Trabajo Práctico 2
Cara a cara

Métodos Numéricos

Primer cuatrimestre - 2017

Antes de pasar al TP2...

Donde estamos y qué vimos hasta ahora

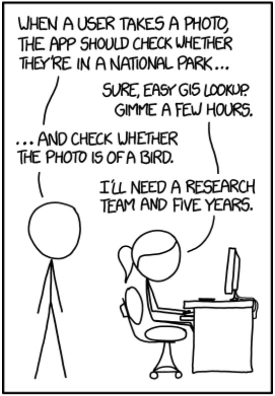
- Errores numéricos.
- Resolución de sistema lineales. (TP1: EG, LU, SDP)
- Aplicación de resolución de sistemas (Ranking deportivos).
- *Denoising* aplicado a imágenes.

Subiendonos a la ola: un TP de machine learning

♫*And we'll have fun with our methods until the lifeguard takes our data away* ♫

Qué es machine learning

Qué es machine learning



IN CS, IT CAN BE HARD TO EXPLAIN THE DIFFERENCE BETWEEN THE EASY AND THE VIRTUALLY IMPOSSIBLE.

Qué es machine learning

En realidad ya estabamos en la ola

Reacciones populares

Métodos numéricos

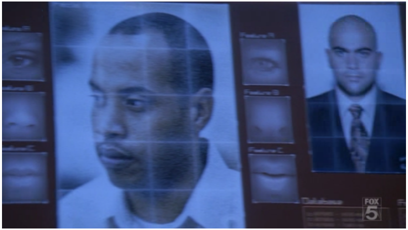
Norma matricial, número de condición, factorización de matrices, distancia de un punto a un subespacio

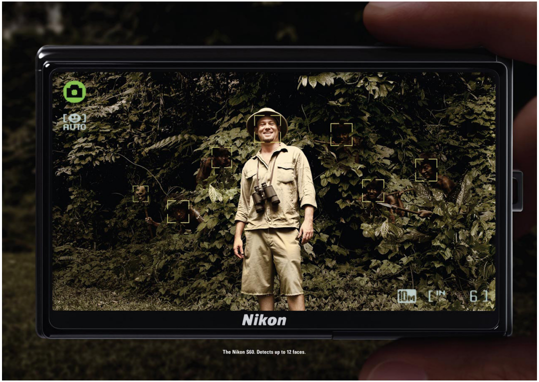
Machine learning

Data scientist, Big data, Deep learning, Data guru ninja visionary

Trabajo Práctico 2

Reconocimiento de caras - Aplicaciones





Trabajo Práctico 2

Reconocimiento de caras usando reducción de la dimensionalidad

- Datos: base de datos etiquetada de imágenes de caras de personas tomadas de una forma particular.
- Objetivo: dada una nueva imagen de una persona, ¿A cuál corresponde?

Sujeto 1:

Sujeto 2:

Sujeto 3:

Llegan nuevas imágenes, ¿a quiénes pertenecen?

Objetivo

Desarrollar (no solo en términos de implementación) un *clasificador* que permita reconocer a que persona de una base corresponde una cara.

Contexto

- Disponemos de una base de datos etiquetada que tendremos que utilizar tanto para entrenamiento como para testeo.
- Consideramos la base *ORL faces*. 41 sujetos, 10 imágenes por sujeto.
- Cada cara es una imagen en escala de grises de 92×112. También disponemos de la misma base pero con imágenes reducidas.

Idea general (caso particular reconocimiento de caras)

- Consideramos cada imagen como un vector $x_i \in \mathbb{R}^m$, $m = 92 \times 112$, $i = 1, \ldots, n$. Para las imágenes en la base de datos, sabemos además a que clase pertenece.
- Cuando llega una nueva imagen de una cara z, con el mismo formato, recorremos toda la base y buscamos aquella que minimice

$$\arg\min_{i=1,\ldots,n} \|z - x_i\|_2$$

Luego, le asignamos la clase del representante seleccionado.

Generalización

Considerar más de un vecino.

Reconocimiento de caras

Vecinos más cercanos: *kNN*

- Consideramos los k vecinos más cercanos.
- Entre ellos hacemos una votación, eligiendo como clase la *moda* del conjunto. En otras palabras, hacemos una votación y se elige aquella clase con más votos.

Reconocimiento de caras

kNN: Ejemplo de clasificación y definición de fronteras

Algunos pros & cons

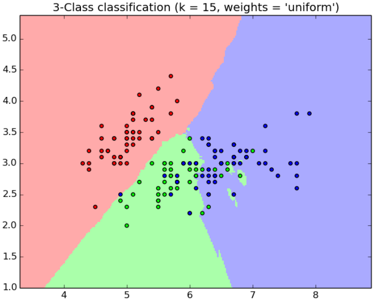


Imagen tomada de SCIKIT-LEARN.ORG

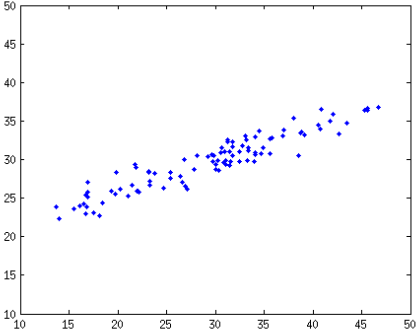
+ Es conceptualmente simple.
+ Funciona bien en general para dimensiones bajas, y puede ser utilizado con pocos ejemplos.
- Sufre de *La maldición de la dimensionalidad.*
- La clasificación puede ser lenta dependiendo del contexto.

Análisis de Componentes Principales

Ejemplo datos en $\mathbb{R}^2$

Sean $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ una secuencia de n datos, con $x^{(i)} \in \mathbb{R}^2$.

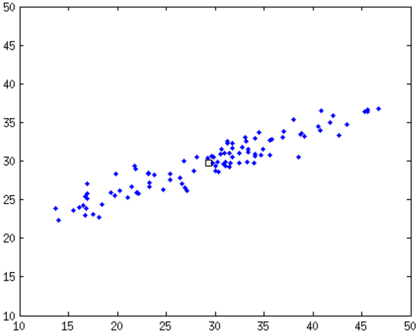
$$X = \begin{bmatrix} {x^{(1)}}^t \\ {x^{(2)}}^t \\ {x^{(3)}}^t \\ {x^{(4)}}^t \\ {x^{(5)}}^t \\ {x^{(6)}}^t \\ \vdots \\ {x^{(n)}}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.4320 & 27.7740 \\ 26.8846 & 26.5631 \\ 23.3309 & 26.6983 \\ 30.6387 & 31.5619 \\ 30.5171 & 30.8993 \\ 45.6364 & 36.6035 \\ \vdots & \vdots \\ 16.0650 & 24.0210 \end{bmatrix}$$



Análisis de Componentes Principales

Ejemplo datos en $\mathbb{R}^2$

$$X = \begin{bmatrix} 26.4320 & 27.7740 \\ 26.8846 & 26.5631 \\ 23.3309 & 26.6983 \\ 30.6387 & 31.5619 \\ 30.5171 & 30.8993 \\ 45.6364 & 36.6035 \\ \vdots & \vdots \\ 16.0650 & 24.0210 \end{bmatrix}$$



Media:
$\mu = \frac{1}{n}(x^{(1)} + \cdots + x^{(n)})$
$\mu = (29.3623, 29.7148)$

Varianza de una variable x_k: Medida para la dispersión de los datos.
$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_k^{(i)} - \mu_k)^2$
$\sigma_{x_1}^2 = 66.2134, \ \sigma_{x_2}^2 = 12.5491$

Análisis de Componentes Principales

Ejemplo datos en $\mathbb{R}^2$ - Covarianza

$$X = \begin{bmatrix} 26.4320 & 27.7740 \\ 26.8846 & 26.5631 \\ 23.3309 & 26.6983 \\ 30.6387 & 31.5619 \\ 30.5171 & 30.8993 \\ 45.6364 & 36.6035 \\ \vdots & \vdots \\ 16.0650 & 24.0210 \end{bmatrix}$$

Covarianza: Medida de cuánto dos variables varían de forma similar. Variables con mayor covarianza inducen la presencia de cierta dependencia o relación.

$$\sigma_{x_j x_k} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_j^{(i)} - \mu_j)(x_k^{(i)} - \mu_k)$$

Análisis de Componentes Principales

Ejemplo datos en $\mathbb{R}^2$ - Covarianza

Dadas n observaciones de dos variables x_k, x_j, y $v = (1, \ldots, 1)^t$:

$$\sigma_{x_j x_k} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_j^{(i)} - \mu_j)(x_k^{(i)} - \mu_k) = \frac{1}{n-1}(x_k - \mu_k v)^t(x_j - \mu_j v)$$

Matriz de Covarianza:

$$X = \begin{bmatrix} 26.4320 - \mu_1 & 27.7740 - \mu_2 \\ 26.8846 - \mu_1 & 26.5631 - \mu_2 \\ 23.3309 - \mu_1 & 26.6983 - \mu_2 \\ 30.6387 - \mu_1 & 31.5619 - \mu_2 \\ 30.5171 - \mu_1 & 30.8993 - \mu_2 \\ 45.6364 - \mu_1 & 36.6035 - \mu_2 \\ \vdots & \vdots \\ 16.0650 - \mu_1 & 24.0210 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$M_X = \frac{1}{n-1}X^t X = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1 x_1} & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2 x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$M_X = \begin{bmatrix} 66.2134 & 27.1263 \\ 27.1263 & 12.5491 \end{bmatrix}$$

¿Cómo expresar mejor nuestros datos?

Objetivo

Buscamos una transformación de los datos que disminuya la redundancia (es decir, disminuir la covarianza).

- Cambio de base: $\hat{X}^t = PX^t$.
- Cómo podemos hacerlo? Diagonalizar la matriz de covarianza. Esta matriz tiene la varianza de cada variable en la diagonal, y la covarianza en las restantes posiciones. Luego, al diagonalizar buscamos variables que tengan covarianza cero entre sí y la mayor varianza posible.

Autovalores y Autovectores

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Un *autovector* de A es un vector no nulo tal que $Ax = \lambda x$, para algun escalar λ. Un escalar λ es denominado *autovalor* de A si existe una solución no trivial x del sistema $Ax = \lambda x$. En este caso, x es llamado *autovector asociado a* λ.

Consideramos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Au = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, Av = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2v$$

Gráficamente....A sólo estira (o encoge) el vector v.

Diagonalización

En muchos casos, la presencia de autovectores-autovalores puede ser utilizada para encontrar una factorización $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Intuición

Podemos encontrar una base donde la transformación lineal A se comporta como si fuese diagonal.

Observación

No toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable.

Teorema

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable sí y solo sí A tiene n autovectores linealmente independientes (las columnas de P).

Teorema

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal de autovectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Consecuencia: Existe P, y $P^{-1} = P^t$. Luego, $A = PDP^t$.

Cálculo de autovalores/autovectores

- Vamos a necesitar calcular los autovectores v de una matriz para poder calcular las transformaciónes de los métodos que estamos viendo.
- Consideremos A^tA, y supongamos $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$. A^tA es simétrica y semidefinida positiva.
- Podemos considerar el Método de la Potencia para calcular λ_1 y v_1.
  1. MetodoPotencia(B,x_0,niter)
  2. $v \leftarrow x_0$.
  3. Para $i = 1, \ldots, niter$
  4. $v \leftarrow \frac{Bv}{||Bv||}$
  5. Fin Para
  6. $\lambda \leftarrow \frac{v^tBv}{v^tv}$
  7. Devolver λ, v.

Cálculo de autovalores/autovectores

Una vez que tenemos λ_1 y v_1, como seguimos?

Deflación

Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con autovalores distintos $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$ y una base ortonormal de autovectores. Entonces, la matriz $B - \lambda_1 v_1 v_1^t$ tiene autovalores $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con autovectores asociados $v_1, \ldots, v_n$.

- $(B - \lambda_1 v_1 v_1^t) v_1 = B v_1 - \lambda_1 v_1 (v_1^t v_1) = \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 = 0 v_1$.
- $(B - \lambda_1 v_1 v_1^t) v_i = B v_i - \lambda_1 v_1 (v_1^t v_i) = \lambda_i v_i$.

Observación

En nuestro caso, no hace falta que todos los autovalores tengan magnitudes distintas.

¿Cómo expresar mejor nuestros datos?

- Cambio de base: $\hat{X}^t = PX^t$.

  Sea P ortogonal y $M_{\hat{X}}$ la matriz de covarianza de $\hat{X}$.

$$\begin{aligned} M_{\hat{X}} &= \frac{1}{n-1}\hat{X}^t\hat{X} \\ &= \frac{1}{n-1}(PX^t)(XP^t) \\ &= P\frac{X^tX}{n-1}P^t \\ &= PM_XP^t \end{aligned}$$

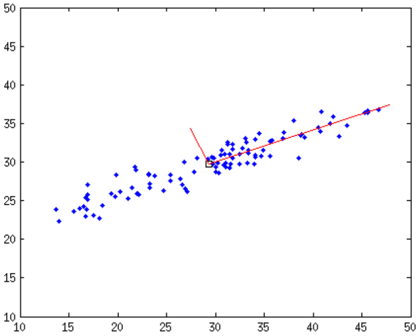
- M_X es simétrica, entonces existe V ortogonal tal que $M_X = VDV^t$.

$$\begin{aligned} M_{\hat{X}} &= PM_XP^t \\ &= P(VDV^t)P^t \qquad \text{tomamos } P = V^t \\ &= (V^tV)D(VV^t) = D \end{aligned}$$

¿Cómo expresar mejor nuestros datos?

Volvemos al ejemplo

$$
\begin{aligned}
M_X &= \begin{bmatrix} 66.2134 & 27.1263 \\ 27.1263 & 12.5491 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9228 & -0.3852 \\ 0.3852 & 0.9228 \end{bmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} 77.5362 & 0 \\ 0 & 1.2263 \end{bmatrix}}_{D=M_{\hat{X}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9228 & 0.3852 \\ -0.3852 & 0.9228 \end{bmatrix}}_{V^t}
\end{aligned}
$$



Análisis de Componentes Principales

Resumen hasta acá

- Tenemos n muestras de m variables.
- Calculamos el vector μ que contiene la media de cada de una las variables.
- Construimos la matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ donde cada muestra corresponde a una fila de X y tienen media cero (i.e., $x^{(i)} := (x^{(i)} - \mu)/\sqrt{n-1}$).
- Diagonalizamos la matriz de covarianzas M_X. La matriz V (ortogonal) contiene los autovectores de M_X.

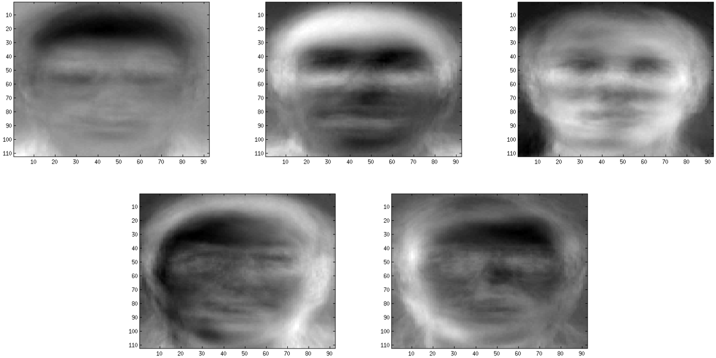
Propiedades del cambio de base

- Disminuye redundancias.
- El cambio de base $\hat{X}^t = PX^t = V^t X^t$ asigna a cada muestra un nuevo *nombre* mediante un cambio de coordenadas.
- Las columnas de V (autovectores de M_X) son las componentes principales de los datos.
- En caso de m grande, es posible tomar sólo un subconjunto de las componentes principales para estudiar (i.e., aquellas que capturen mayor proporción de la varianza de los datos).

Reconocimiento de caras

Autocaras (Eigenfaces)

Gráfico de los primeros 5 autovectores en V.



Reconocimiento de caras

¿Cómo reconocemos una cara?

Idea

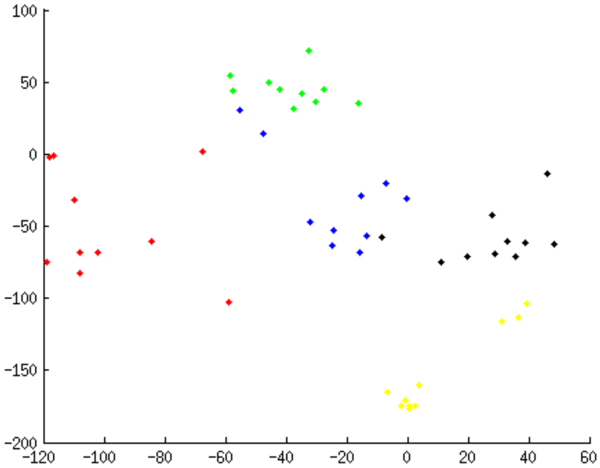
- Utilizar el cambio de base, transformando cada imagen convenientemente.
- Reducir la dimensión de los datos utilizando sólo algunas de las nuevas variables (eligiendo aquellas que capturan una fracción mayor de la varianza).

Procedimiento

- Reducción de la dimensión: parámetro de entrada que indica cuántas componentes principales considerar, k. Es decir, tomaremos $\bar{V} = [v_1 \;\; v_2 \;\; \dots \;\; v_k]$.
- Tranformación característica: Aplicamos el cambio de base a cada muestra $x^{(i)}$, definimos $tc(x^{(i)}) = \bar{V}^t x^{(i)} = (v_1^t x^{(i)}, \dots, v_k^t x^{(i)})$.

Reconocimiento de caras

Reducción + Transformación ($k = 2$)



Finalmente, dada una imagen de una cara que no se encuentra en la base:

- Vectorizamos la imagen en $x^* \in \mathbb{R}^m$.
- Definimos $\bar{x}^* = (x^* - \mu)/\sqrt{n-1}$.
- Aplicamos la transformación característica, $tc(\bar{x}^*)$ y buscamos (de alguna forma) a que sujeto pertenece.

Como evaluamos si el método funciona?

- Como medimos la efectividad del método?

Reconocimiento de caras

Metodología de evaluación

Como evaluamos si el método funciona?

- Como medimos la efectividad del método?
- Tiene sentido probarlo sobre la base de training?

Como evaluamos si el método funciona?

- Como medimos la efectividad del método?
- Tiene sentido probarlo sobre la base de training?
- De alguna forma defino una instancia, pruebo todas las combinaciones de parámetros sobre la misma. Es correcto? Puede surgir algún problema?

Como evaluamos si el método funciona?

- Como medimos la efectividad del método?
- Tiene sentido probarlo sobre la base de training?
- De alguna forma defino una instancia, pruebo todas las combinaciones de parámetros sobre la misma. Es correcto? Puede surgir algún problema?

Idea

Utilizar la base de entrenamiento convenientemente para estimar y proveer suficiente evidencia respecto a la efectividad del método.

¿Qué hay que hacer en el TP?

- Implementar el método de Análisis de Componentes Principales.
- Proponer al menos dos métodos que, dada una nueva imagen de una cara, determine a que persona de la base de datos corresponde utilizando la transformación característica.
- Experimentar variando: k, cantidad de imagenes por cada persona en la base, *resolución de las imágenes en la base de datos.* Analizar los resultados en términos de las métricas presentadas sobre un conjunto de casos de prueba.
- Proponer un procedimiento para saber si una nueva imagen es o no una cara.

Algunas dificultades más

Ojo con $X^t X$.

Si la resolución de las imágenes es de 112×92 y hay ≈ 500 imágenes en la base:

- ¿Cuál es el tamaño de $X^t X$?

Alternativas

- Trabajar con imágenes más chicas (por ejemplo, 28×23, un 25 % del tamaño original).
- Dada la matriz XX^t, relacionar los autovectores y autovalores de dicha matriz con la original.

Fecha de entrega

- Formato electrónico: Jueves 25 de Mayo de 2017, hasta las 23:59 hs., enviando el trabajo (informe+código) a `metnum.lab@gmail.com`.
- Formato físico: Viernes 26 de Mayo de 2017, de 17:30 a 18:00 hs.