht.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	\		x			x	x
1	\	\	x			x	x
2	\	\	\	x	x		
3	\	\	\	\		x	x
4	\	\	\	\	\	x	x
5	\	\	\	\	\	\	
6	\	\	\	\	\	\	\

- Als nächstes wählen wir $e := a \in \Sigma_A$ und markieren alle (q_i, q_j) ($i < j$) für die $(\delta(q_i, e), \sigma(q_j, e))$ schon markiert ist

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	\		x			x	x
1	\	\	x			x	x
2	\	\	\	x	x	x	x
3	\	\	\	\		x	x
4	\	\	\	\	\	x	x
5	\	\	\	\	\	\	
6	\	\	\	\	\	\	\

- Wir wiederholen das gleiche mit $e := b$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	\	x	x		x	x	x
1	\	\	x	x	x	x	x
2	\	\	\	x	x	x	x
3	\	\	\	\		x	x
4	\	\	\	\	\	x	x
5	\	\	\	\	\	\	x
6	\	\	\	\	\	\	\

- Erneute Versuche mit $e := a$ und $e := b$ bringen eine neue Tabelle, in der alle Feldern markiert sind. (Zeichne neue Tabelle)
- Die nicht markierten Position in der oberen tabelle zeigen, welche Zustände äquivalent sind (Es gibt aber keine). Hier bestehen die Äquivalenzklassen von \sim aus $\{q_0\}$, $\{q_3\}$, $\{q_2\}$, $\{q_4\}$, $\{q_5\}$, $\{q_6\}$, $\{q_1\}$. Das Automat A ist schon minimal (Zeichne das Automat wieder)

b. Z.z: Der Minimalautomat A/\sim besitzt eine minimale Anzahl an Zuständen

- Sei L die Sprache, die der Automat A erkennt.
nach Nerode-Lemma, A ein DFA ist, gibt es eine minimale endlichen Menge von n Worten, die paarweise L-trennbar sind, und daraus folgt, jeder Automat, der L erkennt, hat mindesten n Zustände (inklusive A/\sim)

- n ist aber auch die Anzahl der Äquivalenzklassen von L , denn diese n Worte sind paarweise L -trennbar.
- Zwei Worte $u, v \in \Sigma^*$ sind in derselben Äquivalenzklassen von $L(u \sim_L v)$, genau dann wenn $\forall w \in \Sigma^* : (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L)$
- Der Minimalautomat A/\sim wird als der Faktorautomat ohne die nicht erreichbaren Zustände $A/\sim := (Q/\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0]_\sim, F_\sim)$ mit $Q/\sim := \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$ aus $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deformiert, indem man verhaltensgleiche Zustände identifiziert. Da A/\sim auch L erkennt, und aus der Eigenschaft: In A/\sim sind je zwei verschiedene Zustände trennbar, muss gelten dass die Anzahl der Zuständen in A/\sim gleiche der Angenommen der Äquivalenzklassen von L ist, also $|Q/\sim| = n$. d.h der Minimalautomat A/\sim besitzt eine minimale Anzahl an Zuständen.

Aufgabe 4

Z.z: $\forall w \in \Sigma^* : \delta_{AxB}^*((p, q), w) = (\delta_A^*(p, w), \delta_B^*(q, w))$

Induktionbeweis: IA: $w = \epsilon$

$LHS = \delta_{AxB}^*((p, q), \epsilon) = (p, q)$ // Ausdehnung von δ auf Worte, 1. Fall in Definition von δ^*

$RHS = (\delta_A^*(p, \epsilon), \delta_B^*(q, \epsilon)) = (p, q)$ // 1. Fall in Definition von δ^*

IV: $\forall u \in \Sigma^* : \delta_{AxB}^*((p, q), u) = (\delta_A^*(p, u), \delta_B^*(q, u))$

IS: Z.z: $\forall a \in \Sigma, \forall u \in \Sigma^* :$

$\delta_{AxB}^*((p, q), a.u) = (\delta_A^*(p, a.u), \delta_B^*(q, a.u))$

$LHS = \delta_{AxB}^*((p, q), a.u)$

$= \delta_{AxB}^*(\delta_{AxB}^*((p, q), a), u)$ // 2. Fall in Definition von δ^*

$= \delta_{AxB}^*((\delta_A(p, a), \delta_B(q, a)), u)$ // Definition von $\delta_{AxB}((p, q), a)$ Folie 43 Kap 4

$= (\delta_A^*(\delta_A(p, a), u), (\delta_B^*(\delta_B(q, a), u))$ // IV

$= (\delta_A^*(p, a.u), (\delta_B^*(p, a.u))$ // 2. Fall in Definition von δ^*

$= RHS$. Also $\forall w \in \Sigma^* : \delta_{AxB}^*((p, q), w) = (\delta_A^*(p, w), \delta_B^*(q, w))$