

Wissenschaftliche Simulation

Projektaufgabe 2

Zur Lösung von Randwertproblemen

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

kann man das *einfache Schießverfahren* verwenden, siehe [SB90, Abschnitt 7.3.1].

1. Lösen Sie mit dem einfachen Schießverfahren das Randwertproblem

$$y''(x) = \frac{3}{2}(y(x))^2, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1.$$

Verwenden Sie intern das Newton-Verfahren (s. [DR06, Abschnitt 5.5.2]) und das Bisektionsverfahren (s. [DR06, Abschnitt 5.5.1]).

2. Auf einer Silvesterparty möchte eine Person mit einer Rakete einen bestimmten Punkt in der Entfernung x_1^f treffen. Hierfür möchte die Person mit Hilfe des einfachen Schießverfahrens einen passenden Winkel finden, unter dem er die Rakete abschießen soll. Das Geschoss folgt dabei unter Vernachlässigung der Luftreibung der Bewegungsgleichung

$$x''(t) = -\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

mit den Randbedingungen

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|x'(0)\| = v_0, \quad x(T) = \begin{pmatrix} x_1^f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie numerisch die korrekte Stellung der Abschussposition $\frac{x_2'(0)}{x_1'(0)}$. Für die Modellkonstanten sind die folgenden Zahlenwerte zu wählen

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad v_0 = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad x_1^f = 1000 \text{ m}.$$

3. Zeigen Sie an Hand von numerischen Beispielen, dass das einfache Schießverfahren gewisse numerische Nachteile in Bezug auf Stabilität aufweist.

Erstellen Sie zu den einzelnen Aufgabenteilen geeignete Python-Programme.

Abgabetermin: bis Montag, 12. 12. 2022, 17:00 Uhr.

Literatur

- [DR06] Wolfgang Dahmen und Arnold Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer Verlag, 2006.
- [SB90] Josef Stoer und Roland Bulirsch. *Numerische Mathematik* 2. 3. Aufl. Springer, 1990.