



TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Teknillisen Fysiikan ja
Matematiikan Osasto

Mikko Ilmari Nummelin, 44065E

Konformikuvausten konstruoiminen
yhdesti yhtenäisiltä kompleksitason
alueilta kanonisille alueille.

Diplomi-insinöörin tutkintoa varten tarkastettavaksi jätetty diplomityö
Espoo, 17.09.2007

Työn valvoja: professori Timo Eirola

Työn ohjaaja: tutkija, FT Antti Rasila

TEKNILLINEN KORKEAKOULU

DIPLOMITYÖN

TEKNILLISEN FYSIIKAN JA MATEMATIIKAN OSASTO

TIIVISTELMÄ

<p>Tekijä: Mikko Nummelin Osasto: Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto Pääaine: Teknillinen matematiikka (2002) Sivuaine: Ohjelmistojärjestelmät (2131)</p>	<p>Työn nimi: Konformikuvausten konstruointi yhdesti yhtenäisiltä kompleksitason alueilta kanonisille alueille Title in English: Construction of conformal mappings from simply connected regions onto canonical domains Professuurin koodi ja nimi: Mat-1, Matematiikka Työn valvoja: Professori Timo Eirola Työn ohjaaja: Tutkija, FT Antti Rasila</p>
<p>Tiivistelmä:</p> <p>Tämän diplomityön tarkoituksena on tutkia numeerisia konformikuvausmenetelmiä Jordan-alueilta yksikkökiekoksi tai ylemmäksi puolitasoksi. Pääpaino on oskulaatioalgoritmeissa, joita on tutkittu edellisten vuosikymmenten aikana suhteellisen vähän.</p> <p>Työ sisältää kolme keskeistä teoreettista tulosta, jotka ovat aiemmin tunnettuja, mutta joiden painoarvo tässä tutkimuksessa on huomattava. Ensimmäinen, Joukowskiin muunnoksella voidaan paikallisesti alentaa konformista tiheyttä, mutta toisaalta se lähestyy asympotoottisesti lineaarikuvausta kompleksista ääretöntä kohti mentäessä. Toiseksi, Schwarzin ja Christoffelin kaava yksikkökielelle toimii vain, jos kulmien summaa koskeva ehto täyttyy. Yleensä tätä ehtoa on perusteltu vain geometrisen mielikuvan perusteella, mutta tässä se on sen sijaan todistettu täsmällisesti tekemällä integrointimuuttujan vaihto ja tutkimalla niitä edellytyksiä, millä kertoimet kumoavat toisensa. Kolmanneksi, yrittämällä oikaista alueen reunalla sijaitsevaa sisäänpäin avautuvaa terävää kulmaa murtopotenssilla, saattavat Riemannin pinnat taittua päällekkäin, mikäli kuvattava alue ei ole konvekksi. Tämä konformisuuden rikkova ilmiö voidaan välttää hakemalla ensin kuvattavan alueen konveksikuori ja soveltamalla murtopotenssia siihen. Näistä ensimmäistä ja kolmatta on hyödynnetty Joukowskiin muunnoksen algoritmin ja terävän sisäkulman algoritmin tietokonetoteutuksessa MATLAB:illa. Saatujen selvitysten mukaan on oletettavaa, että näin saatu yhdistetty menetelmä olisi uusi tai sisältäisi ainakin osittain uusia ideoita.</p> <p>Numeeristen testien perusteella vaikuttaa siltä, että Grassmanin algoritmia ja Joukowskiin muunnoksen algoritmia voidaan käyttää elementtimenetelmän esiratkaisijana. Tämä auttaa tarkkuuden parantamiseen ja laskennan nopeuttamiseen tilanteissa, joissa Dirichlet'n ja Neumannin reunaehdoilla varustetut reunat muodostavat ulospäin aukeavan terävän kulman.</p>	
<p>Sivumäärä: 125 Avainsanat: konformikuvaukset, oskulaatioalgoritmit, kompleksianalyysi, numeeriset menetelmät</p>	
<p>Täytetään osastolla Hyväksytty: Kirjasto:</p>	

HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

ABSTRACT OF

DEPARTMENT OF ENGINEERING PHYSICS AND MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

Author: Mikko Nummelin

Department: Department of engineering physics and mathematics

Major subject: Technical mathematics (2002)

Minor subject: Software systems (2131)

Title: Construction of conformal mappings from simply connected regions onto canonical domains

Title in Finnish: Konformikuvausten konstruoiminen yhdesti yhtenäisiltä kompleksitason alueilta kanonisille alueille

Chair: Mat-1, Mathematics

Supervisor: Professor Timo Eirola

Instructor: Research Fellow, PhD, Antti Rasila

Abstract:

The purpose of this Master's Thesis is to study conformal mappings from Jordan domains onto the unit disk or the upper half plane. The main focus is on osculation algorithms, which have been studied relatively little.

The work reviews three well-known results and analyzes their properties in detail. First, Joukowski mapping locally decreases conformal density but asymptotically approaches linear map towards complex infinity. Second, unlike the Schwarz-Christoffel integral formula for the upper half plane, the related formula for the unit disk has a necessary requirement on sum of angles. Usually it is motivated only on geometrical level, but here it is proven rigorously via change of variables and considering cancellation of factors. Third, applying a fractional power in order to unfold a sharp inward opening angle may result in overlapping Riemann surfaces if the original domain is not convex. This conformality-breaking phenomenon can be avoided by constructing the convex hull first and only then applying the power transformation on it. The first and third theoretical results are used numerically in Joukowski mapping algorithm and Grassman's sharp-inner-angle algorithm which are implemented in MATLAB. The author believes that this combination of methods is new or at least contains several original ideas.

According to numerical tests, it also seems as if this combination of Grassman's algorithm and Joukowski mapping could be used as a pre-solver for finite element methods. This can increase precision and improve performance in cases where boundaries with Dirichlet and Neumann boundary conditions form an outward opening sharp or right angle.

Number of pages: 125 Keywords: conformal mapping, osculation algorithms, complex analysis, numerical methods

Department fills

Approved:

Library code:

Kiitokset

Kiitokset työn ohjaajalle tutkija, **FT Antti Rasilalle** ja valvojalle, **prof. Timo Eirolalle** hyvästä yhteistyöstä ja aktiivisesta osallistumisesta työn etenemiseen.

Kiitokset **prof. Matti Vuoriselle** hyvistä neuvoista ja suosituksista tutkimusaiheiden rajauksessa ja hyvässä tieteellisessä esitystavassa.

Kiitokset tutkimusapulainen, **FM Juhana Yrjölälle** hyvistä artikkelisuosituksista, työn etenemisestä keskustelusta ja opastuksesta L^AT_EX-Beamer-paketin käyttöönotossa.

Kiitokset tutkija, **dipl. ins. Mikko Bycklingille** ELMER-elementtimenetelmäohjelmaa koskevista neuvoista.

Kiitokset **prof. R. Michael Porterille** Mexico Cityn yliopistosta ja **prof. Nicolas Papamichaelille** Kyproksen Nikosian yliopistosta, lausunnoista koskien Joukowskin ja Grassmanin oskulaatioalgoritmeja.

Kiitokset lehtori emeritus, **FT Heikki Apiolalle** aikaisemmasta perehdyttämisestä tietokonenumeriikkaan ja MATLAB/Octave-ohjelmistojen käyttöön.

Sisältö

Kiitokset	vii
Johdanto	1
 Osa 1. Konformikuvausten matemaattista teoriaa	 5
Yleistä	6
 Luku 1. Peruskäsitteitä	 7
1.1. Alueet ja Jordan-alueet	7
1.2. Holomorfishet eli analyyttiset funktiot	10
1.3. Konformikuvaukset	13
1.4. Cauchyn estimaatit ja Schwarzin lemma	18
1.5. Holomorfinen logaritmi	19
1.6. Möbius-kuvaus	20
1.7. Riemannin kuvauslause	26
1.8. Joukowskin muunnos	29
1.9. Satunnaiskulut ja harmoninen mitta	31
1.10. Schwarzin ja Christoffelin muunnos	34
 Luku 2. Elliptiset integraalit	 43
2.1. Yleistä	43
2.2. Täydellinen 1. lajin elliptinen integraali	44
2.3. Elliptisen \mathcal{F} :n käänteiskuvaus	45
2.4. Ekvivalentteja muotoja	46
2.5. Landénin muunnos	47
2.6. Ylempi puolitaso yleistettynä nelikulmiona	51
2.7. Suorakaiteiden automorfismit	51
 Luku 3. Konformiset taitokset	 53
3.1. Yleistä	53
3.2. Geodeesinen algoritmi	55
3.3. Slit- eli viiltoalgoritmi	57
3.4. Koeben algoritmi	58
3.5. Terävän ulkokulman algoritmi ANGLEOSC	58
3.6. Terävän sisäkulman algoritmi CONVEX_ANGLEOSC	60
3.7. Joukowskin muunnoksen algoritmi JOSC	61
 Osa 2. Konformikuvausten tietokonenumeriikkaa	 63
Yleistä	64

Luku 4.	Testiohjelmanpakettin 'mnconfpack' esittely	65
4.1.	Cauchyn integraalikaava	65
4.2.	Yksikkökierokko ja monikulmio	65
4.3.	Minimi- ja maksimipiste	66
4.4.	Pistejoukon pakottaminen yksikkökierokkon reunalle	66
4.5.	Holomorfinen neliöjuuri	66
4.6.	Holomorfinen logaritmi	66
4.7.	Terävin ulkokulma	67
4.8.	Terävin sisäkulma	67
4.9.	Möbius-kuvaukset	67
4.10.	Modulaarinen s	67
4.11.	Nelikulmion moduli	68
4.12.	Koebein algoritmi	68
4.13.	Joukowskin muunnoksen algoritmi	68
4.14.	Terävän ulkokulman algoritmi	69
4.15.	Terävän sisäkulman algoritmi	69
4.16.	Geodeesinen algoritmi	69
4.17.	Harmoninen mitta	69
Luku 5.	Testidata ja testit	71
5.1.	Nelikulmiot ja niiden modulit	71
5.2.	Harmonisen mitan konstruointi	87
Luku 6.	Johtopäätökset	93
6.1.	Teoreettisesta tarkastelusta	93
6.2.	Nelikulmion modulin mittaustuloksista	93
6.3.	Harmonisen mitan mittaustuloksista	94
6.4.	Sivuutettuja aihepiirejä	94
6.5.	Jatkotutkimusaiheita ja avoimia kysymyksiä	95
Luku 7.	Liitteet	97
7.1.	MATLAB/Octave-ohjelmakoodit	97
	Kirjallisuutta	109

Johdanto

Yleistä. Työn tavoitteena oli kuvata yhdesti yhtenäisiä alueita konformisesti yksikkökiekoksi, ylemmäksi puolitasoksi tai suorakaiteeksi. Hyötynä tästä saadaan lämpötilajakaumien, sähkökenttien potentiaalien, virtauksien, elastiikan, akustiikan, tai lujuuksien laskemisessa käytettyjen differentiaaliyhtälöiden yksinkertaistuminen, kun tarkasteltavan alueen reuna on saatu kuvattua säännöllisemmäksi. Tämä ominaisuus perustuu olennaisesti siihen, että jos $w : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ on konformikuvaus, niin se on ensinnäkin homeomorfismi alueiden Ω_1 ja Ω_2 välillä ja toiseksi, jos kuvaus jaetaan reaali- ja imaginaariosiinsa

$$w(z) = w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

niin sekä reaali- että imaginaariosat u ja v täyttävät Laplacen yhtälön $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ (ja siis sama v :lle). Kun vastaavasti useat kaksikulotteiset fysikaalisissa sovelluksissa esiintyvät osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat muotoa

$$-a\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = f,$$

niin yksinkertaisemmalle alueelle suoritettun konformikuvauksen hyödyt ovat ilmeisiä. Ks. erityisesti [SL, Luvut 1 ja 5-14].

Konformikuvauksia on historiallisesti ja nykyäänkin käytetty karttapiirrosten teossa, tunnetuimpana esimerkkinä Mercatorin projektio, jolla Maan pallopintaa voidaan kuvata tasokarttana niin, että leveys- ja pituuspiirit ovat kartallakin edelleen täsmälleen kohtisuorassa. Tällöin pinta-alat ja etäisyydet eivät kuitenkaan säily suhteellisesti samoina, vaan napa-alueiden läheisyydessä pinta-alat kasvavat ja pituudet venyvät leveyssuunnassa. Näitä muutoksia voidaan analysoida esimerkiksi konformisen tiheyden (1.3.5) avulla. Konformikuvauksia on viimeimmän vuosisadan aikana käytetty lisäksi tuulitunneleiden, elektronimikroskooppien, kiintolevyjen lukupäiden, piirilevyjen, kondensaatoreiden ja puolijohdekomponenttien suunnittelussa, samoin kuin esimerkiksi aivojen magneettikuvauksen tulosten esittämisessä [ZHGM]. Konformikuvauksilla on merkitystä myös jatkuva-aikaisisten stokastisten prosessien analysoinnissa, sillä on voitu osoittaa, että alueen reunan konformisesta kuvasta yksikkökiekon reunalle voidaan päätellä ns. harmoninen mitta, joka kuvaa stokastisen prosessin lopputiloihin päätyminen todennäköisyyksiä (ks. kappaletta 1.9). Artikkelissa [TD, Kohta 4] käsitellään myös jonkin verran käytännön sovelluksia, esimerkiksi vapaat virtausprofiilit, lähestymistapana myöhemmin mainittava Schwarzin ja Christoffelin integraalikaava.

Käytetyt menetelmät. Konformikuvausten menetelmien pohjana on tässä työssä kaikissa tapauksissa käytetty kompleksifunktioiden

teoriaa. Syynä tähän on se, että sellaiset annetun alueen A yksi-yhteen-kuvaukset eli bijektiot kohdealueeksi B , joissa annetun alueen sisällä ei esiinny napoja, oleellisia erikoispisteitä tai derivaatan nollakoh tia säilyttävät sisäiset kulmat. Mikäli myös saman kuvauksen laajennus A :n sulkeumalta B :n sulkeumalle eli ns. Caratheodoryn reunalaajennus, on bijektio, niin nämä kuvaukset ovat konformikuvauksia (ks. lausetta 1.3.2). Tämä yleisesti tunnettu tulos on näytetty peruskäsitteitä esiteltäessä ja esiintyy miltei missä tahansa kompleksianalyysin oppikirjassa, esimerkiksi [Rud, Luku 14], [Ahl, Luku II, Kappale 3.2.] tai [Gam, Luku II, Kappale 6].

Jotta konformikuvausten hakeminen olisi yleensä mielekästä, on tässä työssä tuotu esiin tärkeinä apuvälineinä Riemannin kuvauslause, joka sanoo, että mikä tahansa Jordan-alue voidaan kuvata konformisesti yksikkökiekoksi, tämän konstruktivisena todistuksena Koebe'n kuvaus (ks. lausetta 1.7.1 todistuksineen), Schwarzin ja Christoffelin integraalikaava yksikkökiekon tai ylemmän puolitason kuvaamiseksi monikulmioksi (ks. mm. lauseita 1.10.5 sekä 1.10.6) ja jälkimmäisen erikoistapauksena kolmen eri lajin elliptiset integraalit (ks. lukua 2). Eri-tyistä huomiota on kiinnitetty niihin Schwarzin ja Christoffelin kaavoihin, jotka kuvaavat yksikkökiekon monikulmioksi, sillä kuten näiden todistuksista voidaan havaita, vaaditaan niiden pätevyydelle tiukempia rajoitteita kuin vaikkapa sille Schwarzin ja Christoffelin kaavalle, joka kuvaa ylemmän puolitason konveksiksi monikulmioksi. Ks. lausetta 1.10.7 todistuksineen. Lisäksi on jonkin verran kiinnitetty huomiota Schwarzin ja Christoffelin kaavan parametriongelmaan, joka esiintyy silloin kun kulmapisteitä kohdemonikulmiossa on enemmän kuin kolme, samoin kuin kasautumisongelmaan, joka esiintyy silloin, kun monikulmion sivuja on useita tai ne ovat huomattavan pitkiä. Näiden tarkemmasta käsittelystä, ks. artikkelia [TD] tai teosta [How]. Tärkeä perusteos Schwarzin ja Christoffelin kaavan käytöstä on [DT].

Yksikkökiekon ja puolitasojen välisiä kuvauksia varten on esitelty Möbius-kuvaus (ks. lausetta 1.6.10 ja kaavaa 1.6.14) ja paikallisten (äärettömyydessä tasoittuvien) konformikuvausten laatimiseksi Joukowskin muunnos (1.8.1).

Niissä tapauksissa, joissa alkuperäinen alue on kuvattu konformisesti suorakaiteeksi, kuvaten etukäteen määrätty neljä reunapistettä suorakaiteen kulmiksi, on huomiota kiinnitetty syntyneen suorakaiteen korkeuden suhteeseen leveyteen. Tämä suure, jota sanotaan nelikulmion moduliksi eli venymäkertoimeksi, toimii eräänä objektiivisena suureena määritettäessä konformikuvausten tarkkuutta. Ks. lausetta 1.3.6. Näin siksi, että joissakin tapauksissa nelikulmion modulin arvo on etukäteen teoreettisesti selvillä.

Konformikuvauksen numeerisista menetelmistä on tässä työssä keskitytty eniten oskulaatioalgoritmeihin. Tämä valinta on tehty pääasias- sa siksi, että niiden tutkimus on ollut ilmeisesti viime vuosikymmeninä

vähäisempää kuin esim. variaatiomenetelmien, vrt. [SL, Kappale 4.1], jossa oskulaatioalgoritmien kenties virheellisesti todetaan ”sopivan huonosti mekanisoitavaksi tietokoneella”.

Näistä on käsitelty Riemannin kuvauslauseeseen perustuva yleispätevä Koebein algoritmi (ks. kappaletta 3.4), allekirjoittaneen itse kehittämä Joukowskin muunnoksen algoritmi (ks. kappaletta 3.7) tietyt säännöllisyysominaisuudet täyttävien alueiden konformikuvaukseksi yksikkökiekoksi, samoin kuin terävien sisä- ja ulkokulmien oikaisuun perustuva Grassmanin algoritmi. Tätä nimitystä on käytetty pääasiallisesti siksi, että R. Michael Porterin artikkelissa [Por, Kappale 6.3] kulmien oikaisuista oskulaatioalgoritmeissa näin tehdään. Artikkelin tosin puhuu yleisluontoisemmin kulmien oikaisuun yhdistämisestä muihin kuvauksiin, tässä taas kulmien oikaisu on jaettu kahteen eri luokkaan, ulospäin avautuvien terävien kulmien oikaisuun Koebein kuvauksen tyyppisellä kuvauksella (ks. kappaletta 3.5) ja *konveksikuoren* (engl. convex hull) sisäänpäin avautuvien kulmien oikaisuun murtopotenssilla, jossa eksponentti > 1 , (ks. kappaletta 3.6). Löytämäni lähdeaineiston perusteella ei ole selvää, missä määrin konveksikuorta on käytetty hyväksi oskulaatioalgoritmeissa aiemmin. Oskulaatioalgoritmeista on mainitun artikkelin sinh-log-menetelmä [Por, Kappale 6.4] tässä työssä sivuutettu.

Konformisista taitoksista on esitelty muttei testattu geodeesinen algoritmi, viiltoalgoritmi ja vetoketjualgoritmi (ks. kappaleesta 3.2 eteenpäin ja artikkelia [MR]). Lisäksi on suoritettu joitakin nelikulmion modulien mittauksia elementtimenetelmällä, samoin kuin harmonisen mittan arviointia, ks. lukua 5.

Konformikuvausmenetelmistä yleisesti ja alan kehityksestä tehokkaan numeerisen analyysin aikana on hyvä lähdeartikkeli [Pap], jossa käydään läpi edesmenneen saksalaisen Dieter Gaierin tutkimuksia eri konformikuvausalgoritmeista. Samoin kirjallisuudesta voidaan mainita [Weg], joka käsittelee laaja-alaisesti eri konformikuvausalgoritmeja.

Tuloksista lyhyesti. Luvussa 5 on taulukoitu numeerisesti arvioituja nelikulmion moduleja useille yhdesti yhtenäisille alueille, samoin kuin elementtimenetelmällä laskettuja potentiaalienttiä. Lisäksi kahdesta alueesta on arvioitu harmonista mittaa Grassmanin algoritmin, Joukowskin muunnoksen algoritmin ja yksikkökiekon reunan mittauksen yhdistelmällä. Tarkempia tietoja varten, ks. lukuja 5 ja 6.

Johtopäätöksistä lyhyesti. Saatujen numeeristen tulosten perusteella Koebein algoritmi on laskennallisesti stabiili, mutta hidas ja numeerisesti epätarkka konformikuvauksen määrittämiseksi. Sitä voidaan kuitenkin käyttää viimesijaisena vaihtoehtona reunaltaan monimutkaisten alueiden kuvaamisessa, esimerkiksi jos on tarpeen saada karkea approksimaatio harmoniselle mitalle osasta tämän reunaa. Joukowskin muunnoksen algoritmi on hieman nopeampi ja tarkempi,

mikäli kuvattava alue oli konvekksi. Myös joillekin yksinkertaisille eikonvekseille alueille saattoi soveltaa Joukowskin muunnoksen algoritmia, mikäli esiratkaisijana oli käytetty Grassmanin algoritmia terävien ulospäin avautuvien kulmien oikaisemiseksi. Elementtimenetelmä tuotti kohtuullisen tarkkoja arvoja, mutta oli hidas ja hyvin monimutkaisilla alueilla epästabiili. Johtopäätöksistä tarkemmin luvussa 6.

Osa 1

Konformikuvausten matemaattista
teoriaa

Yleistä

Tämän osan tarkoituksena on esitellä konformikuvausten yhteydessä tarvittavia tärkeimpiä käsitteitä. Nämä on jaettu kolmeen osaan, joista ensimmäisenä esille otetaan kompleksitason topologian ja kompleksianalyysin peruskäsitteitä, mukaanlukien Schwarzin ja Christoffelin integraalikaava ja sen eräitä tulkintoja. Toisena otetaan esille elliptisten integraalien ja elliptisten funktioiden kaavoja, johtuen näiden merkityksestä suorakaiteita koskevien konformikuvausten yhteydessä. Kolmantena käsitellään konformisten taitosten ja oskulaatioalgoritmien teoriaa, jolla pohjustetaan myöhempää tietokonenumeriikkaosaa.

Osa lauseista on esitetty todistuksineen, erityisesti Möbius-kuvausten teoriaan, Schwarzin ja Christoffelin kaavan yksikkökiekkotulkintaan ja elliptisten integraalien Landénin muunnoksen geometriseen tulkintaan on kiinnitetty runsaasti huomiota. Tämä käsittelytapa on valittu pääasiassa siksi, että monet kirjallisuus- ja verkkolähteet saattavat perustella ne vain osittain ja jättää olennaisia piirteitä niiden todistuksista vähemmälle käsittelylle. Esimerkkinä tästä [TD, Kaava 1], jossa muuten on ajankohtaista ja tärkeää teoriaa Schwarzin ja Christoffelin kaavan sovelluksista ja sen muunnoksista koskien pitkulaisia alueita, joissa esiintyy runsas kasautumisongelma.

Esimerkkinä tästä ovat Schwarzin ja Christoffelin kaavojen pätevyyden kannalta olennaiset rajoitusehdot. Näistä ylemmän puolitason konveksiksi monikulmioksi kuvaava muunnos on joustavin, konkaavien monikulmioiden eli ulospäin aukeavien kulmien osalta on äärettömässä sijaitsevien kriittisten pisteiden rajoituksia, yksikkökiekon kuvaamisessa monikulmioksi taas kulmien summaa koskeva rajoitus.

LUKU 1

Peruskäsitteitä

1.1. Alueet ja Jordan-alueet

Aloitetaan määrittelemällä työn kannalta keskeisiä topologisia käsitteitä.

MÄÄRITELMÄ 1.1.1 (Kiekot). *Kompleksitason z_0 -keskeinen ja r -säteinen avoin kiekko olkoon*

$$(1.1.2) \quad \mathbb{D}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}.$$

Vastaavasti z_0 -keskeinen ja r -säteinen avoin puhkaistu kiekko (z_0 pois-tettu) olkoon

$$\mathbb{D}'(z_0, r) = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Tässä työssä erityisasemassa on erityisesti *yksikkökiekko* $\mathbb{D}(0, 1)$, joka on eräs *kanonisista alueista*. Ks. [Rud, Kappale 10.1] ja kuvaa 1.2. Alue määritellään tässä työssä jäljempänä yleisesti määritelmässä 1.1.4.

MÄÄRITELMÄ 1.1.3 (Topologia ja avoimet joukot). *τ on kompleksitason \mathbb{C} topologia, jos*

- $\emptyset \in \tau$,
- $\mathbb{C} \in \tau$,
- $\forall z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, \mathbb{D}(z_0, r) \in \tau$,
- $(\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, V_k \in \tau) \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n V_k \in \tau$,
- $(\forall \alpha V_\alpha \in \tau) \Rightarrow \bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Indeksijoukko α voi olla äärellinen, numeroituva tai ylinumeroituva. Topologiaan τ kuuluvia joukkoja sanotaan kompleksitason avoimiksi joukoiksi.

Ks. [Rud, Määritelmä 1.2] tai [Vai, Luku 3].

MÄÄRITELMÄ 1.1.4 (Yhtenäisyys, yhdesti yhtenäisyys ja alueet). *Joukko Ω on yhtenäinen, jos kaikille joukoille A ja B pätee*

$$A \cup B = \Omega \implies [(\overline{A} \cup B \neq \emptyset) \vee (A \cup \overline{B} \neq \emptyset)].$$

Sellaiset yhtenäiset joukot, joiden ulkopuolikin $\mathbb{C} \setminus \Omega$ on yhtenäinen, ovat yhdesti yhtenäisiä.

Yhtenäiset kompleksitason avoimet joukot ovat kompleksitason alueita (engl. region).

Ks. myös [Rud, Määritelmä 10.1, Kappale 10.38].

MÄÄRITELMÄ 1.1.5 (Homeomorfismi). *Kuvaus*

$$f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

on homeomorfismi, jos

- (1) *f on bijektio*
- (2) *f on jatkuva*
- (3) *$f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ on jatkuva.*

Ks. [Vai, Määritelmä 9.2].

MÄÄRITELMÄ 1.1.6 (Käyrä). *Jos on olemassa homeomorfismi*

$$f : [0, 1] \rightarrow \gamma,$$

niin γ on kaari. Jos on määritetty useita kaaria siten, että

$$f_k : [0, 1] \rightarrow \gamma_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

ja kullekin k pätee $f_k(1) = f_{k+1}(0)$, niin kaaret ovat päistään yhdistettyjä ja muodostavat käyrän. Jos erityisesti $f_n(1) = f_1(0)$, niin käyrä on sulkeutuva. Käyrä voi myös koostua äärettömän monesta kaaresta, jolloin kyseistä käyrää voidaan käsitellä useiden äärellisten käyrien rajaprosessina

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \gamma_{n,k}$$

Pilkullista summamerkkiä käytettiin tässä kaarien päistään yhdistämisen merkinä. Vastaavasti äärettömän monesta osasta koostuvaa suljettua käyrää voidaan käsitellä useiden äärellisten sulkeutuvien käyrien rajaprosessina. Äärettömät käyrät mahdollistavat sen, että joku käyrä voi olla ei-missään-derivoituva tai dimensioltaan > 1 , eli ns. fraktaalinen käyrä.

Pistejoukko

$$\gamma^* = \{x : \exists t \in [0, 1] \ f(t) = x\}$$

on kaaren γ graafi ja unioni

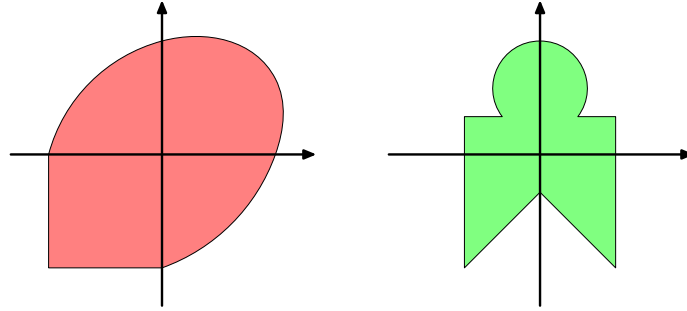
$$\Gamma^* = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k^*$$

käyrän Γ graafi.

Tässä työssä nämä käsitteet samaistetaan ja tyydytään merkitsemään vain $\gamma^* \sim \gamma$, mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole. Ks. [Vai, Luku 9] ja [Rud, Määritelmä 10.8].

MÄÄRITELMÄ 1.1.7 (Jordan-käyrät ja Jordan-alueet). *Käyrä, joka on homeomorfinen yksikkökiekon reunan $\mathbb{D}(0, 1)$ kanssa, on Jordan-käyrä. Kompleksitason Jordan-käyrän sisäpuolelleen sulkema alue on Jordan-alue.*

Ks. [Vai, Esimerkit 9.11, kohta 4].



KUVA 1.1. Konvekssi alue (vasemmalla) ja tähtimäinen alue origon suhteen (oikealla).

Yleistetyt nelikulmiot. Määritellään myöhempiä käyttötarkoituksia ja konformisen ekvivalenssin tutkimista varten yleistetty nelikulmio.

MÄÄRITELMÄ 1.1.8 (Yleistetty nelikulmio). Yleistetty nelikulmio on viisikko $(\Omega, z_1, z_2, z_3, z_4)$, jossa kukin piste z_k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ sijaitsee Jordan-alueen Ω reunalla $\forall k$, $z_k \in \partial\Omega$ ja mainitut pisteet ovat järjestyksessä kierrettäessä alueen Ω reunaa $\partial\Omega$ pitkin vastapäivään. Nämä pisteet jakavat alueen Ω reunan neljään osaan $\partial\Omega = \cup_k \gamma_k$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, missä kukin γ_k alkaa pisteestä z_k ja päättyy pisteeseen z_{k+1} , poikkeuksena kaari γ_4 , joka päättyy pisteeseen z_1 . Näitä pisteitä z_k kutsuttakoon alkukulmiksi tai kriittisiksi pisteiksi, käyriä γ_1 ja γ_3 yleistetyiksi vaakasisiviksi ja käyriä γ_2 ja γ_4 yleistetyiksi pystysiviksi.

Tähtimäisyys ja konveksisuus. Oletetaan, edelleen että Ω on alue ja että $z_0 \in \Omega$. Mikäli tämän ja kaikkien muiden joukon Ω pisteiden yhdysjanat kuuluvat joukkoon Ω , eli

$$(1.1.9) \quad \forall z \in \Omega, t \in (0, 1), z_0 + (z - z_0)t \in \Omega,$$

sanotaan, että Ω on *tähtimäinen* pisteen z_0 suhteen. Joukko, joka on tähtimäinen kaikkien sisäpisteidensä suhteen, on *konvekssi*. Ks. kuvaa 1.1.

Kanoniset alueet. Määritelmässä 1.1.1 kanonisista alueista mainittiin jo yksikkökierokko. Muita kanonisia alueita, jotka ovat tärkeitä konformikuvausten osalta ovat yhdesti yhtenäisistä alueista ylempi puolitaso

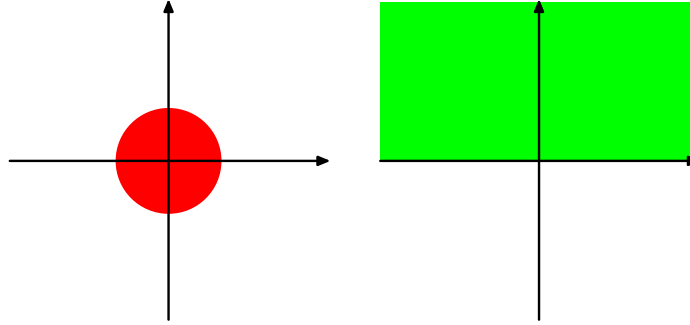
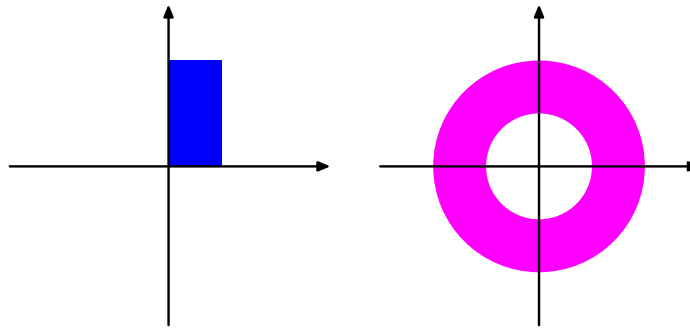
$$(1.1.10) \quad \mathbb{H} = \{z : \Im(z) > 0\},$$

ja normitetut suorakaiteet

$$(1.1.11) \quad S(M)' = \{z : \Re(z) \in (0, 1) \wedge \Im(z) \in (0, M)\}.$$

Ks. kuvia 1.2 ja 1.3.

Toisaalta joskus suorakaiteet halutaan asettaa mieluummin symmetrisesti y -akselin tai origon molemmin puolin. Lisäksi kanoniseksi

KUVA 1.2. Yksikkökierros $\mathbb{D}(0, 1)$ ja ylempi puolitaso \mathbb{H} KUVA 1.3. Normitettu suorakaide $\mathbb{S}(M)$ ja ympyrären-
gas eli annulus $\mathbb{A}(r_1, r_2)$

alueeksi katsotaan kahdesti yhtenäisistä alueista ympyrären-
gas eli annulus

$$(1.1.12) \quad \mathbb{A}(r_1, r_2) = \{z : 0 < r_1 < |z| < r_2\}.$$

Ks. [Rud, Kappale 14.21] ja kuvaa 1.3. Tässä sovittakoon erikseen, että määritelmän 1.1.8 nojalla, jos sekaannuksen vaaraa ei ole, tarkoi-
tettakoon normitetulla suorakaiteella myös yleistettyä nelikulmiota

$$(1.1.13) \quad \mathbb{S}(M) = (\mathbb{S}(M)', 0, 1, 1 + iM, iM).$$

1.2. Holomorfiset eli analyyttiset funktiot

Cauchyn-Riemannin yhtälöt. Kompleksimuuttujan kompleksiar-
voinen funktio on holomorfinen eli analyyttinen alueessa Ω , mikäli kai-
kissa alueen Ω pisteissä $z \in \Omega$, raja-arvo

$$(1.2.1) \quad w'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(z+h) - w(z)}{h}$$

on yksikäsitteisesti määritelty siitä suunnasta ja tavasta, miten h lähe-
nee origoa, riippumatta. Jos erityisesti määritellään

$$(1.2.2) \quad z = x + iy, \quad w(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

niin tutkimalla erikseen lähestymistä x - ja y -akselien suunnasta, saadaan

$$\begin{aligned}
 w'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) + \hat{v}(x+h, y) - u(x, y) - \hat{v}(x, y)}{h} \\
 &= u_x + \hat{v}_x \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, y+h) + \hat{v}(x, y+h) - u(x, y) - \hat{v}(x, y)}{\hat{h}} \\
 (1.2.3) \quad &= v_y - \hat{u}_y.
 \end{aligned}$$

Edellisestä kaavasta (1.2.3) voidaan, asettamalla reaali- ja imaginaariosat samoiksi, johtaa Cauchyn-Riemannin yhtälöt

$$(1.2.4) \quad u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

[Rud, Kappale 11.2]. Mikäli kyseiset reaali- ja imaginaariosat ovat jatkuvia, ovat ne myös harmonisia, sillä tällöin sekaderivaatat¹ yhtyvät: $u_{xy} = u_{yx}$, $v_{xy} = v_{yx}$ ja

$$(1.2.5) \quad u_{xx} = v_{xy} = -u_{yy}, \quad v_{xx} = -u_{xy} = -v_{yy}.$$

Ensimmäisestä kaavoista (1.2.4) saadaan edelleen integroimalla

$$\begin{aligned}
 \int u_x \, dy &= \int v_y \, dy, \\
 (1.2.6) \quad v(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x} \, dy + C, \quad C \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

joten jos tunnetaan harmoninen funktio u , niin se voidaan aina tulkitella jonkun holomorfin funktion reaaliosaksi ja imaginaariosa selvittää Dirichlet'n integraalilla (1.2.6). Sanotaan myös, että v on u :n harmoninen konjugaatti tai liittoharmoninen funktio.

Mainittakoon tässä, että on olemassa erikseen yleisempi kompleksimuuttujan kompleksiarvoisten funktioiden luokka, jossa reaali- ja imaginaariosa muodostuvat harmonisista funktioista kuten holomorfin funktioidenkin tapauksessa, mutta jossa ei välttämättä edellytetä näiden olevan harmonisia konjugaatteja. Tällaisia funktioita sanotaan *kompleksisiksi harmonisiksi funktioiksi*, näistä on lisätietoa esimerkiksi teoksessa [Dur].

Kompleksinen integrointi. Määritellään seuraavassa kompleksin integraali derivoituville integrointipoluille.

MÄÄRITELMÄ 1.2.7. Oletetaan, että $\gamma(t)$, $t = [a, b]$ on parametrisoitu derivoituva kompleksitason polku, joka voi olla sulkeutuva $\gamma(a) = \gamma(b)$. Funktion $w(z)$ kompleksinen integraali polun $\gamma(t)$ alusta loppuun on

$$\int_{\gamma} w(z) \, dz = \int_a^b w(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt.$$

¹Kaksinkertaiset osittaisderivaatat, joissa on derivoitu sekä muuttujan x että muuttujan y suhteen, esim. u_{xy} .

Joskus on kuitenkin tarpeen integroida ainoastaan paloittain derivoituvia polkuja pitkin. Tällöin, jos Γ on polku, jossa on laskettu yhteen (päätepisteet yhdistetty siten, että kunkin γ_k :n loppupää yhtyy γ_{k+1} :n alkupisteeseen) useita polkuja γ_k , niin voidaan määritellä

MÄÄRITELMÄ 1.2.8. Jos $\Gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k$, niin

$$\int_{\Gamma} w(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} w(z) dz.$$

[Rud, Kappale 10.8]

Cauchyn integraalilause ja potenssisarjaesitykset. Kompleksianalyysissä esiintyy tilanteita, joissa Jordan-alueessa Ω holomorfin funktion $w(z)$ arvot tunnetaan ainoastaan alueen Ω reunakäyrällä γ , muttei alueen Ω sisäpisteissä. Tällöin $w(z)$:n arvot voidaan kuitenkin evaluoida näissäkin seuraavan integraalilauseen avulla

LAUSE 1.2.9. Jos $F(z)$ on Jordan-alueessa Ω määritelty holomorfinen funktio, niin

$$(1.2.10) \quad \int_{\partial\Omega} F'(z) dz = 0.$$

Jos $w(z)$ on Jordan-alueessa Ω määritelty holomorfinen funktio ja $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ tämän parametrisoitu (sulkeutuva) reunakäyrä, vastapäivään kierrettynä, niin

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{w(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{w(\gamma(t))\gamma'(t) dt}{\gamma(t) - z}, \quad z \in \Omega. \end{aligned}$$

Jos taas $z \notin \Omega$, niin integraali (1.2.11) saa arvon 0 kaavan (1.2.10) nojalla.

TODISTUS. Sivutetaan, ks. [Rud, Kappaleet 10.10-17, 10.35], jossa on todistettu useita yleisempiäkin lauseita tai [Ahl, Luku III, Kappale 2]. Todistus on kaiken kaikkiaan pitkäkö, koska siinä joudutaan ottamaan huomioon erikseen kiekkoja, konvekseja alueita, monikulmioita ja integraalien yhdistämisä määritelmän 1.2.8 nojalla. Tässä työssä on otettu esiin vain tässä esitettäviin sovelluksiin vaadittava muoto. \square

LAUSE 1.2.12. Jos funktio $w(z)$ on holomorfinen yksikkökieken sisällä $|z| < 1$, niin funktiolla $w(z)$ on yksikkökieken sisällä suppeneva potenssisarjaesitys

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

TODISTUS. Integroidaan funktiota $w(z)/(z^{k+1})$ yksikkökieken reunan γ ympäri, eli sijoitetaan $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$ ja lasketaan

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \frac{w(z) dz}{z^{k+1}} &= \int_{\gamma} \frac{w(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta}{e^{i(k+1)\theta}} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} e^{i(\ell-k-1)\theta} ie^{i\theta} d\theta \\
 (1.2.13) \qquad &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} e^{i(\ell-k)\theta} d\theta = 2i\pi c_k.
 \end{aligned}$$

□

Erityistä merkitystä on lauseen 1.2.12 tapauksella $k = 0$, jolloin saadaan translaatiolla ja skaalauksella ns. *keskiarvoperiaate*: jos funktio $w(z)$ on holomorfinen kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$, niin $w(z_0)$ on kiekon reunalla laskettujen funktion $w(z)$ arvojen keskiarvo. Jos taas valittaisiin yleisemmin funktio, jolla olisi *Laurént-sarjaesitys*

$$(1.2.14) \qquad w(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

niin $w(e^{i\theta})$ olisi yleinen 2π -jaksoinen funktio ja kertoimet c_k olisivat sen Fourier-kertoimia [Rud, Luku 10, Tehtävä 25], [Ahl, Luku IV, Kappale 2.3].

1.3. Konformikuvaukset

Asetetaan ensin seuraavanlainen apumääritelmä:

MÄÄRITELMÄ 1.3.1. *Yksikkökiekossa määritelty holomorfinen injektio $w(z)$ kuuluu luokkaan $e^{i\theta}\mathcal{S}$, jos $w(0) = 0$ ja $|w'(0)| = 1$. Jos erityisesti $w'(0) = 1$, niin $w(z)$ kuuluu luokkaan \mathcal{S} .*

[Rud, Kappale 14.10]

Homeomorfismi, joka säilyttää paikalliset kulmat alueen Ω sisällä kuva-avaruudessa on *konformikuvaus*. Kun holomorfinen funktioiden käsite on tunnettu, voidaan konformikuvaus luokitella täsmällisemmin seuraavasti:

LAUSE 1.3.2. *Kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio $w(z)$ on konforminen alueessa Ω , jos ja vain jos se on holomorfinen alueessa Ω , kaikissa alueen Ω sisäpisteissä pätee $w'(z) \neq 0$ ja sen käänteiskuvaus on yksikäsitteinen, s.o. ei ole kahta alueen Ω sisäpistettä z_1 ja z_2 , joille pätee $w(z_1) = w(z_2)$.*

TODISTUS. Yleisyyttä loukkaamatta tarkastellaan apulausetta, jonka mukaan ne funktiot, jotka kuuluvat luokkaan $e^{i\theta}\mathcal{S}$ (ks. määritelmää 1.3.1), säilyttävät origossa paikalliset kulmat, kun taas funktiot, joille pätee $w(0) = w'(0) = 0$, eivät näin tee. Syynä tähän on, että näihin

erikoistapauksiin päästään aina translaatiolla ja kompleksisella vakiolla kertomalla.

Olkoon $w \in e^{i\theta}\mathcal{S}$, jolloin ensinmainitussa tapauksessa pätee

$$(1.3.3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{w(re^{i\theta})}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(e^{i\theta} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k r^{k-1} e^{ik\theta} \right) = e^{i\theta},$$

jolloin ilmeisesti hyvin pienessä origon ympäristössä $w(z)$ on pelkkä rotaatio $e^{i\theta}z$, joka tietysti säilyttää kulmat. Jälkimmäisessä tapauksessa taas joko w on nollafunktio tai on olemassa pienin mahdollinen n siten, että $w^{(n)}(0) \neq 0$. Tällöin funktiolla $w(z)$ on sellainen potenssisarjaesitys, että voidaan lausua

$$(1.3.4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{w(re^{i\theta})}{r^n} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(c_n e^{in\theta} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k r^{k-n} e^{ik\theta} \right) = c_n e^{in\theta},$$

joten $w(z)$ taittaa origossa olevat kulmat n -kertaisiksi eikä siis säilyttänyt niiden suuruuksia. Näin on lause (1.3.2) todistettu. \square

Ks. [Rud, Kappale 14.2], [Ahl, Kappale 3.2.] ja [SL, Kappale 2.4].

Konformikuvauksille olennainen suure on *konforminen tiheys*, joka määritellään

$$(1.3.5) \quad \sigma(w(z)) = \frac{1}{|w'(z)|}.$$

Konformikuvauksilla $\sigma(w(z)) \in (0, \infty)$. Konforminen tiheys kuvaa sitä, muuttuvatko pituudet kuvauksessa suuremmiksi (pieni konforminen tiheys) vai pienemmiksi (suuri konforminen tiheys). Konforminen tiheys on suuri derivaatan nollakohtien ympäristössä ja pieni napojen ympäristössä. Joissakin tapauksissa puhutaan myös suurennuskertoimesta pituuden suhteen $|w'(z)|$ tai suurennuskertoimesta pinta-alan suhteen $|w'(z)|^2$, joiden yhteys konformiseen tiheyteen on ilmeinen. Ks. [SL, 2.29-30].

Konforminen ekvivalenssi ja konforminen moduli. Tässä vaiheessa voidaan määritellä konformisen ekvivalenssin käsite yhdesti yhtenäisille alueille ja yleistetyille nelikulmioille. Yleistetyn nelikulmion määritelmä ja merkintä on esitelty aiemmin kohdassa 1.1.8.

MÄÄRITELMÄ 1.3.6 (Konforminen ekvivalenssi). *Olkoot $(\Omega_1, z_1, z_2, z_3, z_4)$ ja $(\Omega_2, w_1, w_2, w_3, w_4)$ yleistettyjä nelikulmioita ja*

$$w : \overline{\Omega}_1 \rightarrow \overline{\Omega}_2$$

*homeomorfismi*², jolle

$$w(z_k) = w_k, k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

²Joissakin tapauksissa hyväksytään myös ”viiltoalueet”, kuten kuvassa 1.10 myöhemmin esiintyy. Näissä tapauksissa tulee sisäänpäin taittuneen reunan pisteet laskea kulkusuunnasta riippuen useampaan kertaan. Tässä näiden, samoin kuin fraktaalisten reunoja käsittävien alueiden, käsittely kuitenkin sivuutetaan.

ja joka on konforminen alueessa Ω_1 . Tällöin kyseiset yleistetyt nelikulmiot ovat konformisesti ekvivalentteja toistensa kanssa ja voidaan merkitä

$$w : (\Omega_1, z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow (\Omega_2, w_1, w_2, w_3, w_4).$$

MÄÄRITELMÄ 1.3.7 (Nelikulmion moduli). *Jos yleistetty nelikulmio $(\Omega, z_1, z_2, z_3, z_4)$ on konformisesti ekvivalentti kanonisen suorakaiteen $\mathbb{S}(M)$ kanssa, on tämän yleistetyn nelikulmion konforminen moduli eli venymäkerroin (engl. shape factor)*

$$\text{GQM}((\Omega, z_1, z_2, z_3, z_4)) = M.$$

Jos yleistetyn nelikulmion yleistetyt pystysivut vaihtaa yleistetyiksi vaakasivuiksi ja toisinpäin, konforminen moduli muuttuu käänteisluvukseen.

$$\text{GQM}'((\Omega, z_1, z_2, z_3, z_4)) = \frac{1}{\text{GQM}((\Omega, z_2, z_3, z_4, z_1))}.$$

Ks. [SL, Kaava (3.101)]. Joissakin tapauksissa tarvitaan myös ympyrärenkaan modulin käsitettä:

LAUSE 1.3.8 (Ympyrärenkaan eli annuluksen moduli). *Negatiivista reaaliakselia pitkin katkaistun ympyrärenkaan $\mathbb{A}(r_1, r_2) \setminus \mathbb{R}_-$, konforminen moduli $\text{GQM}(\mathbb{A}(r_1, r_2) \setminus \mathbb{R}_-)$ on*

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \text{GQM}(\mathbb{A}(r_1, r_2) \setminus \mathbb{R}_-, -r_2 + ih, -r_1 + ih, -r_1 - ih, -r_2 - ih) = \frac{2\pi}{\ln(r_2) - \ln(r_1)},$$

mikäli sisä- ja ulkorenkaat tulkitaan yleistetyiksi pystysivuiksi ja negatiivisen reaaliakselin ylä- ja alapuoliskot yleistetyiksi vaakasivuiksi (raja-arvotarkastelua käytettiin selvyyden vuoksi, jotta kriittiset pisteet eivät olisi menneet täysin päällekkäin).

TODISTUS. Suorakaiteen S , jonka reunapisteen ovat vastapäivään kierrettyinä $\ln(r_1) - i\pi$, $\ln(r_2) - i\pi$, $\ln(r_1) + i\pi$ ja $\ln(r_2) + i\pi$, $0 < r_1 < r_2$, nelikulmion moduli on $2\pi/(\ln(r_2) - \ln(r_1))$. Koska tämä suorakaide on konformisesti ekvivalentti mainitulle ympyrärenkaalle päähaaraa myöten otetun logaritmin $\mathbb{A}(r_1, r_2) \setminus \mathbb{R}_- = \text{Ln}(S)$ nojalla, niin lause 1.3.8 on todistettu. \square

Huomautus! Jotkut kirjat käyttävät konformiselle modulille toisenlaista merkintää, lähtien siitä, että annuluksen moduli $\text{GQM}(\mathbb{A}(1, r))$ olisi $\ln(r)$. Ks. esim. [LV, Kappale 6.1]. Tällainen määritelmä on vakioita ja inversiota vaille sama kuin lähdettäessä tässä esitetyn tavoin ennemminkin liikkeelle suorakaiteen korkeuden suhteesta leveyteen. Tässä jälkimmäisessä formalismissa, jota tässä työssä *ei käytetä*, kanonisen suorakaiteen $\mathbb{S}(M)$ moduliksi tulisi $\text{GQM}(\mathbb{S}(M)) = 2\pi/M$.

Konformisen modulin laskemiseksi on seuraava lause hyödyllinen:

LAUSE 1.3.9. *Mikäli yleistetyssä nelikulmiossa $(\Omega, z_1, z_2, z_3, z_4)$, jonka reuna koostuu äärellisen monesta derivoituvasta kaaresta, on määritelty jatkuva reaalinen potentiaalifunktio u , joka toteuttaa Laplace'n yhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dirichlet'n reunaehdoilla

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma_4, \quad u(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma_2,$$

missä γ_2 ja γ_4 ovat yleistettyjä pystysivuja (ks. määritelmää 1.1.8) ja Neumannin reunaehdoilla

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x, y) \in \gamma_1 \cup \gamma_3,$$

missä γ_1 ja γ_3 ovat yleistettyjä vaakasisuja ja \mathbf{n} on ulkonormaalien suuntainen, niin

- *Funktio u on tulkittavissa holomorfisen funktion reaaliosaksi ja imaginaariosa voidaan määrätä reaalista vakiota vaille.*
- *Yleistetyn nelikulmion $(\Omega, z_1, z_2, z_3, z_4)$ konforminen moduli voidaan laskea viivaintegraalina*

$$M = \int_{\gamma_2} \frac{\partial u}{\partial y} dx.$$

- *Yleistetyn nelikulmion $(\Omega, z_1, z_2, z_3, z_4)$ konforminen moduli voidaan laskea pintaintegraalina*

$$(1.3.10) \quad M = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy.$$

TODISTUS. Lauseen muut osat kaavaa (1.3.10) lukuunottamatta seuraavat suoraan kaavasta (1.2.6).

Cauchyn-Riemannin yhtälöistä (1.2.4) seuraa edelleen, että jos

$$w(z) = w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

niin kompleksinen derivaatta voidaan lausua pelkkien u :n osittaisderivaattojen avulla $w'(z) = u_x - iu_y$, josta seuraa myös

$$|w'(z)|^2 = w'(z)\overline{w'(z)} = u_x^2 + u_y^2 = |\nabla u|^2.$$

Nyt alueen $w(\Omega)$ pinta-ala on ilmeisesti

$$(1.3.11) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy,$$

mutta koska mainittu alue on suorakaide, jonka leveys on 1, niin tämä integraali ilmaisee samalla myös sen korkeuden ja siten konformisen modulin. \square

On myös huomattava, että harmoninen funktio minimoi integraalin (1.3.11). Ks. [SL, Kaava (4.35)], jossa kyseinen ominaisuus esitellään *Bieberbachin minimialueperiaatteena* (engl. minimum area principle).

Laplacen yhtälön heikko muoto. Tämä kappale kuvaa elementtimenetelmän perusteita ainoastaan siinä määrin, mikä on harmonisten funktioiden numeeriseksi konstruomiseksi tarpeen. Kysymykset mm. Sobolev-avaruuksista tai heikon ja vahvan derivoituvuuden täsmällisten määritelmien erosta sivuutetaan.

Tässä työssä on myöhemmin käytetty elementtimenetelmäohjelma ELMER:iä nelikulmion modulien arvioimiseksi, puuttumatta ohjelman sisäisiin toteutusyksityiskohtiin tai algoritmeihin.

Asiasta tarkemman selvityksen antavat useat kirjat ja artikkelit, esimerkiksi [LT]. Elementtimenetelmän käytöstä konformikuvauksissa ja näiden fysikaalisista sovelluksista, ks. esim. [BSV] ja [RV].

Tarkastellaan Laplacen yhtälöä

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

ja kerrotaan se alueessa Ω kompaktikantajaisella ³ ja vähintään kertaalleen derivoituvalla funktiolla w . Tällöin voidaan suorittaa pintaintegraali Greenin kaavalla

$$\iint_{\Omega} (u_{xx} + u_{yy}) w \, dx \, dy = - \iint_{\Omega} u_x w_x + u_y w_y \, dx \, dy = 0,$$

[LT, Kappale 1.2] eli toisin sanoen

$$(1.3.12) \quad \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx \, dy = 0.$$

Kaava (1.3.12) ilmaisee Laplacen yhtälön heikon muodon ja sen vasemmalla puolella oleva integraali on ns. bilineaarinen funktionaali, ks. [LT, Kappale A.1].

Sovitetaan seuraavaksi, että valitaan joukko paloittain lineaarisia, alueessa Ω kompaktikantajaisia ja kertaalleen paloittain (heikosti) derivoituvia (täsmällisestä määritelmästä, ks. [LT, Kaava (A.19)]) elementtifunktioita w_1, w_2, \dots, w_n ja approksimoidaan funktiota u lineaarikombinaatiolla

$$(1.3.13) \quad u \approx \sum_{k=1}^n c_k w_k.$$

Nyt yhtälöstä (1.3.12) seuraa n kappaletta tyyppiä

$$\iint_{\Omega} \nabla \left(\sum_{k=1}^n w_k \right) \cdot \nabla w_\ell \, dx \, dy = 0.$$

³Funktion w kantaja on joukko $\overline{\{(x, y) : w(x, y) \neq 0\}}$. Kompaktikantajaisuus merkitsee tässä tapauksessa avaruuden \mathbb{R}^2 Heine-Borel-ominaisuuden vuoksi, että funktion w kantaja täysin sisältyy alueeseen Ω ja on rajoitettu. Käytännön hyötynä on, että seuraavana esitettävästä Greenin kaavasta putoaa pois alueen Ω reunoja koskeva termi.

olevia yhtälöitä ja merkitsemällä bilineaarisille funktionaaleille

$$a_{\ell,k} = \iint_{\Omega} \nabla w_k \cdot \nabla w_{\ell} \, dx \, dy,$$

voidaan muodostaa jäykkyysmatriisi

$$(1.3.14) \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

jolloin Laplacen yhtälö saa diskreetin muodon

$$(1.3.15) \quad A\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

missä $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$. Yhtälöllä (1.3.15) on tietysti joko vain yksi ratkaisu $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ tai äärettömän paljon ratkaisuja riippuen jäykkyysmatriisin lineaarisesti riippumattomien vaakavektorien määrästä (rangista). Käytännössä kuitenkin Laplacen yhtälö ei ole rajoittamaton vaan sillä on reunaehtoja, jotka sitovat joitakin vakioita c_k tiettyihin arvoihin. Tarkemmin tehtävän muotoilusta ja ratkaisemisesta ks. [LT, Luku 5].

1.4. Cauchyn estimaatit ja Schwarzin lemma

Tutkitaan edelleen lauseen 1.2.12 mukaisen funktion $w(z)$ käyttäytymistä yksikkökiekon reunalla $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Tällöin saadaan sarja

$$(1.4.1) \quad w(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} \, d\theta \right) e^{ik\varphi},$$

joka voidaan tulkita funktion $w(e^{i\varphi})$ hajoittamista funktioiden $e^{ik\varphi}$ muodostamaan ortonormaaliin kantaan. Sisätulona on tässä tapauksessa

$$(1.4.2) \quad \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(\theta) \overline{\psi_2(\theta)} \, d\theta.$$

Samastamalla $\mathbf{w} \sim w(e^{i\varphi})$, $\mathbf{e}_k \sim e^{ik\varphi}$, kaava (1.4.1) voidaan ilmaista myös muodossa

$$(1.4.3) \quad \mathbf{w} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k.$$

Ortonormaalisuudesta

$$\forall k, \ell, \quad \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{\ell} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{kun } k \neq \ell, \\ 1, & \text{kun } k = \ell, \end{cases}$$

johtuen kaavaan (1.4.3) voidaan soveltaa *Parsevalin kaavaa*

$$(1.4.4) \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{w}|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |w(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

ja saadaan seuraavanlainen maksimiperiaate:

$$(1.4.5) \quad |w^{(k)}(0)| < k! \left(\max_{\theta} |w(e^{i\theta})| \right),$$

jota sanotaan *Cauchyn estimaatiksi* yksikkökielelle.

Cauchyn estimaatit yleisesti kiekolle $\mathbb{D}(a, r)$ muodostettaisiin niin, että jos f on holomorfinen mainitussa kiekossa ja $|f(z)| < M$ kun $z \in \mathbb{D}(a, r)$, niin

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!M}{r^k}.$$

Ks. [Rud, Lause 10.26].

Jos sijoitetaan kaavaan (1.4.5), $k = 1$, saadaan korollarina

LAUSE 1.4.6 (Schwarzin lemma). *Oletetaan, että $w(0) = 0$ ja kaikilla yksikkökieken sisäpisteissä $|z| < 1$ pätee $|w(z)| \leq 1$. Tällöin $|w'(0)| \leq 1$, ja yksikkökieken sisäpisteissä pätee lisäksi $|w(z)| \leq |z|$.*

Ks. [Rud, Kappaleet 10.22-24 ja lause 12.2] ja [Ahl, Luku III, Kappale 3.4].

1.5. Holomorfinen logaritmi

Tarkastellaan Cauchyn integraalilauseesta seuraavaa integraalia

$$(1.5.1) \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi,$$

missä γ on yksikkökieken reuna kuljettuna vastapäivään. Koska funktio $1/z$ on holomorfinen muualla kuin origossa, pätesi toisaalta samoin Cauchyn integraalilauseen nojalla

$$(1.5.2) \quad \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = 0, \text{ missä } \gamma_2 \text{ ei kierrä origoa.}$$

Voidaan siis tehdä johtopäätös, että kompleksinen logaritmi

$$(1.5.3) \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln(z),$$

missä γ on pisteestä 1 pisteeseen z kulkeva polku, on äärettömänmonikäsitteinen funktio, riippuen siitä, montako kierrosta origon ympäri on kierretty. Määritellään yleisemmin

$$(1.5.4) \quad \ln(z; n) = \text{Ln}(z) + 2in\pi,$$

missä kokonaisluku n on kierrosten määrä vastapäivään origon ympäri ja $\text{Ln}(z)$ eli päähaara valittu niin, että $\text{Im}(\text{Ln}(z)) \in (-\pi, \pi]$ ja tämän avulla *pistejoukolla approksimoidun käyrän holomorfinen logaritmi* seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.5.5. *Olkoon (z_k) , $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ pistejoukko, jotka tässä järjestyksessä approksimoivat kompleksitason polkua γ . Generoidaan*

$$(w_k) = \text{lnh}((z_k))$$

seuraavasti:

- Asetetaan $w_1 := \text{Ln}(z_1)$, $n := 0$ ja $k := 2$.
- s1:** Asetetaan $p_1 := \text{ln}(z_k; n-1)$, $p_2 := \text{ln}(z_k; n)$ ja $p_3 := \text{ln}(z_k; n+1)$.
- Tutkitaan, mikä pisteistä p_1 , p_2 tai p_3 on lähinnä edellistä generoitua pistettä w_{k-1} .
- Jos p_1 oli lähinnä, muutetaan $n := n-1$ ja asetetaan $w_k = p_1$.
- Jos p_2 oli lähinnä, asetetaan $w_k = p_2$.
- Jos p_3 oli lähinnä, muutetaan $n := n+1$ ja asetetaan $w_k = p_3$.
- Jos $k < N$, muutetaan $k := k+1$ ja palataan kohtaan **s1**, muuten ollaan valmiita.

Sanallisesti: seuraava logaritmin arvo valitaan aina siitä haarasta, jossa oleva logaritmin arvo on lähinnä edellisen pisteen logaritmin arvoa. Ks. kohtaa 4.6.

Holomorfinen logaritmi yleisesti sellaisille Jordan-alueille, jotka eivät sisällä origoa, on esitelty kirjassa [**Rud**, Lause 13.11 (h)]. Jos holomorfinen logaritmi on käytössä, voidaan sen avulla tehdä myös holomorfisia juurenottoja (m :s juuri on muuten m -käsitteinen) laskemalla yksinkertaisesti

$$(1.5.6) \quad (z_k)^{1/m} = \exp\left(\frac{\text{lnh}((z_k))}{m}\right).$$

Jos näin on kuvattu Jordan-alue Ω , voidaan tämän alueen sisäpisteissä olevat arvot evaluoida esimerkiksi lausetta 1.2.9 hyväksikäyttäen.

1.6. Möbius-kuvaus

$R_{1,1}$ -tyyppinen rationaalikuvaus eli Möbius-kuvaus määritellään

$$(1.6.1) \quad w_m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

missä $ad - bc \neq 0$, eli kaavan (1.6.1) oikealla puolella esiintyvän matriisin determinantti ei saa hävitä. Seuraavassa käydään läpi muutamia tämän kuvauksen perusominaisuuksia. Ks. tätä varten myös [**Rud**, Luku 14] ja [**SL**, Kappale 3.2], joka kohdassa ei ole erikseen viitettä.

LAUSE 1.6.2. *Möbius-kuvaukset ovat suljettuja translaation, nollasta poikkeavalla kompleksiluvulla kertomisen ja inversion suhteen. Möbius-kuvauksen raja-arvo*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} w_m(z) = \frac{a}{c},$$

mikäli $c \neq 0$.

TODISTUS. Todistetaan ensin translaation ja kompleksiluvulla $\neq 0$ kertomisen osalta, eli lasketaan

$$A \frac{az + b}{cz + d} + B = \frac{Aaz + Ab}{cz + d} + \frac{Bcz + Bd}{cz + d} \sim \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ c & d \end{pmatrix},$$

sitten inversion osalta

$$\left(\frac{az + b}{cz + d} \right)^{-1} = \frac{cz + d}{az + b} \sim \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

ja lopuksi raja-arvon osalta

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + b/z}{c + d/z} = \frac{a}{c}.$$

On huomattava, että translaation suhteen olevassa kohdassa determinantti tulee vain kerrotuksi kompleksiluvulla $A \neq 0$, sillä determinantin arvo ei muutu, jos sen jonkin rivin/sarakkeen alkioihin lisää jonkun toisen rivin/sarakkeen alkiot kerrottuna vakiolla.

Näinollen, jos alkuperäisen Möbius-kuvauksen determinantti ei hävinnyt, ei uudenkaan häviä, joten se pysyy edelleen Möbius-kuvauksena. \square

LAUSE 1.6.3. *Kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on Möbius-kuvaus.*

TODISTUS. Mielivaltainen Möbius-kuvaus voidaan hajottaa lineaarikuvauksen ja inversion yhdistelmäksi

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{\left(\frac{ad-bc}{c}\right)}{cz + d}$$

ja lauseen 1.6.2 nojalla näiden yhdiste on sekin Möbius-kuvaus. \square

LAUSE 1.6.4. *Möbius-kuvaus on konformikuvaus muualla paitsi pisteen $z = -d/c$ ympäristössä. Möbius-kuvauksen konforminen tiheys on äärellinen kompleksitasossa \mathbb{C} ja suhteellisesti*

$$\sigma = O(R^2),$$

missä R on etäisyys pisteestä $z = -d/c$.

TODISTUS. Derivoimalla saadaan

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{a}{c} - \frac{\frac{ad-bc}{c}}{cz + d} \right) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

joten Möbius-kuvauksella ei ole derivaatan nollakohtia. Tämä johtuu siitä, että ollakseen Möbius-kuvaus, tulee tälle kuvaukselle edelleenkin päteä ”determinanttiehto” $ad - bc \neq 0$. Ainoa epäkonformisuuspiste on siis 1. kertaluvun napa $z = -d/c$. \square

LAUSE 1.6.5. *Möbius-kuvauksen käänteiskuvaus on Möbius-kuvaus.*

TODISTUS. Jos

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

niin $czw + dw = az + b$ ja

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \sim \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Tämän determinantti on, samoin, kuin alkuperäisenkin kuvauksen, $ad - bc$, joten se ei häviä, jos ei alkuperäisenkään Möbius-kuvauksen determinantti hävinnyt. \square

LAUSE 1.6.6. *Möbius-kuvaus kuvaa pisteen $-d/c$ kautta kulkevat suorat tai ympyränkaaret suoriksi ja muut suorat ja ympyränkaaret ympyränkaariksi.*

TODISTUS. Lauseista 1.6.2, 1.6.4 ja 1.6.5 johtuen riittää osoittaa, että inversio kuvaa jonkun origon kautta kulkevan suoran suoraksi ja jonkun origon kautta kulkemattoman suoran ympyränkaareksi. Kiinnitetään ensin $z = t$, $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, jolloin ymmärrettävästi $1/z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Kiinnitetään sitten $z = 2 + it$, $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, jolloin

$$\left| \frac{4}{2 + it} - 1 \right| = \left| \frac{-2 + it}{2 + it} \right| = 1$$

ja kyseinen suora kuvautui ympyränkaareksi. \square

Edellisestä lauseesta seuraa korollarina:

LAUSE 1.6.7. *Niiden Möbius-kuvausten perhe, jotka kuvaavat yksikkökierokkeen puolitasoksi, on*

$$w_m(z) = \frac{az + b}{z - e^{i\varphi}}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Tämä perhe voidaan ilmaista ekvivalentisti muodossa

$$w_m(z) = C \int (z - e^{i\varphi})^{-2} dz, \quad C \in \mathbb{C}$$

tai differentiaaliyhtälöllä

$$\frac{w_m''(z)}{w_m'(z)} = \frac{d}{dz} (\ln(w_m'(z))) = \frac{-2}{z - e^{i\varphi}}.$$

LAUSE 1.6.8. *Möbius-kuvaus säilyttää kaksoissuhteen*

$$\frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} = \frac{(w_2 - w_3)(w - w_1)}{(w_2 - w_1)(w - w_3)}.$$

TODISTUS. Sijoitetaan

$$\begin{aligned}\left[\frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}\right]_{z=z_1} &= 0, \\ \left[\frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}\right]_{z=z_2} &= 1, \\ \left[\frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}\right]_{z=z_3} &= \infty,\end{aligned}$$

ja tehdään samat sijoitukset w :n suhteen. Koska lauseen 1.6.8 kaavan vasen puoli kuvaa pisteet z_k , $k \in \{1, 2, 3\}$ pisteisiin $\{0, 1, \infty\}$ ja kaavan oikean puolen käänteiskuvas taas nämä pisteet pisteille w_k , $k \in \{1, 2, 3\}$ tässä järjestyksessä, niin väite seuraa lauseista 1.6.2 ja 1.6.5. \square

Cayleyn muunnos. Lauseen 1.6.7 perusteella on olemassa Möbius-kuvauksia, jotka kuvaavat yksikkökiekon ylempään puolitasoon. Konstruoidaan näistä se, joka kuvaa pisteen 1 origoon, pisteen i pisteeseen 1 ja pisteen -1 äärettömään. Sijoitetaan mainitut pisteet lauseen 1.6.8 mukaiseen kaavaan, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{(i+1)(z-1)}{(i-1)(z+1)} &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{(1-\zeta)w}{w-\zeta}, \\ \frac{(i+1)(z-1)}{(i-1)(z+1)} &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{(1/\zeta-1)w}{w/\zeta-1} = w, \\ (1.6.9) \quad w &= -i \left(\frac{z-1}{z+1} \right).\end{aligned}$$

On huomattava, että äärettömyyspistettä käsiteltiin raja-arvomielessä. Edellisen kaavan (1.6.9) ja lauseen 1.6.5 avulla saadaan

LAUSE 1.6.10. *Möbius-kuvaus*

$$\psi(z) = \frac{-z + i}{z + i}$$

kuvaa ylemmän puolitason \mathbb{H} konformisesti yksikkökiekoksi $\mathbb{D}(0, 1)$ ja sen käänteiskuvas

$$\psi^{-1}(z) = \frac{-iz + i}{z + 1}$$

vastaavasti yksikkökiekon ylemmäksi puolitasoksi. Kuvausta $w = \psi(z)$ sanotaan Cayleyn muunnokseksi.

Lauseiden 1.6.4 ja 1.6.10⁴ korollaarina saadaan näiden derivaatoiksi

$$(1.6.11) \quad \psi'(z) = \frac{-2\hat{i}}{(z + \hat{i})^2},$$

ja

$$(1.6.12) \quad \psi^{-1'}(z) = \frac{-2\hat{i}}{(z + 1)^2}.$$

Kaavoja (1.6.11) ja (1.6.12) tarvitaan tehtäessä eräitä Schwarzin ha Christoffelin integraalien muunnoksia, kun halutaan vaihtaa oletetuksi lähtöjoukoksi ylemmän puolitason sijaan yksikkökiekko tai toisinpäin.

Yksikkökiekon automorfismit. Rotaation ja identiteettikuvauksen lisäksi tiedetään, että lauseiden 1.6.6 ja 1.6.8 perusteella on olemassa äärettömän monta erilaista kuvausta, jotka kuvaavat yksikkökiekon itselleen. Tällaiset kuvaukset ovat yleisesti muotoa

$$(1.6.13) \quad e^{i\theta} \varphi_\alpha(z),$$

missä

$$(1.6.14) \quad \varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |\alpha| < 1$$

Ks. [Rud, Määritelmä 12.3] ja [PMA].

Helpoiten tämä on nähtävissä, kun todetaan ensinnä, että $z = \zeta/\bar{\zeta}$ kuvaa oikean puolitason yksikkökiekon reunaksi ("ζ"-avaruudesta "z"-avaruuteen) ja sijoittamalla sitten kaavaan (1.6.14):

$$(1.6.15) \quad \left| \varphi_\alpha \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right) \right| = \left| \frac{\zeta/\bar{\zeta} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\zeta/\bar{\zeta}} \right| = \left| \frac{\zeta - \alpha\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}\zeta} \right| = 1.$$

Koska lisäksi lauseen 1.6.5 perusteella $\varphi_\alpha^{-1}(z) = \varphi_{-\alpha}(z)$, niin $\varphi_\alpha(z)$ todellakin kuvaa yksikkökiekon reunan *koko* yksikkökiekon reunaksi.

On myös huomattava, että lauseen 1.6.4 korollaarina saadaan

$$(1.6.16) \quad \varphi'_\alpha(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2}.$$

Tätä tarvitaan jäljempänä Riemannin kuvauslauseen todistuksessa.

⁴Nämä määritelmät eivät ole täysin yksikäsitteisiä, sillä joissakin lähteissä Cayleyn muunnoksesta puhutaan esimerkiksi kuvauksen

$$w(z) = \frac{1 - z}{1 + z},$$

joka kuvaa yksikkökiekon oikeaksi puolitasoksi $-i\mathbb{H}$, yhteydessä.

Ylemmän puolitasen automorfismit. Tässä ei käsitellä koko tätä kuvausluokkaa (vaikka se olisi konstruoitavissa lauseen 1.6.10 ja kaavan (1.6.14) avulla), vaan rajoitutaan tapaukseen, jossa halutaan kiinnittää origo, mutta siirtää haluttu ylemmän puolitasen piste $z_0 \in \mathbb{H}$ imaginaariakselille. Helpoin tapa tehdä tämä, on konstruoida origon ja pisteen z_0 kautta kulkeva ympyränkaari, joka leikkaa reaaliakselin pisteessä b . Tällöin nimittäin kyseinen ympyränkaari kuvautuu positiiviseksi imaginaariakseliksi Möbius-kuvauksella

$$(1.6.17) \quad w_m(z) = \begin{cases} \infty, & \text{kun } z = b, \\ -b, & \text{kun } z = \infty, \\ \frac{z}{1-z/b}, & \text{muuten.} \end{cases}$$

lauseen 1.6.6 nojalla. Kaavassa (1.6.17) on poikkeuksellisesti kirjoitettu erikseen erikoistapaukset, koska sen numeerisissa sovelluksissa tulee ehdottomasti huomioida ääretönpisteeseen ja ääretönpisteestä kuvautumiset oikein.

Tarvitsee enää laskea kyseinen b . Koska ilmeisesti $b/2$ on halutun ympyrän keskipiste ja etäisyyden $|z_0 - b/2|$ tulee olla $= b/2$, niin Pythagoraan lauseen ⁵ avulla saadaan

$$(1.6.18) \quad \begin{aligned} \left| z_0 - \frac{b}{2} \right|^2 &= \left(\frac{b}{2} \right)^2, \\ \left(z_0 - \frac{b}{2} \right) \left(\overline{z_0} - \frac{b}{2} \right) &= \frac{b^2}{4}, \\ z_0 \overline{z_0} - \frac{b}{2}(z_0 + \overline{z_0}) + \frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4}, \\ b &= \frac{|z_0|^2}{\Re(z_0)}. \end{aligned}$$

Pienellä laskutoimituksella nähdään samoin, että

$$(1.6.19) \quad w_m(z_0) = \frac{z_0}{1 - \frac{z_0 \Re(z_0)}{|z_0|^2}} = \frac{|z_0|^2}{\frac{|z_0|^2}{z_0} - \Re(z_0)} = i \frac{|z_0|^2}{\Im(z_0)},$$

eli ylemmässä puolitasossa sijainnut z_0 kuvautuu *positiiviselle* imaginaariakselille ja siten ylempään puolitasoon, kuten pitikin. Tästä valinnasta oli etuna myös se, etteivät mittasuhteet muuttuisi kovin paljoa origon ympäristössä,

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{1 - z/b} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{bz}{b - z} \right) = \left(\frac{1}{1 - z/b} \right)^2,$$

⁵Kompleksiluvuilla Pythagoraan lause voidaan ilmaista kompleksikonjugaattia hyödyntävässä muodossa

$$|z|^2 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

joten siis konforminen tiheys

$$(1.6.20) \quad \sigma\left(\frac{z}{1-b/z}\right) = \left|1 - \frac{z}{b}\right|^2 \approx 1, \quad |z| < \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ pieni.}$$

1.7. Riemannin kuvauslause

Kappaleessa 1.3.6 käsiteltiin konformisen ekvivalenssin käsitettä. Eräs merkittävimmistä klassisista tuloksista konformista ekvivalenssia koskien on se, että kaikki yhdesti yhtenäiset alueet koko kompleksitasoa lukuunottamatta ovat konformisesti ekvivalentteja yksikkökierokan kanssa.

LAUSE 1.7.1 (Riemannin kuvauslause). *Olko Ω origon sisältävä yhdesti yhtenäinen kompleksitason alue, ei kuitenkaan koko kompleksitaso. Syynä tähän rajoitteeseen on se, että koko kompleksitaso, ääretön piste mukaanluettuna on homeomorfinen pallopinnan kanssa kun taas muut yhdesti yhtenäiset alueet ovat homeomorfisia yksikkökierokan kanssa. Tällöin on olemassa konformikuvaus $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}(0,1)$ siten, että $\phi(0) = 0$.*

ϕ siis kuvaa alueen Ω yksikkökierokalle siten, että origo pysyy kiintopisteenä. Vastaavasti voitaisiin translaation avulla valita muukin kiintopiste tai kuvausta (1.6.14) apuna käyttäen kuvata origo johonkin muuhun yksikkökierokan sisäpisteeseen.

TODISTUS. Tarkastetaan ensin, onko alue Ω äärellinen. Jos ei, niin tuolloin voidaan usein hakea Möbius-kuvaus, joka kuvaa alueen Ω äärelliseksi alueeksi. Möbius-kuvauksen konstruointia varten tulee hakea jokin piste $\zeta \notin \overline{\Omega}$ ⁶ ja suorittaa pisteittäinen kuvaus

$$\Omega_0 = \frac{1}{\Omega - \zeta}.$$

Muussa tapauksessa asetetaan vain $\Omega_0 = \Omega$. Myöhemmin esitettävissä tietokonealgoritmeissa ei tätä seikkaa ole huomioitu, vaan annettu alue oletetaan joka tapauksessa rajoitetuksi.

Jatketaan siitä, että varmistetaan alueen Ω_0 sijaitseminen kokonaan yksikkökierokan sisällä. Tätä varten valitaan z_M , joka on se alueen Ω_0 reunapiste, joka sijaitsee kauimpana origosta. Määritellään sen jälkeen pisteittäin

$$\Omega_1 = \frac{\Omega_0}{|z_M|}.$$

Nyt alue $\Omega_1 \subset \mathbb{D}(0,1)$. Seuraavaksi esiteltävä iteraatioaskel on peräisin Koebelta ja esitelty kirjassa [Rud, Lauseet 14.7-8, Harjoitustehtävä 14.26] ja artikkelissa [Por].

⁶On olemassa Jordan-alueita, joilla tällaista pistettä ei ole, esimerkiksi $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ tai ”patologisemmin” vaikkapa kompleksitaso, josta on leikattu irti fraktaalipuu. Tämä alkeisesimerkki voitaisiin kuvata ylemmäksi puolitasoksi holomorfisella neliöjuurella, mutta muuten tällaisten käsittely sivuutetaan.

Iteraatioaskel. Oletetaan konstruoiduksi alue Ω_{n-1} . Valitaan sen jälkeen piste z_m , joka on se alueen Ω_{n-1} reunapiste, joka sijaitsee lähinnä origoa. Suoritetaan yksikkökierokkeen automorfismi $\Omega_{n-1,1} = \varphi_{z_m}(\Omega_{n-1})$, jolloin saatu alue $\Omega_{n-1,1}$ pysyy yksikkökierokkeen sisällä, mutta sen reuna ei enää kierrä origoa. Huomattava, että origo kuvautui pisteeseen $-z_m$. Nyt alueella $\Omega_{n-1,1}$ on kappaleen 1.5 perusteella olemassa holomorfinen neliöjuuri $\Omega_{n-1,2} = \sqrt{\Omega_{n-1,1}}$. Alue $\Omega_{n-1,2}$ on siitä erityinen, että sen reunapisteen origoa lukuunottamatta sijaitsevat lähempänä yksikkökierokkeen reuna kuin alueen $\Omega_{n-1,1}$ reunapisteen. Origon kuvautui pisteeseen $\sqrt{-z_m}$, jossa neliöjuuren merkki on määriteltävä Cauchyn integraalilauseen (1.2.9) avulla alueiden $\Omega_{n-1,1}$ ja $\Omega_{n-1,2}$ reunapisteen sijainnista tai hyväksyä oikeaan puolitasoon otettu neliöjuuri, mikäli reunakäyrän holomorfinen neliöjuuri otettiin niin, että origosta seuraavan pisteen vastapäivään kuva otettiin alemmasta puolitasosta ja sen jälkeen olisi noudatettu kaavaa (1.5.6).

Seuraavaksi tulee origon kuva siirtää takaisin origoon kuvauksella

$$\Omega_n = \varphi_{-\sqrt{-z_m}}(\Omega_{n-1,2}),$$

jolloin iteraatioaskel on valmis.

Iteraatioaskeleen välittämä kuvaus rengasalueesta. Oletetaan, että on löydetty iteraatioaskeleesta mainittu minimipiste $-z_m$, joka *olisi valmiiksi kierretty negatiiviselle reaaliakselille* ja siis $z_m \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin alueen Ω_{n-1} reuna sijaitsee kokonaisuudessaan annuluksen $\mathbb{A}(z_m, 1)$ sulkeumassa. Merkitään nyt käyrällä γ_1 yksikkökierokkeen reuna ja vastaavasti käyrällä γ_2 kiekon $\mathbb{D}(0, z_m)$ reuna. Kun nyt suoritetaan Möbius-kuvaus φ_{-z_m} , seuraa lauseesta 1.6.6, että $\gamma_{2,1} = \varphi_{-z_m}(\gamma_2)$ on kiekon $\mathbb{D}(r, r)$ reuna, missä

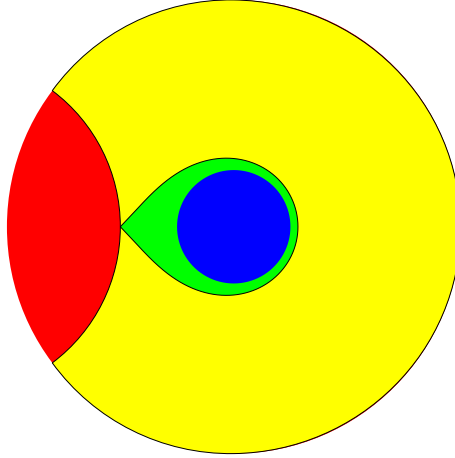
$$r = \frac{z_m}{1 + z_m^2}.$$

Otettaessa tästä kiekosta holomorfinen neliöjuuri $\gamma_{2,2} = \sqrt{\gamma_{2,1}}$, saadaan sellaisen lemniskaatan oikea puolisko, jonka kärkipiste on origossa ja oikea laita pisteessä $\sqrt{2r}$. Vastaavasti yksikkökierokkeen reunan holomorfinen neliöjuuri on puoliekokkeen reuna

$$\gamma_{1,2} = \{e^{i\theta}, \theta \in (-\pi/2, \pi/2]\} \cup \{\hat{i} - 2it, t \in (0, 1]\}.$$

Kun nyt käyriin $\gamma_{1,2}$ ja $\gamma_{2,2}$ kohdistetaan Möbius-kuvaus $\varphi_{\sqrt{z_m}}$, saadaan rengasalue, jonka ”sisärengas” on kaikkialla origosta vähintään etäisyydellä z_m , mutta kuitenkin negatiivisen reaaliakselin puolelta etäisyydellä $\sqrt{z_m} > z_m$ (s.o. pisteessä $-\sqrt{z_m}$). ”Ulkorengas” vastaavasti myötäilee yksikkökierokkeen reuna pisteistä

$$\frac{-2\sqrt{z_m} \pm i(1 - \sqrt{z_m})}{1 + z_m}$$



KUVA 1.4. Riemannin kuvauslauseen todistuksessa ja Koeben algoritmissa käytettävä iteraatioaskel. Tässä tapauksessa on kuvattu ympyrärengas $\mathbb{A}(1/4, 1)$ (punainen, keltainen ja vihreä alue) kuvassa näkyväksi keltaiseksi rengasalueeksi. Mikäli alkuperäinen alue $\mathbb{A}(1/4, 1)$ sisälsi Jordan-käyrän, joka kiertää sinisen alueen (kertaalleen vastapäivään) ja kosketti sinistä aluetta sen vasemmassa laidassa pisteessä $-\hat{i}/4$, on sen keltaiseen alueeseen sisältyvä ja vihreän alueen vastapäivään kiertävä kuva lähempänä yksikkökieron reunaa.

oikealle, ollen muuten näiden kahden pisteen ja pisteen $-\sqrt{z_m}$ kautta kulkeva ympyränkaari (ks. edelleen lausetta 1.6.6), missä sisä- ja ulkorenkaat myös koskettavat toisiaan. Tämä riittää jo osoittamaan, ettei iteraatioaskel voi kuvata mitään pistettä lähemmäksi origoa kuin z_m oli, muttei toisaalta voi viedä myöskään mitään yksikkökierkon sisäpistettä yksikkökierkon ulkopuolelle. Lisäksi on huomattava vähintään yhden kuvapisteen sijaitsevan ainakin etäisyydellä $\sqrt{z_m}$, joten tässä vaiheessa voidaan myös päätellä algoritmin kuvaavan äärellistä pistejoukkoa yksikkökierkon reunoille.

Konforminen tiheys origossa. Aloitetaan taas kuvauksesta φ_{-z_m} , jonka derivaatta origossa on

$$(1.7.2) \quad d_1 = \varphi'_{-z_m}(0) = 1 - z_m^2$$

(ks. kaavaa (1.6.16)). Koska origo on nyt siirtynyt pisteeseen z_m , lasketaan seuraavaksi neliöjuuren välittämän kuvauksen derivaatta tässä pisteessä, joka on

$$(1.7.3) \quad d_2 = \frac{1}{2\sqrt{z_m}}.$$

Lopuksi lasketaan vielä automorfismi $\varphi_{\sqrt{z_m}}$ pisteessä $\sqrt{z_m}$, joka on

$$(1.7.4) \quad d_3 = \frac{1}{1 - z_m}.$$

Konforminen tiheys origossa on siis laskettavissa kaavalla

$$(1.7.5) \quad \sigma = \frac{1}{|d_1||d_2||d_3|} = \frac{2\sqrt{z_m}}{1 + z_m} < 1.$$

ja siis jokainen iteraatioaskel alentaa konformista tiheyttä origossa ja pakottaa tässäkin mielessä kunkin alueen Ω_n reunakäyrää origosta ulospäin.

Todistuksen pääosa on tässä ja loppuosa, joka koskee kuvauksen suppenemista kohti konformikuvausta kompakteissa osajoukoissa, si-
vuutetaan. Tätä varten, ks. [Rud, Lauseet 10.27-28, 11.1, Harjoitus-
tehtävä 14.26, kohta d)]. \square

Lisätietoa Riemannin kuvauslauseesta, ks. [WeiR] ja Riemannin
kuvauslauseen historiasta, ks. [Wal].

1.8. Joukowskiin muunnos

Joukowskiin muunnos on tyyppiä $R_{2,1}$ (osoittaja 2. astetta, nimittä-
jä 1. astetta) oleva rationaalikuvaus, joka määritellään yleisessä muo-
dossaan seuraavasti:

$$(1.8.1) \quad w_J(z; \mu, \alpha, r) = \mu \left((z - \alpha) + \frac{r^2}{z - \alpha} \right), \quad z, \mu, \alpha, r \in \mathbb{C},$$

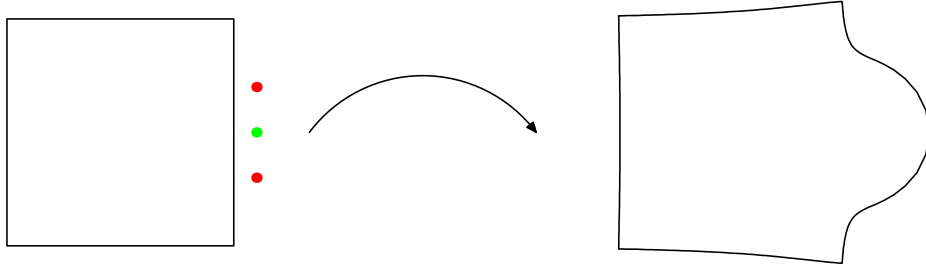
missä μ on *painokerroin*, α on *keskipiste* ja r on *säde* tai navan *residy*.
Tämän derivaatta on

$$(1.8.2) \quad \frac{dw_J}{dz} = \mu \left(1 - \frac{r^2}{(z - \alpha)^2} \right),$$

joten kuvaus (1.8.1) on konforminen muualla paitsi pisteessä $z = \alpha$
(napa) tai $z = \alpha \pm r$ (derivaatan nollakohdat). Konforminen tiheys
 $\sigma(w_J)$ on pieni ensinmainitun pisteen ympäristössä ja suuri jälkimmäi-
senä mainittujen pisteiden ympäristössä. Koska pätee

$$(1.8.3) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \sigma(w_J(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \frac{dw_J}{dz} \right|} = \frac{1}{|\mu|},$$

niin havaitaan, että Joukowskiin muunnos poikkeaa Möbius-kuvauksesta
sellaisellakin olennaisella tavalla, että se "tasoittuu" äärettömyydessä
painokertoimella painotetuksi lineaarikuvaukseksi eikä kasva rajatta.
Tämän vuoksi Joukowskiin muunnoksen eräät sovellukset perustuvat
siihen, että niillä pyritään tekemään kullakin askeleella muunnos, jos-
sa konformista tiheyttä kasvatetaan tai alennetaan vain paikallisesti
(tällöin luonnollisesti tulee olla $\mu = 1$).



KUVA 1.5. Joukowskin muunnoksella voidaan alentaa konformista tiheyttä reunakäyrän ulkopuolella ja siten konstruoida konformikuvauksia. Tässä kuviossa vihreä piste on ensimmäisen kertaluvun napa ja punaiset pisteet derivaatan nollakohtia. Menetelmän etuna on se, että konforminen tiheys lähestyy asymptoottisesti vakiota kauemmas mentäessä ja näinollen kuvaus ei ”liikaa” muuta muualla päin kuviota olevia muotoja.

Otetaan seuraavaksi yksinkertaisuuden vuoksi tarkasteluun erikoistapaus

$$(1.8.4) \quad w_J \left(z; \frac{1}{2}, 0, 1 \right) = w_J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

ja tutkitaan sen käyttäytymistä yksikkökiekon reunalla sijoituksella $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, jolloin saadaan $w_J(e^{i\theta}) = \cos \theta \in [-1, 1]$. Yksikkökiekon reuna siis kuvautuu pelkäksi janaksi ja näinollen itse yksikkökiekko tai sen aito ulkopuoli kuvautuvat kumpikin erikseen konformisesti joukoksi $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Koska vastaavasti $w_J(z) \in \mathbb{R}$, kun $z \in (-\infty, -1)$ tai $z \in (1, +\infty)$ ja $w_J(2i) = 3i/4 \in \mathbb{H}$ (sijaitsee ylempässä puolitasossa), niin lauseesta 1.3.2 seuraa, että

LAUSE 1.8.5. *Joukowskin muunnos $w_J(z)$ kuvaa alueen $\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{D}(0, 1)}$ (ylemman puolitason, josta on poistettu yksikkökiekon sulkeuman ylempi puolisko) ylemmäksi puolitasoksi \mathbb{H} .*

Lausetta 1.8.5 voidaan soveltaa elliptisten integraalien Landénin muunnoksessa, ks. lausetta 2.5.2. Vastaavasti, koska $w_J(i/2) = -3i/4 \in -\mathbb{H}$, niin pätee myös

LAUSE 1.8.6. *Muunnos $w_J(z)$ kuvaa alueen $\mathbb{H} \cap \mathbb{D}(0, 1)$ (yksikkökiekon ylempään puoliskon) alemmaksi puolitasoksi $-\mathbb{H}$ ja alueen $-\mathbb{H} \cap \mathbb{D}(0, 1)$ (yksikkökiekon alemman puoliskon) ylemmäksi puolitasoksi \mathbb{H} .*

Joukowskin muunnosta voi myös yhdistää Möbius-kuvauksiin, jolloin saadaan muita rationaalimuunnoksia. Jos esimerkiksi halutaan taittaa ylempi puolitaso janan $[-1, 1]$ ulkopuoleksi siten, että $w(0) = w(\infty) = 0$ ja $w(\pm 1) = \pm 1$ ja jälkimmäisenä mainitut olisivat myös

käännepisteitä, saadaan tämä sopivalla Joukowskin ja Cayleyn muunnosten yhdistämisellä

$$(1.8.7) \quad w(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{iz} - 1}{-z + \hat{i}} + \frac{-z + \hat{i}}{\hat{iz} - 1} \right) = \frac{2z}{z^2 + 1}.$$

(Tämä muuten toteuttaa myös kuvauksen $\mathbb{H} \cap \mathbb{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{H}$.)

Edellisen $R_{1,2}$ -tyyppisen muunnoksen (1.8.7) derivaatta on

$$(1.8.8) \quad w'(z) = \frac{(z+1)(z-1)}{(z^2+1)^2},$$

ja konformisen tiheyden raja-arvo

$$(1.8.9) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|w'(z)|} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+1/z)^2}{(1+1/z)(1-1/z)} \right| = \infty,$$

mikä onkin luonnollista, ottaen huomioon, että kaukana origosta sijaitsevien pisteiden kuva on lähellä origoa.

Siipiprofiili. Joukowskin muunnoksen eräs perinteinen käyttötapa on ollut kiekon $\mathbb{D}(z_0, 1-|z_0|)$, $1/2 < |z_0| < 1$ kuvaaminen konformisesti eräänlaiseksi siiven sivuprofiliksi. Syynä tähän on, että ympyräsylinlerin ympärillä on helpompi laskea virtauslaskelmia ja siirtää ne sitten tällä konformikuvauksella siiven ympärille. Ks. esim. [SL, Kappale 3.2.2] tai [Theo]. Tässä työssä tämä sovellus sivuutetaan.

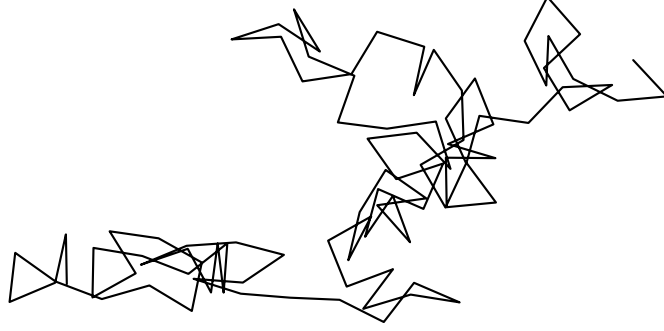
1.9. Satunnaiskulut ja harmoninen mitta

Huomautus! Seuraava matemaattinen tarkastelu on ylimalkainen ja tuo esille pääpiirteissään ns. harmonisen mitan merkityksen konformikuvauksissa ilman harmonisten funktioiden keskiarvoperiaatteen todistusta tai stokastisten prosessien kokonaistodennäköisyyden kaaavan/ensimmäisen askelen analyysin esittelyä. Tarkempia selvityksiä reaalisista harmonisista funktioista ja niiden ominaisuuksista löytyy mm. [Rud, Luku 11], [Gam, Luvut X, XV] tai [Ahl, Luku 5, Kappale 3.1]. Artikkelissa [WW] taas käsitellään harmonista mittaa nelikulmion modulin yhteydessä, joskin tämän jälkimmäisen määritelmät käsittävät vain kahden erillisen absorptiojoukon tarkastelun.

MÄÄRITELMÄ 1.9.1 (Brownin liike). *Tarkastellaan diskreettiä stokastista prosessia (ζ_k) , jolle pätee*

- $\zeta_0 \in \Omega$, missä Ω on kompleksitason alue.
- $\zeta_{k+1} = \zeta_k + h e^{i\varphi}$, missä $h \in \mathbb{R}$ ja φ on jatkuva tasajakautunut satunnaismuuttuja $\varphi \sim \text{Tas}(-\pi, \pi)$,

ks. myös kuvaa 1.6. Kun asetetaan raja-arvo $h \rightarrow 0$ ja sijoitetaan $t = hk$, saadaan jatkuva-aikainen stokastinen prosessi $\zeta(t)$, jota sanotaan kompleksitason Brownin liikkeeksi. Brownin liike on eräs esimerkki satunnaiskuluista (engl. random walk).



KUVA 1.6. Diskreetti satunnaiskulku. Jokaisella askeleella on liikuttu vakiopituinen äärellinen matka, mutta suuntakulma on ollut $\text{Tas}(-\pi, \pi)$ -jakautunut satunnaismuuttuja.

Oletetaan seuraavaksi, että ne pisteet z , jotka sijaitsevat alueen Ω reunoilla vastaavat satunnaiskulun absorboivia tiloja, eli prosessi pysähtyy, kun jollakin ajanhetkellä t pätee $\zeta(t) \in \partial\Omega$. Jos vastaavasti ajatellaan, että reuna $\partial\Omega$ olisi parametrisoitu seuraavasti:

$$(1.9.2) \quad \partial\Omega = \{\gamma(\theta) : \theta \in (-\pi, \pi]\},$$

ja määriteltäisiin prosessin alkupisteestä riippuva $\rho_{\zeta_0}(\theta)$, joka olisi sen reunapistejakauman tiheysfunktio, mihin kohden yllä mainittu stokastinen prosessi pysähtyy, niin funktion ρ_{ζ_0} integraalia sanotaan alueen Ω reunan *harmoniseksi mitaksi*. Jos $\alpha = \{z : z = \gamma(\theta), \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2\}$, niin pätee

$$(1.9.3) \quad \omega(\zeta_0, \alpha, \Omega) = \mathbb{P}(\zeta_\infty \in \alpha) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho_{\zeta_0}(\theta) d\theta$$

ja koska kyseessä on todennäköisyyksimitta, niin tietysti

$$(1.9.4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{\zeta_0}(\theta) d\theta = 1.$$

Toisaalta, jos tarkastellaan e.m. todennäköisyyttä $\mathbb{P}(\zeta_\infty \in \alpha)$ kokonaistodennäköisyyden lain eli ensimmäisen askeleen analyysin avulla, saadaan keskiarvoperiaate

$$(1.9.5) \quad \mathbb{P}(\zeta_\infty \in \alpha) = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{P}(\zeta_\infty \in \alpha \mid \zeta(h) = \zeta(0) + he^{i\theta}) d\theta \right],$$

joten ilmeisesti kullekin tavalle valita kaari α , funktio $\mathbb{P}(\zeta_\infty \in \alpha)$ on harmoninen konformisen keskipisteen ζ_0 reaali- ja imaginaariosien suhteen. Ks. [Rud, Kaavat 11.12-13].

Niinikään voidaan alue Ω kuvata konformisesti yksikkökiekoksi ottamalla reunan $\partial\Omega$ parametrisointi (1.9.2) ja konstruoimalla tätä vastaava yksikkökiekon reunan pisteistö kaavalla

$$\mu(\varphi) = \exp \left[2i\pi \int_{-\pi}^{\varphi} \rho_{\zeta_0}(\theta) d\theta \right].$$

Vastaavasti jos on jo konstruoitu konformikuvaus yksikkökiekoksi, niin harmoninen mitta voidaan laskea tästä käänteisesti ratkaisemalla algebrallisesti

$$\int_{-\pi}^{\varphi} \rho_{\zeta_0}(\theta) d\theta = \frac{1}{2i\pi} \ln(\mu(\varphi))$$

ja derivoimalla muuttujan φ suhteen

$$(1.9.6) \quad \rho_{\zeta_0}(\varphi) = \frac{\mu'(\varphi)}{2i\pi\mu(\varphi)}.$$

Kaavaa (1.9.6) on sovellettu numeerisesti kohdassa 5.2. Tarkastellaan vielä kaavan (1.9.6) triviaalitapauksia:

- Yksikkökiekkko, jonka keskeltä satunnaiskulkija lähtee. Tämän parametrisointi on $\mu(\varphi) = e^{i\varphi}$, joten

$$\rho_0(\varphi) = \frac{\hat{ie}^{i\varphi}}{2i\pi e^{i\varphi}} = \frac{1}{2\pi},$$

eli tämä on jakauman $\text{Tas}(-\pi, \pi)$ tiheysfunktio kuten pitääkin. Satunnaiskulkijalla on yhtä suuret mahdollisuudet osua mihin tahansa kohtaan reunaa.

- Yksikkökiekkko, jonka pisteestä $x_0 \in [0, 1)$ satunnaiskulkija lähtee. Tässä voidaan suorittaa ensin yksikkökiekon automorfismi φ_{x_0} kyseisen pisteen siirtämiseksi origoon, jolloin saadaan

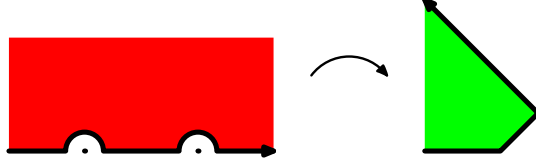
$$\mu(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - x_0}{1 - x_0 e^{i\varphi}}, \quad \mu'(\varphi) = \frac{\hat{ie}^{i\varphi}(1 - x_0^2)}{(1 - x_0 e^{i\varphi})^2},$$

joten tiheysfunktio

$$\rho_{x_0}(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}(1 - x_0^2)}{2\pi(1 - x_0 e^{i\varphi})(e^{i\varphi} - x_0)} \in \left[\frac{1 - x_0}{2\pi(1 + x_0)}, \frac{1 + x_0}{2\pi(1 - x_0)} \right],$$

missä korkein tiheysfunktion arvo esiintyy oikeassa laidassa $\varphi = 0$ ja matalin arvo vastaavasti vasemmassa laidassa, $\varphi = \pi$, kuten pitikin. Mainittakoon, että nyt saatua kaavaa sanotaan muutaman, tässä sivuutettavan lisäoletuksen kanssa, *Harnackin periaatteeksi* (engl. Harnack's principle), joka asettaa ylä- ja alarajoja harmonisen funktion vaihteluille rajoitetussa alueessa.

Lisätietoa Harnackin periaatteesta löytyy teoksista [Rud, Lause 11.11], [Ahl, Luku V, Kappale 1.4] tai [Gam, Luku XV, kaava (3.3)] ja harmonisesta mitasta [Gam, Luku XV, kappale 6] tai [GM]. Jälkimmäistä pidetään harmonisen mitan tutkimuksen keskeisenä perusteoksena.



KUVA 1.7. Schwarzin ja Christoffelin integrointikaava. Kuvauksella

$$w(z) = \int (z - z_1)^{-1/4} (z - z_2)^{-1/2} dz$$

taitetaan ylempi puolitaso kuvassa oikealla näkyväksi ylemmän puolitason osa-alueeksi. Eksponentti $-a$ kääntää kuvautumissuuntaa a/π radiaania vasemmalle ja jättää kuva-alueen vasemmalle puolelle.

1.10. Schwarzin ja Christoffelin muunnos

Tutkitaan funktiota, jolle pätee

$$(1.10.1) \quad w'(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{-a_k}, \quad \forall k, z_k \in \mathbb{R}, a_k \in (0, 1].$$

Lauseen 1.3.2 nojalla tämä on konformikuvaus kun $z \notin (z_k)$, joten w on konforminen ainakin ylemmässä puolitasossa \mathbb{H} . Todetaan lisäksi, että tulon tekijät voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$(1.10.2) \quad z - z_k = |z - z_k| \operatorname{sgn}(z - z_k),$$

joten

$$(1.10.3) \quad \begin{aligned} (z - z_k)^{-a_k} &= |z - z_k|^{-a_k} (\operatorname{sgn}(z - z_k))^{-a_k} \\ &= \begin{cases} |z - z_k|^{-a_k}, & \text{jos } z > z_k \\ e^{-ia_k\pi} |z - z_k|^{-a_k}, & \text{jos } z < z_k. \end{cases} \end{aligned}$$

Voidaan tehdä johtopäätös, että integroitaessa funktiota $w'(z)$ pitkin reaaliakselia vasemmalta oikealle, suuntakulma on aina

$$(1.10.4) \quad \arg(w'(z)) = \sum_{k: z < z_k} -a_k\pi,$$

ja jokaisen pisteen z_k ohittaminen ylemmän puolitason kautta ja sen jälkeen palaaminen reaaliakselille, kääntää kuvaussuuntaa $-a_k\pi$ radiaania menosuunnasta *vastapäivään* ja jättää sen alueen, joksi ylempi puolitaso kuvautuu, vasemmalle. Voidaan päätellä

LAUSE 1.10.5 (Schwarzin ja Christoffelin integrointikaava). *Funktio*

$$w(z) = C \int \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{\alpha_k/\pi - 1} dz, \quad \forall k, \alpha_k \in (0, \pi),$$

missä $C \in \mathbb{C}$ on kompleksinen vakio, kuvaa ylemmän puolitason monikulmioksi, jonka sisäkulmat ovat α_k . Pisteet (z_k) tulee ohittaa ylemmän

puolitason kautta, esimerkiksi parametrisoimalla $u = z_k + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi)$, $du = ire^{i\theta}$ kunkin z_k :n ympäristössä.

LAUSE 1.10.6. Mikäli lausetta 1.10.5 laajennetaan niin, että sallitaan $\alpha_k \in \mathbb{R}$, niin

- Ne kulmat, joille pätee $\alpha_k \leq 0$ ovat singulariteetteja ja kuvautuvat kompleksiseen äärettömään.
- Niiden kulmien, joille pätee $\alpha_k \geq \pi$, alkukuvat z_k eivät voi sijaita äärettömyydessä, ellei kaavaa muuteta niin, että lisätään tulontekijä $(z - z_\ell)^{-2}$ vastaamaan sitä z_ℓ :n arvoa, joka kuvautuu äärettömään tai sovelleta ensin sopivaa ylemmän puolitason automorfismia, ks. kaavoja (1.6.10), (1.6.14) ja (1.6.17).
- Jos halutaan kuvata ylempi puolitaso monikulmion ulkopuoleksi, on ylemmästä puolitasosta saatava joku piste kompleksisen äärettömän alkukuvaksi. Tällöin lauseen 1.10.5 kaavaan on lisättävä tulontekijät $(z - i)^{-2}(z + i)^{-2}$, kaksi kappaletta siis siksi, että symmetria varmistaisi reaaliakselia pitkin integroimisen muodostavan muiden kuin alkukulmien kohdalla suoraa viivaa. Ks. [SL, Lause 3.64].

LAUSE 1.10.7 (Schwarzin ja Christoffelin integrointikaava yksikkökielelle). Lauseen 1.10.5 mukainen integraali, missä pisteet z_k sijaitsevat yksikkökiekon reunalla, kuvaa yksikkökiekon n -kulmioksi, jonka sisäkulmat ovat α_k , jos ja vain jos

$$-\sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{\pi} - 1 \right) = n - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\pi} = 2,$$

s. o.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = (n - 2)\pi.$$

TODISTUS. Yleisyyttä loukkaamatta voidaan tehdä oletus, että mainitut alkukulmat (z_k) sijaitsisivatkin yksikkökiekon reunan sijasta origon kautta kulkevalla kiekonreunalla, sillä näistä tapauksista päästään toisiinsa translaatiolla. Sijoitetaan nyt kaavaan

$$\int \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{-a_k} dz, \quad z = \frac{1}{u}, \quad dz = -\frac{du}{u^2},$$

ja vakiotermit kussakin välivaiheessa yksinkertaisuuden vuoksi pois jättämällä

$$(1.10.8) \quad \int \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_k} \right)^{-a_k} \frac{du}{u^2} \simeq \int \prod_{k=1}^n (u^{a_k} (u - u_k)^{-a_k}) \frac{du}{u^2},$$

missä osamäärä

$$\frac{\prod_{k=1}^n u^{a_k}}{u^2}$$

kumoutuu vain, jos

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2.$$

Toisaalta todistuksen alussa tehty inversio $z = u^{-1}$ antaa ymmärtää, että ” u ”-avaruudessa sijainnut alkukuva oli puolitaso (ks. lausetta 1.6.6), ja kaavan (1.10.8) oikea puoli u :n potenssitermien kumoutuessa selvästi tavanomainen puolitason Schwarzin ja Christoffelin integraalikaava. Näin on lause 1.10.7 todistettu. \square

Pohdintaa. Eräät kirjallisuus- ja verkkolähteet sinänsä mainitsevat yksikkökiekkoa koskevan Schwarzin ja Christoffelin kaavan, kuitenkin esittämättä todistusta tai mainitsematta tärkeää kulmien summaa koskevaa lisäehtoä. Verkkolähteistä on esimerkkinä (tilanne elokuun lopussa 2007) [PMS].

Jos esimerkiksi halutaan kuvata yksikkökiekko kompleksitason neljännekseksi, väärin olisi laatia Schwarzin ja Christoffelin integraali tyyliin

$$(1.10.9) \quad w(z) = \int (z+1)^{-1/2} dz,$$

sillä tämä integraali *ei kuvaa* yksikkökiekkoa neljännekseksi vaan sen sijaan lemniskaatan puolikkaan sisäpuoleksi. Mainittua ominaisuutta muuten käytettiin Riemannin kuvauslauseen 1.7.1 todistuksessa aiemmin.

Edellä esitetyn sijaan yksikkökiekon kuvaaminen (ensimmäiseksi) neljännekseksi $\Re(z) > 0$, $\Im(z) = 0$, tapahtuisi helpommin käänteisen Cayleyn muunnoksen (ks. lausetta 1.6.10) ja holomorfinen neliöjuuren (1.5.6) yhdistämisellä

$$w(z) = \sqrt{\psi^{-1}(z)} = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

tai, jos Schwarzin ja Christoffelin kaavaa välttämättä haluaa käyttää, niin tällöin yksikkökiekko kuvautuu neljännekseksi integraalilla

$$w(z) = C \int (z+1)^{-1/2} (z-1)^{-3/2} dz,$$

eli ääretönpisteessä kierrettävä kulma on huomioitava mukaan.

LAUSE 1.10.10. *Jos lauseen 1.10.7 välttämätön oletus*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = (n-2)\pi$$

on voimassa, niin integraali

$$w(z) = C \int \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{1-\alpha_k/\pi} \frac{dz}{z^2}$$

kuvaa yksikkökierokkeen ulkopuolen lauseessa 1.10.5 aiemmin määritellyn monikulmion ulkopuoleksi [SL, Kaava (3.65)].

TODISTUS. Yksikkökierokkeen reuna kuvautuu inversiossa $1/z$ yksikkökierokkeen reunaksi ja lisäksi pätee (vakiot jätetty pois)

$$\int \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{1-\alpha_k/\pi} \frac{dz}{z^2} \simeq \int \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{z - z_k} \right)^{\alpha_k/\pi-1} d\left(\frac{1}{z}\right).$$

Differentiaalinen muoto siis ratkaisee sen, että integroidaan yksikkökierokkeen ulkopuolta ikään kuin se olisi lauseen 1.10.7 mukainen yksikkökierokkeen sisäpuoli. Lisäksi yksikkökierokkeen sisäpuolelta lasketut sisäkulmat α_k ovat yksikkökierokkeen ulkopuolelta laskettuja ulkokulmia. \square

On huomattava, *ettei* lause 1.10.10 kuvaa yksikkökierokkeen sisäpuolta konformisesti millekään joukolle, koska origosta muodostuu ensimmäisen kertaluvun napa.

Kasautuminen ja parametriongelma. Palataan lauseeseen 1.10.7 ja sen avulla muodostettavaan kuvaukseen w , jossa yksikkökierokke kuvattaisiin konveksiksi monikulmioksi Ω tai käänteiskuvauksella toisinpäin. Funktion w derivaatalle pätee kaavan (1.10.1) nojalla

$$w'(z) = C \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{\alpha_k/\pi-1}, \quad C \in \mathbb{C}, \quad z_k \in \partial\mathbb{D}(0, 1),$$

ja konveksisuudesta johtuen eksponentit $\alpha_k/\pi - 1 < 0$ kaikilla indekseillä k . Tällöin myös $\lim_{z \rightarrow z_k} w'(z) = \infty$ ja funktion w konforminen tiheys näiden pisteiden ympäristössä lähenee nollaa. Vastaavasti käänteiskuvauksella $z(w)$, joka välittää kuvauksen $z : \Omega \rightarrow \mathbb{D}(0, 1)$ on konforminen tiheys näiden pisteiden ympäristössä hyvin suuri. Tämä siis merkitsee sitä, että jos monikulmion Ω reunaa approksimoidaan tasavälisellä pistejoukolla ja tämä pistejoukko kuvataan numeerisesti yksikkökierokkeen reunaksi, on odotettavissa pisteiden kasautumista kulmien kohdalla ja sitä enemmän, mitä terävämmistä kulmista oli kysymys. Konveksin monikulmion sivujen pituuksien suhteita koskevasta kasautumisilmiöstä on mainittu kohdassa 2.5. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että ei-konvekseilla monikulmioilla, joilla siis osa kulmista aukeaa ulospäin, esiintyy näiden pisteiden kohdalla harventuma, kuvattaessa tällaista monikulmiota numeerisesti ja konformisesti yksikkökierokkeelle.

Itse asiassa, mikäli lauseen 1.10.5 mukaisessa kaavassa tulon tekijöiden määrä $n > 3$, niin muuttujien z_k arvot vaikuttavat syntyvän monikulmion sivujen pituuksiin. Vapausasteita on tällöin $n - 3$ kappaletta, kolme pistettä nimittäin voidaan aina siirtää haluttuihin kolmeen muuhun pisteeseen Möbius-kuvauksella 1.6.8. Tätä sanotaan *parametriongelmaksiksi*. Artikkelissa [HVV] parametriongelman tarkka

kaava on kyetty johtamaan konvekseille nelikulmioille ja siinäkin johdetaan pitkälle hypergeometristen funktioiden teoriaan. Tärkeitä tutkimuksia aiheesta yleisemmin ovat esimerkiksi [Ban] ja [How]. Ensinmainittu on laatinut asiaa koskevia Schwarz-Christoffel Toolbox (SC Toolbox) -ohjelmiston [Dri] laajennuksia. Lisätietoa hypergeometrisista funktioista ja niiden yhteyksistä elliptisiin integraaleihin, löytyy esimerkiksi teoksesta [AVV, Osa 1, luku 1] tai [AS, Luku 15].

Schwarzin ja Christoffelin kaavaan perustuvia funktioita.

Seuraavassa esitellään geometrisesti merkittäviä Schwarzin ja Christoffelin kaavan tulkintoja.

Logaritmi. Kompleksinen logaritmi määriteltiin kappaleessa 1.5 kaavalla

$$\int \frac{dz}{z} = \int z^{-1} dz.$$

Kanonisesti tulkittuna tämä tekisi origon kohdalla π radiaanin käännöksen vastapäivään jättäen ylemmän puolitason kuvan kuvaussuunnassa vasemmalle. Koska pätee $\alpha_1 = 0$, niin logaritmilla on tässä kohden singulariteetti, ja käännös vasemmalle tapahtuu kompleksisessä äärettömyydessä, päätyen tulemaan takaisin samansuuntaisesti, mutta $i\pi$:n poikkeamalla, s.o. jos $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, niin

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{ire^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = i\theta + C.$$

Neliöjuuri. Neliöjuuri toteuttaa integraalikaavan

$$\int z^{-1/2} dz = 2\sqrt{z} + C.$$

Origo kuvautuu $\pi/2$ radiaanin (suoraksi) kulmaksi.

Arkussini. Arkussini voidaan määritellä integraalina

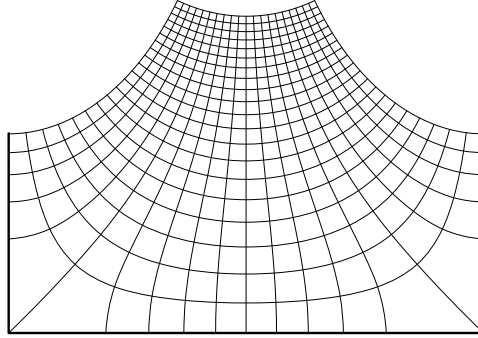
$$\arcsin(z) = \int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = i \int_{\gamma} (z+1)^{-1/2} (z-1)^{-1/2} dz,$$

missä γ on origosta pisteeseen z lähtevä polku. Tämä kuvaa ylemmän puolitason nauhaksi $\Re(z) \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\Im(z) > 0$, jossa siis pisteet ± 1 kuvautuvat $\pi/2$ radiaanin (suoriksi) kulmiksi.

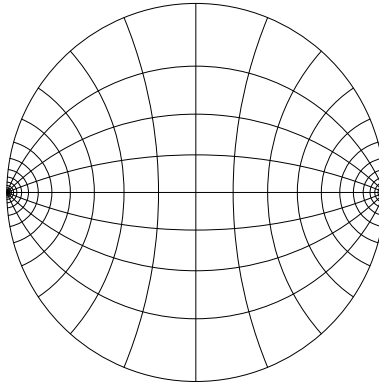
Kanava, areahyperbolinen tangentti. Areahyperbolinen tangentti voidaan määritellä integraalina

$$(1.10.11) \quad \operatorname{artanh}(z) = \int_{\gamma} \frac{dz}{1-z^2} = \int_{\gamma} (1-z)^{-1} (1+z)^{-1} dz,$$

missä γ on origosta pisteeseen z lähtevä polku. Koska eksponenttien summa on -2 , voidaan lauseen 1.10.7 perusteella lausua, että tämä kuvaa yksikkökieken äärettömän pitkäksi tasalevyiseksi kanavaksi, jossa siis alkukulmien ± 1 kuvat sijaitsevat äärettömässä ja vastaavat 0 radiaanin sisäkulmia. Laskemalla nähdään, että yksikkökiekkokuva tuu kanavaksi $\Im(z) \in (-\pi/4, \pi/4)$. Ks. kuvaa 1.9.



KUVA 1.8. Arkussini kuvaa ylemmän puolitason kuiluksi tai nauhaksi $\Re(z) \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\Im(z) > 0$.



KUVA 1.9. Äärettömän pitkä vaakasuuntainen kanava $\Im(z) \in (-\pi/4, \pi/4)$ kuvattuna yksikkökieroksi hyperbolisella tangentilla

$$w(z) = \tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Tällaisella kuvauksella voidaan keskittyä jonkun tietyn kanavan osan virtausten tutkimiseen.

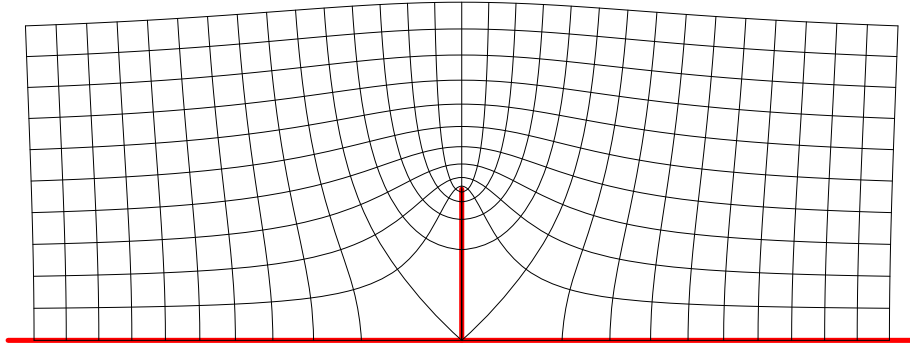
Vastaavasti ylempi puolitaso \mathbb{H} kuvautuu kanavaksi $\Im(z) \in (0, \pi/2)$. Tämä tarjoaa vaihtoehtoisen tavan Cayleyn muunnoksen 1.6.10 johtamiseen; suoritetaan tangentin summakaavalla

$$w_m(z) = \tanh\left(\operatorname{artanh}(z) - \frac{i\pi}{4}\right) = \frac{z + \tanh\left(\frac{-i\pi}{4}\right)}{1 + z \tanh\left(\frac{-i\pi}{4}\right)} = \frac{z - i}{1 - iz}.$$

Tämä versio tosin kuvaa origon pisteeseen $-i$, äärettömän pisteeseen i ja pitää pisteet ± 1 kiintopisteinä paikallaan. Lauseen 1.6.10 mukaiseen funktioon ψ päästäisiin kertomalla edelleen i :llä.

Pystysuoran esteen virtausprofiili. Tarkastellaan Schwarzin ja Christoffelin integraalia

$$(1.10.12) \quad w_s(z) = \int (z+a)^{-\frac{1}{2}} z (z-a)^{-\frac{1}{2}} dz,$$



KUVA 1.10. Pystysuoran esteen ohittavan virtauksen sivuprofiili, eli funktio

$$w(z) = \sqrt{z^2 - 1},$$

joka kuvaa ylemmän puolitason \mathbb{H} ylemmäksi puolitasoksi, josta on poistettu jana $[0, i]$. Sen käänteiskuvausta

$$w^{-1}(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

voidaan käyttää hyväksi konformisissa taitoksissa.

jonka ratkaisu on käänteismuunnoksineen (integroimisvakio unohtaen)

$$(1.10.13) \quad w_s(z) = \sqrt{z^2 - a^2}, \quad w_s^{-1}(z) = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Funktio $w_s(z)$ kuvaa konformisesti ylemmän puolitason \mathbb{H} alueeksi $\mathbb{H} \setminus \gamma$, missä γ on origosta pisteeseen ia ulottuva jana. Jos nyt tällä muunnoksella kuvataan sellaisia reaaliakselin suuntaisia suoria, joiden imaginääriosaa on positiivinen, niin se kuvaa nesteen pyörteettömän virtauksen sivuprofiilia pystysuoran esteen ohi.

Käänteismuunnos taas on siitä mielenkiintoinen, että se taittaa tämän pystysuoran ”esteen” molemmat puolet edelleen konformisesti reaaliakselille. Erityisesti, jos positiivinen reaaliakseli \mathbb{R}_+ ja jana $[0, ia]$ ovat osa Jordan-alueen Ω reunaa, niin tällöin $w_s^{-1}(\Omega)$ on Jordan-alue, joka on konformisesti ekvivalentti alueen Ω kanssa ja jonka reunasta on ”suurempi osa” kiinni reaaliakselissa ⁷. ”Intuitiivisesti” $w_s^{-1}(\Omega)$ on myös helpommin kuvattavissa ylemmäksi puolitasoksi kuin Ω oli.

Myöhemmin esiteltävä *geodeesinen algoritmi* perustuu sopivaan kaavojen (1.10.13), (1.6.17) ja holomorfinen neliöjuuren hyödyntämiseen. Ks. kuvaa 1.10.

⁷Täsmällisesti, jos \mathbb{U} on alueelle Ω konformisesti ekvivalentti yksikkökierokko, jonka reunalta on määritelty neljä vastinpistettä vastaamaan Jordan-alueen Ω pisteitä 0, 1, 2 ja ∞ ja sitä vastaava φ radiaanin kaari β , niin se kaari β' , joka vastaisi alueen $w_s^{-1}(\Omega)$ reaaliakselissa kiinni olevaa osaa, olisi kaarikulmaltaan suurempi $\varphi' > \varphi$ ja sisältäisi edellisen kaaren kokonaan $\beta \subset \beta'$.

Joukowskin muunnos. Joukowskin muunnoksen $w_J = z + z^{-1}$ derivaatta on $1 - z^{-2} = (z+1)(z-1)/z^2$. On huomattava, että integraalilla

$$\int (z+1)(z-1) \frac{dz}{z^2}$$

on siis lauseen 1.10.10 perusteella tulkinta, jonka mukaan se kuvaisi yksikkökiekon ulkopuolen sellaisen ”monikulmion” ulkopuoleksi, jolla on kaksi nollan suuruista sisäkulmaa. Tällainen ”monikulmio” muodostaa pelkän jananpätkän. Näinollen tämä vahvistaa aiemmin kaavasta (1.8.4) tehtyjä tulkintoja. Ks. myös [SL, Kappale 3.3.4].

Elliptiset integraalit. Näiden Schwarzin ja Christoffelin integraalikaavaa koskevat tulkinnot esitetään luvun 2 alussa.

LUKU 2

Elliptiset integraalit

2.1. Yleistä

Elliptiset integraalit ovat yleisesti tyyppiä

$$\int R(\sqrt{P(z)}) dz,$$

missä R on rationaalifunktio ja P on 3. tai 4. asteen polynomi. Perusteoksia elliptisistä integraaleista ja funktioista ovat esimerkiksi [Bow] tai [Akh]. Tärkeä perusteos elliptisistä integraaleista konformisten ja kvasikonformisten kuvausten yhteydessä on [AVV].

Mikäli polynomin P asteluku on matalampi, kyseessä on alkeisfunktio, jos taas korkeampi, niin puhutaan hyperelliptisistä integraaleista. Seuraavassa esitellään eri elliptisten integraalien lajien Schwarzin ja Christoffelin integraalikaavaa koskevat tulokset. Tämän jälkeen keskitytään pääasiassa ensimmäisen lajin elliptiseen integraaliin.

Elliptinen \mathcal{F} eli 1. lajin elliptinen integraali. Integraali

$$(2.1.1) \quad \mathcal{F}(z; k) = \int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}},$$

missä γ on origosta pisteeseen z kulkeva polku, voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$-k \int (z+1/k)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}(z-1/k)^{-1/2} dz.$$

Tämä kuvaa ylemmän puolitason suorakaiteeksi, jonka kulmapisteet ovat $\pm\mathcal{K}(k)$ ja $\pm\mathcal{K}(k) + i\mathcal{K}'(k)$, missä \mathcal{K} ja \mathcal{K}' ovat täydellisiä ensimmäisen lajin elliptisiä integraaleja ja *modulaarisesta parametrasta* k riippuvia vakioita. Pisteet ± 1 ja $\pm 1/k$ kuvautuvat suoriksi kulmiksi. Huomaa, että $\mathcal{F}(z; 0) = \arcsin(z)$. Ks. kuvan 2.1 vasemmanpuolisinta kuviota.

Elliptinen \mathcal{E} eli 2. lajin elliptinen integraali. Integraali

$$(2.1.2) \quad \mathcal{E}(z; k) = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{1-k^2z^2} dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

missä γ on origosta pisteeseen z kulkeva polku, kuvaa ylemmän puolitason alueeksi, joka koostuu puolitason $\Im m(z) > \mathcal{E}'(k)$, suorakaiteen, jota rajoittavat $\pm\mathcal{E}(k)$ ja $\pm\mathcal{E}(k) + i\mathcal{E}'(k)$ ja janan $(-\mathcal{E}(k) + i\mathcal{E}'(k), \mathcal{E}(k) +$

$i\mathcal{E}'(k)$) yhdisteestä. Kyseessä on siis eräänlainen äärellinen ”potentiaali-kuoppa”. Suureet $\mathcal{E}(k)$ ja $\mathcal{E}'(k)$ ovat täydellisiä toisen lajin elliptisiä integraaleja. Ks. kuvan 2.1 toista kuviota vasemmalta.

Kolmannen lajin elliptiset integraalit. Integraali

$$(2.1.3) \quad \Pi_2(z) = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{1-k^2z^2} dz}{\sqrt{1-z^2(1-n^2z^2)}}$$

on eräs lukuisista kolmannen lajin elliptisistä integraaleista. k on modulaarinen parametri, kuten aiemminkin, n on *elliptinen karakteristika*, jota tässä nimitetään *luonteeksi*.

Tämä erikoistapaus on valittu tähän siksi, että tällä sattuu olemaan rajatapauksinaan edellisten kohtien integraalit (2.1.1), kun $n = k$ ja (2.1.2), kun $n = 0$, mutta esimerkiksi [AS, 17.7.1] käyttää erilaista formalismia¹. Jos $n \in (0, k)$, niin Schwarzin ja Christoffelin kaavan kriittiset pisteet eli alkukulmat sijaitsevat pisteissä $-1/n, -1/k, -1, 1, 1/k$ ja $1/n$, joten geometrinen tulkinta on muuten samantapainen kuin edellisessäkin kohdassa 2.1, mutta kuvatulla alueella $\Pi_2(\mathbb{H})$ on potentiaali-kuopan yläpuolella ”katto”, jonka korkeus siis riippuu luonteen n arvosta. Tai sitten voidaan sanoa, että $\Pi_2(\mathbb{H})$ olisi äärettömän pitkä kanava, jonka yhdessä kohdassa on suorakaiteen muotoinen uloke. Tällaista tapausta sanotaan *hyperboliseksi*. Jos taas $n \in (k, 1)$, niin kyseessä on kanava, jonka yhdessä kohdassa on reunalla ”tukkeena” suorakaide. Tällaista tapausta sanotaan *sirkulaariseksi*. Ks. kuvan 2.1 kahta oikeanpuoleista kuviota.

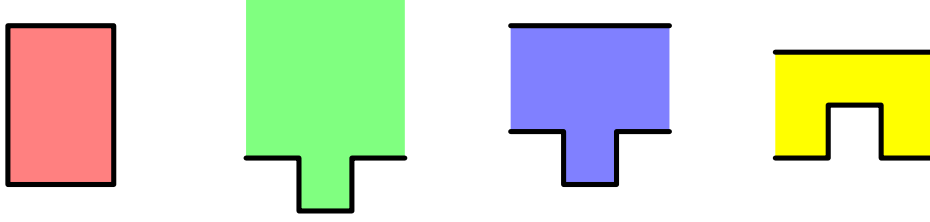
2.2. Täydellinen 1. lajin elliptinen integraali

Edellä (2.1.1) esiteltiin (Jacobin) elliptinen \mathcal{F} , joka kuvaa ylemmän puolitason suorakaiteeksi. Palautetaan mieleen sen lauseke

$$(2.2.1) \quad \mathcal{F}(z; k) = \int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}},$$

ja määritellään sen avulla täydellinen elliptinen integraali $\mathcal{K}(k) = \mathcal{K} = \mathcal{F}(1; k)$ ja komplementaarinen täydellinen elliptinen integraali $\mathcal{K}(k') = \mathcal{K}'(k) = \mathcal{K}' = \mathcal{K}(\sqrt{1-k^2})$. Parametri k tai komplementaarinen parametri $k' = \sqrt{1-k^2}$ voidaan jättää pois tilanteissa, joissa sekaannuksen vaaraa ei ole.

¹Tässä lähteessä määritellään sellainen muoto, jolle on annettu nimeksi Π , mutta jolla ei ole helppoa Schwarzin ja Christoffelin integraalikaavan mukaista tulkintaa kompleksitasoon, vaan Riemannin pintoja taittuu päällekkäin. On osoitettavissa, että nyt määriteltä Π_2 saadaan Π :n ja \mathcal{F} :n lineaarikombinaationa, joten näiden formalismien ilmaisuvoima on keskenään yhtä hyvä.



KUVA 2.1. Elliptisten integraalien lajit Schwarzin ja Christoffelin kaavan tulkintojen perusteella vasemmalta oikealle: (a) ensimmäisen lajin elliptinen integraali, joka kuvaa ylemmän puolitason suorakaiteeksi (b) toisen lajin elliptinen integraali, joka kuvaa ylemmän puolitason äärelliseksi potentiaaliuopaksi (c) hyperbolisen tyypin kolmannen lajin elliptinen integraali (luonne n pienempi kuin modulaarinen parametri k), joka kuvaa ylemmän puolitason kanavaksi, jossa on yksi suorakulmion muotoinen uloke ja (d) sirkulaarisen tyypin kolmannen lajin elliptinen integraali (luonne n suurempi kuin modulaarinen parametri k), joka kuvaa ylemmän puolitason kanavaksi, jossa on yksi suorakaiteen muotoinen tukos.

2.3. Elliptisen \mathcal{F} :n käänteiskuvaus

Haluttaessa kuvata suorakaide konformisesti ylempään puolitasoon tai yksikkökielelle, tulee kyseeseen elliptisten integraalien käänteiskuvaus. Määritellään

MÄÄRITELMÄ 2.3.1. Jos $z = \mathcal{F}(w; k)$, niin Jacobin elliptinen sini on

$$\operatorname{sn}(z; k) = w,$$

Jacobin elliptinen kosini on

$$\operatorname{cn}(z; k) = \sqrt{1 - w^2},$$

ja Jacobin elliptinen delta-amplitudi on

$$\operatorname{dn}(z; k) = \sqrt{1 - k^2 w^2}.$$

Kaavasta (2.2.1) voidaan lisäksi päätellä, että elliptisellä sinillä on derivoimiskaava

$$(2.3.2) \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sn}(z) = \operatorname{cn}(z) \operatorname{dn}(z)$$

minkä tahansa parametrin k suhteen [AS, 16.16.1] ja tämän avulla on mahdollista todistaa yhteenlaskukaava

$$(2.3.3) \quad \operatorname{sn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{sn}(z_1) \operatorname{cn}(z_2) \operatorname{dn}(z_2) + \operatorname{sn}(z_2) \operatorname{cn}(z_1) \operatorname{dn}(z_1)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(z_1) \operatorname{sn}^2(z_2)}$$

jälleen minkä tahansa parametrin k suhteen [AS, 16.17.1].²

2.4. Ekvivalentteja muotoja

Käydään läpi muutamia laskennallisesti tärkeitä elliptisten integraalien keskenään ekvivalentteja muotoja. Aloitetaan todistamalla kohdan 2.1 väittämä siitä, että suorakaiteen $\mathcal{F}(\mathbb{H}; k)$ korkeus todellakin on \mathcal{K}' . Tämä saadaan laskemalla integraalia (2.1.1) origosta pystysuuntaan kompleksiseen äärettömään

$$(2.4.1) \quad \mathcal{F}(i\infty; k) = i \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{1+k^2z^2}},$$

ja sijoittamalla tähän (kaavoja laskettu valmiiksi auki)

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} z^2 &= \frac{u^2}{1-u^2}, & z \, dz &= \frac{u \, du}{(1-u^2)^2}, \\ \sqrt{1+z^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, & \sqrt{1+k^2z^2} &= \sqrt{\frac{1-k'^2u^2}{1-u^2}} \end{aligned}$$

saadaan

$$(2.4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(i\infty; k)}{i} &= \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{1+k^2z^2}} \\ &= \int_0^\infty \frac{z \, dz}{z\sqrt{1+z^2}\sqrt{1+k^2z^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{u \, du}{u\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k'^2u^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k'^2u^2}} \\ &= \mathcal{K}(k'). \end{aligned}$$

²Kaavan (2.3.3) todistus sivuutetaan, mutta se menisi pääpiirteittäin niin, että ensin johdettaisiin myös funktioiden cn ja dn derivoimiskaavat [AS, 16.16.2-3], minkä jälkeen kirjoitettaisiin auki differenssikaavoja pienten lisäysten summana tyyliin

$$f(x+h_1+h_2) \approx f(x) + (h_1+h_2)f'(x) + h_1h_2f''(x),$$

mistä voidaan ennenpitkää, sijoittamalla $f'(x)$:n $f''(x)$:n ym. lausekkeet paikalleen, arvata summakaavan muoto

$$f(x+y) = \phi(f(x), f(y), g(x, y)).$$

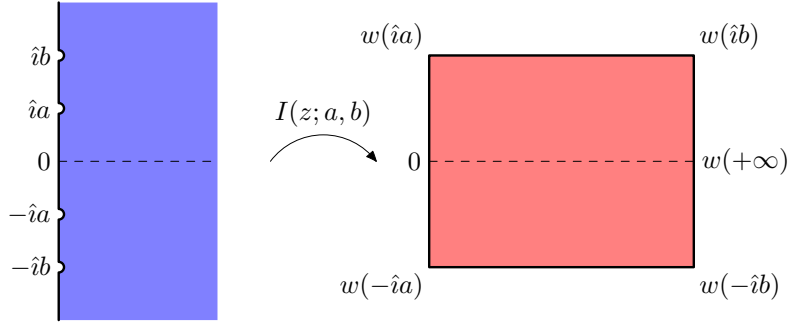
Joskus lisäyksiä h_k ja derivaattoja tietysti tarvitaan enemmänkin kuin kaksi, kunnes sopiva algebrallinen sulkeuma löytyy. Eksponenttifunktion tapauksessa riittää yksi, trigonometristen funktioiden tapauksessa kaksi ja näiden elliptisten funktioiden tapauksessa kolme. Symmetriaominaisuuksista ja edellytyksistä

$$f_x(x+y) = f_y(x+y)$$

sekä

$$f(x+0) = f(x), \quad f(0+y) = f(y)$$

tarkka muoto usein voidaan päätellä. Jälkimmäinen on tehty kirjassa [Bow].



KUVA 2.2. Bernsteinin elliptinen integraali

$$I(z; a, b) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2} \sqrt{z^2 + b^2}}$$

taittaa oikean puolitason suorakaiteeksi.

Jos integraaleja olisi käsitelty epätäydellisinä, saataisiin lisäksi

$$(2.4.4) \quad \hat{\mathcal{F}}(z; k') = \mathcal{F}\left(\hat{i} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}; k\right)$$

ja määritelmän 2.3.1 perusteella

$$(2.4.5) \quad \text{sn}(\hat{i}z; k) = \hat{i} \frac{\text{sn}(z; k')}{\text{cn}(z; k')}.$$

Kaavan (2.4.5) avulla voidaan siis laskea elliptisen sinin arvoja myös imaginaarisella argumentilla [AS, 16.20.1]. Vastaavasti yhdistämällä tämä tieto summakaavaan (2.3.3), saadaan kompleksisille argumenteille

$$(2.4.6) \quad \text{sn}(x + \hat{i}y) = \frac{\text{sn}(x)\text{dn}(y) + \hat{i}\text{cn}(x)\text{dn}(x)\text{sn}(y)\text{cn}(y)}{\text{cn}^2(y) + k^2\text{sn}^2(x)\text{sn}^2(y)},$$

mille tahansa parametrin k arvolle [AS, 16.21.2].

Huomattakoon myös, että elliptiselle \mathcal{F} :lle ja \mathcal{K} :lle on olemassa myös trigonometriset muodot. Jos vaikkapa kaavaan (2.2.1) sijoitetaan $z = \sin \theta$, $dz = \cos \theta d\theta$ ja sijoitetaan rajat paikalleen, saadaan täydelliseksi elliptiseksi integraaliksi

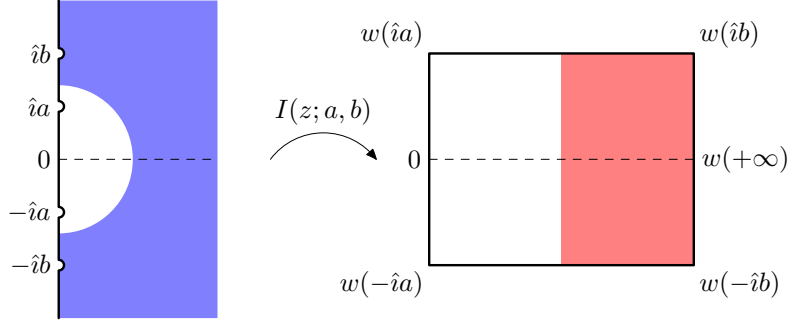
$$(2.4.7) \quad \mathcal{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

[AS, 17.3.1]. Tämä yksinkertaistaa joidenkin kaavojen käsittelyä.

2.5. Landénin muunnos

Esitellään seuraavaksi todistuksineen lause, joka on tärkeä elliptisen integraalin \mathcal{F} evaluoimiseksi. Tätä varten määritellään ensin ”apuintegraali”

$$(2.5.1) \quad I(z; a, b) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2} \sqrt{z^2 + b^2}} = \frac{1}{ib} \mathcal{F}\left(\frac{\hat{i}z}{a}; \frac{a}{b}\right)$$



KUVA 2.3. Nouseva Landénin muunnos. Sijoittamalla Bernsteinin elliptiseen integraaliin Joukowskin muunnos $u = \frac{1}{2} \left(z - \frac{ab}{z} \right)$, seuraa, että ” u ”-avaruuteen muodostuu uusi samantapainen elliptinen integraali, joka taittaa kuvassa sinisellä merkityn kiekon $\mathbb{D}(0, \sqrt{ab})$ ulkopuolisen oikean puolitason alueen kuvassa punaisella merkityksi suorakaiteeksi. Pisteet $u = \pm ia$ ja $u = \pm ib$ taittuivat päällekkäin uusiksi Schwarzin ja Christoffelin kaavan kriittisiksi pisteiksi kohtiin $u = \pm i(a+b)/2$ ja kohtiin $u = \pm i\sqrt{ab}$ taas muodostuu Joukowskin muunnoksen derivaatan nollakohtien vuoksi uudet Schwarzin ja Christoffelin kaavan kriittiset pisteet.

[Ber, Kappale 2], [AS, 17.4.41], ks. myös kuvaa 2.2, jolle pätee seuraavanlainen lause:

LAUSE 2.5.2. *Nouseva Landénin muunnos*

$$\begin{aligned} I(z; a, b) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\frac{z}{2} - \frac{ab}{2z}} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \sqrt{z^2 + ab}} \\ &= \frac{I(\infty; a, b) + I\left(\frac{z}{2} - \frac{ab}{2z}; \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)}{2}. \end{aligned}$$

Edellisestä seuraa erityisesti

$$I(\infty; a, b) = I\left(\infty; \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

TODISTUS. Integraalilla (2.5.1) on Schwarzin ja Christoffelin kaavan mukainen tulkinta, jonka mukaan se kuvaa oikean puolitason $-i\mathbb{H}$ suorakaiteelle, joita rajoittavat pisteet $I(\pm ia; a, b)$ ja $I(\pm ib; a, b)$. Jos kuitenkin oikeaan puolitasoon sovelletaan ensiksi Joukowskin muunnosta

$$(2.5.3) \quad u = \frac{1}{2} \left(z - \frac{ab}{z} \right),$$

niin tämä taittaa kyseisen puolitason auki vasempaan puolitasoon päin pisteiden $z = \pm iab$ kohdilta ja kuvaa puolikiekon $-i\mathbb{H} \cap \mathbb{D}(0, \sqrt{ab})$ vasemmaksi puolitasoksi $i\mathbb{H}$. Lisäksi havaitaan, että $u(\pm i\sqrt{ab}) = \pm i\sqrt{ab}$ sekä $u(\pm ia) = u(\pm ib) = \pm i(a+b)/2$, joten pisteiden ia ja ib kuvat taittuvat ”päällekkäin”. Geometrisesti tämä antaa ymmärtää, että vallitsisi jonkinlainen relaatio

$$I(z; a, b) \sim I\left(u; \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}\right).$$

Näin itse asiassa onkin asianlaita, sillä

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ab}{z^2}\right) \\ z \frac{du}{dz} &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{ab}{z}\right) \\ \left(z \frac{du}{dz}\right)^2 &= \frac{1}{4} \left(z^2 + 2ab + \frac{a^2b^2}{z^2}\right) \\ u^2 &= \frac{1}{4} \left(z^2 - 2ab + \frac{a^2b^2}{z^2}\right) \\ u^2 + ab &= \frac{1}{4} \left(z^2 + 2ab + \frac{a^2b^2}{z^2}\right), \\ \frac{dz}{z} &= \frac{du}{\sqrt{u^2 + ab}} \\ \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}\sqrt{z^2 + b^2}} &= \int \frac{z \, dz}{\sqrt{z^2 + a^2}\sqrt{z^2 + b^2}z} \\ &= \int \frac{z \, du}{\sqrt{z^2 + a^2}\sqrt{z^2 + b^2}\sqrt{u^2 + ab}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{z^2 + a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{z^2}}\sqrt{u^2 + ab}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{4u^2 + a^2 + 2ab + b^2}\sqrt{u^2 + ab}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\sqrt{u^2 + ab}}, \end{aligned}$$

ja huolehtimalla integroimisrajoista, kaava (2.5.2) seuraa. \square

Ks. myös artikkelia [WW] ja kuvaa 2.3. Landénin muunnoksen yleistyksistä, ks. [HM] tai [KS].

MÄÄRITELMÄ 2.5.4 (Aritmeettis-geometrinen keskiarvo). *Olkoon*

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Tällöin raja-arvo

$$\operatorname{agm}(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

on muuttujien a ja b aritmeettis-geometrinen keskiarvo ja sen johdannainen

$$\operatorname{ag}(a) = \operatorname{agm}(1, a)$$

muuttujan a aritmeettis-geometrinen funktio.

LAUSE 2.5.5. *Bernsteinin elliptiselle integraalille pätee*

$$I(\infty; a, b) = \frac{\pi}{2 \operatorname{agm}(a, b)}.$$

TODISTUS. Tämä on seurausta implikaatiosta ja epäyhtälöstä

$$0 \leq a \leq b \Rightarrow \frac{\pi}{2a} \leq I(\infty; a, b) \leq \frac{\pi}{2b}.$$

□

Tärkeitä korollaareja. Kirjassa [AVV, Luku 3], esitellään lauseen 2.5.2 ja kaavan (2.5.1) muitakin tärkeitä korollaareja, joiden todistaminen sivuutetaan. Mainittakoon erityisesti kaavat

$$(2.5.6) \quad \frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}(k) = 2 \frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)$$

[AVV, Kappale 3.18] sekä rajakäyttäytymistä alkeisfunktioiden avulla kontrolloiva

$$(2.5.7) \quad \lim_{k \rightarrow 1} \left[\exp\left(-\pi \frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}\right) - \frac{k^2}{16} \right] = 0$$

[AVV, Kaava 3.5], [AS, 17.3.17, 17.3.28], [Ber, Lause 3.1]. Aiheeseen liittyvistä toteutuksista ja niiden pohjana olevista kaavoista ks. [AS, Kappale 17.6] (elliptisten \mathcal{F} :n ja \mathcal{K} :n ratkaiseminen aritmeettis-geometrisella keskiarvoistamisella) ja [AS, Kappaleet 16.12-16.15], [AVV, Liite B, esimerkit 3 ja 8], [OF, "specfun"-paketin "ellipj.cc"] (elliptisten sn , cn ja dn ratkaiseminen a.g. keskiarvoistamisella).

Huomautus kasautumisesta. Kaavasta (2.5.7) niinikään käy ilmi, että nelikulmion moduli on verrannollinen alkukulmien välisten etäisyyksien suhteen logaritmiin ja vastaavasti kuvattaessa suorakaideita ylempään puolitasoon, kasvavat nämä alkukulmien väliset suhteet eksponentiaalisesti suorakaiteen mittasuhteisiin nähden. Tällä ilmiöllä on myös yleistyksensä muiden monikulmioiden konformikuvausten teoriassa - konveksissa tapauksissa lyhyillä sivuilla esiintyy runsasta kasautumista kuvattaessa yksikkökielelle tai ylempään puolitasoon.

2.6. Ylempi puolitaso yleistettynä nelikulmiona

Jos halutaan määrittää yleistetyn nelikulmion moduli, on monesti ensin kuvattu tätä vastaava alue konformisesti jollakin algoritmilla yksikkökiekoksi tai ylemmäksi puolitasoksi. Tällöin kulmia vastaavat pisteet ovat vastaavasti kuvautuneet joihinkin yksikkökiekon reunan pisteisiin tai jälkimmäisessä tapauksessa reaaliakselille tai kompleksiseen äärettömään. Merkitään näitä pisteitä tutuilla symboleilla z_k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Lauseen 1.6.8 nojalla saadaan nyt aina tarvittaessa aikaiseksi tilanne, jossa nämä pisteet olisivat kuvautuneet ”kanonisiin” pisteisiin $0, 1, s, \infty$, eli s saadaan lausekkeella

$$(2.6.1) \quad s(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_4)(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_4)}.$$

Tarkastellaan sitten vastaavaa Schwarzin ja Christoffelin integraalia

$$(2.6.2) \quad \int z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}(1-sz)^{-\frac{1}{2}} dz,$$

jonka avulla voidaan määrittää *ylemman puolitason moduli* seuraavasti:

LAUSE 2.6.3. *Ylempään puolitasoon perustuvan yleistetyn nelikulmion moduli on*

$$\begin{aligned} \text{GQM}((\mathbb{H}, 0, 1, s, \infty)) &= \frac{\int_{t=1}^s t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-st)^{-\frac{1}{2}} dt}{i \int_{t=0}^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-st)^{-\frac{1}{2}} dt} \\ &= \frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right). \\ \text{GQM}((\mathbb{H}, -1, 0, s, \infty)) &= \frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{\sqrt{s+1}} \right) \end{aligned}$$

Jälkimmäistä pisteistöä $-1, 0, s, \infty$ sanotaan *Teichmüllerin standardipisteistöksi* ja jälkimmäisessä kaavassa esiintyvää yleistettyä nelikulmiota *Teichmüllerin nelikulmioksi*. Jos tämän nelikulmion yhdistää alemmassa puolitasossa olevan peilikuvansa kanssa, saadaan *Teichmüllerin rengas*.

TODISTUS. Sijoitetaan edelliseen kaavaan (2.6.2) $z = u^2$, $dz = 2u du$. Geometrinen tulkinta on seuraavanlainen (vrt. lauseen 2.5.2 todistukseen):

Kriittiset pisteet eli alkukulmat ” u ”-avaruudessa ovat ± 1 ja $\pm 1/\sqrt{s}$, joten neliöön korottaminen luo yhden uuden kriittisen pisteen origoon kulmana $\pi/2$ ja ja ”taittaa” muut kriittiset pisteet pareittain päällekkäin. \square

2.7. Suorakaiteiden automorfismit

Otetaan kanoninen suorakaide $\mathbb{S}(M)$ ja sen reunoilta, jotkut (mahdollisesti) muut vastapäivään kiertosuunnassa olevat pisteet z_k , $k \in$

$\{1, 2, 3, 4\}$ kuin kulmapisteet. Halutaan kuvata tämä yleistetty nelikulmio sellaiseksi suorakaiteeksi, jossa nämä kuvautuisivat kulmapisteisiin. Tämä toimenpide voidaan tehdä kolmessa osassa

- Selvitetään käänteinen moduli ratkaisemalla yhtälö

$$\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}(k) = M$$

Newtonin menetelmällä. Tätä varten tulee ensin johtaa derivaatta

$$\frac{d}{dk} \left(\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}(k) \right) = \frac{-\pi}{2kk'^2\mathcal{K}(k)^2}$$

[**AVV**, Kaava 3.10], jonka perusteella saadaan parametrille k iteraatiokaava

$$k_{n+1} = k_n - \frac{\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}(k_n) - M}{\frac{d}{dk} \left(\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}}(k_n) \right)}$$

Toinen, Landénin muunnokseen perustuva iteraatio löytyy samasta teoksesta [**AVV**, Liite B, Esimerkki 5, ”`invmu.m`”]. Tämäkin käyttää Newtonin iteraatiota, mutta hyödyntää samalla kaavaa

$$(2.7.1) \quad \mathcal{K}(k) = \frac{\pi}{2 \operatorname{ag}(\sqrt{1-k^2})},$$

joka voidaan johtaa lauseesta 2.5.5.

- Translatoidaan ja skaalataan kanoninen suorakaide elliptisen \mathcal{K} :n referenssipisteisiin

$$z \rightarrow 2\mathcal{K}(k)z - \mathcal{K}(k).$$

- Laskostetaan tämä suorakaide ylempään puolitasoon elliptisellä sinillä

$$z \rightarrow \operatorname{sn}(z; k).$$

- Tunnistetaan pisteiden z_k kuvat ζ_k ja sovelletaan lausetta 2.6.3.

Vaihtoehtona kolmelle ensimmäiselle askeleelle on suorittaa numeerisesti konforminen taitos alkuperäiseltä suorakaiteelta ylempään puolitasoon tai yksikkökielelle.

Lisätietoa käänteisestä modulista, ks. [**Weil**], jossa käänteisen noomin ja sitä kautta käänteisen modulin laskeminen voidaan suorittaa myös thetafunktioiden avulla.

LUKU 3

Konformiset taitokset

3.1. Yleistä

Tämän luvun tarkoituksena on esitellä numeerisia menetelmiä konformikuvauksiksi kanonisille alueille, käyttäen pääasiallisena lähteenä artikkelia [MR]. Tätä varten asetetaan muutamia määritelmiä

MÄÄRITELMÄ 3.1.1 (Möbius-kiekot ja Möbius-ympyrät). *Alue Ω on Möbius-kieppo ja merkitään $\Omega \in \mathcal{MD}$ jos ja vain jos*

- a) *Alue Ω on avoin kiekko tai*
- b) *avoin kiekon ulkopuoli tai*
- c) *avoin puolitaso.*

Möbius-kieppo on reaaliakeskeinen, jos ja vain jos

- d) *Se on kiekko, jonka keskipiste on reaaliakselilla:*

$$\Omega = \mathbb{D}(a, r), \quad a \in \mathbb{R}, \quad r > 0$$

tai

- e) *suoraan oikealle tai vasemmalle avautuva puolitaso:*

$$\Omega = \pm i\mathbb{H} + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Möbius-kiekkojen reunakäyrät ovat Möbius-ympyröitä. Reaaliakeskeisten Möbius-kiekkojen ylemmässä puolitasossa sijaitsevat reunakäyrät ovat ylemmän puolitason hyperbolisen geometrian geodeeseja. Hyperbolisesta geometriasta, ks. [AVV, Luku 6, 6.28-].

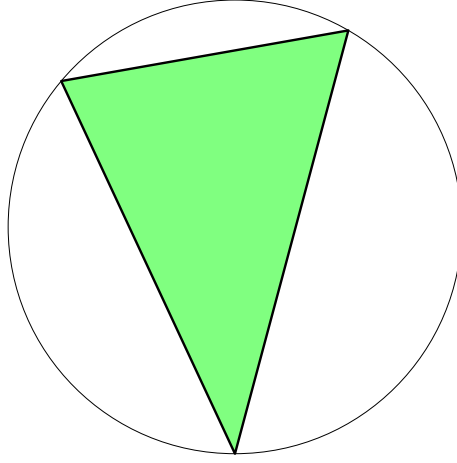
MÄÄRITELMÄ 3.1.2 (Kolmijako). *Olko $\Omega \in \mathcal{MD}$ ja Jordan-alue $\Omega_1 \in \Omega$. Tämä jakaa kompleksitason kolmeen osaan $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (alueen Ω ulkopuoli), Ω_1 (alueen Ω sisäkomponentti) ja $\Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ (alueen Ω ulkokomponentti). Asetetaan lisäksi taitosraja $\gamma_\Omega = \partial\Omega_1 \cup \overline{\Omega}$, joka on se alueen Ω_1 reunakäyrän osa, joka erottaa sisä- ja ulkokomponentteja.*

Ks. kuvaa 3.1.

MÄÄRITELMÄ 3.1.3 (Täydellinen konforminen taitos). *Täydellinen konforminen taitos (engl. conformal welding) on konformikuvaus*

$$w(\Omega_1) = \Omega,$$

missä Ω ja Ω_1 ovat kuten määritelmässä 3.1.2 eli sillä voidaan määritelmän 3.1.1 nojalla ilmeisesti kuvata yhdesti yhtenäinen alue kanoniseksi alueeksi.



KUVA 3.1. Kolmijako. Alue Ω on yksikkökiekko, sisäkomponenttina Ω_1 on vihreällä piirretty kolmio ja ulko-
komponenttina valkoiseksi jätetty muu osa yksikkökiekkoa. Konformisissa taitoksissa pyritään taitosraja kuvaamaan alueen Ω reunaksi.

MÄÄRITELMÄ 3.1.4 (Osittainen konforminen taitos). *Olkoon γ_1 sellainen yhtenäinen taitosrajan osa, joka yhtyy toisesta päästään alueen Ω reunalle. Nyt konformikuvaus*

$$w(\Omega \setminus \gamma_1) = \Omega$$

on osittainen konforminen taitos. Tämän ideana on saada siirrettyä sisäkomponentin reunaa kiinni alueen Ω reunaan. Jos esimerkiksi Ω on oikea puolitaso $-\hat{i}\mathbb{H}$ ja γ_1 jana välillä $(0, 1)$ (muusta taitosrajasta ei ole väliä), niin

$$w = \sqrt{z^2 - 1}$$

olisi osittainen konforminen taitos, sillä

$$w(-\hat{i}\mathbb{H} \setminus \gamma_1) = -\hat{i}\mathbb{H}.$$

MÄÄRITELMÄ 3.1.5 (Oskulaatioaskel ja oskulaatioalgoritmi). *Tälle ei voida antaa täsmällistä matemaattista määritelmää, koska näitä tehdään aina joidenkin sisäkomponenttien tai taitosrajan ominaisuuksien suhteen. Joka tapauksessa, jos on olemassa konformikuvaus $\Psi(z, \mathcal{C})$, jossa \mathcal{C} on jokin sisäkomponentin Ω_1 tai taitosrajan γ ominaisuus, olkoon tämä sitten origosta katsottuna lähin piste, sopiva sisä- tai ulkokulma, tieto konveksisuudesta tai tähtimäisyydestä tai mikä tahansa tällaisten yhdistelmä ja Ψ jollakin tavoin "parantaisi" tätä ominaisuutta, niin sanottakoon kuvausta Ψ oskulaatioaskeleeksi.*

Sanottakoon oskulaatioaskelta stabiiliksi, jos se ei kuvaa sisä- tai ulkokomponentteja kohdealueensa ulkopuolelle, muuten epästabiiliksi.

Algoritmia, joka pyrkii tekemään konformikuvausta halutuksi tai ominaisuuksiltaan halutuksi kohdejoukoksi (usein yksikkökiekko tai muu

konvekksi alue) ottamalla useita oskulaatioaskelia, sanottakoon oskulatioalgoritmiksi.

3.2. Geodeesinen algoritmi

Tämä algoritmi on saanut nimensä siitä, että se perustuu reaali-keskeisten Möbius-kiekkojen reunakäyriin, jotka määritelmän 3.1.1 nojalla ovat hyperbolisen geometrian geodeeseja. Algoritmi on alunperin esitetty artikkelissa [MR, §1].

Huomautus! Seuraavassa käsitellään yksinkertaisuuden vuoksi pistejonoa (z_k) siten, että sillä ei merkitä alkuperäistä, vaan kulloisenkin muutoksen jälkeistä vaihetta. Merkittäessä

$$(z_k) \rightarrow \phi((z_k))$$

tarkoitetaan

$$\forall k, w_k = \phi(z_k)$$

ja näin muodostuneen jonon (w_k) sijoittamista takaisin jonon (z_k) paikalle.

Tavoitteena geodeesissä algoritmissa on mielivaltaisen Jordan-alueen, jonka reunaa on approksimoitu sitä vastapäivään kiertävällä pistejoukolla (z_k) , $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$, kuvaaminen konformisesti ylemmäksi puolitasoksi. Tätä varten suoritetaan ensinnä Möbius-kuvaus (koko pistejoukolle)

$$(3.2.1) \quad (z_k) \rightarrow \frac{(z_{N-1} - z_N)((z_k) - z_{N-2})}{(z_{N-1} - z_{N-2})((z_k) - z_N)},$$

joka siirtää pisteen z_N äärettömään, pisteen z_{N-1} pisteeseen 1 ja pisteen z_{N-2} pisteeseen 0. Jos alkuperäinen alue oli Möbius-kiekko, tämä kuvaus muuten kuvaisi sen suoraan ylemmäksi puolitasoksi \mathbb{H} lauseen 1.6.6 nojalla. Muussa tapauksessa alue on kuvautunut niin, että sitä rajoittaa alhaaltapäin positiivinen reaaliakseli ja origosta lähtevä polku positiiviseen äärettömään, joka ei saa leikata positiivista reaaliakselia. Otettaessa nyt tästä reunakäyrästä holomorfinen neliöjuuri (ks. kappaletta 1.5) ylemmän puolitasoon

$$(3.2.2) \quad (z_k) \rightarrow \sqrt{(z_k)},$$

päädytään lauseen 3.1.2 mukaiseen tilanteeseen:

- Kohteena oleva Möbius-kiekko on ylempi puolitaso \mathbb{H} .
- Taitosraja $\gamma_{\mathbb{H}}$ kulkee origosta pitkin ylemmässä puolitasossa sijaitsevaa polkua kompleksiseen äärettömään. Taitosrajalla sijaitsevat pisteet z_1, z_2, \dots, z_{N-3} .
- Sisäkomponentti Ω_1 jää taitosrajasta oikealle.

Tarkastellaan viivanpalaa origosta ($z_{N-2} = 0$) ensimmäiseen taitosrajan pisteeseen z_{N-3} . Mikäli pistejoukolle sovelletaan tässä vaiheessa

kaavan (1.6.17), s.o.

$$(z_k) \rightarrow \frac{(z_k)}{1 - (z_k)/b},$$

olettaen, ettei z_{N-3} jo sijainnut positiivisella imaginaariakselilla, ja ottaen huomioon ääretönpistettä koskevat erityissäännöt, niin olemme tilanteessa, jossa saadulle pistejoukolle voidaan toteuttaa konforminen taitos

$$(z_k) \rightarrow \sqrt{(z_k)^2 - z_{N-3}^2}$$

(neliöjuuri taas ylempään puolitasoon, ks. myös lausetta 3.1.4), minkä seurauksena pisteet $z_{N-3} \dots z_N$ sijaitsevat reaaliakselilla ja loput $N - 4$ pistettä uudella taitosrajalla. Kokonaisuudessaan taitettiin konformisesti reaaliakselia vastaan kohtisuorassa olevan geodeesin (ks. lausetta 3.1.1) pala.

Toistamalla tätä algoritmia, voidaan kaikki pisteet kuvata reaaliakselille ja siten alkuperäinen Jordan-alue ylemmäksi puolitasoksi. Lopputilanteessa sijaitsee pisteen z_1 kuva origossa ja pisteen z_N kuva muualla positiivisella reaaliakselilla. Origosta pisteeseen z_N kulkee edelleen ”näkömätön” taitosraja, jota voidaan approksimoida geodeesilla. Möbius-kuvauksella

$$(z_k) \rightarrow \frac{(z_k)}{1 - (z_k)/z_N}$$

saadaan tästä puoliympyrästä ensimmäinen neljännes $\sqrt{\mathbb{H}}$ ja neliöön korottamalla lopputulos.

Käytännössä geodeesinen algoritmi suoraan toteutettuna kärsii vaikeasta kasautumisesta pisteen z_N kuvan ympäristöön reaaliakselille, näin on erityisesti asianlaita, jos kuvattava Jordan-käyrä ei ollut sileä¹.

Ongelmana on myös liukulukupyöristysvirheet. Jos on varastoitava suuri joukko lukuja $M + \epsilon_1, M + \epsilon_2, M + \epsilon_3 \dots$, joissa M on suuri ja ϵ_k :t pieniä, niin M :n arvon ilmaisemiseen tarvitsevat bitit vievät tilaa jokaisesta liukuluvusta erikseen, sen sijaan, että olisi varastoitu vain M kertaalleen ja *erotukset* $\epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_2$ jne. erikseen.

Modulin määrittämisestä. Jos alkuperäisen Jordan-alueen reunalta oli erikseen määritetty neljä järjestyksessä ollutta reunapistettä $z_{m_1}, z_{m_2}, z_{m_3}$ ja z_{m_4} , $1 \leq m_1 < m_2 < m_3 < m_4 \leq N$, niin se ja sen konforminen kuva kanonisella alueella voidaan tulkita yleistetyksi nelikulmioksi (ks. määritelmää 1.1.8) konforminen nelikulmion moduli (ks. määritelmää 1.3.6) määrätä elliptisten integraalien avulla tämän pisteistön reaaliakselilla tai yksikkökiekon reunoilla olevien kuvien koordinaateista, kuten lauseessa 2.6.3 on esitetty. Jatkossa tästä seikasta ei välttämättä huomauteta erikseen.

¹ \mathbb{R}^2 :n käyräksi upotettuna ja parametrisoituna $(x(t), y(t)) \in C^1(\mathbb{R})$.

3.3. Slit- eli viiltoalgoritmi

Tämäkin algoritmi, samoin kuin edellinenkin, on alunperin esitelty artikkelissa [MR, §1,ss.7,]. Esitellään se tässä vain lyhyesti.

Funktio

$$g_a(z) = C(z-p)^p(z+1-p)^{1-p}, \quad a \in \mathbb{C}, p = \frac{\Im(\ln(a))}{\pi}, C = \frac{|a|}{p^p(1-p)^{1-p}}$$

on konformikuvaus ylemmältä puolitasolta \mathbb{H} alueeksi $\mathbb{H} \setminus L$, missä L on jana origosta pisteeseen a . Näinollen sen käänteiskuvaus $g_a^{-1}(z)$ muodostaa osittaisen konformisen taitoksen. Koska tätä käänteiskuvausta ei kuitenkaan voida lausua alkeisfunktioiden avulla, on turvauduttava Newtonin menetelmään, eli sitä varten ratkaistaan

$$g'_a(z) = C(p(z-p)^{p-1}(z+1-p)^{1-p} + (1-p)(z-p)^p(z+1-p)^{-p}).$$

Tämän jälkeen voidaan käänteiskuvaus määrittää tuttuun tapaan iteraatiolla

$$w_{k+1} = w_k - \frac{g_a(w_k) - z}{g'_a(w_k)},$$

kunnes haluttu tarkkuus $|w_{k+1} - w_k| < \epsilon$ on saavutettu. Käytännössä tämä ei kuitenkaan aina suppene, mikäli alkupiste oli valittu hyvin läheltä janaa L , sillä kyseinen käänteiskuvaus on mainitulla janalla kaksikäsitteinen (janalle $(p-1, 0)$ vs. janalle $(0, p)$) ja tietokoneen pyöristysvirheet riittävät muuttamaan eri iteraatioaskeleilla sitä, kumpaan haaraan iteraatio olisi ollut suppenemassa. Ongelman voi kuitenkin kiertää useammalla eri tavalla ja helpoin menetelmä on katkaista iteraatio tietyn rajan jälkeen, jos se ei kunnolla suppene. Hieman parempi lienee se, että tietyn rajan jälkeen iteraatio pakotetaan suppenemaan osajonoon, eli hylätään w_{k+1} , mikäli ei pätenyt

$$|w_{k+1} - w_k| < |w_k - w_{k-1}|.$$

Tällaisissa alkeellisissa heuristisissa valinnoissa tosin konformisuus saatetaan menettää. Käytännössä suurin osa kyseeseen tulevista invertoitavista pisteistä sijaitsee janalla L yläpuolella ja suppenemisen pitäisi olla nopeaa.

Sen perusteella, mitä artikkeliin [MR] liittyvässä FORTRAN-ohjelmapaketissa olevasta ohjelmasta [MarZIPPER, "inverse.f"] voi päätellä, on artikkelin kirjoittaja ratkaissut asian huomioimalla erikseen alueita, joissa olevia pisteitä evaluoidaan, oikean haaran valitsemiseksi. FORTRAN-ohjelmointikielestä lisätietoa verkkolähteessä [FOR]. FORTRAN:in ominaisuuksien pohjalta on laadittu myös C-kielen laajentamiseksi C99-standardi, ks. tästä enemmän verkkolähteestä [See].

Slit-algoritmissa alku suoritetaan samalla tavoin kuin geodeesisesakin algoritmissa aina kaavaa (3.2.2) myöten. Kuitenkin myöhemmät askeleet korvataan kuvauksilla $g_{z_\ell}^{-1}((z_k))$ kullakin $\ell \in \{N-3, N-2, \dots, 2, 1\}$.

Zipper- eli vetoketjualgoritmi. Tämä on edellisten yhdistelmä, jossa suoran ”viiltotaitoksen” $g_a^{-1}(z)$ sijaan valitaan ensin *kaksi* seuraavana kuvattavaa pistettä, jotka saatetaan origon kautta kulkevalle suoralle ylemmän puolitasen automorfismilla ja vasta sitten $g_a^{-1}(z)$ toteutetaan. Tässä algoritmossa on välttämätöntä, että kulmapisteet sijaitsevat parillisten indeksien kohdalla jonossa (z_k) .

Myös zipper-algoritmi on implementoitu FORTRAN-ohjelmapakettissa [MarZIPPER].

3.4. Koeben algoritmi

Tämä algoritmi, joka on tarkkaan ottaen oskulaatioalgoritmi 3.1.5, kriittisenä ominaisuutena

\mathcal{C} : ”taitosrajan etäisyys origosta.”

on aiemmin jo käsitelty Riemannin kuvauslauseen 1.7.1 todistuksen yhteydessä, mutta luetellaan sen pääpiirteet vielä pähkinänkuoressa:

Olkoon (z_k) , $k \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ pistejono, jolla approksimoidaan yksikkökierroksen sisäistä aluetta Ω . Tällöin meillä on jälleen käsillä kolmijako 3.1.2, missä Ω on kohdealueen $\mathbb{D}(0, 1)$ sisäkomponentti, $\mathbb{D}(0, 1) \setminus \overline{\Omega}$ ulkokomponentti ja jono (z_k) sijaitsee taitosrajalla. Valitaan kullakin iteraatiokierroksella tästä jonosta piste z_m , joka on se piste, joka on kaikkein lähinnä origoa $\forall k \neq m, |z_k| > |z_m|$.

”Translatoidaan” mainittu piste origoon yksikkökierroksen automorfismilla

$$(z_k) \rightarrow \varphi_{z_m}((z_k))$$

ja suoritetaan tälle holomorfinen neliöjuuri

$$(z_k) \rightarrow \sqrt{(z_k)}.$$

Sen jälkeen haetaan origon kuvautumisaikka z_o (se on joko $\sqrt{-z_m}$ tai $-\sqrt{-z_m}$) esimerkiksi Cauchyn integraalilauseella (ks. lausetta 1.2.9) ja suoritetaan ”translaatio” yksikkökierroksen automorfismilla

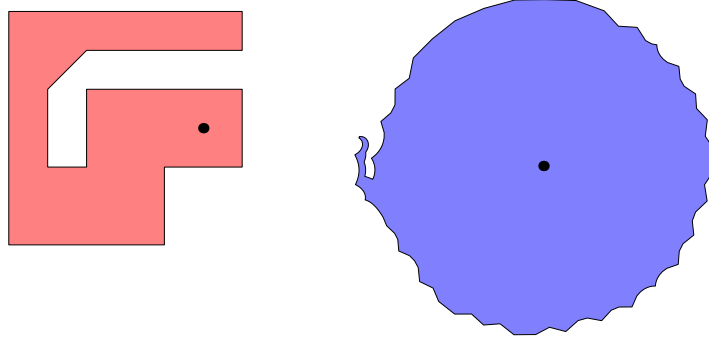
$$(z_k) \rightarrow \varphi_{z_o}((z_k))$$

takaisin. Kuten aiemmin osoitettiin, tämä algoritmi hitaasti, mutta varmasti kuvaa alueen Ω yksikkökierrokselle. Koeben algoritmi on oskulaatioalgoritmina stabiili.

3.5. Terävän ulkokulman algoritmi ANGLEOSC

Tämä ja algoritmi 3.6 tunnetaan yhdessä nimellä Grassmanin algoritmi. Ks. [Por, 6.3].

Alueilla, jotka eivät ole konvekseja, on usein alueen ulkopuolelle aukeavia teräviä kulmia. Kokeellisesti on havaittu (ks. kuvaa 3.2), että Koeben algoritmi saattaa näissä tapauksissa aiheuttaa välivaiheissaan kasautumista origon kuvasta kaukana olevissa ulokkeissa, joihin ei ole origosta katsottuna suoraa ”näköyhteyttä”. Esitellään algoritmi, joka



KUVA 3.2. Kasautumisongelma Koeben algoritmissa. Vasemmalla on monikulmio, jota on approksimoitu 390 reunapisteellä ja oikealla sen kuva, kun Koeben algoritmia on ajettu 30 iteraatiokierrosta. Numeerisesti tulos on epätyydyttävä, koska huomattava osa pisteistöstä on jäänyt vasemmalla näkyvään pieneen ulokkeeseen, joka jää jatkuvasti Koeben algoritmilta "huomaamatta".

soveltuu näihin tilanteisiin ja pyrkii parantamaan kuvattavan alueen tähtimäisyyttä ennen muuhun oskulaatioalgoritmiin siirtymistä.

Oletetaan tuttuun tapaan taitosrajalle approksimaatio (z_k) . Seuraavassa kuvataan yksi oskulaatioaskel:

- Käydään taitosraja läpi siten, että pyritään löytämään itseisarvoltaan suurin negatiivinen arvo lausekkeelle

$$-\alpha = \Im \left(\operatorname{Ln} \left(\frac{z_{k+1} - z_k}{z_k - z_{k-1}} \right) \right).$$

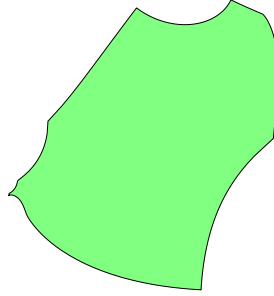
(Tässä ymmärrettäköön $z_{N+1} \sim z_1$, koska reunakäyrä on sulkeutuva.) Tätä vastaava z_k :n arvo olkoon *terävimmän ulkokulman piste*.

- Tarkastetaan, että kulma α ylittää toleranssirajan, esimerkiksi $\pi/16$:n. Hyvin pienet α :n arvot eivät enää vastaa niin "teräviä"² kulmia, että niitä tarvitsisi oikaista ennen muuhun oskulaatioalgoritmiin siirtymistä.
- Suoritetaan automorfismi $(z_k) \rightarrow \varphi_{z_k}((z_k))$, kuten Koeben algoritminkin tapauksessa.
- Otetaan jonosta holomorfinen logaritmi (ks. lausetta 1.5)

$$(z_k) \rightarrow \operatorname{lnh}((z_k)).$$

- Kerrotaan jono luvulla $\pi/(\pi + \alpha)$ ja otetaan jonosta sen jälkeen eksponenttikuvaus \exp . Edellisen kohdan ja tämän yhdistelmä vastaa sellaista murtopotenssia, joka täsmälleen oikaisee kyseisen "liian terävän" kulman.

²Virallisesti terävä kulma näillä termistöillä esiintyisi silloin kuin $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, mutta tätä algoritmia varten myös tylppien kulmien oikaiseminen kannattaa.



KUVA 3.3. Kuvan 3.2 mukaisen monikulmion kuva sen jälkeen kun siihen on ensin sovellettu 4 iteraatiokierrosta terävän sisäkulman algoritmia ja sen jälkeen niin monta kierrosta terävän ulkokulman algoritmia, kunnes katkaisuehto (ei alle $16\pi/17$ ulkokulmia) täyttyi. Näin on päästy tähtimäiseen alueeseen, johon voidaan soveltaa Koeben algoritmia tai Joukowskin muunnoksen algoritmia vähemmällä kasautumisella. Ks. myös kuvia 5.17 sekä 5.18.

- Haetaan origon kuva Cauchyn integraalilauseella (ks. lausetta 1.2.9) kuten Koeben algoritminkin tapauksessa ja palautetaan origon kuva paikalleen.

Lopputuloksena on alue, jolla on vähemmän katvealueita origosta katsottuna kuin alkuperäisellä alueella. Usein saavutetaan jopa tähtimäisyys. Algoritmisesti helpompana vaihtoehtona tälle on korvata murtopotenssi neliöjuurella kuten Koeben algoritminkin tapauksessa. Tällöin kulmat eivät ”oikene”, mutta muuttuvat kuitenkin ennemminkin sisäkulmiksi ja parantavat alueen tähtimäisyysominaisuuksia. Ks. seuraavaa kappaletta 3.6 ja kuvaa 3.3.

3.6. Terävän sisäkulman algoritmi CONVEX_ANGLEOSC

Tämä ja algoritmi 3.5 tunnetaan yhdessä nimellä Grassmanin algoritmi. Tässä työssä ne käsitellään erikseen, koska ne vaativat erilaisen tarkastelun konveksikuoren osalta.

Monilla konvekseilla monikulmioilla on teräviä sisäkulmia, joiden oikaiseminen voi olla ennen muun oskulaatioalgoritmin tai konformisen taitoksen suorittamista, perusteltua. Tällainen oikaiseminen on suoritettavissa translatoimalla oikaistava kulma origoon ja suorittamalla murtopotenssi. Formaalisti, funktio

$$\int z^{\alpha/\pi-1} dz \simeq z^{\alpha/\pi}$$

(ks. lausetta 1.10.5, vakiot pudotettiin pois, siksi " \simeq "-merkki) kuvaa ylemmän puolitasen sektoriksi, jonka kulma on α , joten kyseisen murtopotenssin eksponentiksi on valittava π/α , s.o.

$$w(z) = z^{\pi/\alpha}.$$

Tällaisen operaation suorittaminen ei-konveksille joukolle suoraan on usein virhe, koska se saattaa taittaa Riemannin pintoja päällekkäin, rikkoen konformisuuden. Ratkaisuna on tällöin konstruoida ensin *konveksikuori* (engl. convex hull, joissakin muissa suomenkielisissä lähteissä puhutaan myös konveksista verhosta)³, eli pienin mahdollinen konvekssi joukko, joka sulkee kuvattavan alueen sisäänsä ja suorittaa kulman oikaisu tälle.

Ks. kuvaa 3.3.

3.7. Joukowskin muunnoksen algoritmi JOSK

Tämä algoritmi on *epästabiili* oskulaatioalgoritmi, joka pyrkii samaan kuin Koeben algoritmikin, eli origoa lähinnä olevan pisteen siirtämiseen lähemmäksi yksikkökiekon reunaa. Silloin kun se toimii (konvekseille ja joillekin hyvin säännöllisille tähtimäisille alueille), se kokeellisesti kuvaa alueita yksikkökiekolle nopeammin kuin Koeben algoritmi, mutta toisaalta ei-tähtimäisillä alueilla algoritmi suurella todennäköisyydellä hajaantuu. Se kuuluu seuraavasti:

- Haetaan origoa lähinnä oleva piste z_m kuten Koeben algoritminkin tapauksessa. Rotatoidaan jonoa laskemalla

$$(z_k) \rightarrow \frac{\overline{z_m}}{|z_m|}(z_k),$$

jolloin kyseinen minimipiste saadaan positiiviselle reaaliakselille.

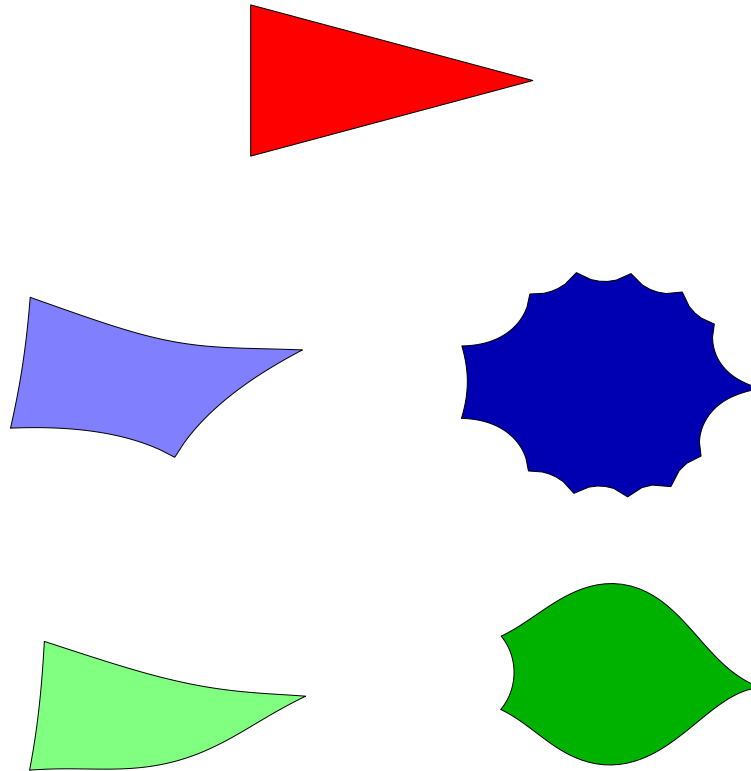
- Lasketaan *residy* $a = (z_m - 1)^2/2$ ja suoritetaan Joukowskin muunnos

$$(z_k) = (z_k) - \frac{a}{(z_k) - 1}.$$

- Varmistetaan tilanne tarkastamalla, jos jokin piste olisi kuvautunut yksikkökiekon reunan ulkopuolelle. Tällöin voi vielä yrittää skaalata, mutta hajaantumisriski on korkea.

Tämän muunnoksen ideana on, sen lisäksi, että se siirtää pisteen z_m pisteeseen $(z_m + 1)/2$ (puolta lähemmäksi yksikkökiekon reunaa), yleensäkin alentaa konformista tiheyttä pisteen 1 ympäristössä, ks. kaavaa (1.8.2). Toisaalta konforminen tiheys kasvaa pisteitä $1 + i\sqrt{a}$ lähestyttäessä ja lisäksi Joukowskin muunnoksen konforminen tiheys ”kaukana”

³Konveksikuori voidaan konstruoida mielivaltaisesta pistejoukosta $O(n \ln n)$ -algoritmeilla. Eräs tapa on järjestää pisteet kulman tai jonkun koordinaattiakselin mukaan ja sen jälkeen tarkastella jonoa piste pisteeltä työntämällä piste kerrallaan pinon ja poistamalla pinosta konveksikuorelle kuulumattomiksi havaitut pisteet. Asiasta enemmän [CLRS, 35.3].



KUVA 3.4. Kolmionmuotoisen alueen muuntuminen eri oskulaatioalgoritmeissa. Ylimpänä punaisella alkuperäinen alue, sen alla sinisen sävyillä tulos Koeben algoritmista kun on ajettu 1 (vas.) tai 10 askelta (oik.). Alla vihreän sävyillä vastaavat tulokset Joukowskin muunnoksen algoritmista.

navasta ja derivaatan nollakohdista lähestyy asympotoottisesti vakiota, ks. kaavaa (1.8.3). On siis ymmärrettävä, että tämä kuvaus kohdistuu nimenomaan minimipisteen läheiseen reunanpätkään lähentäen sitä yksikkökieken reunaa kohden. Ks. kuvaa 3.4, josta käy ilmi keskeisin Koeben algoritmin ja Joukowskin muunnoksen algoritmin välinen ero: ensinmainittu, vaikka onkin varmempi ja stabiilimpi, lisää terävien sisäkulmien määrää, mikä myöhemmin heikentää tarkkuutta, sen sijaan jälkimmäinen pyrkii heti lähestymään kohdealueen eli yksikkökieken kaarevuusominaisuuksia.

Osa 2

Konformikuvausten tietokonenumeriikkaa

Yleistä

Tämän osan tarkoituksena on hyödyntää aiemmin esiteltyjä perustietoja ja konformikuvausmenetelmiä numeerisesti. Ensiksi esitellään testiohjelmanpaketti käyttöohjeineen, minkä jälkeen kirjoittajan itse laatima testidata (yleistettyjä nelikulmioita) ja niiden numeerisesti laskettuja konformisia moduleita eri algoritmeilla iteraatiokierrosmääriä ja approksimaatiopistetiheyksiä vaihdellen. Mikäli joistakin nelikulmioista on symmetriasyistä etukäteen modulin arvo tiedossa, se mainitaan.

LUKU 4

Testiohjelmanpakettin 'mnconpack' esittely

Tämä paketti koostuu useista konformikuvausten laadinta- ja testiohjelmista. Tässä esitellään eri toiminnot ja niiden rajapinnat siten, että eri testit olisivat lukijan helposti ymmärrettävissä ja toistettavissa. MATLAB/Octave-koodit on testattu sekä MATLAB:in versiolla 7.3, että Octaven versiolla 2.1. Lisätietoa MATLAB:ista, ks. [MAT] ja Octavesta, ks. [OCT].

4.1. Cauchyn integraalikaava

`w=cauchy(z,zdata,wdata[,n])`

Tämän funktion tarkoituksena on laskea (konformi)kuvauksen $w(z)$ arvo kompleksiluvusta tai kompleksisesta vektorista \mathbf{z} , missä \mathbf{zdata} on kutakin pistettä z kiertävän Jordan-käyrän γ approksimaatio ja \mathbf{wdata} käyrän γ kuva $w(\gamma)$.

n on valinnainen parametri, joka on oletusarvoisesti 0. Jos sille annetaan nollasta poikkeava arvo, se laskee pisteeseen z kehitetyn $w(z)$:n Laurént-sarjan n . kertoimen.

Lasku suoritetaan soveltamalla trapetsikaavaa integraaliin

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{w(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}},$$

jolloin siis

$$w(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (\zeta - z)^n,$$

ja

$$w(z) = c_0.$$

4.2. Yksikkökiekko ja monikulmio

`w=udisk(n)`
`w=polygon(v[,n])`
`w=eqpolygon(v[,n])`

Ensinmainittu konstruoi yksikkökieken n -pisteisen approksimaation, jälkimmäinen taas monikulmion approksimaation, jossa vektorissa \mathbf{v} on ilmaistu kärkipisteet ja n on valinnainen parametri, oletusarvoisesti

100, ja ilmaisee kullakin sivulla olevien approksimaatiopisteiden lukumäärän. Jälkimmäinen taas sijoittaa pisteet tasavälein ja n ilmaisee yksikköä kohden olevien pisteiden lukumäärän.

4.3. Minimi- ja maksimipiste

```
k=minpoint(z)
k=maxpoint(z)
```

Ensinmainittu palauttaa vektorin z origosta nähden lähimmän pisteen indeksin, jälkimmäisenä mainittu origosta nähden kauimman pisteen indeksin.

4.4. Pistejoukon pakottaminen yksikkökiekon reunalle

```
w=force_to_udisk(z)
```

Pakottaa vektorin z sisältämät pisteet yksikkökiekon reunalle kuvauksella

$$z_k \rightarrow \frac{z_k}{|z_k|}.$$

Voidaan käyttää tilanteissa, joissa yksikkökiekon sisäpuolinen Cauchy-integraali muuten vahingossa sulkisi sisään kuvapisteitä.

4.5. Holomorfinen neliöjuuri

```
w=holsqrt(z[,k])
```

Ottaa Jordan-käyrää $\gamma = \partial\Omega$ approksimoivasta pistejoukosta z holomorfinen neliöjuuren. Kokonaisluku k on valinnainen parametri, oletusarvoisesti 1, joka ilmaisee, monennestako vektorin $z(k)$ holomorfinen neliöjuuren otto aloitetaan. Pisteiden $z(k+1)$ neliöjuuri otetaan aina alempaan puolitasoon $-\mathbb{H}^1$ ja sitä seuraavat neliöjuuret siihen neliöjuuren haaraan, joka oli edellisen pisteen neliöjuurta lähinnä.

4.6. Holomorfinen logaritmi

```
w=hololog(z[,k])
```

Ottaa Jordan-käyrää $\gamma = \partial\Omega$ approksimoivasta pistejoukosta z holomorfinen logaritmin. Kokonaisluku k on valinnainen parametri, oletusarvoisesti 1, joka ilmaisee, monennestako vektorin z pisteestä $z(k)$

¹Tämä sinänsä erityislaatuinen valinta tehdään siksi, että se mahdollistaa Koen algoritmissa holomorfinen neliöjuuren ottamisen jälkeisen Cauchy-integroinnin välttämisen origon kuvapisteen löytämiseksi.

holomorfinen logaritmin otto aloitetaan. Pistettä $z(k)$ ei kuvata lainkaan (koska se useissa sovelluksissa on tässä tilanteessa 0), pisteen $z(k+1)$ logaritmi otetaan päähaaralta

$$\Im(\operatorname{Ln}(z)) \in (-\pi, \pi]$$

ja sitä seuraavien pisteiden logaritmit siltä haaralta, joka oli edellisen pisteen logaritmia lähinnä. Ks. kappaletta 1.5.

4.7. Terävin ulkokulma

`[k,n]=outerangle(z)`

Määrittää pistejoukolla z approksimoidun Jordan-käyrän $\gamma = \partial\Omega$ terävimmän ulospäin avautuvan kulman indeksin k ja eksponentin n , jolla sen saisi oikaistua kuvauksessa

$$\Omega \rightarrow \exp(n \operatorname{lnh}(\Omega)), \quad n \in (1/2, 1).$$

lnh on kappaleessa 1.5 määritelty ja kohdassa 4.6 toteutettu holomorfinen logaritmi.

4.8. Terävin sisäkulma

`[k,n]=innerangle(z)` `[k,n]=innerangle2(z)` Kuten kohdassa 4.7, mutta käsittelee sisäänpäin avautuvia kulmia. Tällaiset kuvaukset ovat mielekkäitä vain suoritettuna konveksien alueiden tai epäkonveksien alueiden konveksikuorten oskulaatioihin (muussa tapauksessa Riemannin pinnat voivat mennä päällekkäin eikä konformikuvausta saavuteta). Tästä syystä funktiosta on esitelty myös toinen versio `innerangle2`, joka etukäteen huomioi sen, että terävintä kulmaa haetaan vain konveksikuorelta.

4.9. Möbius-kuvaukset

`w=mobius_from_to_points(z,z0,z1,zinf,w0,w1,winf)`

Laskee pistejoukolle z sellaisen Möbius-kuvauksen, joka kuvaa pisteet z_0 , z_1 ja z_∞ pisteille w_0 , w_1 ja w_∞ . Pisteiden nimitykset tulevat siitä, että kuvaus suoritetaan kahdessa osassa apurutiinien `mobius_from_points.m` ja `mobius_to_points.m` avulla.

4.10. Modulaarinen s

`s=modular_s(z,zll,zlr,zur,zul)`

Laskee kiekolle tai puolitasolle perustuvan yleistetyn nelikulmion niinsanotun modulaarisen $s:n$. z on kyseisen ympyrän tai suoran approksimaatio, `zll`, `zlr`, `zur` ja `zul` nelikulmion vasemman alakulman, oikean alakulman, oikean yläkulman ja vasemman yläkulman alkukuvien indeksit, tässä järjestyksessä.

Modulaarinen s määritellään (tässä) kaksoissuhteen reaali-osaksi

$$s = \Re \left(\frac{(z_{zlr} - z_{zul})(z_{zur} - z_{zll})}{(z_{zlr} - z_{zll})(z_{zur} - z_{zul})} \right),$$

ks. lausetta 2.6.3. Reaaliosa otetaan siksi, että jos \mathbf{z} ei ollut kovin tarkka suoran tai ympyrän approksimaatio, kaksoissuhteeseen tulisi mukaan imaginaarista komponenttia ja se vaikeuttaisi vastaavasti eräiden muiden johtopäätösten tekemistä täydellisistä elliptisistä integraaleista.

4.11. Nelikulmion moduli

`m=qm(z,zll,zlr,zur,zul)`

Laskee kohdassa 4.10 määritellyn yleistetyn nelikulmion modulin modulaarisesta s :stä kaavalla

$$M = \frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right).$$

Ks. lausetta 2.6.3.

4.12. Koeben algoritmi

`w=koebe(z,n)`

Ajaa n kertaa kappaleessa 3.4 esiteltyä Koeben algoritmia (oskulaatioaskelta) origoa kiertävää Jordan-käyrää $\gamma = \partial\Omega$ approksimoivalle pistejoukolle \mathbf{z} . Mitä suurempi askelten lukumäärä, sitä lähempänä pitäisi lopputuloksessa \mathbf{w} olevien pisteiden olla yksikkökiekon reunaa.

Huomautus. Tämä pistejoukko \mathbf{w} voidaan kuvauksen tarkkuuden määrittämiseksi ajaa kohtien 4.10 tai 4.11 mukaisten ohjelmien läpi, jotta saatua modulaarista s :ää tai nelikulmion modulia voitaisiin verrata teoreettisiin arvoihin, kirjallisuusarvoihin tai muilla numeerisilla menetelmillä saatuihin arvoihin. Vastaavasti voidaan saatua konformikuvauksen arviota yrittää soveltaa suorassa tai käänteisessä suunnassa alueen Ω sisäpisteisiin tai kehittää polynomiapproksimaatioita hyödyntäen kohdan 4.1 mukaista ohjelmaa.

4.13. Joukowskin muunnoksen algoritmi

`w=josc(z,n)`

Kuten kohdan 4.12 mukainen ohjelma, mutta käyttää Koeben oskulaatioaskeleen sijaan kappaleessa 3.7 esiteltyä Joukowskin muunnokseen perustuvaa epästabiilia oskulaatioaskelta. Saattaa hajaantua ei-konvekseilla syötejoukoilla. Hajaantuu tai toimii numeerisesti väärin ei-tähtimäisillä syötejoukoilla.

Kohdan 4.12 mukainen huomautus on voimassa.

4.14. Terävän ulkokulman algoritmi

`w=angleosc(z[,n])`

Kuten kohdan 4.12 mukainen ohjelma, mutta käyttää Koeben oskulaatioaskeleen sijaan kappaleessa 3.5 esiteltyä terävän ulkokulman algoritmia kriittisen pisteen etsintään. Murtopotenssin sijasta kuitenkin suoritetaan tavalliseen tapaan neliöjuuri, koska tämä helpottaa origon kuvautumispaikan käsittelyä. Kierroslukumäärä on valinnainen, koska tämä algoritmi katkaistaan joka tapauksessa, jos ei enää löydy sellaista ulospäin avautuvaa kulmaa, jonka suuruus olisi alle $15\pi/16$.

Tämä algoritmi *ei kuvaa* Jordan-alueita yksikkökiekoksi eikä ylemmäksi puolitasoksi, vaan pyrkii ainoastaan vähentämään tähtimäisyyttä rikkovia kohtia ja toimii ”esitehtävänä” kohtien 4.12 ja 4.13 mukaisien ohjelmien soveltamisille.

4.15. Terävän sisäkulman algoritmi

`w=convex_angleosc(z[,n])`

Kuten nimikin sanoo, tätä suositellaan vain konvekseille monikulmioille tai monikulmioiden konveksikuorille. Muuten sama kuin edellisen kohdan 4.14, mutta käsittelee sisäänpäin avautuvia kulmia ja käyttää sopivaa (murto)potenssia kulman oikaisuun. Soveltuu esitehtäväksi geodeesin algoritmilta ja muille vetoketjualgoritmeille kuten slit/zipper-algoritmeille, koska tällä saadaan käyrän reuna sileämmäksi.

4.16. Geodeesinen algoritmi

`w=geodesic(z[,k])`

Ajaa geodeesin algoritmin (ks. kappaletta 3.2) origoa kiertävää Jordan käyrää $\gamma = \partial\Omega$ approksimoivalle pistejoukolle \mathbf{z} . Mikäli valinnainen parametri \mathbf{k} on annettu, suoritetaan geodeesista algoritmia vain k viimeiselle pisteelle. Mikäli geodeesin algoritmi ajettiin loppuun asti, on \mathbf{w} hyperbolisesti monotoninen ² reaalityönä. Kohdan 4.12 mukainen huomautus on voimassa.

4.17. Harmoninen mitta

`w=meas_udisk(z)`

Konstruoi yhdesti yhtenäisen alueen reunan harmonisen mitan tiheysfunktion.

²Tässä tapauksessa kasvava, sillä poikkeuksella että positiivisen ääretön pisteen saa ohittaa ja tulla ”ympäri” negatiivista reaaliakselia pitkin.

Tätä varten oletetaan, että z on numeerisesta konformikuvauksesta saatu approksimaatio yksikkökierokkeen reunalle, jolloin tähän kuuluvien pisteiden kuuluisi olla sellaisessa järjestyksessä, että suuntakulma kasvaa. Otetaan jonosta z logaritmin imaginaariosa ja lasketaan asianmukaiset differenssit $\varphi_{k+1} - \varphi_k$, huomioiden myös Riemannin pinnan rajan negatiivisen reaaliakselin kohdalla. Tämä ei ole varsinainen konformikuvausalgoritmi, mutta sen avulla voidaan tutkia eri konformikuvausmenetelmien kasautumisilmiötä ja luotettavuutta tarkemmin kuin konformisesta (nelikulmion) modulista ja tehdä päätöksiä vaikkapa uusinta-ajoissa käytettävistä esiratkaisijoista.

LUKU 5

Testidata ja testit

5.1. Nelikulmiot ja niiden modulit

Suorakaide. Kuvassa 5.1 on mittasuhteiltaan $3 : 2$ oleva suorakaide, jonka nelikulmion moduli M on määritelmän mukaan 1.5, mikäli luonnolliset kulmat katsotaan sen yleistetyiksi kulmiksi (vasemmalla), symmetriasyistä taas 1, mikäli yleistetyiksi kulmiksi katsottaisiinkin sivujen keskipisteet (oikealla).

Seuraavassa on taulukoitu Koeben algoritmin antamia testituloksia vasemmanpuolisessa tapauksessa, jos kyseisen suorakaiteen reunaa olisi approksimoitu 10000 pisteellä ja iteraatiokierroksia olisi tehty n kappaletta:



KUVA 5.1. Suorakaide, jota käsitellään yleistettynä nelikulmiona, alkukuvan pystysivut lihavoitu. Teoreettinen nelikulmion modulin M arvo vasemmanpuoleiselle suorakaiteelle on 1.5 (suoraan määritelmästä) ja oikeanpuoleiselle 1 (symmetriasta).

n	M	virhe
10	1.381212	1.187884e-01
20	1.444804	5.519613e-02
30	1.456069	4.393092e-02
50	1.475151	2.484888e-02
100	1.491112	8.887885e-03
200	1.494327	5.672523e-03
300	1.496473	3.526510e-03
500	1.497137	2.862510e-03
1000	1.499258	7.415735e-04
2000	1.499034	9.657386e-04

Testi on toteutettu seuraavalla tavalla hyödyntäen testiohjelmakettia `mnconfpack` (ks. lukua 4):

```
1;

fop=fopen('test_p1_koebe.dat','w');
p1=polygon([0,4,4+6i,6i],2500); % 10000 reunapistettä
p1=p1-(2+3i);

fprintf(fop,'\\begin{center}\\n');
fprintf(fop,'\\begin{tabular}{c|c|c}\\n');
fprintf(fop,'$n$ & $M$ & virhe \\n');
fprintf(fop,'\\hline\\n');
prev_k=0;
pp=p1;
for k=[10,20,30,50,100,200,300,500,1000,2000]
    pp=koebe(pp,k-prev_k);
    M=qm(pp,1,2501,5001,7501);
    fprintf(fop,'%5d & %8.6f & %e',k,M,abs(1.5-M));
    if k<2000
        fprintf(fop,' \\n');
    end
    fprintf(fop,'\\n');
    prev_k=k;
end
fprintf(fop,'\\end{tabular}\\n');
fprintf(fop,'\\end{center}\\n');
fclose(fop);
```

Muut testit on toteutettu vastaavanlaisella tavalla, mutta niiden ohjelmakoodia ei ole erikseen lueteltu. Ne ovat nähtävillä tämän työn lähdekoodiliitteestä kohdasta 7.1.

Ja seuraavassa JOSC-algoritmin (ks. kappaletta 3.7 ja kohtaa 4.13) antamia testituloksia, jos nytkin reunapisteitä on 10000:

n	M	virhe
10	1.434613	6.538748e-02
20	1.463127	3.687275e-02
30	1.514375	1.437543e-02
50	1.499644	3.559401e-04
100	1.498201	1.799391e-03
200	1.499551	4.489485e-04
300	1.498926	1.074119e-03
500	1.499011	9.893676e-04
1000	1.500172	1.721149e-04
2000	1.499868	1.322269e-04

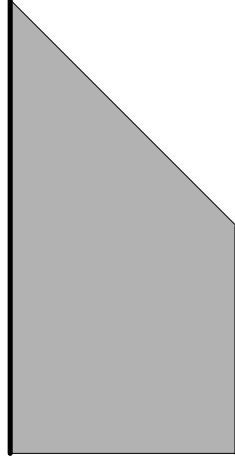
Seuraavassa Koeben algoritmin antamia testituloksia oikeanpuoliossa tapauksessa (alkukulmat sivujen keskellä, moduli symmetriasysteemiä 1):

n	M	virhe
10	0.997766	2.234377e-03
20	0.992416	7.584433e-03
30	0.993002	6.997629e-03
50	1.000205	2.046852e-04
100	0.999510	4.903800e-04
200	1.000875	8.753031e-04
300	1.000835	8.349001e-04
500	1.000437	4.365000e-04
1000	1.000082	8.190203e-05
2000	0.999830	1.697734e-04

ja vastaavat tulokset Joukowskin muunnoksen algoritmista:

n	M	virhe
10	1.005152	5.151793e-03
20	1.002355	2.354802e-03
30	1.000169	1.694345e-04
50	1.003023	3.022562e-03
100	0.999528	4.721167e-04
200	1.000359	3.593540e-04
300	0.998717	1.282789e-03
500	1.000274	2.737091e-04
1000	0.999984	1.576244e-05
2000	1.000017	1.701430e-05

Johtopäätös: ilmeisesti konveksisuuden vuoksi Joukowskin muunnoksen algoritmi on tässä tapauksessa numeerisesti tehokkaampi kuin Koeben algoritmi. Molemmilla algoritmeilla saavutetaan varsin lyhyellä kierrosmäärällä numeerisesti tyydyttävä suuruusluokan 10^{-4} tarkkuus.



KUVA 5.2. Bowmanin nelikulmio yleistettynä nelikulmiona, joka kuvataan konformisesti kanoniseksi suorakaiteeksi, alkukuvan pystysivut lihavoitu. Artikkelin [HVV] mukana olleen ”qm4hvv.nb”-paketin antama modulin M arvo 20 desimaalilla on 1.27926 15711 71006 46619.

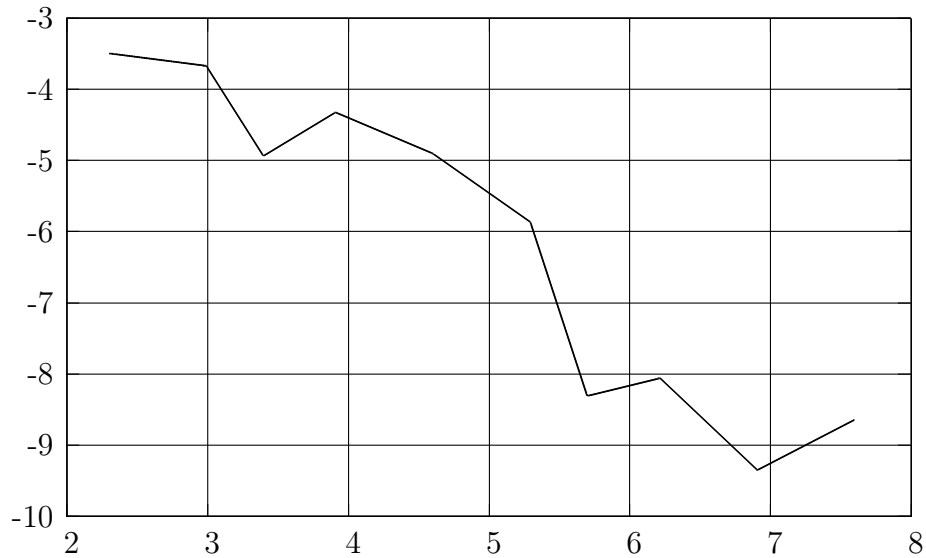
Bowmanin nelikulmio. Kuvassa 5.2 on Bowmanin nelikulmio [Bow], jonka kärkipisteet sijaitsevat pisteissä $2\hat{i}$, 0 , 1 ja $1 + \hat{i}$. Seuraavassa on arvioitu nelikulmion modulia 10000 reunapisteen ja n iteraatiokierroksen avulla Joukowskin muunnoksen algoritmillä:

n	M	virhe
10	1.248889	3.037261e-02
20	1.304614	2.535280e-02
30	1.272088	7.173902e-03
50	1.292546	1.328486e-02
100	1.271854	7.407878e-03
200	1.282091	2.829602e-03
300	1.279508	2.468303e-04
500	1.279578	3.159913e-04
1000	1.279348	8.685895e-05
2000	1.279439	1.771670e-04

Kuten suorakaiteenkin tapauksessa, saavutetaan verraten vähällä kierrosmäärällä tyydyttävä suuruusluokan 10^{-4} tarkkuus.

Kuvassa 5.3 on tulostettuna Bowmanin nelikulmion modulin virheen kehitys logaritmisella asteikolla. Käyrästä voidaan päätellä karkeasti, että virheen suuruus olisi kääntäen verrannollinen kierroslukumäärään

$$\begin{aligned}
 \ln(\varepsilon) &= -\ln(n) - 1 \\
 (5.1.1) \quad \varepsilon &= \frac{1}{n \cdot e}
 \end{aligned}$$



KUVA 5.3. Bowmanin nelikulmion modulin virheen luonnollisen logaritmin kehitys kierrosmäärän luonnollisen logaritmin suhteen. Havaitaan, että virheen suuruus on likipitään kääntäen verrannollinen iteraatiokierrosten lukumäärään kaavan

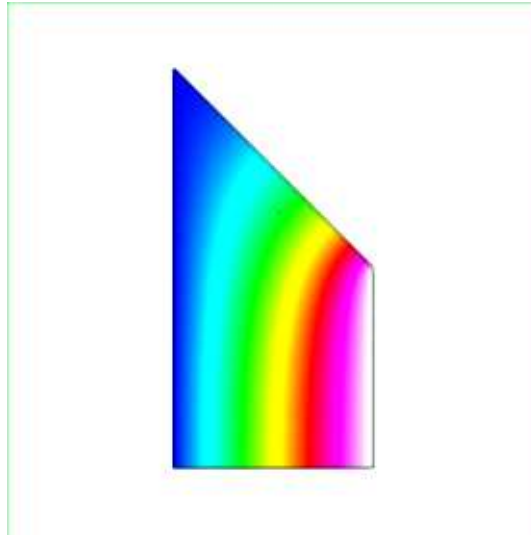
$$\varepsilon = \frac{1}{n \cdot e}$$

mukaan. Ks. (5.1.1).

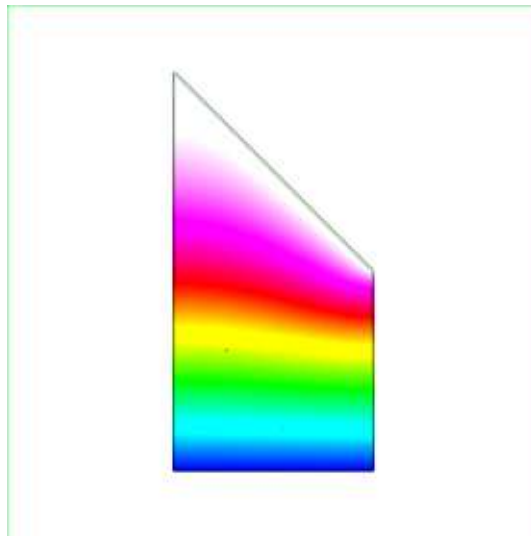
mutta tähän tulokseen on suhtauduttava varauksella ensinnäkin, koska virhekäyrä jonkin verran heittelee, toiseksi, koska reunakäyrän approksimaatiotarkkuus asettaa tarkkuudelle ylärajan.

Kuvissa 5.4 ja 5.5 on ratkaistu ELMER-elementtimenetelmäohjelmalla 200 kolmion tiheydellä alasivua kohden, sellaiset potentiaalientät, jotka konformikuvauksessa vastaisivat analyttisen funktion reaaliosaa. Ensinmainittu tuotti nelikulmion modulin (kapasitanssin) arvoksi

1.2795541337028018 ja jälkimmäisenä mainittu 0.78187756957443155, jonka käänteisluku on 1.27897261529614. Voidaan siis päätellä, että nämä arvot poikkeavat [HVV]-artikkelin mukana tulleen paketin laskemasta teoreettisesta arvosta noin $3 \cdot 10^{-4}$ verran molempiin suuntiin. Jos sen sijaan otetaan näiden aritmeettinen keskiarvo, saadaan 1.27926337449947, jonka virhe on enää noin $2 \cdot 10^{-6}$ suuruusluokkaa ja ottamalla näiden geometrinen keskiarvo, saadaan 1.27926334145666, jonka virhe on niinkään noin $2 \cdot 10^{-6}$ suuruusluokkaa ja samaan suuntaan kuin edellisenkin virhe.

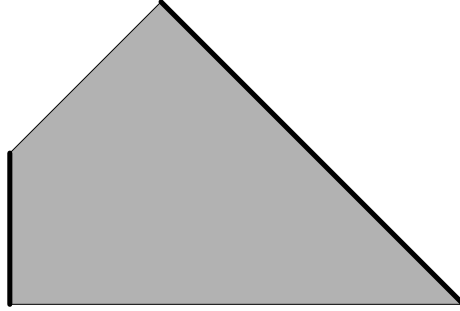


KUVA 5.4. Bowmanin nelikulmion potentiaali eli holomorfin funktion reaali osa ELMER:illä ratkaistuna.



KUVA 5.5. Bowmanin nelikulmion potentiaali toisessa suunnassa eli holomorfin funktion imaginaariosa (nelikulmion modulilla skaalattuna) ELMER:illä ratkaistuna.

Verrattaessa Joukowskiin muunnoksen oskulaatioalgoritmia elementtimenetelmään, jälkimmäisen haittapuolena on suuremmasta tarkkuudesta huolimatta pidempi ajoaika, erityisesti jos menetelmä automatisoitaisiin ja jokaista nelikulmiota varten jouduttaisiin myös ristikko (engl. mesh) generoimaan erikseen. Useimpia fysikaalisia sovelluksia varten Joukowskiin muunnoksen algoritmin antama tarkkuus lienee riittävä.



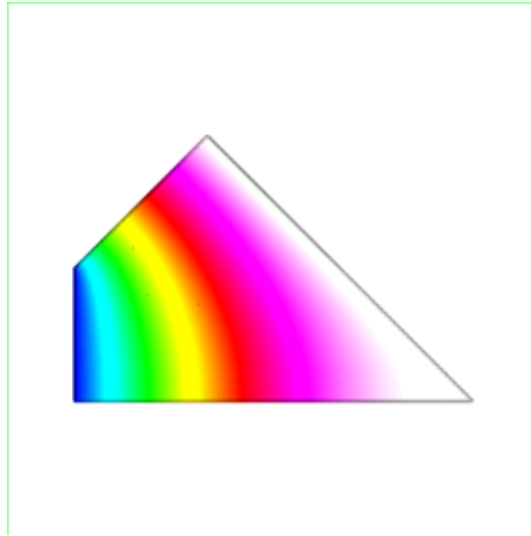
KUVA 5.6. Bowmanin ja Gaierin nelikulmio, alkukuvan pystysivut lihavoitu. ”qm4hvv.nb”-paketin [HVV] antama nelikulmion modulin M arvo 20 desimaalilla on 0.82969 62561 53283 84672.

Bowmanin ja Gaierin nelikulmio. Seuraavassa on laskettu kuvan 5.6 mukaisen nelikulmion modulia Joukowskin muunnoksen algoritmilla ja 10000 reunapisteellä:

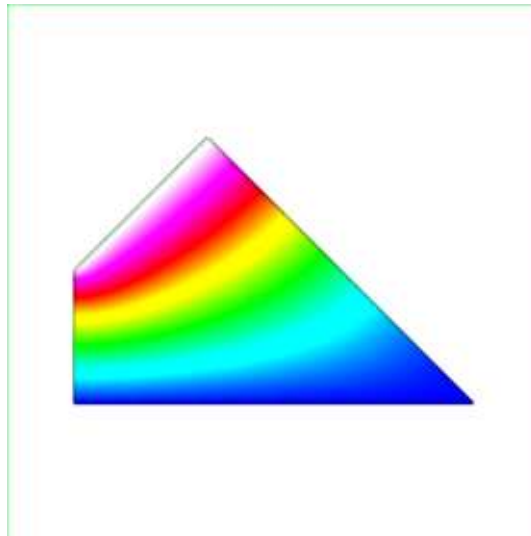
n	M	virhe
10	0.846957	1.726054e-02
20	0.841111	1.141470e-02
30	0.814382	1.531428e-02
50	0.841977	1.228063e-02
100	0.831272	1.575988e-03
200	0.831001	1.304515e-03
300	0.828650	1.046591e-03
500	0.829369	3.277164e-04
1000	0.829981	2.847677e-04
2000	0.829652	4.424947e-05

Vastaavasti on kuvissa 5.7 ja 5.8 ratkaistu potentiaalifunktiot ELMER:illä. Tällöin, kun ottaa saaduista nelikulmion moduleista eli kapasitansseista aritmeettisen keskiarvon, saadaan 0.82969675, minkä virhe on noin $1.3 \cdot 10^{-7}$.

Tarkkuuden osalta voidaan tehdä samat johtopäätökset kuin edellisessäkin kohdassa.

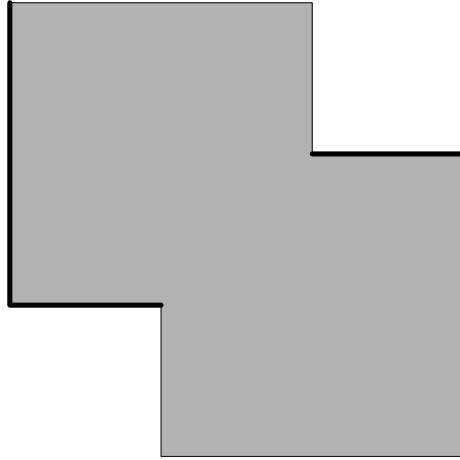


KUVA 5.7. Bowmanin ja Gaierin nelikulmion potentiaali eli holomorfin funktion reaaliosa ELMER:illä ratkaistuna.



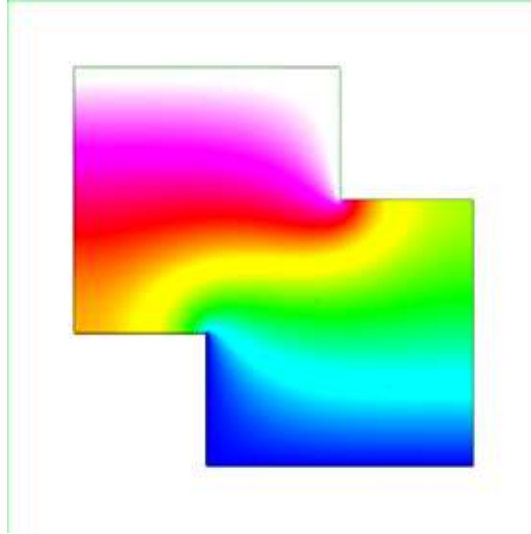
KUVA 5.8. Bowmanin ja Gaierin nelikulmion potentiaali toisessa suunnassa eli holomorfin funktion imaginaariosa (nelikulmion modulilla skaalattuna) ELMER:illä ratkaistuna.

Symmetrinen monikulmio. Seuraavassa on laskettu kuvan 5.9 mukaisen nelikulmion modulia Joukowskin muunnoksen algoritmilla ja 10000 reunapisteellä:

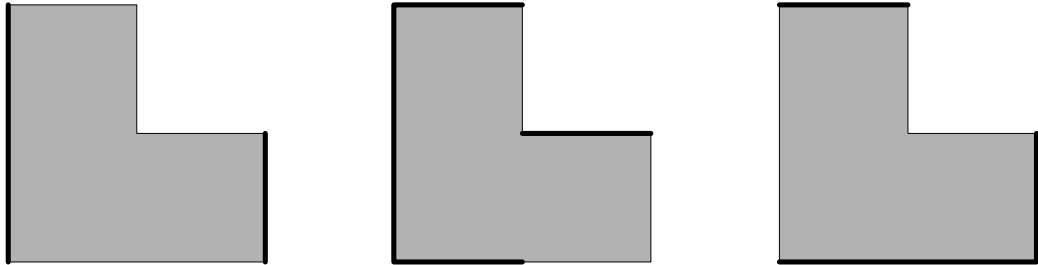


KUVA 5.9. Symmetrinen monikulmio, alkukuvan pysty-sivut lihavoitu. Symmetriasystä nelikulmion modulin M arvo on 1.

n	M	virhe
10	0.970542	2.945830e-02
20	0.994953	5.046566e-03
30	0.999380	6.196934e-04
50	0.999966	3.373009e-05
100	0.999727	2.725184e-04
200	0.999906	9.434202e-05
300	0.999910	9.038472e-05
500	0.999942	5.777440e-05
1000	1.000020	2.000907e-05
2000	1.000000	1.097747e-07



KUVA 5.10. Symmetrinen monikulmio, potentiaalifunktio laskettu ELMER:illä pystysuunnassa.



KUVA 5.11. Gaierin L kolmena versiona, alkukuvan pystysivut lihavoitu. Gaierin artikkelissaan [Gai] antamat teoreettiset nelikulmion modulin M arvot ovat (tässä järjestyksessä) 0.577350, 1.279262 ja 0.585080.

Gaierin L. Seuraavassa on laskettu kuvan 5.11 mukaisten nelikulmioiden modulia (tässä järjestyksessä) JOSC-algoritmilla ja 12000 reunapisteellä:

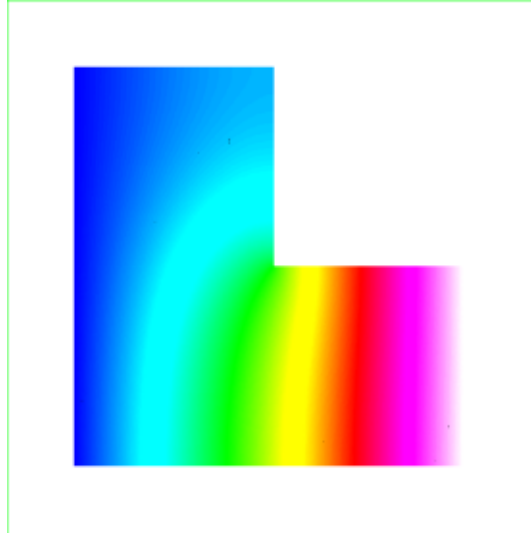
n	M	virhe	n	M	virhe
10	0.637557	6.020668e-02	10	1.050817	2.284446e-01
20	0.605701	2.835071e-02	20	1.273271	5.990611e-03
30	0.596978	1.962796e-02	30	1.285887	6.624703e-03
50	0.582123	4.772882e-03	50	1.284498	5.235767e-03
100	0.580784	3.433674e-03	100	1.281594	2.331972e-03
200	0.579260	1.910381e-03	200	1.278969	2.933866e-04
300	0.574683	2.667345e-03	300	1.281017	1.754752e-03
500	0.577034	3.162425e-04	500	1.280178	9.156109e-04
1000	0.577343	7.203919e-06	1000	1.279597	3.353118e-04
2000	0.577492	1.423810e-04	2000	1.279372	1.098285e-04

n	M	virhe
10	0.643674	5.859372e-02
20	0.604525	1.944532e-02
30	0.591141	6.061326e-03
50	0.579897	5.182882e-03
100	0.587277	2.197299e-03
200	0.583516	1.564355e-03
300	0.589043	3.963245e-03
500	0.586026	9.455901e-04
1000	0.584785	2.954891e-04
2000	0.585287	2.067361e-04

Laskettaessa modulia ja potentiaalikenttää elementtimenetelmällä ELMER-ohjelmistolla käyttäen sellaista kolmiointia, jossa yhtä pitkää sivua kohden on 200 kolmion sivua, saadaan ensinmainitulle monikulmion nelikulmion modulin arvioksi 0.577439, jonka virhe on noin $9 \cdot 10^{-5}$. Kuvassa 5.12 on esitetty vastaava potentiaalikenttä, jossa siis vasemmalla sivustalla potentiaali on 0 ja oikealla sivustalla 1. Mikäli tälle potentiaalikentälle haettaisiin Dirichlet'n integraalikaavan (1.2.6) nojalla harmoninen konjugaatti, muodostaisivat nämä yhdessä sellaisen holomorfin funktion, joka olisi konformikuvaus tältä "Gaierin L:ltä" kanoniselle suorakaiteelle $\mathbb{S}(0.577439)$.

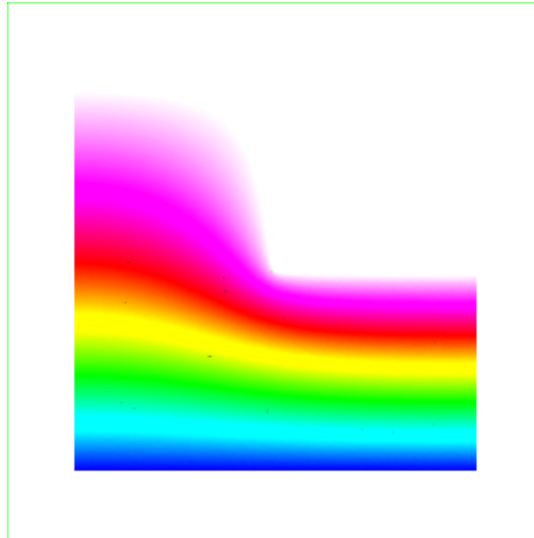
Toisaalta on mahdollista vaihtaa alkupystysivut ja alkuvaakasivut keskenään ja soveltaa elementtimenetelmää tähän. Nyt saadaan nelikulmion modulin arvoksi 1.732313, jonka käänteisluku on 0.577263, jossa siis virheenä Gaierin viitearvoon nähden on taas noin $9 \cdot 10^{-5}$, joskin toiseen suuntaan. Aritmeettisen tai geometrisen keskiarvon ottaminen näistä saavuttaa saman tarkkuuden kuin alkuperäinen Gaierin tutkimuskin.

Jos sen sijaan tutkitaan kuvan 5.11 keskimmäisen monikulmion mukaista tapausta samaan tapaan, saadaan keskiarvoistamalla nelikulmion modulin approksimaatioksi 1.27712377091911, minkä virhe on Gaierin tutkimuksiin verrattuna yli $2 \cdot 10^{-3}$ ja erittäin huono verrattuna myös Joukowskin muunnoksen menetelmän antamiin arvoihin verrattuna. Ongelma liittyy terävässä ulospäin avautuvassa kulmassa

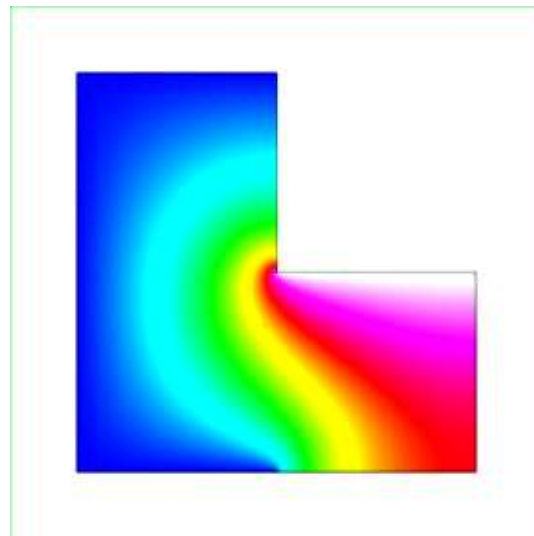


KUVA 5.12. Gaierin L-monikulmion potentiaalikenttä eli holomorfin funktion reaali osa ELMER:illä ratkaistuna. Jos tämä tulkittaisiin kondensaattoriksi, niin vasen ja oikea laita olisivat kondensaattorilevyt, muut sivut eristeitä ja nelikulmion moduli sama asia kuin kondensaattorin kapasitanssi.

esiintyvään singulariteettiin. Käytännössä elementtimenetelmän tulosta voitaisiin yrittää parantaa soveltamalla ensin yhtä askelta Grassmanin algoritmia (terävän ulospäin avautuvan kulman oikaiseminen, ks. kappaletta 3.5) esiratkaisijana.

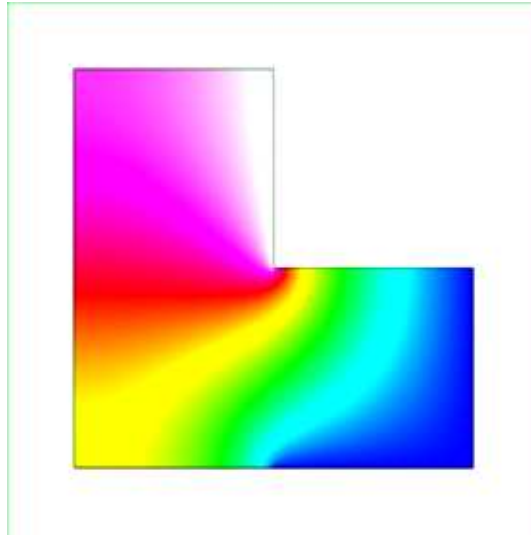


KUVA 5.13. Gaierin L-monikulmion potentiaalikenttä toisessa suunnassa eli holomorfisen funktion imaginaariosa (nelikulmion modulilla kerrottuna) ELMER:illä ratkaistuna.

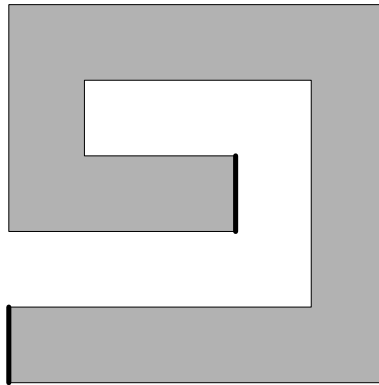


KUVA 5.14. Kuvan 5.11 keskimmäisen tapauksen mukainen potentiaalikenttä eli reaaliosa. Tämä tapaus on erityisen vaikea elementtimenetelmälle konformisen modulin laskemiseksi.

Minilabyrintti. Kuvan 5.16 tilanne on sikäli monimutkaisempi, että JOSC:in suora soveltaminen hajaantuu. Lisäongelman tuo alueen pitkulaisuus ja yksikkökiekolla olevien alkusivujen suhteiden verrannollisuus monikulmion 5.16 sivujen suhteiden eksponenttifunktioon.

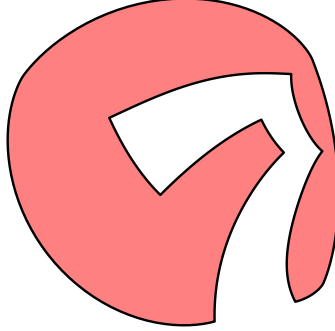


KUVA 5.15. Kuvan 5.11 keskimmäisen tapauksen mukainen potentiaalikenttä toisessa suunnassa eli imaginaariosa modulilla skaalattuna.



KUVA 5.16. Minilabyrintti. ELMER:illä saatu nelikulmion modulin approksimaatio on 0.06365, mutta sen tarkkuutta ei voi sanoa ehdottoman varmasti. Alkuperäisessä elementtimenetelmälaskussa alkukuvan pysty- ja vaakasivut oli vaihdettu toisin päin ja moduliiksi saatiin 15.7114. Joukon kärkipisteet vasemmas- ta alakulmasta vastapäivään kierrettynä ovat $0, 5, 5 + 5\hat{i}, 5\hat{i}, 2\hat{i}, 3 + 2\hat{i}, 3 + 3\hat{i}, 1 + 3\hat{i}, 1 + 4\hat{i}, 4 + 4\hat{i}, 4 + \hat{i}$ sekä \hat{i} . Selvytyden vuoksi alkukulmapisteet on alleviivattu.

Ratkaistaan seuraavassa nelikulmion modulin approksimaatiota Koe- ben algoritmilla kun reunapisteitä on 12000. Tässä laskussa pysty- ja vaakasivut oli vaihdettu toisinpäin:

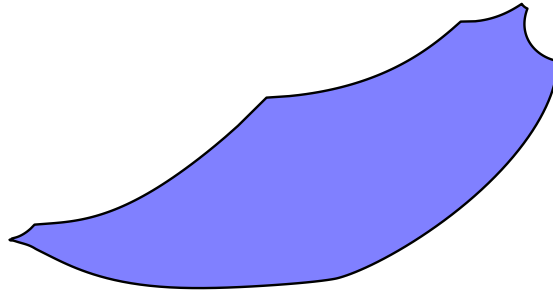


KUVA 5.17. ”Minilabyrintti” sen jälkeen kun se on ajettu konveksikuoren sisäkulmien oikaisurutiinin `convex_angleosc.m` läpi.

n	M	virhe
10	3.394675	1.231672e+01
20	3.808108	1.190329e+01
30	4.085773	1.162563e+01
50	4.270074	1.144133e+01
100	4.835152	1.087625e+01
200	5.265743	1.044566e+01
300	5.392778	1.031862e+01
500	5.824347	9.887053e+00
1000	6.290201	9.421199e+00
2000	6.805594	8.905806e+00
3000	7.152045	8.559355e+00
5000	7.717556	7.993844e+00
10000	8.667916	7.043484e+00

ja Koeben algoritmilla siten, että esitehtävänä on ratkaistu konveksikuoren sisäkulmien oikaiseminen murtopotensseilla, ks. kuvaa 5.17:

n	M	virhe
10	3.733948	1.197745e+01
20	4.102163	1.160924e+01
30	4.308879	1.140252e+01
50	4.642522	1.106888e+01
100	5.107972	1.060343e+01
200	5.514125	1.019728e+01
300	5.773587	9.937813e+00
500	6.025508	9.685892e+00
1000	6.384282	9.327118e+00
2000	6.923458	8.787942e+00
3000	7.261610	8.449790e+00
5000	7.745017	7.966383e+00
10000	8.589288	7.122112e+00

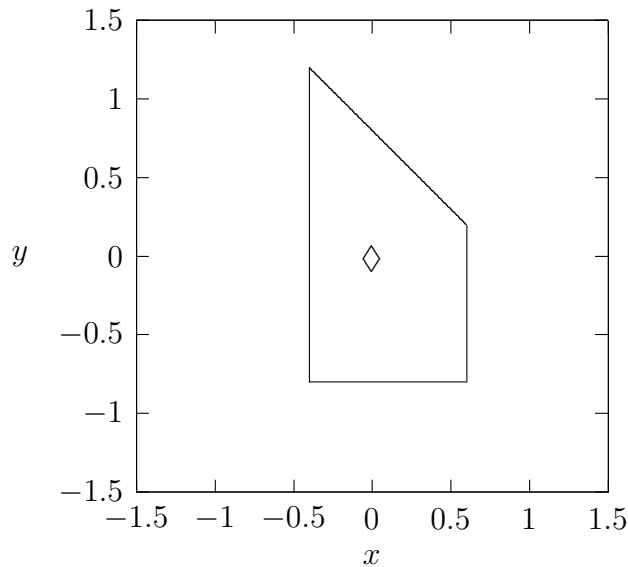


KUVA 5.18. "Minilabyrinth" sen jälkeen kun se on ajettu konveksikuoren sisäkulmien oikaisurutiinin `convex_angleosc.m` läpi ja sen jälkeen ulkokulmien oikaisurutiinin `angleosc.m` läpi. Tällöin on jo nähtävissä sellaisia sisäpisteitä, jonka suhteen alue on tähtimäinen.

ja Joukowskin muunnoksen algoritmilla siten, että ensin on ratkaistu esitehtävinä konveksikuoren sisäkulmien oikaiseminen ja sen jälkeen ulospäin avautuvien terävien kulmien oikaiseminen (päätyen tähtimäiseen alueeseen, ks. kuvaa 5.18), (tässäkin pysty- ja vaakasivut oli vaihdettu toisinpäin):

n	M	virhe
10	5.707643	1.000376e+01
20	6.068069	9.643331e+00
30	6.215426	9.495974e+00
50	6.562161	9.149239e+00
100	6.882109	8.829291e+00
200	7.152038	8.559362e+00
300	7.215770	8.495630e+00
500	7.477759	8.233641e+00
1000	7.753496	7.957904e+00
2000	8.111624	7.599776e+00
3000	8.408528	7.302872e+00
5000	8.824936	6.886464e+00
10000	9.553688	6.157712e+00

On siis huomattava, että mainitut kulmaoskulaatioalgoritmit olivat välttämättömiä toimenpiteitä Joukowskin muunnoksen algoritmin suppenemiseksi millään tavalla. Toisaalta, 10000 kierroksenkaan datasta voidaan päätellä vasta, että tulos lähestyy hitaasti oikeata modulin arvoa, joka on vähintään 15, mutta ei ole vielä oikeassa suuruusluokassa. Jotta modulia voitaisiin arvioida tarkemmin, pitäisi algoritmi ilmeisesti suorittaa useammassa eri konformikeskuksessa ja yhdistää saatuja tuloksia.



KUVA 5.19. Bowmanin nelikulmio harmonisen mitan mittaamista varten. Konforminen keskipiste on merkitty kuvaan.

5.2. Harmonisen mitan konstruointi

Palataan kappaleeseen 1.9 ja siellä esitettyihin satunnaiskulkuihin ja harmoniseen mittaamiseen. Kuten kaavassa (1.9.5) osoitettiin, on satunnaiskulkijan todennäköisyysfunktio osua tiettyyn reunapisteeseen harmoninen ja vastaavasti koska harmoniset funktiot ovat konformi-invariantteja, niin harmoninen mitta on luettavissa alueen Ω yksikkökiekoksi kuvautun konformikuvan reunapisteiden tiheyksistä. Tietysti on muistettava skaalata x ja y -akselit niin, että asteikko x -akselilla on välillä $[-\pi, \pi]$ ja y akselilla siten, että integraali (1.9.3)

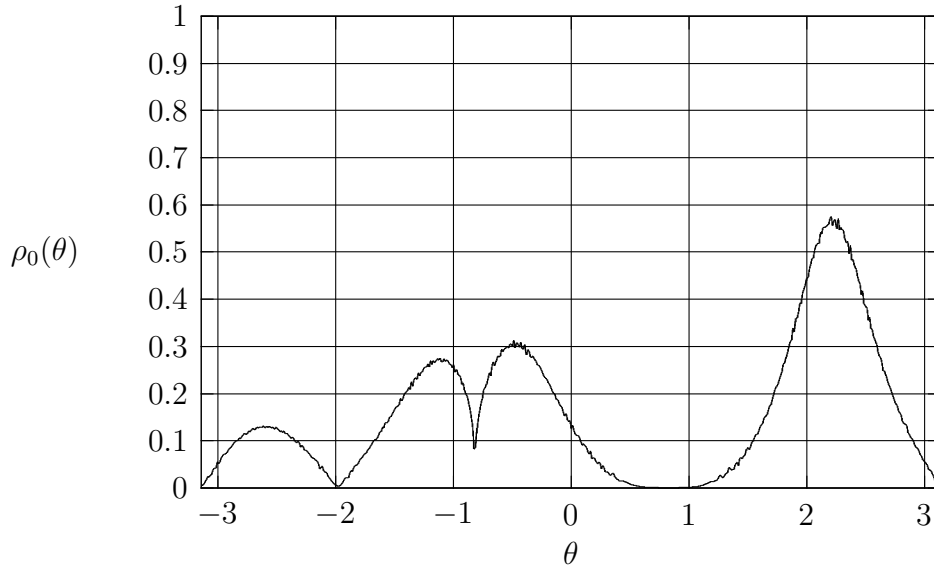
$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho_{\zeta_0}(\theta) d\theta$$

todellakin saa arvon 1.

Kuvissa 5.19 ja 5.20 näin on tehty Bowmanin nelikulmiolle. Se on ensiksi kuvattu yksikkökiekoksi Joukowskin muunnoksen algoritmilla

```
>> bowmanp=eqpolygon([0,1,1+i,2i]);
>> bowmanp=bowmanp-(.4+.8i);
>> bowmanp_img=josc(bowmanp,1000);
>> bowmanp_img=force_to_udisk(bowmanp_img);
>> c=cauchy(0,bowmanp,bowmanp_img);
>> bowmanp_img=(bowmanp_img-c)./(1-c'*bowmanp_img);
```

minkä jälkeen yksikkökiekon reunalta on harmoninen mitta mitattu ja skaalattu



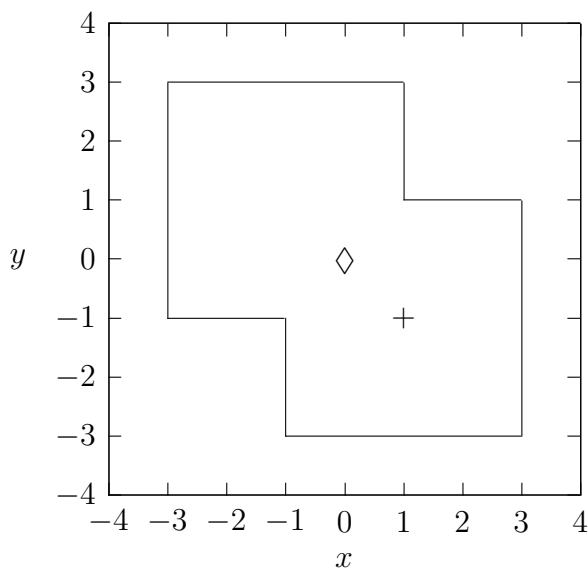
KUVA 5.20. Bowmanin nelikulmion harmonisen mitan tiheysfunktio. Konforminen keskipiste sijaitsi kuten kuvassa 5.19.

```
>> bowmanp_meas=meas_udisk(bowmanp_img);
>> bowmanp_meas=bowmanp_meas*length(bowmanp_meas)/(4*pi*pi);
```

Ylemmässä kuvista on Bowmanin nelikulmion kuva, jossa konforminen keskipiste ζ_0 merkitty. Tässä tapauksessa harmoninen mitta on konstruoitu niin, että alemman kuvan laidat vastaavat vasemmalla alhaalla olevaa nelikulmion kulmaa. Voidaan tehdä seuraavat johtopäätökset:

- Pisteestä ζ_0 lähtenyt satunnaiskulkija päätyisi suurimmalla todennäköisyydellä nelikulmion vasemman sivustan keskiosille. Intuitiivisesti järkeenkäypää, koska se on laakea alue ja lähellä.
- Satunnaiskulkija päättyy kulmien ympäristöön sitä suuremmalla todennäköisyydellä mitä tylpempi kulma on kyseessä. Tämä on intuitiivisesti varsin selvää, koska terävää kulmaa lähestyttäessä reuna ehtii absorboida satunnaiskulkijan suuremmalla todennäköisyydellä.
- Itse kulmien kohdalla on niiden suuruudesta riippumatta todennäköisyystiheyden alentuma. Tämä ei ole intuitiivisesti niinkään selvää, mutta pitää kuitenkin yhtä sen kanssa, että Bowmanin nelikulmion Schwarzin ja Christoffelin kaavassa derivaatta on muotoa

$$w'(z) = (z - z_1)^{-1/2}(z - z_2)^{-1/2}(z - z_3)^{-1/4}(z - z_4)^{-3/4}$$



KUVA 5.21. Symmetrinen nelikulmio harmonisen mitan mittaamista varten. Kuvaan merkitty molemmat käytettävät konformiset keskipisteet, origo 0 ja $1 - \hat{i}$.

(parametriongelma jätetty auki) ja koska eksponentit olivat negatiivisia, niin

$$\forall k, \lim_{z \rightarrow z_k} w'(z) = \infty$$

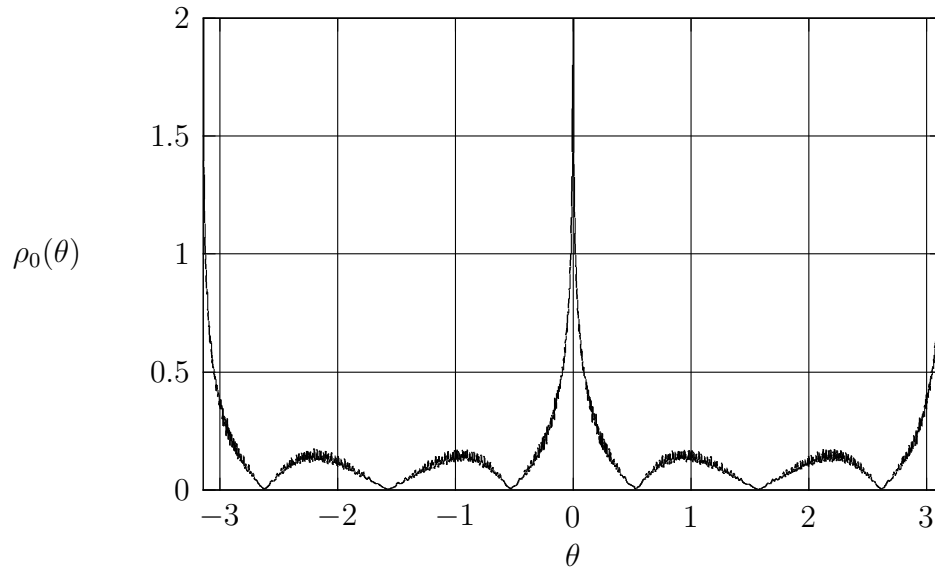
ja tästä johtuen vastaavasti

$$\begin{aligned} \forall k, z'(w_k) &= 0 \\ \rho_{\zeta_0}(\varphi) &= \frac{\mu'(\varphi)}{2i\pi\mu(\varphi)} = 0 \end{aligned}$$

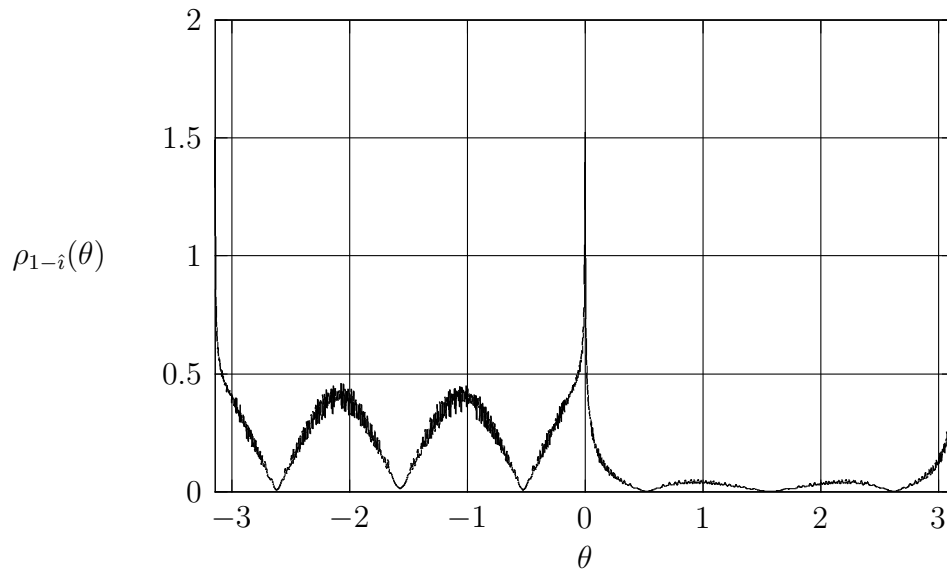
Ks. kaavaa (1.9.6).

Tarkastellaan sitten kuvia 5.21, 5.22 sekä 5.23, joissa harmoninen mitta on konstruoitu kahden eri pisteen suhteen. Menetelmänä on tällä kertaa käytetty kahta iteraatiokierrosta Grassmanin terävän ulkokulman algoritmia ennen Joukowskin muunnoksen algoritmia, jotta jälkimmäinen menetelmä suppenisi paremmin. Keskimmäisestä kuvasta havaitaan, että sisäänpäin avautuvat kulmat käyttäytyvät kuten edellisessäkin kohdassa - niiden ympäristössä on vain pieni absorptiotodennäköisyystiheys, sen sijaan ulospäin avautuvien kulmien kohdalla on korkea piikki. Syy tähän on jälleen Schwarzin ja Christoffelin integraalikaavan muodossa, kuten aiemminkin olemme nähneet, on

$$\lim_{z \rightarrow z_k} A(z - z_k)^{1/2} = 0,$$



KUVA 5.22. Symmetrisen nelikulmion harmonisen mitan tiheysfunktio, kun konforminen keskipiste sijaitsi origossa.



KUVA 5.23. Symmetrisen nelikulmion harmonisen mitan tiheysfunktio, kun konforminen keskipiste sijaitsi pisteessä $1 - i$.

missä A on muista Schwarzin-Christoffelin parametreista riippuva kompleksinen vakio ja näinollen derivaatalla $z'(w)$ on tässä kohden äärettömän korkea piikki. Approksimaatiossa se on jäänyt äärelliseksi.

Siirretään sitten konformikeskusta pisteeseen $1 - \hat{i}$ ja siirrytään alempaan kuvaan, jossa on harmoninen mitta tämän pisteen suhteen. Nyt on nähtävissä muuten samantapainen kuvio, mutta lähempien sivujen (oikealla alhaalla olevassa ”lokerossa”) kohdalla absorptiotodennäköisyydet ovat kasvaneet kun taas kauempana olevien sivujen suhteen pienentyneet. Tämä antaa ymmärtää, että monimutkaisten kappaleiden konformikuvauksissa ja Schwarzin-Christoffelin parametrien määrittämisessä on syytä suorittaa oskulaatioalgoritmi, konforminen taitos tms. menetelmä useamman eri konformikeskuksen suhteen ja konstruoida näitä yhdistämällä parametrien approksimaatio. Tässä työssä tämä sovellus sivuutetaan.

Vielä on huomattava, ettei suoritettu konformikuvaus ole ollut aivan tarkka vaan käyrässä on ”perusmuodon” päällä noin 0.1 suuruista ”kohinaa”, etenkin niiden sivujen vastinkäyrän kohdalla, joissa absorptiotodennäköisyys oli suuri. Tämä antaa ymmärtää, että likimääräistä konformikuvausalgoritmia saattaa voida parantaa siten, että konstruoidusta harmonisen mitan approksimaatiosta yrittäisi poistaa kohinaa.

LUKU 6

Johtopäätökset

6.1. Teoreettisesta tarkastelusta

Työssä läpikäyty teoriaosuus on pitkälti standardia kompleksianalyysia, joka kuitenkin oli syytä käydä läpi konformikuvausten teorian pohjustuksena. Möbius-kuvauksia koskevassa osiossa on pyritty mahdollisimman tiiviiseen mainitun kuvausluokan ominaisuuksien esiintuomiseen, jotta myöhemmissä todistuksissa riittäisi vain viittaus muutama aiempiin peruslauseisiin.

Joukowskin muunnoksen käsittelytapa on sikäli poikkeuksellinen, että standarditeokset, kuten [SL, Kappaleet 3.2.2, 3.3.4] keskittyvät enemmän siipiprofiili- ja yksikkökierokkompleksitaso-tulkintoihin, jättäen huomiotta tärkeän ominaisuuden asympotoottisesta tasoittumisesta kohti lineaarikuvausta kauas mentäessä ja toisaalta siitä, että Joukowskin muunnos paikallisesti mahdollistaa konformisen tiheyden alen- tamisen halutusta kohdasta.

Saatujen selvitysten mukaan merkittävin uusi tulos tässä työssä onkin Joukowskin muunnoksen käyttötapa konveksien Jordan-alueiden oskulaatioalgoritmissa. Edellä mainitun Joukowskin muunnoksen äärettömyydessä tasoittuvuusominaisuuden lisäksi merkitystä on ollut myös tiedolla, jonka mukaan Theodore Theodorsen on 1900-luvun alkupuolella käyttänyt kyseistä muunnosta toisella tapaa lähellä yksikkökierokkoa olevien Jordan-alueiden kuvaamiseksi yksikkökierokoksi, ks. [Theo].

6.2. Nelikulmion modulin mittaustuloksista

Laskennallisen nelikulmion modulin arvo verrattuna teoreettisesti tunnettuun oikeaan arvoon on eräs kvantitatiivinen kriteeri konformikuvausten numeerisen laadun mittaamiseksi.

Näinollen nelikulmion modulia on laskettu suurimmassa osassa testejä kuvaamalla ensin alkuperäinen alue yksikkökierokoksi, suorittamalla tältä Möbius-kuvaus siten, että kulmapisteet kuvautuvat standardipisteistöön $\{0, 1, s, \infty\}$ ja laskemalla tämän jälkeen kahden 1. lajin elliptisen integraalin suhde. Seuraavat havainnot ovat keskeisiä:

- Konvekseilla Jordan-alueilla, joiden nelikulmion moduli on 1 tai lähes 1, kaikki käytetyt menetelmät, Koeben algoritmi, Joukowskin muunnoksen algoritmi ja elementtimenetelmä, toimivat tehokkaasti. Esimerkkeinä tällaisista alueista ovat suora-kaiteet ja ns. Bowmanin nelikulmio, ks. kuvaa 5.2. Toisaalta konvekseille nelikulmioille tunnetaan tarkkojakin hypergeometristen funktioiden avulla ilmaistavia nelikulmion modulin kaavoja, ks. artikkelia [HVV].
- Joukowskin muunnoksen algoritmi saavuttaa muutamassa tuhannessa kierroksessa muutaman tuhannen pisteen reunan approksimaatiolla suhteellisesti hyvän suuruusluokan 10^{-4} tarkkuuden, Koeben algoritmi hieman tätä hitaammin.
- Elementtimenetelmä antaa hyvän tarkkuuden, paitsi tilanteessa, jossa alkukuvassa on alkukulman kohdalla ulospäin aukeava kulma. Tällaisessa tapauksessa on suositeltavaa käyttää esiratkaisijaa, esim. Grassmanin algoritmia.
- Pitkulaiset ja ei-konveksit alueet kuten minilabyrintti, ks. kuvaa 5.16, ovat hankalia kaikille konformikuvausalgoritmeille. Vain elementtimenetelmällä ja silläkin pitkän laskutoimituksen jälkeen onnistuttiin tässä työssä saamaan tyydyttävä arvio nelikulmion modulin arvolle.

6.3. Harmonisen mitan mittaustuloksista

Harmoninen mitta on sinänsä yleisluontoisempi konformikuvausten luonnehdintatapa kuin nelikulmion moduli, koska harmoninen mitta pitää sisällään tarkasti laskettuna täydellisen informaation siitä, miten tietty Jordan-alue on konformisesti kuvattavissa yksikkökielelle. Virhearvioihin harmoninen mitta käy siten, että sellaisista harmonisista mitoista, joista esimerkiksi Schwarzin ja Christoffelin integraalikaavan muodon takia tiedetään käyrän sileys joissakin kohdissa, mutta joissa numeerisessa tuloksessa on kohinaa, voidaan kuviosta päätellä virhearvio, ks. kuvaa 5.21. Lisäksi, ottaen huomioon satunnaiskulkijan ja stokastisten prosessien tulkinnan, voidaan harmonisesta mitasta myös tehdä päätelmiä tiettyjen pisteiden ”saavutettavuudesta”, esimerkiksi kuvan 5.21 mukainen piikki läheisten ulospäin avautuvien kulmien kohdalla antaa ymmärtää näiden olevan todennäköisimpiä paikkoja valokaaren osua, mikäli vastakkaisten sivujen välillä olisi runsas potentiaaliero eli jännite.

6.4. Sivuutettuja aihepiirejä

Tässä työssä on aiheen laajuuden vuoksi jouduttu sivuuttamaan useita tunnettuja kompleksianalyysin tuloksia, joilla olisi sinänsä merkitystä konformikuvausten kannalta. Esimerkkeinä näistä ovat reaalisten ja kompleksisten harmonisten funktioiden teoria, erityisesti Poissonin ytimen ja Poissonin integraalin hyväksikäyttö. Muita sivuutettuja

aihepiirejä ovat päättymättömät tulot, esim. [Rud, Luku 15] tai reunan pituuksien ja pinta-alojen minimointoja koskevat variaatioperiaatteet, esim. [SL, Kappale 4.3]. Geodeesisen algoritmin osalta ei ole suoritettu testejä ja viilto- ja vetoketjualgoritmeja ei ole toteutettu.

6.5. Jatkotutkimusaiheita ja avoimia kysymyksiä

Tärkeimpänä jatkotutkimusaiheena tähän työhön liittyen voisi mainita Joukowskin muunnoksen algoritmin kehittämisen ja täsmällisen matemaattisen teorian suppenemisehdoista, suppenemisnopeudesta ja tarkkuudesta, laadinnan. Nyt esitetty versio valitsee painokertoimet mekaanisesti pyrkien kriittisen (lähimmän) pisteen siirtämiseksi puoleenväliin lähemmäs yksikkökiekon reunaa, mutta avoin kysymys on, milloin olisi tehokkaampaa siirtää kyseistä pistettä lähemmäksi tai kauemmaksi yksikkökiekon reunasta kuvauksessa kuin nyt on tehty. Voidaanko suorittaa etukäteen mittauksia tai haarukointeja, esimerkiksi kokeilemalla eri painokertoimilla ja valita paras sen perusteella, mikä tuottaisi lähimpänä yksikkökiekon reunaa olevan uuden reunakäyrän? Voidaanko hyödyntää konveksikuorta epäkonvekseille alueille, esimerkiksi seuraavalla tavalla:

- Konstruoidaan konveksikuori.
- Valitaan sellainen konveksikuoren reunapiste z_M , joka olisi mahdollisimman kaukana mistään kuvattavan alueen Ω (reuna-)pisteestä.
- Laaditaan Joukowskin muunnos sopivalla painokertoimella konformisen tiheyden alentamiseksi reunalla olevista aukkopaikoista?

Toisena jatkotutkimusaiheena voisi olla variaatioperiaatteiden yhdistäminen oskulaatioalgoritmeihin, esimerkiksi niin, että aloitettaisiin alueen Ω pistejoukolla approksimoidusta reunakäyrästä ja tasavälisellä pistejoukolla approksimoidusta yksikkökiekon reunasta, suoritettaisiin Cauchyn integraaleja, taulukoitaisiin integraalin arvon kehittymistä pisteittäin ja yritettäisiin päätellä, missä kohden konformisuus ”eniten” rikkoutuu. Eräänä mahdollisena kriteerinä on muodostaa Laurént-sarja ja tarkastella sarjan negatiivisia eksponentteja käsittäviä termejä. Mikäli näillä on nollasta poikkeavia arvoja, kuvaus ei voi olla konforminen, sillä tällöin sijaitsee origossa napa tai oleellinen erikoispiste. Jos oskulaatioaskeleella saadaan ensisijaisesti tällaisen navan kertalukua tai toissijaisesti residyä alennettua, voidaan uuden kuvauksen katsoa olevan ”lähempänä” konformikuvausta yksikkökiekoksi.

Kolmantena jatkotutkimusaiheena voisi olla Schwarzin ja Christoffelin kaavan parametriongelman likimääräinen ratkaiseminen suorittamalla oskulaatioalgoritmi useammalla konformisella keskuksella ja konstruoida näin saavutettujen likimääräisten yksikkökierokkojen välillä olevat Möbius-kuvaukset. Voitaisiin esimerkiksi laskea yksikkökierokkon automorfismeille ”summakaava”

$$\varphi_a(\varphi_b(z)) = \frac{z + \frac{a+b}{1+ab}}{1 + \frac{a+b}{1+ab}z}, \quad a, b \in [0, 1),$$

määritellä tämän avulla hyperbolisen tangentin yhteenlaskukaavaa muistuttava ”summa”

$$a + ' b = \frac{a + b}{1 + ab}$$

ja tällä tavoin käydä tarkemmin läpi sellaisia konformikuvauksen yksityiskohtia, jotka muuten ovat kasautuneet liian pieneen tilaan lähelle reunaa.

Liitteet

7.1. MATLAB/Octave-ohjelmakoodit

mnconfpack-testiohjelmapaketti.

```
function w=angleosc(z,n)
% Mikko Nummelin, 2007

    if nargin<2
        n=1000;
    end
    w=z;
    mpind=maxpoint(w);
    if(abs(w(mpind))>=1)
        w=w./(abs(w(mpind))+1E-10);
    end
    for k=1:n
        [mpind,fold]=outerangle(w);
        if fold>16/17;
            return;
        end
        mp=w(mpind);
        w=(w-mp)./(1-mp'*w);
        w2=holsqrt(w,mpind);
        oimg1=sqrt(-mp);
        oimg2=cauchy(-mp,w,w2);
        if abs(oimg1-oimg2)>abs(oimg1+oimg2)
            oimg1=-oimg1;
        end
        w=(w2-oimg1)./(1-oimg1'*w2);
    end
end

function w=cauchy(z,zdata,wdata,n)
% Mikko Nummelin, 2007

    if length(zdata)~=length(wdata)
        error('zdata and wdata should have equal length.');
```

```

end
if nargin<4
    n=0;
end
w=zeros(1,length(z));
for k1=1:length(z)
    wdata2=wdata./(zdata-z(k1)).^(n+1);
    w(k1)=0.0;
    for k2=1:length(zdata)
        if k2>1
            dzdata=zdata(k2)-zdata(k2-1);
            wval=(wdata2(k2)+wdata2(k2-1))/2;
        else
            dzdata=zdata(1)-zdata(length(zdata));
            wval=(wdata2(1)+wdata2(length(wdata)))/2;
        end
        w(k1)=w(k1)+wval*dzdata;
    end
    w(k1)=w(k1)/(2*i*pi);
end
end
end

```

```

function w=convex_angleosc(z,n)
% Mikko Nummelin, 2007

    if nargin<2
        n=1000;
    end
    w=z;
    mpind=maxpoint(w);
    if(abs(w(mpind)))>=1
        w=w./(abs(w(mpind))+1E-10);
    end
    for k=1:n
        [mpind,fold]=innerangle2(w);
        if fold<17/16;
            return;
        end
        mp=w(mpind);
        w=w-mp;
        w=w.^fold;
        oimg=(-mp)^fold;
        w=w-oimg;
    end

```

```

        mpind=maxpoint(w);
        if(abs(w(mpind))>=1)
            w=w./(abs(w(mpind))+1E-10);
        end
    end
end

```

```

function w=eqpolygon(v,n)
% Mikko Nummelin, 2007

```

```

    if nargin<2
        n=100;
    end
    len=length(v);
    w=[];
    for k=1:len
        curr=v(k);
        if k<length(v)
            next=v(k+1);
        else
            next=v(1);
        end
        m=abs(next-curr)*n;
        for k2=0:m-1
            w=[w,curr+(next-curr)*k2/m];
        end
    end
end

```

```

function w=force_to_udisk(z)
    len=length(z);
    for k=1:len
        w(k)=z(k)/abs(z(k));
    end
end

```

```

function [w,rb1,rb2]=geodesic(z,k)
% Mikko Nummelin, 2007

```

```

    len=length(z);
    if nargin<2

```

```

        k=len;
    end

    w=z;
    rb1=zeros(1,len);
    rb2=zeros(1,len);
    rb1(1)=NaN;
    rb2(1)=NaN;
    w(3:len)=(z(3:len)-z(2))./(z(3:len)-z(1));
    w(3:len)=i*sqrt(w(3:len));
    for k1=3:k
        b2=abs(w(k1)*w(k1))/imag(w(k1));
        b2=b2*b2;
        if real(w(k1))~=0
            b=abs(w(k1))*abs(w(k1))/real(w(k1));
            rb1(1:k1-1)=uautomorph(rb1(1:k1-1),b);
            rb2(1:k1-1)=uautomorph(rb2(1:k1-1),b);
            w(k1:len)=uautomorph(w(k1:len),b);
        end
        rb1(1:k1-1)=rb1(1:k1-1).*rb1(1:k1-1)+b2;
        rb2(1:k1-1)=rb2(1:k1-1).*rb2(1:k1-1)+b2;
        w(k1:len)=w(k1:len).*w(k1:len)+b2;
        rb1(1:k1-1)=sqrt(rb1(1:k1-1));
        rb2(1:k1-1)=-sqrt(rb2(1:k1-1));
        if k1<len
            w(k1+1:len)=usqrt(w(k1+1:len));
        end
    end
end
end

```

```
function w=hololog(z,k)
```

```
% Mikko Nummelin, 2007
```

```

    if nargin<2
        k=1;
    end
    w=zeros(1,length(z));
    br=0;p=0;
    if k<length(z)
        for k1=k+1:length(z)
            s=log(z(k1))+2*i*pi*br;
            if abs(s-p)>abs(s+2*i*pi-p)
                w(k1)=s+2*i*pi;
                p=s+2*i*pi;
            end
        end
    end

```

```

        br=br+1;
    elseif abs(s-p)>abs(s-2*i*pi-p)
        w(k1)=s-2*i*pi;
        p=s-2*i*pi;
        br=br-1;
    else
        w(k1)=s;
        p=s;
    end
end
end
if k>1
    for k1=1:k-1
        s=log(z(k1))+2*i*pi*br;
        if abs(s-p)>abs(s+2*i*pi-p)
            w(k1)=s+2*i*pi;
            p=s+2*i*pi;
            br=br+1;
        elseif abs(s-p)>abs(s-2*i*pi-p)
            w(k1)=s-2*i*pi;
            p=s-2*i*pi;
            br=br-1;
        else
            w(k1)=s;
            p=s;
        end
    end
end
end
end

```

```

function w=holsqrt(z,k)
% Mikko Nummelin, 2007

    if nargin<2
        k=1;
    end
    w=zeros(1,length(z));
    p=-i;
    if k<length(z)
        for k1=k+1:length(z)
            s=sqrt(z(k1));
            if abs(s-p)>abs(s+p)
                w(k1)=-s;p=-s;
            else

```

```

        w(k1)=s;p=s;
    end
end
end
if k>1
    for k1=1:k-1
        s=sqrt(z(k1));
        if abs(s-p)>abs(s+p)
            w(k1)=-s;p=-s;
        else
            w(k1)=s;p=s;
        end
    end
end
end
end

```

```

function [k,n]=innerangle(z)
% Mikko Nummelin, 2007

```

```

    k=0;min_ang=0;
    for k1=1:length(z)
        if k1==1
            prev=z(1)-z(length(z));
        else
            prev=z(k1)-z(k1-1);
        end
        if k1==length(z)
            next=z(1)-z(length(z));
        else
            next=z(k1+1)-z(k1);
        end
        ang=imag(log(prev/next));
        if ang<min_ang
            k=k1;
            min_ang=ang;
        end
    end
    n=pi/(pi+min_ang);
end

```

```

function [k,n]=innerangle2(z)
% Mikko Nummelin, 2007

```



```

k=0;max_ang=0;
range=convhull(real(z),imag(z));
range=sort(range(2:length(range)));
range=[range;range(1)];

for k1=2:length(range)
    prev=z(range(k1))-z(range(k1-1));
    if k1<length(range)
        next=z(range(k1+1))-z(range(k1));
    else
        next=z(range(2))-z(range(k1));
    end
    ang=imag(log(next/prev));
    if ang>max_ang
        k=range(k1);
        max_ang=ang;
    end
end
n=pi/(pi-max_ang);
end

```

```

function w=josc(z,n)
% Mikko Nummelin, 2007

w=z;
mpind=maxpoint(w);
if(abs(w(mpind))>=1)
    w=w./(abs(w(mpind))+1E-10);
end
for k=1:n
    mpind=minpoint(w);
    mp=w(mpind);
    rot=mp'/abs(mp);
    w=w.*rot;
    mp=abs(mp);
    alpha=(mp-1)*(mp-1)/2;
    w=w-alpha./(w-1);
    w=w.*rot';
    mpind=maxpoint(w);
    w=w./(abs(w(mpind))+1E-10);
end
end

```

```

function w=koebe(z,n)
% Mikko Nummelin, 2007

    w=z;
    mpind=maxpoint(w);
    if(abs(w(mpind))>=1)
        w=w./(abs(w(mpind))+1E-10);
    end
    for k=1:n
        mpind=minpoint(w);
        mp=w(mpind);
        rot=-mp'/abs(mp);
        w=w.*rot;
        mp=-abs(mp);
        w=(w-mp)./(1-mp*w);
        w=holsqrt(w,mpind);
        w=(w-sqrt(-mp))./(1-sqrt(-mp)*w);
        w=w*rot';
    end
end

```

```

function [k,val]=maxpoint(z)
% Mikko Nummelin, 2007

    k=1;val=abs(z(1));
    for k1=2:length(z)
        if(abs(z(k1))>val)
            k=k1;
            val=abs(z(k));
        end
    end
end

```

```

function [k,val]=minpoint(z)
% Mikko Nummelin, 2007

    k=1;val=abs(z(1));
    for k1=2:length(z)
        if(abs(z(k1))<val)
            k=k1;
            val=abs(z(k));
        end
    end
end

```

end

```
function w=meas_udisk(z)
% Mikko Nummelin, 2007
```

```
    angles=imag(log(z));
    angles=[angles,angles(1)];
    len=length(z);
    w=zeros(1,len);
    for k=1:len
        if angles(k+1)>angles(k)-pi
            w(k)=angles(k+1)-angles(k);
        else
            w(k)=2*pi+angles(k+1)-angles(k);
        end
    end
end
```

```
function w=mobius_from_to_points(z,z0,z1,zinf,w0,w1,winf)
    w=mobius_from_points(z,z0,z1,zinf);
    w=mobius_to_points(w,w0,w1,winf);
end
```

```
function w=mobius_from_points(z,z0,z1,zinf)
    w=zeros(1,length(z));
    p0=-z0*(z1-zinf);
    p1=z1-zinf;
    q0=-zinf*(z1-z0);
    q1=z1-z0;
    for k=1:length(z)
        if z(k)==Inf
            w(k)=p1/q1;
        elseif z(k)==zinf
            w(k)=Inf;
        else
            w(k)=(p0+p1*z(k))/(q0+q1*z(k));
        end
    end
end
```

```

function w=mobius_to_points(z,z0,z1,zinf)
    w=zeros(1,length(z));
    p0=-z0*(z1-zinf);
    p1=z1-zinf;
    q0=-zinf*(z1-z0);
    q1=z1-z0;
    for k=1:length(z)
        if z(k)==Inf
            w(k)=zinf;
        elseif z(k)==p1/q1
            w(k)=Inf;
        else
            w(k)=(-p0+q0*z(k))/(p1-q1*z(k));
        end
    end
end

```

```

function s=modular_s(z,zll,zlr,zur,zul)
% Mikko Nummelin, 2007

    if z(zll)==Inf
        s=(z(zlr)-z(zul))/(z(zur)-z(zul));
    elseif z(zlr)==Inf
        s=(z(zur)-z(zll))/(z(zur)-z(zul));
    elseif z(zur)==Inf
        s=(z(zlr)-z(zul))/(z(zlr)-z(zll));
    elseif z(zul)==Inf
        s=(z(zur)-z(zll))/(z(zlr)-z(zll));
    else
        s=(z(zlr)-z(zul))*(z(zur)-z(zll))/...
            ((z(zlr)-z(zll))*(z(zur)-z(zul)));
    end
    s=real(s);
end

```

```

function [k,n]=outerangle(z)
% Mikko Nummelin, 2007

    k=0;max_ang=0;
    for k1=1:length(z)
        if k1==1
            prev=z(1)-z(length(z));
        else

```

```

        prev=z(k1)-z(k1-1);
    end
    if k1==length(z)
        next=z(1)-z(length(z));
    else
        next=z(k1+1)-z(k1);
    end
    ang=imag(log(prev/next));
    if ang>max_ang
        k=k1;
        max_ang=ang;
    end
end
n=pi/(pi+max_ang);
end

```

```

function w=polygon(v,n)
% Mikko Nummelin, 2007

```

```

    if nargin<2
        n=100;
    end
    w=[];
    for k=1:length(v)
        curr=v(k);
        if k<length(v)
            next=v(k+1);
        else
            next=v(1);
        end
        for k2=0:n-1
            w=[w,curr+(next-curr)*k2/n];
        end
    end
end

```

```

function m=qm(z,zll,zlr,zur,zul)
% Mikko Nummelin, 2007

    s=modular_s(z,zll,zlr,zur,zul);
    m=ellipke(1-1/s)/ellipke(1/s);
end

```

```
function w=udisk(n)
% Mikko Nummelin, 2007

    t=0:2*pi/n:2*pi*(n-1)/n;
    w=exp(i*t);
end
```

Kirjallisuutta

- [AS] MILTON ABRAMOWITZ, IRENE A. STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York, 1964
<http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/>
- [Ahl] LARS V. AHLFORS: *Complex analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953
- [Akh] NAUM ILJITSĖ AKHIEZER: *Elements of the theory of elliptic functions*, Translations of mathematical monographs, Vol. 79, American Mathematical Society, 1980
- [AVV] GLEN D. ANDERSON, MAVINA K. VAMANAMURTHY, MATTI K. VUORINEN: *Conformal invariants, inequalities, and quasiconformal maps*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997
- [Ban] LEHEL BANJAI: *Revisiting the crowding phenomenon in Schwarz-Christoffel mapping*, Institut für Mathematik, Universität Zürich, 2007
- [Ber] DANIEL J. BERNSTEIN: *Computing logarithm intervals using arithmetic-geometric mean iteration*, National Science Foundation, Preprint, 2003
<http://cr.yp.to/papers.html#logagm>
- [BSV] DIMITRIOS BETSAKOS, KLAS SAMUELSSON, MATTI VUORINEN: *Computation of capacity of planar condensers*, Inst. Math (Beograd) (N.S.) 75(89) 2004, ss. 233-252.
- [Bis] CHRISTOPHER J. BISHOP: *Conformal welding and Koebe's theorem*, Preprint, 2003
- [Bow] F. BOWMAN: *Introduction to elliptic functions*, English Universities Press, Ltd., London, 1953
- [CLRS] THOMAS H. CORMEN, CHARLES E. LEISERSON, RONALD L. RIVEST, CLIFFORD STEIN: *Introduction to algorithms*, The MIT Press, 2. painos, 2001.
- [Dri] TOBIN A. DRISCOLL: *Schwarz-Christoffel Toolbox*
<http://www.math.udel.edu/~driscoll/software/SC>
- [DT] TOBIN A. DRISCOLL, LLOYD N. TREFETHEN: *Schwarz-Christoffel mapping*, Cambridge monographs on applied and computational mathematics, 2002

- [Dur] PETER DUREN: *Harmonic mappings in the plane*, Cambridge University Press, 2004
- [FOR] FORTRAN 77 standard
http://www.fortran.com/fortran/F77_std/rjcnf0001.html
- [Gai] DIETER GAIER: *Ermittlung des konformen Moduls von Vierecken mit Differenzenmethoden*, Numer. Math. 19, 179-194, Springer-Verlag, 1972.
- [Gam] THEODORE W. GAMELIN: *Complex analysis*, Springer-Verlag, New York, Inc., 2001
- [GM] JOHN B. GARNETT, DONALD E. MARSHALL: *Harmonic measure*, Cambridge University Press, 2005
- [HVV] VILLE HEIKKALA, MAVINA K. VAMANAMURTHY, MATTI VUORINEN: *Generalized elliptic integrals*, Preprint, 2007.
[arXiv:math/0701436](http://arxiv.org/abs/math/0701436)
- [How] LOUIS HILL HOWELL: *Computation of conformal maps by modified Schwarz-Christoffel transformations*, PhD Thesis, Massachusetts Institute Of Technology, 1985.
- [HM] JOHN HUBBARD, VICTOR MOLL: *A geometric view of the rational Landen transformations*, Bulletin of the London Mathematical Society, 2003.
http://www.math.tulane.edu/~vhm/papers_html/geom.pdf
- [KS] AVINASH KHARE, UDAY SUKHATME: *Generalized Landen Transformation Formulas for Jacobi Elliptic Functions*, [oai:arXiv.org:math-ph/0312074](http://arxiv.org/abs/math-ph/0312074), Preprint, 2003.
- [LT] STIG LARSSON, VIDAR THOMÉE: *Partial Differential Equations with Numerical Methods*, Springer-Verlag, 2003.
- [LV] OLLI LEHTO, KALLE I. VIRTANEN: *Quasiconformal mappings in the plane*, 2. painos, Grundlehren Math., Wiss., Band 126, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [MR] DONALD E. MARSHALL, STEFFEN ROHDE: *Convergence of the Zipper algorithm for conformal mapping*, Department of Mathematics, University of Washington, Preprint, 2000
- [MarZIPPER] DONALD E. MARSHALL: *Numerical conformal mapping software: zipper*,
<http://www.math.washington.edu/~marshall/zipper.html>
- [MAT] The MathWorks: *MATLAB and Simulink for Technical Computing*
<http://www.mathworks.com/>
- [OCT] *GNU Octave*
<http://www.gnu.org/software/octave/>

- [OF] Octave Forge: *Extra packages for GNU Octave*
<http://octave.sourceforge.net/>
- [Pap] NICOLAS PAPAMICHAEL: *Dieter Gaier's Contribution to Numerical Conformal Mapping*, Computational Methods and Function Theory, Volume 3 (2003), No. 1, 1-53, Heldermann Verlag, 2003
- [PMA] PlanetMath: *Automorphisms of unit disk*
<http://planetmath.org/encyclopedia/AutomorphismsOfUnitDisk.html>
- [PMS] PlanetMath: *Schwarz-Christoffel transformation (circular version)*
<http://planetmath.org/encyclopedia/SchwarzChristoffelTransformationCircularVersion.html>
- [Por] R. MICHAEL PORTER: *History and Recent Developments in Techniques for Numerical Conformal Mapping*, Preprint, 2005.
http://www.math.utu.fi/projects/madras/w_proc_mike.pdf
- [RV] ANTTI RASILA, MATTI VUORINEN: *Experiments with moduli of quadrilaterals*, Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, 5-6, 2006.
- [Rud] WALTER RUDIN: *Real and complex analysis*, McGraw-Hill series in higher mathematics, 1986
- [SL] ROLAND A. SCHINZINGER, PATRICIO A. A. LAURA: *Conformal Mapping - Methods And Applications*, Dover Publications Inc, Mineola, New York, 2003
- [See] PETER SEEBACH: *Open source development using C99*, IBM, 2004
<http://www-128.ibm.com/developerworks/linux/library/l-c99.html>
- [Theo] THEODORE THEODORSEN: *Theory of wing sections of arbitrary shape*, NACA Report No. 411, 1933
<http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/1933/naca-report-411.pdf>
- [TD] LLOYD N. TREFETHEN, TOBIN A. DRISCOLL: *Schwarz-Christoffel mapping in the computer era*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III, 533-542.
- [Vaill] NOËL VAILLANT: *Caratheodory extension*
<http://www.probability.net/WEBcaratheodory.pdf>
- [Vai] JUSSI VÄISÄLÄ: *Topologia I*, 2. painos, Limes ry, 2002
- [WW] BYRON L. WALDEN, LESLEY A. WARD: *A harmonic measure interpretation of the arithmetic-geometric mean*, The American Mathematical Monthly, August/September 2007.
<http://www.unisanet.unisa.edu.au/staff/homepage.asp?Name=Lesley.Ward>
http://www.maa.org/pubs/monthly_aug_sep07_toc.html
- [Wal] JOSEPH L. WALSH: *History of the Riemann Mapping Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 3. (Mar. 1973), ss. 270-276

- [Weg] R. WEGMANN: *Methods for numerical conformal mapping*, R. Kühnau (Ed.), *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory*, Vol. 2, ss. 351-477, Elsevier Science, Amsterdam, 2005
- [WeiI] ERIK W. WEISSTEIN: *Inverse Nome*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/InverseNome.html>
- [WeiR] ERIK W. WEISSTEIN: *Riemann mapping theorem*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/RiemannMappingTheorem.html>
- [ZHGM] GUANGYU ZOU, JING HUA, XIANFENG GU, OTTO MUZIK: *An approach for intersubject analysis of 3D brain images based on conformal geometry*
<http://www.cs.sunysb.edu/~vislab/papers/ICIP-2873.pdf>

Hakemisto

- $R_{1,1}$ -rationaalikuvaus, 20
- ANGLEOSC, 58
- CONVEX_ANGLEOSC, 60
- JOSC, 61
- mnconfpack, 65
- alkukulma, 51
- alue, 7
 - kanoninen, 9
 - konvekksi, 9
 - tähtimäinen, 9
- annulus, 10
- areahyperbolinen tangentti, 38
- arkussini, 38
- automorfismi
 - suorakaiteen, 51
 - yksikkökiekon, 24, 29
 - ylemmän puolitason, 25
- avoin joukko, 7
- bilineaarinen funktionaali, 17
- Brownin liike, 31
- Cauchyn estimaatit, 19
- Cauchyn integraalikaava, 65
- Cauchyn-Riemannin yhtälöt, 10
- Cayleyn muunnos, 23
 - differentiaali, 24
 - käänteinen, 23
- elementtifunktiot, 17
- elliptinen karakteristika, 44
- elliptiset funktiot
 - Jacobin
 - cn, 45
 - dn, 45
 - sn, 45
- elliptiset integraalit, 43
- FORTTRAN, 57
- funktio
 - analyttinen, 10
- holomorfinen, 10
- geodeesi
 - hyperbolisen geometrian, 53
- geodeesinen algoritmi, 40, 55, 69
- Grassmanin algoritmi
 - terävät sisäkulmat, 60, 69
 - terävät ulkokulmat, 58, 69
- Greenin kaava, 17
- harmoninen mitta, 32, 69
- harmoniset funktiot, 10
- Harnackin periaate, 33
- homeomorfismi, 7
- hyperbolinen tangentti, 38
- integraali
 - Cauchyn, 12, 65
 - Dirichlét'n, 11, 16
 - elliptinen, 41, 43
 - \mathcal{E} , 43
 - \mathcal{F} , 43
 - \mathcal{K} , 44
 - Π_2 , 44
 - Bernsteinin I , 47
 - ensimmäisen lajin, 43
 - kolmannen lajin, 44
 - täydellinen, 44
 - toisen lajin, 43
 - trigonometriset muodot, 47
 - ylempi puolitaso
 - potentiaalikuopaksi, 43
 - ylempi puolitaso putkeksi, 44
 - ylempi puolitaso suorakaiteeksi, 43
- kompleksinen, 11
- Schwarzin ja Christoffelin, 34
- jäykkyysmatriisi, 18
- Joukowskiin muunnos, 29, 41, 61
 - derivaatta, 29

- elliptisten integraalien
 - muuntaminen, 48
- konformisuus, 29
- oskulaatioalgoritmi, 61, 68
- siipiprofili, 31
- tasoittumisominaisuus, 29
- yksikkökiekosta, 30
- juurenotto
 - holomorfinen, 20
- käyrä
 - kompleksitason, 8
- kasautuminen, 50, 56
- kiekko, 7
 - yksikkökiekko, 7
 - automorfismi, 24
- Koebe algoritmi, 58, 68
- Koebe kuvaus, 27
 - rengasalueesta, 27
- kolmijako, 53
 - sisäkomponentti, 53
 - taitosraja, 53
 - ulkokomponentti, 53
 - ulkopuoli, 53
- konformikuvaus, 13
- konforminen ekvivalenssi, 14
- konforminen moduli, 15
- konforminen taitos
 - osittainen, 54
 - täydellinen, 53
- konforminen tiheys, 14
- konvekso verho, 61
- konveksikuori, 61
- Landénin muunnos, 52
 - nouseva, 47
- Laplacen yhtälö, 16
 - diskreetti muoto, 18
 - heikko muoto, 17
- lemniskaatta, 27
- liukulukujen pyöristysvirheet, 56
- logaritmi, 38
 - holomorfinen, 19, 66
 - kompleksinen, 19
 - päähaara, 19
- luonne
 - elliptisen integraalin, 44
- Möbius-kiekko, 53
 - reaalikeskeinen, 53
- Möbius-kuvaus, 20
 - derivaatta, 21
 - käänteiskuvaus, 21
- kaksivaiheinen, 67
- kaksoissuhde, 22
- kiekko ylempään puolitasoon, 23
- konforminen tiheys, 21
- konformisuus, 21
- sulkeuma, 20
- suorat, 22
- yhdiste, 21
- yksikkökiekon automorfismi, 24
- ylempi puolitaso kiekoksi, 23
- ympyränkaaret, 22
- Möbius-ympyrä, 53
- maksimaalinen piste, 66
- maksimiperiaate, 19
- minimaalinen piste, 66
- modulaarinen s , 67
- moduli
 - käänteinen, 52
 - kohdealueen, 56
 - nelikulmion, 15, 51, 68
 - iterointi, 50
 - ylemmän puolitason, 51
 - ympyrärenkaan, 15
- monikulmio, 65
- neliöjuuri, 38
 - holomorfinen, 20, 27, 58, 66
- nelikulmio
 - yleistetty, 9
- Newtonin menetelmä, 52
- ortonormaali kanta, 18
- oskulaatioalgoritmi, 54
- oskulaatioaskel, 54
- Parsevalin kaava, 19
- puolitaso
 - oikea, 53
 - vasen, 53
 - ylempi, 9
- reunaehto
 - Dirichlet'n, 16
 - Neumannin, 16
- Riemannin kuvauslause, 26
- sarja
 - Laurént, 13
 - potenssisarja, 12
- Satunnaiskulku
 - jatkuva, 31
- satunnaiskulku
 - diskreetti, 31

Schwarzin ja Christoffelin muunnos,
34

SC Toolbox, 37

areahyperbolinen tangentti, 38

arkussini, 38

kanava, 38

kasautuminen, 37

konformisuus, 34

logaritmi, 38

neliöjuuri, 38

parametriongelma, 37

rajoitteet, 36

yksikkökiekosta, 35

Schwarzin lemma, 19

sisätulo, 18

slit-algoritmi, 57

suorakaide

normitettu, 9

suurennuskerroin

pinta-alan suhteen, 14

pitouden suhteen, 14

Teichmüller

nelikulmio, 51

rengas, 51

standardipisteistö, 51

topologia, 7

vetoketjialgoritmi, 58

viiltoalgoritmi, 57

virtausprofili, 39

yhdesti yhtenäinen joukko, 7

yhtenäinen joukko, 7

yksikkökiekko, 65

pistejoukon pakottaminen, 66

ympyrärengas, 10

zipper-algoritmi, 58