

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

для втузов

3

Под редакцией А. В. Ефимова и А. С. Поспелова



Москва
Издательство
Физико-математической литературы
2002

ББК 22.1

С 23

УДК 51(075.8)

Коллектив авторов:

А. В. ЕФИМОВ, А. Ф. КАРАКУЛИН, А. С. ПОСПЕЛОВ,
С. В. ФРОЛОВ, В. В. ЛЕСИН

Сборник задач по математике для вузов. В 4 частях. Ч. 3: Учебное пособие для вузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — 4-е изд. перераб. и доп. — М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002.—576 с.—ISBN 5-94052-036-7 (Ч. 3).

Содержит задачи по специальным разделам математического анализа, которые в различных наборах и объемах изучаются в технических вузах и университетах. Сюда включены такие разделы, как векторный анализ, ряды и их применение, элементы теории функций комплексной переменной, операционное исчисление, интегральные уравнения, уравнения в частных производных, а также методы оптимизации. Краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения.

Для студентов высших технических учебных заведений.

Учебное издание

ЕФИМОВ Александр Васильевич, КАРАКУЛИН Анатолий Федорович,
ПОСПЕЛОВ Алексей Сергеевич, Фролов Сергей Васильевич,
ЛЕСИН Виктор Васильевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВУЗОВ

Часть 3

Редактор *Л. А. Панюшкина*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Компьютерная графика *М. Н. Грицук*

Компьютерный набор и верстка *Е. А. Митченко*

ИД № 01389 от 30.03.2000

Гигиеническое заключение № 77.99.02.953.Д.003724.07.01
от 05.07.2001

Подписано в печать 29.08.2002. Формат 60×88/16.

Печать офсетная с готовых диапозитивов.

Усл. печ. л. 36. Уч.-изд. л. 40,7. Тираж 7000 экз.

Заказ № 4086.

Издательство Физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных
диапозитивов на ГИПП «Вятка»

610033 г. Киров, ул. Московская, 122

ISBN 5-94052-036-7 (Ч. 3)

ISBN 5-94052-033-2

© Коллектив авторов, 2002

© Физматлит, оформление, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ТИТУЛЬНЫХ РЕДАКТОРОВ	7
ОТ АВТОРОВ	8
Глава 11. Векторный анализ	9
§ 1. Скалярные и векторные поля. Градиент	9
1. Геометрические характеристики скалярных и векторных по- лей. 2. Производная по направлению и градиент скалярного поля	
§ 2. Криволинейные и поверхностные интегралы	13
1. Криволинейный интеграл 1-го рода. 2. Поверхностный инте- грал 1-го рода. 3. Криволинейный интеграл 2-го рода. 4. По- верхностный интеграл 2-го рода	
§ 3. Соотношения между различными характеристиками ска- лярных и векторных полей	28
1. Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса- Остроградского. 2. Вихрь векторного поля. Теорема Стокса. 3. Оператор Гамильтона и его применение. 4. Дифференциаль- ные операции 2-го порядка	
§ 4. Специальные виды векторных полей	35
1. Потенциальное векторное поле. 2. Соленоидальное поле. 3. Лапласово (или гармоническое) поле	
§ 5. Применение криволинейных координат в векторном ана- лизе	41
1. Криволинейные координаты. Основные соотношения. 2. Дифференциальные операции векторного анализа в криволи- нейных координатах. 3. Центральные, осевые и осесимметри- ческие скалярные поля	
Глава 12. Ряды и их применение	47
§ 1. Числовые ряды	47
1. Сходимость ряда. Критерий Коши. 2. Абсолютная и условная сходимость. Признаки абсолютной сходимости. 3. Признаки условной сходимости	

§ 2. Функциональные ряды	61
1. Область сходимости функционального ряда. 2. Равномерная сходимость. 3. Свойства равномерно сходящихся рядов	
§ 3. Степенные ряды	68
1. Область сходимости и свойства степенных рядов. 2. Разложение функций в ряд Тейлора. 3. Теорема единственности. Аналитическое продолжение	
§ 4. Применение степенных рядов	80
1. Вычисление значений функций. 2. Интегрирование функций. 3. Нахождение сумм числовых рядов. Убыстрение сходимости. 4. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов. 5. Уравнение и функции Бесселя	
§ 5. Ряды Лорана	93
1. Ряды Лорана. Теорема Лорана. 2. Характер изолированных особых точек	
§ 6. Вычеты и их применение	100
1. Вычет функции и его вычисление. 2. Теоремы о вычетах и их применение к вычислению контурных интегралов. 3. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов. 4. Принцип аргумента	
§ 7. Ряды Фурье. Интеграл Фурье	111
1. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. 2. Двойные ряды Фурье. 3. Интеграл Фурье. 4. Спектральные характеристики ряда и интеграла Фурье. 5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)	
Г л а в а 13. Теория функций комплексной переменной	125
§ 1. Элементарные функции	125
1. Понятие функции комплексной переменной. 2. Основные элементарные функции комплексной переменной. 3. Предел и непрерывность функции комплексной переменной	
§ 2. Аналитические функции. Условия Коши-Римана	134
1. Производная. Аналитичность функции. 2. Свойства аналитических функций	
§ 3. Конформные отображения	140
1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. 2. Конформные отображения. Линейная и дробно-линейная функции. 3. Степенная функция. 4. Функция Жуковского. 5. Показательная функция. 6. Тригонометрические и гиперболические функции	
§ 4. Интеграл от функции комплексной переменной	152
1. Интеграл по кривой и его вычисление. 2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши	

Г л а в а 14. Операционное исчисление	163
§ 1. Преобразование Лапласа	163
1. Определение и свойства преобразования Лапласа. 2. Расширение класса оригиналов	
§ 2. Восстановление оригинала по изображению	172
1. Элементарный метод. 2. Формула обращения. Теоремы разложения	
§ 3. Применения операционного исчисления	179
1. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами. 2. Решение линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. 3. Интегрирование линейных уравнений в частных производных. 4. Вычисление несобственных интегралов. 5. Суммирование рядов. 6. Применение операционного исчисления при расчете электрических цепей	
§ 4. Дискретное преобразование Лапласа и его применение . .	198
1. Z-преобразование и дискретное преобразование Лапласа. 2. Решение разностных уравнений	
Г л а в а 15. Интегральные уравнения	210
§ 1. Интегральные уравнения Вольтерра	210
1. Уравнения Вольтерра 2-го рода: основные понятия, связь с дифференциальными уравнениями. 2. Метод последовательных приближений. Решение с помощью резольвенты. 3. Уравнения Вольтерра 2-го рода типа свертки. 4. Уравнения Вольтерра 1-го рода	
§ 2. Интегральные уравнения Фредгольма	232
1. Основные понятия. Метод последовательных приближений и резольвента для уравнений Фредгольма 2-го рода. 2. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. 3. Характеристические числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. 4. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром	
§ 3. Численные методы решения интегральных уравнений	259
Г л а в а 16. Уравнения в частных производных	267
§ 1. Основные задачи и уравнения математической физики .	267
1. Вывод уравнений и постановка задач математической физики. 2. Приведение уравнений к каноническому виду	
§ 2. Аналитические методы решения уравнений математической физики	275
1. Метод Даламбера. 2. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы. 3. Ортогональные ряды. 4. Метод Фурье решения уравнений математической физики	

§ 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных	301
1. Основные понятия метода сеток. 2. Численное решение краевых задач методом сеток	
Г л а в а 17. Методы оптимизации	323
§ 1. Численные методы минимизации функций одной переменной	323
1. Основные понятия. Прямые методы минимизации. 2. Методы минимизации, основанные на использовании производных функций	
§ 2. Безусловная минимизация функций многих переменных	340
1. Выпуклые множества и выпуклые функции. 2. Методы безусловной минимизации, основанные на вычислении первых производных функций. 3. Методы безусловной минимизации, использующие вторые производные функции	
§ 3. Линейное программирование	353
1. Постановки задач линейного программирования. Графический метод решения. 2. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования. 3. Целочисленное линейное программирование	
§ 4. Нелинейное программирование	386
1. Задачи, сводящиеся к линейному программированию. 2. Методы возможных направлений. 3. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования. 4. Методы штрафных и барьерных функций	
§ 5. Дискретное динамическое программирование	419
§ 6. Вариационное исчисление	435
1. Предварительные сведения. Простейшая задача вариационного исчисления. 2. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. 3. Задачи с подвижными границами. 4. Задачи на условный экстремум. 5. Прямые методы вариационного исчисления	
О Т В Е Т Ы И У К А З А Н И Я	467
С П И С О К Л И Т Е Р А Т У РЫ	575

ПРЕДИСЛОВИЕ ТИТУЛЬНЫХ РЕДАКТОРОВ

Настоящее издание «Сборника задач по математике для вузов» подверглось значительной перестановке глав и их распределению по томам. В результате первый том содержит алгебраические разделы курса высшей математики, в том числе векторную алгебру и аналитическую геометрию, определители и матрицы, системы линейных уравнений, линейную алгебру и новый раздел — общую алгебру.

Второй том полностью посвящен изложению основ математического анализа, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной и нескольких переменных, а также дифференциальному уравнениям.

В третьем томе собраны специальные разделы математического анализа, которые в различных наборах и объемах изучаются в технических вузах и университетах. Сюда относятся такие разделы, как векторный анализ, элементы теории функций комплексной переменной, ряды и их применение, операционное исчисление, методы оптимизации, уравнения в частных производных, а также интегральные уравнения.

Наконец, четвертый том содержит теоретические введения, типовые примеры и циклы задач по теории вероятностей и математической статистике.

Указанные выше изменения составляют лишь структурную переработку Сборника, никоим образом не затрагивая ни расположения материала внутри соответствующей главы, ни последовательности нумерации примеров и задач.

В смысловом отношении авторы внесли только следующие изменения. Во всех разделах Сборника исключены теоретические введения и циклы задач, связанные с численными методами. Дело в том, что в настоящее время существует целый ряд программных оболочек, каждая из которых реализует достаточно полный набор стандартных методов приближённого решения задач, а основные навыки работы с компьютером можно приобрести уже в школе. Авторы посчитали также необходимым добавить один новый раздел «Основы общей алгебры» и предложить цикл задач по тензорной алгебре в разделе «Линейная алгебра» в первый, «алгебраический» том Сборника. Это связано с тем, что круг идей и методов общей алгебры все глубже проникает в наукоемкие отрасли промышлен-

ности и, следовательно, становится необходимой частью образования и подготовки специалистов по инженерным специальностям.

Кроме отмеченного выше, авторами выполнена стандартная техническая работа по исправлению ошибок, описок и других неточностей, учтены также все замечания, возникавшие в процессе работы с предыдущими изданиями Сборника.

A. B. Ефимов, A. C. Поступов

ОТ АВТОРОВ

5 ноября 2001 года умер Александр Васильевич Ефимов — один из авторов и бессменный титульный редактор всех четырех изданий настоящего Сборника задач.

До последних дней своей жизни он продолжал активно работать над подготовкой рукописи настоящего издания к печати.

Авторский коллектив Сборника выражает глубокие соболезнования семье и близким Александра Васильевича.

Глава 11

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Скалярные и векторные поля. Градиент

1. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей.

Пусть D — область в пространстве двух, трех или n измерений. Говорят, что в области D задано **скалярное поле**, если в D задана скалярная функция точки $u(P) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(\mathbf{r})$, называемая функцией поля (\mathbf{r} — радиус-вектор точки $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$). Если каждой точке $P \in D$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, то говорят, что в области D задано **векторное поле**, определяемое векторной функцией $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{a}(\mathbf{r})$.

Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются **линии уровня** $u(x, y) = C$ в пространстве двух измерений, **поверхности уровня**, или **эквипотенциальные поверхности**, $u(x, y, z) = C$ в пространстве трех измерений и **гиперповерхности уровня** $u(x_1, \dots, x_n) = C$ в пространстве $n > 3$ измерений. Простейшими геометрическими характеристиками векторных полей являются **векторные линии** и **векторные трубы**. **Векторной линией** называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии для векторного поля $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

(аналогично для плоских и многомерных полей). **Векторной трубкой** называется поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не содержащей (даже частично) с какой-либо векторной линией.

Определить вид линий или поверхностей (гиперповерхностей) уровня следующих скалярных полей:

11.1. $u = y^2 + x.$

11.2. $u = xy.$

11.3. $u = y/x.$

11.4. $u = x + y + z.$

11.5. $u = x^2 + y^2 - z^2.$

11.6. $u = x^2 + y^2 - z.$

11.7. $u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$

11.8. $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$

Найти векторные линии следующих полей:

11.9. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$

11.10. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}.$

11.11. $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + \mathbf{j}.$

11.12. $\mathbf{a} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$

11.13. $\mathbf{a} = [\mathbf{r}, \mathbf{c}]$ (с — постоянный вектор).

« Пусть $\mathbf{c} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Тогда

$$\mathbf{a} = [\mathbf{r}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (cy - bz)\mathbf{i} + (az - cx)\mathbf{j} + (bx - ay)\mathbf{k}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий поля \mathbf{a} имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}.$$

Умножая числитель и знаменатель первой дроби на x , второй на y и третьей на z , находим

$$\frac{x dx}{cxy - bzx} = \frac{y dy}{ayz - cxy} = \frac{z dz}{bxz - ayz}.$$

Складывая почленно и используя свойство пропорции, окончательно выводим:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{x dx + y dy + z dz}{0}.$$

Следовательно,

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

или

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2.$$

Аналогично, умножая числитель и знаменатель первой дроби на a , второй на b , третьей на c и складывая почленно, находим

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} = \frac{a dx + b dy + c dz}{0}.$$

Следовательно,

$$a dx + b dy + c dz = 0,$$

или

$$ax + by + cz = C_2.$$

Таким образом, уравнения векторных линий имеют вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2 & (C_1 \geq 0), \\ ax + by + cz = C_2. \end{cases}$$

Векторные линии поля \mathbf{a} представляют собой окружности, являющиеся сечениями сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ плоскостями $ax + by + cz = C_2$, перпендикулярными вектору \mathbf{c} . »

$$11.14. \mathbf{a} = \frac{\mathbf{i}}{x} + \frac{\mathbf{j}}{y} + \frac{\mathbf{k}}{z}.$$

$$11.15. \mathbf{a} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}.$$

$$11.16. \mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_4\mathbf{e}_4.$$

11.17. Найти векторную линию поля $\mathbf{a} = -yi + xj + bk$, проходящую через точку $P(1, 0, 0)$.

11.18. Найти векторную линию поля $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, проходящую через точку $P(1/2, -1/2, 1)$.

11.19. Определить вид векторных трубок:

а) в задаче 11.12; б) в задаче 11.15.

2. Производная по направлению и градиент скалярного поля. Пусть $\mathbf{s} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$ — единичный вектор данного направления s , $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Производная скалярного поля $u(P)$ в точке P_0 по направлению s , обозначаемая через $\frac{\partial u}{\partial s}$, определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{r}_0 + \tau \mathbf{s}) - u(\mathbf{r}_0)}{\tau}$$

и характеризует скорость изменения функции $u(P)$ в направлении s .

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ вычисляется по формуле

$$\left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{=0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{=0} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{=0} \cos \gamma. \quad (1)$$

Градиентом скалярного поля $u(P)$, обозначаемым символом $\text{grad } u$, называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные функции $u(P)$, т. е.

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (2)$$

Аналогично определяется производная по направлению и градиент для n -мерных скалярных полей.

Исходя из выражения производной по направлению (1) и определения градиента (2), доказать следующие свойства градиента.

11.20. Производная поля по направлению s равна скалярному произведению градиента поля на единичный вектор данного направления, т. е. равна проекции градиента на данное направление

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\text{grad } u, \mathbf{s}) = |\text{grad } u| \cos \varphi,$$

где φ — угол между градиентом и вектором \mathbf{s} .

11.21. Направление градиента есть направление наибыстрейшего возрастания функции поля.

11.22. В каждой точке поля градиент направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня в сторону возрастания потенциала поля, т. е.

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial n},$$

где n — направление нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции поля.

11.23. Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ — дифференцируемые функции, c — постоянная. Доказать следующие соотношения:

а) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;

б) $\operatorname{grad}(c + u) = \operatorname{grad} u$;

в) $\operatorname{grad}(cu) = c\operatorname{grad} u$;

г) $\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v$ (см. пример 4 § 3);

д) $\operatorname{grad}(u^n) = nu^{n-1}\operatorname{grad} u$;

е) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v}{v^2}$, $v \neq 0$.

Найти градиенты следующих скалярных полей:

11.24. $u = |\mathbf{r}|$. **11.25.** $u = \ln|\mathbf{r}|$.

11.26. $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$; \mathbf{a} — постоянный вектор.

11.27. $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{b}, \mathbf{r})$; \mathbf{a}, \mathbf{b} — постоянные векторы.

10.28. $u = |[\mathbf{a}, \mathbf{r}]|^2$; \mathbf{a} — постоянный вектор:

Пусть $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Показать, что:

11.29. $(\operatorname{grad} u(r), \mathbf{r}) = u'(r)r$.

11.30. $[\operatorname{grad} u(r), \mathbf{r}] = 0$.

Найти производные от следующих полей в заданных точках по заданному направлению:

11.31. $u = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ в точке $P_0(2, -1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(6, 2)$.

11.32. $u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z$ в точке $P_0(2, 1, 1)$ по направлению прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.

11.33. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$ в точке $P_0(1, 3, 2, -1)$ по направлению вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_4$.

11.34. Найти производную скалярного поля $u = 1/|\mathbf{r}|$ по направлению его градиента.

11.35. Найти производную скалярного поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

в точке $P(a, b, c)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

11.36. Найти угол между градиентами поля $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $P_1(2, 3, -1)$ и $P_2(1, -1, 2)$.

11.37. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = xyz$ в точке $P_0(1, 2, 2)$.

11.38. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня поля $u = x^2 + 2xy - 4yz$ в точке $P_0(1, 1, -1)$, направленный в сторону возрастания поля.

11.39. Найти стационарные точки поля $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$.

Убедиться в ортогональности линий уровня полей:

11.40. $u = x^2 - y^2, v = xy$.

11.41. $u = 2x^2 + y^2, v = y^2/x$.

Убедиться в ортогональности поверхностей уровня следующих полей:

11.42. $u = x^2 + y^2 - z^2, v = xz + yz$.

11.43. $u = x^2 + y^2 - 2z^2, v = xyz$.

11.44. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, v = x_1x_3 + x_2x_4, w = x_1x_4 - x_2x_3$.

Найти семейство линий наибыстрейшего возрастания для следующих полей:

11.45. Плоского поля $u = x^2 - y^2$.

11.46. Трехмерного поля $u = xyz$.

11.47. Трехмерного поля $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Криволинейные и поверхностные интегралы

1. Криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть \overrightarrow{AB} — дуга кусочно гладкой кривой, $u(P)$ — заданное на \overrightarrow{AB} скалярное поле, $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ — произвольное разбиение дуги \overrightarrow{AB} и P_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — произвольные точки на частичных дугах $A_{\nu-1}A_\nu$, длины которых обозначим через Δs_ν . Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{\nu=1}^n u(P_\nu)\Delta s_\nu$ при $\max_\nu \Delta s_\nu \rightarrow 0$ (и $n \rightarrow \infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги \overrightarrow{AB} точками A_ν , ни от выбора точек P_ν на частичных дугах $A_{\nu-1}A_\nu$, то этот предел

называется *криволинейным интегралом 1-го рода* от функции $u(P)$ по кривой \overrightarrow{AB} и обозначается через

$$\int_{\overrightarrow{AB}} u(P) ds = \int_{\overrightarrow{AB}} u(x, y, z) ds$$

(ds — дифференциал дуги), т. е.

$$\int_{\overrightarrow{AB}} u(P) ds = \max_{\nu} \lim_{\Delta s_{\nu} \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n u(P_{\nu}) \Delta s_{\nu}. \quad (1)$$

Если функция $u(P)$ непрерывна на \overrightarrow{AB} , то интеграл (1) существует.

Физически интеграл (1) можно рассматривать как массу кривой \overrightarrow{AB} . Вычисление интеграла (1) сводится к вычислению определенного интеграла. Например, если уравнение дуги \overrightarrow{AB} задано в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, то

$$\int_{\overrightarrow{AB}} u(P) ds = \int_{t_0}^{t_1} u(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от того, в каком направлении проходится дуга \overrightarrow{AB} , иными словами,

$$\int_{\overrightarrow{AB}} u(P) ds = \int_{\overrightarrow{BA}} u(P) ds.$$

Пример 1. Определить массу M первого витка винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке пропорциональна длине радиус-вектора этой точки.

▷ Так как $\mu = kr = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то в точках винтовой линии $\mu = k\sqrt{a^2 + h^2 t^2}$. Первому витку отвечает изменение параметра t от 0 до 2π и

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{a^2 + h^2} dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{2\pi} k \sqrt{a^2 + h^2} \sqrt{a^2 + h^2 t^2} dt = \\
 &= k \sqrt{a^2 + h^2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{a^2 + h^2 t^2} + \frac{a^2}{2h} \ln (ht + \sqrt{a^2 + h^2 t^2}) \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
 &= k \sqrt{a^2 + h^2} \left(\pi \sqrt{a^2 + 4\pi^2 h^2} + \frac{a^2}{2h} \ln \frac{2\pi h + \sqrt{a^2 + 4\pi^2 h^2}}{a} \right). \quad \triangleright
 \end{aligned}$$

В задачах 11.48–11.54 вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

11.48. $\int_C (x + y) ds$, где C — контур треугольника ABO с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ и $O(0, 0)$.

11.49. $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где C — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$.

11.50. $\int_C xy ds$, где C — контур квадрата $|x| + |y| = a$ ($a > 0$).

11.51. $\int_C y^2 ds$, где C — первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

11.52. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где C — дуга развертки окружности $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

11.53. $\int_C \frac{y ds}{x + 3z}$, где C — дуга линии $x = t$, $y = t^2/\sqrt{2}$, $z = t^3/3$ от $O(0, 0, 0)$ до $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}/3)$.

11.54. $\int_C (x^2 + y^2) ds$, где C — дуга логарифмической спирали $r = ae^{3\varphi}$ от точки $A(a, 0)$ до точки $O(0, 0)$.

11.55. Найти массу всей астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке P выражается формулой $\mu(P) = k|xy|$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

11.56. Найти массу всей кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке P выражается формулой $\mu(P) = k\sqrt{r}$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

11.57. Найти массу всей лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке P выражается формулой $\mu(P) = kr$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

11.58. Найти массу дуги конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$, если плотность μ в каждой ее точке выражается формулой $\mu = ke^t$ (где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности), от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(a, 0, a)$.

11.59. Найти, с какой силой масса M , равномерно распределенная вдоль окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $z = c$, притягивает точечную массу m , помещенную в начале координат.

11.60. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = r^2$, расположенной в первом квадранте, если плотность ее в каждой точке пропорциональна абсциссе этой точки (коэффициент пропорциональности α).

11.61. Найти массу полуокружности $x^2 + y^2 = r^2$, расположенной в верхней полуплоскости, если плотность ее в каждой точке пропорциональна кубу ординаты этой точки (коэффициент пропорциональности β).

2. Поверхностный интеграл 1-го рода. Пусть G — кусочно гладкая поверхность, $u(P)$ — заданное на G скалярное поле, G_1, G_2, \dots, G_n — произвольное разбиение поверхности G на частичные поверхности, площади которых равны $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, и пусть P_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — произвольные точки на частичных поверхностях G_ν . Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{\nu=1}^n u(P_\nu) \Delta\sigma_\nu$ при $\max_\nu \text{diam } \sigma_\nu \rightarrow 0$ (и $n \rightarrow \infty$), который не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом 1-го рода* от функции $u(P)$ на поверхности G и обозначается через

$$\iint_G u(P) d\sigma = \iint_G u(x, y, z) d\sigma$$

($d\sigma$ — дифференциал площади поверхности), т. е.

$$\iint_G u(P) d\sigma = \max_{\nu} \operatorname{diam} \sigma_{\nu} \rightarrow 0 \sum_{\nu=1}^n u(P_{\nu}) \Delta \sigma_{\nu}. \quad (2)$$

Если $u(P)$ непрерывна на G , то интеграл (2) существует. Вычисление интеграла (2) сводится к вычислению обычного двойного интеграла. Допустим, что прямая, параллельная оси Oz , пересекает поверхность G лишь в одной точке, т. е. уравнение поверхности имеет вид $z = z(x, y)$, и пусть G проектируется на плоскость Oxy в область D . Элемент $d\sigma_1$ площади D выражается в виде $d\sigma_1 = d\sigma \cos \gamma$, где γ — острый угол, который нормаль к поверхности G составляет с осью Oz :

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \iint_G u(x, y, z) d\sigma &= \iint_D u(x, y, z(x, y)) \frac{d\sigma_1}{\cos \gamma} = \\ &= \iint_D u(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \end{aligned}$$

Если прямая, параллельная оси Oz , пересекает поверхность G в двух или более точках, то G разбивается на части, каждая из которых пересекается с прямой, параллельной оси Oz , лишь в одной точке. Интегрирование следует выполнять по каждой из полученных частей.

Вместо плоскости Oxy поверхность G можно проектировать на плоскости Oxz или Oyz .

Для двусторонних поверхностей поверхностный интеграл 1-го рода не зависит от того, по какой стороне поверхности он берется. Физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода зависит от физического характера данного скалярного поля: он может определять массу, распределенную по данной поверхности, электрический заряд и т. д.

Пример 2. Определить статический момент относительно плоскости Oxy и положение центра масс однородной полусфера G (плотность 1): $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($x \geq 0$).

Имеем

$$M_{xy} = \iint_G z d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

где D — круг $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z = 0$. Так как на полусфере $x dx + y dy + z dz = 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

откуда

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

и

$$M_{xy} = \iint_G z d\sigma = \iint_D R dx dy = R \iint_D dx dy = R \cdot \pi R^2 = \pi R^3.$$

Определим теперь координаты центра масс полусферы. В силу симметрии

$$x_0 = y_0 = 0.$$

Далее, так как площадь Q поверхности полусферы G есть $2\pi R^2$, то

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{Q} = \frac{R}{2}. \quad \triangleright$$

Пример 3. На всей поверхности конуса с высотой h и радиусом основания a распределены электрические заряды. В каждой точке поверхности плотность заряда пропорциональна аппликате этой точки ($e = kz$). Вершина конуса — в начале координат, его ось направлена по оси Oz . Определить суммарный заряд всей поверхности конуса.

Суммарный заряд основания конуса равен произведению его площади πa^2 на плотность точечного заряда, т.е. kh . Таким образом, $E_{\text{осн.}} = k\pi a^2 h$. Заряд боковой поверхности G определяется интегралом

$$E_{\text{бок.пов.}} = \iint_G kz d\sigma.$$

Уравнение поверхности конуса $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq h$. Дифференцируя, находим $z dz = \frac{h^2}{a^2}(x dx + y dy)$, откуда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h^2}{a^2} \frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h^2}{a^2} \frac{y}{z}$ и, следовательно,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{h^4}{a^4} \cdot \frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a}.$$

Поэтому

$$E_{\text{бок.пов}} = k \iint_G z \, d\sigma = \frac{kh}{a} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \, dx \, dy,$$

где D — круг $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$. Переходя к полярным координатам, получаем:

$$\begin{aligned} E_{\text{бок.пов}} &= \frac{kh\sqrt{a^2 + h^2}}{a^2} \iint_D r^2 \, dr \, d\varphi = \frac{kh\sqrt{a^2 + h^2}}{a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \, dr = \\ &= \frac{2}{3} k\pi ah \sqrt{a^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Находим весь заряд:

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{очн}} + E_{\text{бок.пов}} = k\pi a^2 h + \frac{2}{3} k\pi ah \sqrt{a^2 + h^2} = \\ &= \frac{k\pi ah}{3} (3a + 2\sqrt{a^2 + h^2}). \quad \triangleright \end{aligned}$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

11.62. $\iint_G x^2 yz \, d\sigma$, где G — часть плоскости $x + y + z = 1$,

лежащая в первом октанте.

11.63. $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} \, d\sigma$, где G — часть поверхности конуса

$$x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1.$$

11.64. $\iint_G (x^2 + y^2 + z^2) \, d\sigma$, где G — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

11.65. $\iint_G (x + y + z) \, d\sigma$, где G — часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

лежащая в первом октанте.

11.66. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az = x^2 - y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k|z|$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

11.67. Определить момент инерции однородной (плотности 1) боковой поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq a$) относительно оси Oz .

11.68. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2 + y^2 + a^2$ ($a \leq z \leq a\sqrt{2}$), если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки ($e = kz$).

11.69. Определить массу, распределенную по поверхности куба $|x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq a$, если поверхностная плотность в точке $P(x, y, z)$ равна $k\sqrt[3]{|xyz|}$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

11.70. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности параболоида $2az = x^2 + y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность заряда в каждой точке равна $k\sqrt{z}$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

3. Криволинейный интеграл 2-го рода. Пусть на дуге \tilde{AB} кусочно гладкой кривой задано векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$, пусть $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ — произвольное разбиение дуги \tilde{AB} на частичные дуги, P_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — произвольные точки на дугах $\tilde{A}_{\nu-1}A_\nu$, а $\Delta\mathbf{r}_\nu$ — приращение радиус-вектора $\mathbf{r}(P)$ на концах дуги $\tilde{A}_{\nu-1}A_\nu$. Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}(P_\nu), \Delta\mathbf{r}_\nu)$ при $\max_\nu |\Delta\mathbf{r}_\nu| \rightarrow 0$ (и $n \rightarrow \infty$), который не зависит, ни от способа разбиения дуги \tilde{AB} на частичные дуги, ни от выбора точек P_ν на этих частичных дугах, то этот предел называется *криволинейным интегралом 2-го рода* по дуге \tilde{AB} и обозначается через

$$\int_{\tilde{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{\tilde{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$
(3)

т. е.

$$\int_{\tilde{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \lim_{\max_\nu |\Delta\mathbf{r}_\nu| \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}(P_\nu), \Delta\mathbf{r}_\nu).$$

Здесь $(\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ и $(\mathbf{a}(P_\nu), \Delta\mathbf{r}_\nu)$ — скалярные произведения векторов. Если вектор-функция $\mathbf{a}(P)$ непрерывна на \tilde{AB} , то интеграл (3) существует.

Интеграл (3) называют также *линейным интегралом* вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Аналогично определяются линейные интегралы в плоских и многомерных векторных полях. Если даны параметрические уравнения дуги \tilde{AB} :

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, то

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) &= \int_{t_0}^{t_1} (a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \\ &\quad + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь t_0 и t_1 — значения параметра t , отвечающие точкам A и B . В отличие от криволинейных интегралов 1-го рода, линейные интегралы (3) зависят от направления, по которому совершается интегрирование вдоль дуги \overrightarrow{AB} :

$$\int_{\overleftarrow{BA}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = - \int_{\overrightarrow{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Простейший физический смысл линейного интеграла — работа силового поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ при перемещении в нем материальной точки по кривой \overrightarrow{AB} из точки A в точку B .

Пример 4. Найти работу силового поля $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ при перемещении материальной точки вдоль первого витка конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ из точки $A(0, 0, 0)$ в точку $B(a, 0, a)$.

Так как $dx = ae^t(\cos t - \sin t) dt$, $dy = ae^t(\sin t + \cos t) dt$, $dz = ae^t dt$ и

$$(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = x dx + y dy + z dz =$$

$$= a^2 e^{2t} ((\cos t - \sin t) \cos t + (\sin t + \cos t) \sin t + 1) dt = 2a^2 e^{2t} dt,$$

то, учитывая, что $t = -\infty$ в точке A и $t = 0$ в точке B , имеем

$$\int_{\overrightarrow{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = 2a^2 \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt = a^2. \quad \triangleright$$

Замечание. Этот пример можно решить проще, если учесть, что в данном случае $(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = (\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \frac{1}{2}d(r^2)$, причем $r = |\mathbf{r}| = 0$ в точке A и $r = a\sqrt{2}$ в точке B . Имеем:

$$\int_{\overrightarrow{AB}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_0^{a\sqrt{2}} d(r^2) = \frac{r^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{2}} = a^2.$$

Линейный интеграл вектора \mathbf{a} , взятый по замкнутому контуру C , называется *циркуляцией* вектора поля по данному контуру и обозначается символом $\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$. Направление обхода контура указывается заранее, причем положительным считается обход против часовой стрелки, а отрицательным — по часовой стрелке.

Для плоских векторных полей $\mathbf{a} = a_x(x, y)\mathbf{i} + a_y(x, y)\mathbf{j}$ имеет место следующее утверждение:

Если векторная функция $\mathbf{a} = a_x(x, y)\mathbf{i} + a_y(x, y)\mathbf{j}$ непрерывна вместе с производными $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ в замкнутой области $\bar{G} = G \cup C$, то

$$\iint_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C a_x dx + a_y dy$$

(формула Грина).

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy,$$

где C — окружность $x^2 + y^2 = r^2$.

▷ Применяя формулу Грина, можем записать

$$\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy = \iint_{K_C} (-1 - 1) dx dy = -2\pi r^2,$$

так как $\iint_{K_C} dx dy$ есть площадь круга K_C : $x^2 + y^2 \leq r^2$. ▷

11.71. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ из точки $A(a, 0)$ в точку $B(-a, 0)$.

11.72. Вычислить линейный интеграл $\int_{\overrightarrow{OB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$, если $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, $O(0, 0)$, $B(1, 1)$, по следующим путям:

а) отрезок прямой OB ; б) дуга параболы $x^2 = y$; в) дуга параболы $y^2 = x$; г) ломаная OAB , где $A(1, 0)$; д) ломаная OCB , где $C(0, 1)$.

11.73. Вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ вдоль окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ в отрицательном направлении.

11.74. Вычислить линейный интеграл $\int_{\overrightarrow{OA}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$, если $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, уравнение дуги \overrightarrow{OA} : $\mathbf{r} = ti + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

11.75. Вычислить линейный интеграл $\int_{\overrightarrow{OA}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$, если $\mathbf{a} = -yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, \overrightarrow{OA} — первый виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

11.76.** Вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ по окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = R$ в положительном направлении относительно орта \mathbf{k} .

11.77. Вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ вдоль эллипса $\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = a^2$, $y = x$ в положительном направлении относительно орта \mathbf{i} .

11.78. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ при перемещении материальной точки вдоль сечения гиперболоида $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $(a, a, 0)$ до точки $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

Используя формулу Грина, вычислить интегралы:

11.79. $\oint_C (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$, где C — контур, образованный полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и осью Ox .

11.80. $\oint_C (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$, где C — контур, образованный синусоидой $y = \sin x$ и отрезком оси Ox при $0 \leq x \leq \pi$.

11.81. $\oint_{x^2+y^2=r^2} x^2y dx - xy^2 dy$.

11.82. $\oint_C (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, где C — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

4. Поверхностный интеграл 2-го рода. Гладкая поверхность G в трехмерном пространстве называется *двусторонней*, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности G и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальное положение. Выбор определенной стороны поверхности, т. е. выбор направления нормали к поверхности, называется *ориентацией* поверхности.

Пусть G — кусочно гладкая ориентированная поверхность и $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$ — векторное поле. Разобьем поверхность G на частичные поверхности G_1, G_2, \dots, G_n , площади которых обозначим через $\Delta\sigma_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$), а площади частичных поверхностей G_ν , снабженных единичными нормалями $\mathbf{n}_\nu(P_\nu)$ в точках $P_\nu \in G_\nu$, — через $\Delta\sigma_\nu$ (т. е. считаем каждую такую площадь вектором длины $\Delta\sigma_\nu$ и направления $\mathbf{n}_\nu(P_\nu)$). Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}(P_\nu), \Delta\sigma_\nu)$ при $\max_\nu \text{diam } \sigma_\nu \rightarrow 0$ (и $n \rightarrow \infty$), который не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом 2-го рода* по поверхности G и обозначается через

$$\iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \iint_G a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy, \quad (5)$$

т. е.

$$\iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \lim_{\max_\nu \text{diam } \sigma_\nu \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}(P_\nu), \Delta\sigma_\nu).$$

Если поле $\mathbf{a}(P)$ непрерывно на G , то интеграл (5) существует.

Поверхностный интеграл 2-го рода называют также *потоком* векторного поля $\mathbf{a}(P)$ через поверхность G . Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающего за единицу времени в заданном направлении через поверхность G . Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности, а потому и знак поверхностного интеграла 2-го рода.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению поверхностного интеграла 1-го рода

$$\iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \iint_G (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iint_G (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) d\sigma, \quad (6)$$

где $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ — единичная нормаль к поверхности, или к

вычислению суммы трех линейных интегралов

$$\begin{aligned} \iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) &= \pm \iint_{D_1} a_x(x(y, z), y, z) dy dz \pm \\ &\pm \iint_{D_2} a_y(x, y(x, z), z) dx dz \pm \int_{D_3} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy, \end{aligned}$$

где D_1 , D_2 и D_3 — проекции G соответственно на плоскости Oyz , Oxz и Oxy , а $x(y, z)$, $y(x, z)$ и $z(x, y)$ — выражения, полученные из уравнения поверхности G разрешением относительно соответствующих координат.

Пример 6. Найти поток вектора $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

◀ Имеем в силу (6)

$$\iint_G (\mathbf{r}, d\sigma) = \iint_G (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) d\sigma.$$

Так как в первом октанте внешняя нормаль эллипсоида со всеми осями координат образует острые углы, то все три направляющих косинуса неотрицательны. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_G (\mathbf{r}, d\sigma) &= \iint_{D_1} x dy dz + \iint_{D_2} y dx dz + \iint_{D_3} z dx dy = \\ &= 3v = 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi abc = \frac{\pi abc}{2} \end{aligned}$$

(каждый из интегралов по D_1 , D_2 и D_3 определяет объем одной восьмой части эллипсоида). ▷

Пример 7. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3R^2$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ в направлении внешней нормали.

◀ Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) &= \iint_G (x^2 \cos \alpha - y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_G x^2 \cos \alpha d\sigma - \iint_G y^2 \cos \beta d\sigma + \iint_G z^2 \cos \gamma d\sigma. \end{aligned}$$

Заданная поверхность ограничена сверху сегментом сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$, с боков — частью поверхности гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$, снизу кругом $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z = 0$ (рис. 1). На плоскости Oyz и Oxz поверхность G проектируется дважды с разных сторон. Поэтому, в силу симметрии поверхности относительно этих плоскостей, а также учитывая знаки подынтегральной функции на каждой стороне, можем записать:

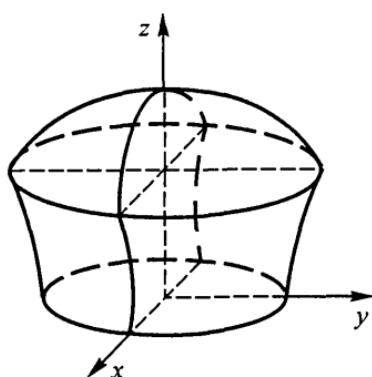


Рис. 1

$$\iint_G x^2 \cos \alpha d\sigma = \iint_G y^2 \cos \beta d\sigma = 0.$$

На плоскость Oxy сферический сегмент проектируется в круг (область D'_3) $x^2 + y^2 \leq 2R^2$, часть поверхности гиперболоида — в кольцо (область D''_3) $R^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2R^2$, а нижним основанием служит лежащий в этой плоскости круг (область D'''_3) $x^2 + y^2 \leq R^2$. Но для сегмента сферы $\cos \gamma > 0$, для гиперболоида $\cos \gamma < 0$, а на нижнем основании $z = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_G (\mathbf{a}, d\sigma) &= \int_G z^2 \cos \gamma d\sigma = \\ &= \int_{D'_3} (3R^2 - x^2 - y^2) dx dy - \int_{D''_3} (x^2 + y^2 - R^2) dx dy. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов перейдем к полярным координатам:

$$\iint_{D'_3} (3R^2 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sqrt{2}} (3R^2 - r^2) r dr = 4\pi R^4,$$

$$\iint_{D''_3} (x^2 + y^2 - R^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{R\sqrt{2}} (r^2 - R^2) r dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Таким образом, окончательно находим: $\iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \frac{7}{2}\pi R^4$. \triangleright

В задачах 11.83–11.86 вычислить поверхностные интегралы 2-го рода:

11.83. $\iint_G y \, dx \, dz$, где G — верхняя сторона части плоскости $x + y + z = a$, лежащей в первом октанте.

11.84. $\iint_G \frac{dx \, dy}{z}$, где G — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

11.85. $\iint_G x^2 \, dy \, dz$, где G — внешняя сторона части поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq H$.

11.86. $\iint_G z^2 \, dx \, dy$, где G — внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

11.87. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $\frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

11.88. Найти поток вектора $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ через часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq H$, в направлении внешней нормали.

11.89. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через часть поверхности параболоида $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) = z$, $z \leq H$, в направлении внутренней нормали.

11.90. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, в направлении внешней нормали.

11.91. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ через всю поверхность куба $|x| \leq a$, $|y| \leq a$, $|z| \leq a$ в направлении внешней нормали.

11.92. Найти поток вектора $\mathbf{a} = 2x^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ в направлении внешней нормали.

11.93. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, вырезаемую плоскостями $x = R$, $z = 0$, $x = 0$, ориентированной в соответствии с направлением орта \mathbf{k} .

11.94. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть

поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, вырезаемую цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, ориентированной в соответствии с направлением орта \mathbf{k} .

§ 3. Соотношения между различными характеристиками скалярных и векторных полей

1. Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса–Остроградского.

Дивергенцией (или расхождением) векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, обозначаемой через $\operatorname{div} \mathbf{a}$, называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность Σ_P к величине v_P объема тела, ограниченного этой поверхностью, при $v_P \rightarrow 0$, т. е. при условии, что поверхность стягивается в точку P :

$$(\operatorname{div} \mathbf{a})_P = \lim_{v_P \rightarrow 0} \frac{1}{v_P} \iint_{\Sigma_P} (\mathbf{a}, d\sigma). \quad (1)$$

Дивергенция характеризует отнесенную к единице объема мощность потока векторного поля, «исходящего» из точки P , т. е. мощность источника (при $(\operatorname{div} \mathbf{a})_P > 0$) или стока (при $(\operatorname{div} \mathbf{a})_P < 0$), находящегося в точке P .

В трехмерном евклидовом пространстве дивергенция непрерывно дифференцируемого поля выражается следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса–Остроградского. Поток векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ через замкнутую поверхность Σ , лежащую в этом поле, в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области V , ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля, т. е.

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, d\sigma) = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv.$$

Пример 1. Используя теорему Гаусса–Остроградского, найти поток вектора $\mathbf{a} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + R^2 z \mathbf{k}$ через всю поверхность G тела $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

Имеем $\operatorname{div} \mathbf{a} = 3(x^2 + y^2) + R^2$. Поэтому

$$\iint_G (\mathbf{a}, d\sigma) = \iiint_V (3(x^2 + y^2) + R^2) dv.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение поверхности примет вид $z = Hr^2/R^2$,

$$\begin{aligned} \iiint_V (3(x^2 + y^2) + R^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (3r^2 + R^2) r dr \int_{Hr^2/R^2}^H dz = \\ &= 2\pi \int_0^R (3r^2 + R^2) \left(H - \frac{Hr^2}{R^2} \right) r dr = \\ &= \frac{2\pi H}{R^2} \int_0^R (R^4 + 2R^2r^2 - 3r^4) r dr = \pi H R^4. \quad \triangleright \end{aligned}$$

11.95. Найти $\operatorname{div}(xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k})$.

11.96. Найти $\operatorname{div} \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$.

11.97. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{a} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ в точке $P(2, 2, -1)$.

11.98. Найти дивергенцию градиента скалярного поля $u = x^3y^2z$ в точке $P(1, -1, 1)$.

11.99. Магнитное поле, создаваемое электрическим током силы I , текущим по бесконечному проводу, определяется формулой $\mathbf{H}(P) = \mathbf{H}(x, y) = 2I \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{H}(P)$.

11.100. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, где \mathbf{c} — постоянный вектор.

11.101. Найти $\operatorname{div}(r[\mathbf{c}, \mathbf{r}])$, где \mathbf{c} — постоянный вектор.

Используя теорему Гаусса–Остроградского, решить следующие задачи:

11.102. Доказать, что поток радиус-вектора \mathbf{r} через любую кусочно гладкую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

11.103. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ через всю поверхность куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ в направлении внешней нормали.

11.104. Найти поток вектора $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r$ через всю поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в направлении внешней нормали.

11.105*. Найти поток вектора $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, направленный в отрицательную сторону оси Ox , через поверхность части параболоида $y^2 + z^2 = Rx$, отсекаемой плоскостью $x = R$.

11.106. Распространить понятие потока и дивергенции на случай плоского (двумерного) поля и сформулировать теорему Гаусса–Остроградского для этого случая.

11.107*. Используя решение предыдущей задачи, преобразовать циркуляцию вектора по замкнутому контуру L в плоском поле в двойной интеграл по площади, ограниченной этим контуром.

11.108. Найти с помощью теоремы Гаусса–Остроградского поток вектора $\mathbf{a} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ в направлении внешней нормали.

11.109. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + (x^2 + y^2)z\mathbf{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq H$ в направлении внешней нормали.

2. Вихрь векторного поля. Теорема Стокса. *Вихрем* векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, обозначаемым $\text{rot } \mathbf{a}$, называется вектор, который в каждой точке P дифференцируемости поля определяется следующим образом:

$$(\text{пр rot } \mathbf{a})_P = \lim_{\sigma_P \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_P} \oint_{l_P} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Здесь \mathbf{s} — единичный вектор произвольного направления, l_P — малый замкнутый контур, окружающий точку P , лежащий в плоскости, перпендикулярной к вектору \mathbf{s} и обходимый в положительном по отношению к вектору \mathbf{s} направлении, σ_P — площадь области, ограниченной контуром l_P ; предел ищется при условии, что контур l_P стягивается в точку P . В трехмерном пространстве $\text{rot } \mathbf{a}$ через декартовы прямоугольные координаты вектора $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ выражается следующим образом:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Теорема Стокса. Циркуляция дифференцируемого векторного поля \mathbf{a} по произвольному кусочно гладкому замкнутому контуру L равна потоку вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ через поверхность G , ограниченную этим контуром L :

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\text{rot } \mathbf{a}, d\sigma), \quad (2)$$

или в координатной форме

$$\oint_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \iint_G \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

При этом единичный вектор \mathbf{n} нормали к поверхности G направлен в такую сторону, чтобы обход контура L производился в положительном по отношению к \mathbf{n} направлении.

Пример 2. Проверить ответ задачи 11.76 при помощи теоремы Стокса.

◀ Так как $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, то $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. За поверхность G , ограниченную контуром L , примем сам круг, образованный сечением шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ плоскостью $x + y + z = R$. Центр круга $O'(R/3, R/3, R/3)$; его радиус $R_1 = R\sqrt{2/3}$. Единичный вектор нормали $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$. Так как $(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$, то находим

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \sqrt{3} \iint_G d\sigma = \sqrt{3}\pi R_1^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}. \triangleright$$

Пример 3. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $y = x$, в положительном направлении относительно орта \mathbf{i} . Ответ проверить при помощи теоремы Стокса.

◀ Параметрические уравнения заданного эллипса $x = R \cos t$, $y = R \cos t$, $z = R \sin t$. Для обхода в заданном направлении параметр t надо изменять от 0 до 2π . Следовательно,

$$\begin{aligned} \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) &= \oint_L y dx - 2z dy + x dz = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 2 \sin^2 t + \cos^2 t) dt = 3\pi R^2. \end{aligned}$$

Применим теорему Стокса. Имеем $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. За поверхность G , ограниченную контуром L , примем часть секущей плоскости, лежащей внутри эллипса. Единичный вектор нормали, направленный в нужную сторону, имеет вид $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$. Поэтому $(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ и

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a}, d\sigma) = \iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}} \iint_G d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}}\pi ab.$$

Но так как эллипс имеет полуоси $a = R\sqrt{2}$ и $b = R$, то

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 3\pi R^2. \triangleright$$

11.110. Найти $\operatorname{rot} xyz(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

11.111. Найти $\operatorname{rot} (P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j})$.

11.112. Показать, что магнитное поле $\mathbf{H}(P)$ (см. задачу 11.99) в области своего определения является безвихревым.

11.113. Найти ротор поля $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, если $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

11.114. Найти $\operatorname{rot} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$.

11.115*. Жидкая среда вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ вокруг оси, проходящей через начало координат. Найти вихрь поля скоростей этой среды.

11.116. Вывести формулу Грина (см. ответ к задаче 11.107), применяя теорему Стокса к двумерному векторному полю $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$.

11.117. Пользуясь формулой Грина, убедиться в том, что площадь Q плоской области D , ограниченной кусочно гладким контуром L , можно найти при помощи любого из трех следующих интегралов: $Q = \oint_L x dy = - \oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$.

11.118. Используя последнюю формулу предыдущей задачи, найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

а)* петлей Декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

б) эволютой эллипса $x = \frac{a^2}{c} \cos^3 t, y = \frac{b^2}{c} \sin^3 t$ (a и b — полуоси эллипса, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

11.119. При помощи теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y + z = R$ в положительном направлении относительно орта \mathbf{k} .

11.120. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = z^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$ по сечению гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y = 0$ в положительном направлении относительно орта \mathbf{i} . Проверить при помощи теоремы Стокса.

11.121. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2 + y^2 = Rz$ плоскостями $x = 0, y = 0, z = R$ в положительном

направлении относительно внешней нормали параболоида. Проверить при помощи теоремы Стокса.

3. Оператор Гамильтона и его применение. Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона — символьического вектора ∇ (читается — набла), определяемого равенством

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя известные операции умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного произведения двух векторов, находим:

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u; \quad \frac{\partial u}{\partial s} = (\mathbf{s}, \operatorname{grad} u) = (\mathbf{s}, \nabla u) = (\mathbf{s}, \nabla)u;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\nabla, \mathbf{a});$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla, \mathbf{a}]. \end{aligned}$$

По аналогии с производной по направлению от скалярной функции $\frac{\partial u}{\partial s}$ вводится понятие производной по направлению единичного вектора \mathbf{s} от векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Именно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} &= (\mathbf{s}, \nabla) \mathbf{a} = (\mathbf{s}, \operatorname{grad} a_x) \mathbf{i} + (\mathbf{s}, \operatorname{grad} a_y) \mathbf{j} + (\mathbf{s}, \operatorname{grad} a_z) \mathbf{k} = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial a_y}{\partial s} \mathbf{j} + \frac{\partial a_z}{\partial s} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Производные по направлению произвольного (не единичного) вектора \mathbf{c} отличаются от производных по направлению единичного вектора только тем, что в них входит дополнительный скалярный множитель $|\mathbf{c}|$:

$$(\mathbf{c}, \nabla)u = (\mathbf{c}, \operatorname{grad} u),$$

$$(\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a} = (\mathbf{c}, \operatorname{grad} a_x) \mathbf{i} + (\mathbf{c}, \operatorname{grad} a_y) \mathbf{j} + (\mathbf{c}, \operatorname{grad} a_z) \mathbf{k}.$$

С помощью оператора Гамильтона удобно выполнять дифференциальные операции векторного анализа над сложными выражениями (произведение двух или более скалярных функций, произведение скалярной функции на вектор, скалярное и векторное произведения векторов и т. п.).

Следует лишь помнить, что это оператор дифференцирования произведения.

Пример 4. Найти градиент произведения двух скалярных функций u и v .

◀ Имеем

$$\text{grad}(uv) = \nabla(uv) = \nabla(\overset{\downarrow}{uv}) + \nabla(\overset{\downarrow}{uv})$$

(стрелка указывает функцию, на которую «действует» оператор). Но

$$\nabla(\overset{\downarrow}{uv}) = v\nabla u = v \text{ grad } u,$$

$$\nabla(\overset{\downarrow}{uv}) = u\nabla v = u \text{ grad } v.$$

Таким образом, $\text{grad } uv = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v$. ▷

Пример 5. Найти $\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, где \mathbf{c} — постоянный вектор.

◀ Так как по известной формуле векторной алгебры $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}$, то, учитывая соотношение $[\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{c}}]] = 0$, имеем:

$$\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] = [\nabla, \overset{\downarrow}{[\mathbf{a}, \mathbf{c}]})] + [\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{c}}]] = (\nabla, \mathbf{c}) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} - (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}})\mathbf{c}.$$

Но $(\nabla, \mathbf{c}) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} = (\mathbf{c}, \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}$, а это есть производная вектора \mathbf{a} по направлению вектора \mathbf{c} . Далее, $(\nabla, \mathbf{a})\mathbf{c} = \mathbf{c}(\nabla, \mathbf{a}) = \mathbf{c} \text{ div } \mathbf{a}$.

Таким образом, $\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{c} \text{ div } \mathbf{a}$. ▷

Выполнить следующие дифференциальные операции (\mathbf{c} — постоянный, а и \mathbf{b} — переменные векторы):

11.122. Найти $\text{div}(\mathbf{c}\mathbf{u})$ и $\text{div}(\mathbf{a}\mathbf{u})$.

11.123.** Найти $\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ и $\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

11.124. Найти $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ и $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

11.125*. Найти $\text{rot}(\mathbf{c}\mathbf{u})$, $\text{rot}(\mathbf{a}\mathbf{u})$ и $\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

4. Дифференциальные операции 2-го порядка. Можно образовать пять дифференциальных операций 2-го порядка:

1) $\text{div grad } u = (\nabla, \nabla)u = \nabla^2 u = \Delta u$ (лапласиан функции);

2) $\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla]u$;

3) $\text{grad div } \mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a})$;

4) $\text{div rot } \mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}])$;

5) $\text{rot rot } \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]]$.

Кроме того, операцию ∇^2 можно применять и к векторным полям, т.е. рассматривать операцию $\nabla^2 \mathbf{a}$.

Вторая и четвертая операции приводят к нулю:

$$\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla]u \equiv 0, \quad \text{div rot } \mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) \equiv 0.$$

Это следует из векторного смысла оператора ∇ : в первом случае формально мы имеем векторное произведение двух коллинеарных векторов, а во втором — смешанное произведение компланарных векторов.

11.126. Получить выражения для

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u,$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}),$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]],$$

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla^2 a_x \mathbf{i} + \nabla^2 a_y \mathbf{j} + \nabla^2 a_z \mathbf{k}$$

через производные скалярного или векторного полей.

11.127. Найти $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$.

11.128. Найти $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = xy^2 \mathbf{i} + yz^2 \mathbf{j} + zx^2 \mathbf{k}$.

11.129. Найти $\nabla^2 \mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)x \mathbf{i} + (x^2 + z^2)y \mathbf{j} + (x^2 + y^2)z \mathbf{k}$.

11.130. Найти $\operatorname{div} \operatorname{grad} (uv)$.

11.131. Найти $\operatorname{grad} \operatorname{div} (u\mathbf{c})$ и $\operatorname{grad} \operatorname{div} (u\mathbf{a})$ (\mathbf{c} — постоянный, \mathbf{a} — переменный вектор).

11.132. Найти $\operatorname{rot} \operatorname{rot} (u\mathbf{c})$.

§ 4. Специальные виды векторных полей

1. Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *потенциальным*, если вектор поля \mathbf{a} является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(P)$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} u(P). \quad (1)$$

Функцию $u(P)$ в этом случае называют *потенциалом* векторного поля. Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ является равенство нулю вихря этого поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0. \quad (2)$$

Пример 1. Проверить, что вихрь трехмерного векторного поля $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$ тождественно равен нулю (функцию $u(P)$ предполагаем дважды дифференцируемой).

◀ Так как $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$, то, учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \mathbf{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \mathbf{k} \equiv 0. ▷$$

В п. 4 предыдущего параграфа это равенство было получено с использованием свойств символьического вектора набла.

Потенциальное поле обладает следующими свойствами.

1. В области непрерывности потенциала поля линейный интеграл от вектора поля, взятый между двумя точками поля, не зависит от пути интегрирования и равен разности значений потенциала поля в конце и начале пути интегрирования

$$\int_A^B (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_A^B (\operatorname{grad} u, d\mathbf{r}) = \int_A^B du = u(B) - u(A) \quad (3)$$

(использована легко проверяемая формула $(\operatorname{grad} u, d\mathbf{r}) = du$).

2. Циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области непрерывности поля, равна нулю.

3. Если поле \mathbf{a} потенциально, то потенциал поля $u(P)$ в произвольной точке P может быть вычислен по формуле (3):

$$u(P) = \int_A^P (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + C, \quad (4)$$

причем $C = u(A)$, что легко получается подстановкой в (4) вместо переменной точки P фиксированной точки A .

Для вычисления интеграла (4) можно выбрать любой путь — проще всего в качестве такого пути выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат, соединяющую точки A и P . За точку A удобно принимать начало координат (если оно лежит в области непрерывности поля).

Пример 2. Найти потенциал поля $\mathbf{a} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$.
 \triangleleft Убедимся, что поле потенциально:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z} = -2y, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} = 2x.$$

Следовательно, $\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$.

За путь интегрирования примем ломаную $OABP$, где $O(0, 0, 0)$, $A(X, 0, 0)$, $B(X, Y, 0)$, $P(X, Y, Z)$. Находим:

$$u(X, Y, Z) = \int_{OABP} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + C = \int_0^A (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_A^B (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_B^P (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + C,$$

$$(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 2xy dx + (x^2 - 2yz)dy - y^2 dz.$$

Так как на $[OA]$ имеем $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, $0 \leq x \leq X$, то

$$\int_0^A (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0.$$

Аналогично, на $[AB]$ имеем $x = X$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, $0 \leq y \leq Y$, поэтому

$$\int_A^B (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_0^Y X^2 dy = X^2 Y.$$

На $[BP]$ имеем $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, $0 \leq z \leq Z$, значит,

$$\int_B^P (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = - \int_0^Z Y^2 dz = -Y^2 Z.$$

Таким образом, $u(X, Y, Z) = X^2 Y - Y^2 Z + C$. Возвращаясь к переменным x, y, z , получаем

$$u(P) = x^2 y - y^2 z + C. \quad \triangleright$$

Замечание. Изложенный метод отыскания потенциала поля применяется при решении таких эквивалентных рассмотренной задачи математического анализа, как восстановление функции двух, трех и n переменных по их полным дифференциалам, а также при интегрировании дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

Найти потенциалы следующих плоских и трехмерных полей:

11.133. $\mathbf{a} = (3x^2y - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - 3xy^2)\mathbf{j}$.

11.134. $\mathbf{a} = \frac{\sin 2x \cos 2y \cdot \mathbf{i} + \cos 2x \sin 2y \cdot \mathbf{j}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}$.

11.135. $\mathbf{a} = (yz - xy)\mathbf{i} + \left(xz - \frac{x^2}{2} + yz^2\right)\mathbf{j} + (xy + y^2z)\mathbf{k}$.

11.136*. $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\mathbf{k}$.

11.137*. $\mathbf{a} = \left(\frac{z}{y^2} - \frac{y}{z^2} - \frac{2yz}{x^3}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{z}{x^2} - \frac{x}{z^2} - \frac{2xz}{y^3}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} + \frac{2xy}{z^3}\right)\mathbf{k}$.

11.138*. Доказать, что во всюду непрерывном потенциальном векторном поле векторные линии не могут быть замкнутыми.

Если в плоском потенциальном поле есть точки, в которых поле теряет свойство непрерывности (так называемые *особые точки*), то циркуляция по замкнутому контуру, окружающему такую точку, может быть отлична от нуля. В этом случае циркуляция по контуру, обходящему данную особую точку один раз в положительном направлении, не зависит от формы контура и называется *циклической постоянной* относительно данной особой точки.

Аналогичными свойствами обладают трехмерные поля с особыми линиями, вдоль которых поле теряет свойство непрерывности.

11.139. Убедиться в потенциальности поля $\mathbf{a} = \frac{x\mathbf{j} - y\mathbf{i}}{x^2 + y^2}$. Определить его особую точку и ее циклическую постоянную.

11.140*. Доказать сформулированное выше свойство о том, что циркуляция по замкнутому контуру, окружающему особую точку, не зависит от формы контура.

11.141*. Воспользовавшись формулой (4) для определения потенциала поля, убедиться в том, что потенциал плоского поля, имеющего особые точки, будет многозначной функцией.

2. Соленоидальное поле. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *соленоидальным*, если дивергенция этого поля равна нулю: $\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv 0$.

Для трехмерного поля это условие можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv 0. \quad (5)$$

В таком поле в силу теоремы Гаусса–Остроградского равен нулю поток вектора поля через любую замкнутую поверхность. Исключение может быть только в случае наличия в таком поле особых точек (в которых вектор поля не определен и дивергенция поля, если ее определять в такой точке при помощи формулы (1) § 3, отлична от нуля). В этом случае поток через замкнутую поверхность может быть отличен от нуля, но будет иметь одно и то же значение для всех замкнутых поверхностей, окружающих данную группу особых точек.

Пример 3. Доказать, что для любого дважды дифференцируемого трехмерного векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ поле вихрей соленоидально.

▫ Имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \equiv 0. \quad \triangleright$$

В п. 4 предыдущего параграфа это соотношение доказано с помощью оператора набла.

11.142. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек, равен нулю.

Проверить соленоидальность следующих полей:

11.143. $\mathbf{a} = (x^2y + y^3)\mathbf{i} + (x^3 - xy^2)\mathbf{j}$.

11.144. $\mathbf{a} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - (x^2 + y^2)z\mathbf{k}$.

11.145. $\mathbf{a} = \frac{x}{yz}\mathbf{i} + \frac{y}{xz}\mathbf{j} - \frac{(x+y)\ln z}{xy}\mathbf{k}$.

11.146. $\mathbf{a} = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{(x^2 - y^2)z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

11.147*. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора поля через поперечное сечение любой векторной трубы (определенный в одном и том же направлении) сохраняет постоянное значение.

3. Лапласово (или гармоническое) поле. Векторное поле называется *лапласовым* (или *гармоническим*), если оно одновременно и потенциальное, и соленоидальное, т. е. если

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0 \text{ и } \operatorname{div} \mathbf{a} \equiv 0. \quad (6)$$

Пример 4. Доказать, что потенциал u двумерного или трехмерного лапласова поля является *гармонической функцией* двух или трех переменных (т. е. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ или $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$).

Действительно, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

для двух переменных,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

для трех переменных.

Пример 5. Показать, что потенциал поля сил тяготения, возникающего в пространстве, окружающем некоторую точечную массу, равен k/r ($k > 0$ — коэффициент пропорциональности) и что поле сил тяготения лапласово.

◁ Поместим начало координат в центре притяжения. Тогда

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \frac{k}{r} = k \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -k \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3}.$$

Но это — вектор силы притяжения. Действительно, он направлен к центру притяжения, поскольку $-\mathbf{r}/r$ — единичный вектор радиус-вектора точки $P(\mathbf{r})$, направленный к началу координат, а его модуль равен k/r^2 , т.е. обратно пропорционален квадрату расстояния от центра притяжения. Покажем, что $\operatorname{div} \mathbf{a} = -k \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$. Имеем:

$$a_x = -\frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = -k \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -k \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{r^5}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = -k \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -k \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^5},$$

и потому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = -\frac{k}{r^5} ((y^2 + z^2 - 2x^2) + (x^2 + z^2 - 2y^2) + (x^2 + y^2 - 2z^2)) \equiv 0.$$

Итак, поле сил тяготения лапласово. ▷

11.148. Доказать, что плоское векторное поле, потенциалом которого служит функция $u = \ln r$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$), лапласово.

11.149*. Для гармонических в области G функций u и w доказать следующие формулы Грина:

$$a) \iint_S u \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma = \iiint_G (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w) dv$$

(первая формула Грина),

$$b) \iint_S \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0$$

(вторая формула Грина),

$$\text{в)} \iint_S \frac{\partial(uw)}{\partial n} d\sigma = 2 \iiint_G (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} w) dv$$

(третья формула Грина).

Являются ли гармоническими следующие функции:

$$11.150. u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$11.151. u = r - x = \sqrt{x^2 + y^2} - x.$$

$$11.152. u = Ax + By + C.$$

$$11.153. u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

$$11.154. u = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3.$$

$$11.155. u = Ax + By + Cz + D.$$

$$11.156. u = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

$$11.157. u = a_{111}x^3 + a_{222}y^3 + a_{333}z^3 + 3a_{112}x^2y + 3a_{113}x^2z + \\ + 3a_{122}xy^2 + 3a_{223}y^2z + 3a_{133}xz^2 + 3a_{233}yz^2 + 6a_{123}xyz.$$

§ 5. Применение криволинейных координат в векторном анализе

1. Криволинейные координаты. Основные соотношения. В пространстве задана система координат, если каждой точке P поставлена в соответствие тройка чисел q_1, q_2, q_3 , причем различным тройкам чисел отвечают различные точки пространства. Числа q_1, q_2, q_3 называют *координатами* (или *криволинейными координатами*) точки $P = P(q_1, q_2, q_3)$. Наиболее употребительными являются следующие системы координат:

1) Декартова прямоугольная система координат. Здесь $q_1 = x$ — абсцисса точки P , $q_2 = y$ — ордината и $q_3 = z$ — аппликата.

2) Цилиндрическая система координат. Здесь за q_1 принимается расстояние r от точки P до оси z , $q_1 = r$ ($0 \leq r < +\infty$), $q_2 = \varphi$ — угол, составленный проекцией радиус-вектора \vec{OP} на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox ($0 \leq \varphi < 2\pi$), а $q_3 = z$ — аппликата точки P .

При этом цилиндрические координаты связаны с декартовыми прямоугольными координатами при помощи формул

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

3) Сферическая система координат. Здесь $q_1 = r$ — длина радиус-вектора точки P ($0 \leq r < +\infty$), $q_2 = \theta$ — угол между положительным направлением оси Oz и радиус-вектором \vec{OP} точки P ($0 \leq \theta \leq \pi$)¹⁾,

¹⁾ Иногда за координату q_2 сферической системы принимают угол между радиус-вектором \vec{OP} и плоскостью Oxy (см. Часть 2, гл. 9, § 2).

$q_3 = \varphi$ — угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиус-вектора \overrightarrow{OP} на плоскость Oxy ($0 \leq \varphi < 2\pi$). Имеют место формулы:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Линия, вдоль которой изменяется только одна координата q_1 , называется *координатной q_1 -линией*, а единичный касательный вектор к этой линии, направленный в сторону возрастания, q_1 — *единичным координатным ортом* \mathbf{e}_{q_1} в точке $P(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$. Аналогично определяются q_2 - и q_3 -линии и единичные орты $\mathbf{e}_{q_2}, \mathbf{e}_{q_3}$.

Если векторы $\mathbf{e}_{q_1}, \mathbf{e}_{q_2}, \mathbf{e}_{q_3}$ попарно ортогональны в любой точке пространства, то соответствующая система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 называется *ортогональной*.

Пусть $P(q_1, q_2, q_3)$ — произвольная точка пространства, $P(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$ — точка, лежащая на q_1 -линии точки P , и $|\overrightarrow{PP_1}|$ — длина дуги PP_1 . Тогда число

$$L_1 = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{PP_1}|}{\Delta q_1}$$

называется *коэффициентом Ламе* координаты q_1 в точке P . Аналогично определяются коэффициенты Ламе L_2 и L_3 координат q_2 и q_3 .

Если точка $P(x, y, z)$ имеет криволинейные координаты $q_1 = q_1(x, y, z), q_2 = q_2(x, y, z), q_3 = q_3(x, y, z)$, то дифференциалы радиус-векторов $d\mathbf{r}_{q_\nu}$ координатных линий и дифференциалы их дуг ds_{q_ν} определяются с помощью равенств

$$d\mathbf{r}_{q_\nu} = i \frac{\partial x}{\partial q_\nu} dq_\nu + j \frac{\partial y}{\partial q_\nu} dq_\nu + k \frac{\partial z}{\partial q_\nu} dq_\nu = L_\nu \mathbf{e}_{q_\nu} dq_\nu,$$

$$ds_{q_\nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\right)^2} dq_\nu = L_\nu dq_\nu$$

($\nu = 1, 2, 3$), где L_ν — коэффициенты Ламе.

Множество точек $P(q_1, q_2, q_3)$, для которых одна из координат постоянна, называется *координатной поверхностью*.

Дифференциалы площадей координатных поверхностей определяются по формулам

$$d\sigma_{q_1} = L_2 L_3 dq_2 dq_3, \quad d\sigma_{q_2} = L_1 L_3 dq_1 dq_3, \quad d\sigma_{q_3} = L_1 L_2 dq_1 dq_2,$$

а дифференциал объема

$$dv = L_1 L_2 L_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Найти вид координатных линий и координатных поверхностей и построить их в произвольной точке для следующих случаев:

11.158. Для декартовой прямоугольной системы координат.

11.159. Для цилиндрической системы координат.

11.160. Для сферической системы координат.

Вычислить коэффициенты Ламе:

11.161. В декартовой прямоугольной системе координат.

11.162. В цилиндрической системе координат.

11.163. В сферической системе координат.

Найти дифференциалы дуг координатных линий, дифференциалы площадей координатных поверхностей и дифференциал объема:

11.164. В декартовой прямоугольной системе координат.

11.165. В цилиндрической системе координат.

11.166. В сферической системе координат.

2. Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах. Указанные операции определяются следующими формулами:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{L_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{e}_{q_1} + \frac{1}{L_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{e}_{q_2} + \frac{1}{L_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{e}_{q_3},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (L_2 L_3 a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (L_1 L_3 a_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (L_1 L_2 a_{q_3}) \right)$$

(здесь $\mathbf{a} = a_{q_1} \mathbf{e}_{q_1} + a_{q_2} \mathbf{e}_{q_2} + a_{q_3} \mathbf{e}_{q_3}$),

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} = & \frac{1}{L_2 L_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (L_3 a_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3} (L_2 a_{q_2}) \right) \mathbf{e}_{q_1} + \frac{1}{L_1 L_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (L_1 a_{q_1}) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial q_1} (L_3 a_{q_3}) \right) \mathbf{e}_{q_2} + \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (L_2 a_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (L_1 a_{q_1}) \right) \mathbf{e}_{q_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u = \nabla^2 u = & \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{L_2 L_3}{L_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{L_1 L_3}{L_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{L_1 L_2}{L_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right). \end{aligned}$$

Для цилиндрических координат r , φ и z найти выражения:

11.167. $\operatorname{grad} u$. **11.168.** Δu .

11.169. $\operatorname{div} \mathbf{a}$. **11.170.** $\operatorname{rot} \mathbf{a}$.

Для сферических координат r, θ, φ найти выражения:

11.171. grad u . **11.172.** Δu .

11.173. div \mathbf{a} . **11.174.** rot \mathbf{a} .

Пример 1. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\mathbf{a} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и найти div \mathbf{a} и rot \mathbf{a} .

▷ Так как в данном случае $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{r}$, то

$$\mathbf{a} = \frac{r\mathbf{e}_r - z\mathbf{e}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

По формулам, полученным при решении задач 11.169 и 11.170, находим:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{a} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{2r(r^2 + z^2) - r^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - r \frac{(r^2 + z^2) - z^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{2z^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z = -\frac{2rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\varphi. \quad \triangleright \end{aligned}$$

11.175. Вывести формулы:

$$\text{a) div } \mathbf{e}_\nu = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \frac{\partial(L_j L_k)}{\partial q_\nu}; \quad \text{б) rot } \mathbf{e}_\nu = \frac{1}{L_\nu} [\text{grad } L_\nu, \mathbf{e}_\nu].$$

11.176. Используя формулы, выведенные при решении задачи 11.175, найти div \mathbf{a} и rot \mathbf{a} для единичных координатных векторов цилиндрической системы координат:

а) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_r$; б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\varphi$; в) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z$.

11.177. Решить задачу, аналогичную 11.176, для сферической системы координат:

а) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_r$; б) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\theta$; в) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\varphi$.

11.178. Найти все гармонические функции вида:

а) $u = f(r)$; б) $u = f(\varphi)$; в) $u = f(z)$

(r, φ, z — цилиндрические координаты).

11.179. Найти все гармонические функции вида:

а) $u = f(r)$; б) $u = f(\theta)$; в) $u = f(\varphi)$

(r, θ, φ — сферические координаты).

11.180. Перейти к сферическим координатам в выражении скалярного поля $u = \frac{2xy(z^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ и найти u , $\operatorname{grad} u$ и $\nabla^2 u$.

11.181. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении скалярного поля $u = \frac{2xyz + (x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и найти u , $\operatorname{grad} u$ и $\nabla^2 u$.

11.182. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля $\mathbf{a} = \frac{x\mathbf{j} - y\mathbf{i}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и найти \mathbf{a} , $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$.

11.183. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - z\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$ и найти \mathbf{a} , $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$.

3. Центральные, осевые и осесимметрические скалярные поля. Скалярное поле называется *центральным*, если функция поля $u = u(P)$ зависит только от расстояния точки P поля от некоторой постоянной точки — его центра. Если начало координат поместить в центр поля, то функция u примет вид

$$u = u(r) = u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться сферическими координатами. Поверхностями уровня такого поля будут сферы с центром в центре поля, и потому эти поля часто называют *сферическими*.

Скалярное поле называют *осевым*, если функция поля $u(P)$ зависит только от расстояния точки поля P от некоторой оси. Если принять эту ось за ось Oz и обозначить расстояние от точки P до нее через r , то функция u примет вид

$$u = u(r) = u(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться цилиндрическими координатами. Поверхностями уровня таких полей являются круговые цилиндры, оси которых совпадают с осью поля. Эти поля называют также *цилиндрическими*.

Если функция $u(P)$ скалярного поля принимает одни и те же значения в соответствующих точках всех полуплоскостей, проходящих через одну и ту же прямую (ось поля), то такое поле называют *осесимметрическим*. Поверхности уровня такого поля — поверхности вращения, оси которых совпадают с осью поля. Если ось поля принять за ось Oz , то при исследовании таких полей целесообразно пользоваться либо сферическими, либо цилиндрическими координатами. Функцию $u = u(P)$ можно в этом случае представить либо в виде

$$u = u(r, \theta)$$

(в сферических координатах), либо в виде

$$u = u(r, z)$$

(в цилиндрических координатах).

Замечание. Градиенты центральных, осевых и осесимметрических полей образуют векторные поля того же характера — центральные, осевые и осесимметрические.

Найти градиенты и лапласианы следующих полей:

11.184. $u = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

11.185. $u = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$

11.186. $u = F(r, \theta) \quad (r, \theta — \text{сферические координаты}).$

11.187. $u = F(r, z) \quad (r, z — \text{цилиндрические координаты}).$

Глава 12

Ряды и их применение

§ 1. Числовые ряды

1. Сходимость ряда. Критерий Коши. Выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (1)$$

где $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — заданная числовая действительная или комплексная последовательность, называется *числовым рядом*. Конечные суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots \quad (2)$$

называются *частичными суммами* ряда (1).

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм (2) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда* (1).

Критерий Коши. Для того чтобы числовой ряд (1) был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ и $p = 1, 2, \dots$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Необходимый признак сходимости. Если ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Пример 1. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится, и найти его сумму.

✧ Так как дробь $\frac{1}{x(x+1)}$ представима в виде

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

то частичную сумму ряда можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

т. е. заданный ряд сходится и его сумма равна 1. \triangleright

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ и в случае сходимости найти его сумму.

◁ Имеем

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}.$$

Если $q = 1$, то $S_n = n$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, и, следовательно, ряд расходится. Пусть теперь $q \neq 1$, тогда

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Положим $q = re^{i\varphi}$, тогда $q^n = r^n e^{in\varphi}$. При $0 < r < 1$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n e^{in\varphi} = 0,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1 - q} = 0$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$. Если же $r > 1$, то $r^n \rightarrow \infty$ и, следовательно, конечного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1 - q}$, а значит, и предела последовательности частичных сумм не существует. Наконец, при $r = 1$ и $\varphi \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{in\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

(а потому и предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$) также не существует.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, члены которого составляют бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем q , сходится при $|q| < 1$ и его сумма равна $\frac{1}{1 - q}$ и расходится при $|q| \geq 1$. \triangleright

Пример 3. Доказать, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится, хотя его члены стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

« Рассмотрим разность частичных сумм с номерами $2n$ и n . Имеем

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Заменяя каждое слагаемое меньшей величиной $1/2n$, получаем

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Это неравенство означает, что при $p = n$ для гармонического ряда не выполняется критерий Коши и, следовательно, ряд расходится. ▷

Показать, что следующие ряды сходятся, и найти их суммы:

$$12.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \quad 12.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 9}.$$

$$12.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}. \quad 12.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-1)}.$$

$$12.5*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{3^n}. \quad 12.6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}.$$

Используя критерий Коши или необходимый признак сходимости ряда, установить расходимость следующих рядов:

$$12.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}. \quad 12.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}.$$

$$12.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n. \quad 12.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{10}}.$$

$$12.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n2^n}. \quad 12.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+in}.$$

12.13. Доказать, что если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится.

12.14. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы соответственно u и v , то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, причем его сумма равна $u+v$. Привести пример, когда обратное утверждение не имеет места.

12.15. Доказать, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость этого ряда (но влияет на сумму!).

2. Абсолютная и условная сходимость. Признаки абсолютной сходимости. Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей членов этого ряда, т. е. сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \quad (3)$$

Если ряд (1) сходится, а ряд (3) расходится, то ряд (1) называется *условно сходящимся*.

Признаки сравнения рядов. Если члены ряда (1) для всех $n > N_0$ ($N \geq 1$) удовлетворяют условию $|u_n| \leq b_n$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд (1) сходится абсолютно. Если же для $n > N_1$ члены ряда (1) удовлетворяют условию $0 < c_n \leq |u_n|$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится, то ряд (3) расходится, т. е. ряд (1) не сходится абсолютно.

Пример 4. Зная, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится (см. пример 1), установить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

▷ Так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, то, учитывая неравенства

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

по признаку сравнения убеждаемся в сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ▷

На практике более эффективным оказывается следующий

Пределочный признак сравнения. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится

абсолютно и существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = q < +\infty$, то ряд (1) также сходится абсолютно. Если же члены рядов u_n и v_n — действительные положительные числа и

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 2}{n^4 + 5n}. \quad (4)$$

◀ Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 4) и так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2}{n^4 + 5n} : \frac{1}{n^2} = 3 \neq 0,$$

то ряд (4) также сходится. ▷

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 5}{3n^2 - 2n}. \quad (5)$$

◀ Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 5}{3n^2 - 2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{3},$$

а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (см. пример 3), то и ряд (5) расходится. ▷

Признак Даламбера. Если члены ряда (1) таковы, что существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l,$$

то при $0 \leq l < 1$ ряд (1) сходится абсолютно, при $l > 1$ — расходится, а при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}. \quad (6)$$

▷ Имеем $u_n = \frac{n^3}{2^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 2^n}{2^{n+1} n^3} = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким образом, ряд (6) сходится. ▷

Признак Коши. Пусть $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$. Тогда если $0 \leq l < 1$, то ряд (1) сходится абсолютно, если $l > 1$, ряд (1) расходится, а при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2n-1}.$$

▷ Имеем $u_n = \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2n-1}$, поэтому

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2-\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится. ▷

При использовании признака Коши бывает полезна следующая формула Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

◀ Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \right)^{1/n} = \\ &= \frac{2}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}} = \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

т. е. ряд сходится. ▷

Интегральный признак Коши. Пусть функция $f(x)$ положительна и монотонна при $x \geq 1$, и пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $f(n) = |u_n|$. Тогда числовой ряд (3) сходится (т. е. ряд (1) сходится абсолютно) или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad a \geq 1.$$

Пример 10. Выяснить, при каких значениях параметра p сходится ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

◀ Так как функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши, то исследование сходимости ряда Дирихле сводится к исследованию сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Но

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty & \text{при } p = 1, \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty & \text{при } 0 < p < 1, \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)b^{p-1}} \right) = \frac{1}{p-1} & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что ряд Дирихле сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. ▷

12.16. Доказать, что всякий абсолютно сходящийся ряд является рядом сходящимся.

12.17. Доказать, что члены сходящегося ряда можно группировать, не меняя их порядка, произвольным образом.

12.18. Доказать, что члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять произвольным образом; при этом сумма ряда не изменится.

Используя признак сравнения или предельный признак сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$12.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

$$12.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

$$12.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}.$$

$$12.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}.$$

$$12.23. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$12.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}.$$

$$12.25. \sum_{n=3}^{\infty} n^2 \operatorname{tg}^6 \frac{\pi}{n}.$$

$$12.26. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}.$$

$$12.27. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

$$12.28. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

$$12.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)3^n}.$$

$$12.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n} + i \sin \sqrt{n}}{n^2}.$$

Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$12.31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}.$$

$$12.32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

$$12.33. \frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{1 \cdot 4 \dots (3n-2)} + \dots$$

$$12.34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}.$$

$$12.35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{8^n n^2}.$$

$$12.36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}.$$

$$12.37. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}.$$

$$12.38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{3^n}.$$

$$12.39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}.$$

Используя признак Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$12.40. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n.$$

$$12.41. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$12.42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$12.43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$12.44. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{4n-3} \right)^{2n}.$$

$$12.45. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n.$$

$$12.46. \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ где } u_{2k-1} = \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k, u_{2k} = \left(\frac{k}{3k-1} \right)^{k/2}.$$

$$12.47. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3} \right)^n. \quad 12.48. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i(2n+i)}{4n} \right)^n.$$

Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$12.49. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

$$12.50. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}.$$

$$12.51. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

$$12.52. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}.$$

Исследовать на сходимость ряды:

$$12.53. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2.$$

$$12.54. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

$$12.55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

$$12.56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

$$12.57. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

$$12.58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

$$12.59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}.$$

$$12.60. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$12.61. 100 + \frac{100 \cdot 103}{1 \cdot 5} + \dots + \frac{100 \cdot 103 \dots (97 + 3n)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n - 3)} + \dots$$

$$12.62. 1 + \frac{1 \cdot 11}{3!} + \frac{1 \cdot 11 \cdot 21}{5!} + \dots + \frac{1 \cdot 11 \cdot 21 \dots (10n - 9)}{(2n - 1)!} + \dots$$

$$12.63. \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n - 3)}{(4n - 2)!!} + \dots$$

$$12.64. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^{3/4}}. \quad 12.65. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}.$$

$$12.66. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^{2/5}} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^{2/5}} \right) \right).$$

$$12.67. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

$$12.68. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n^2}.$$

$$12.69. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

$$12.70. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}.$$

$$12.71. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

$$12.72^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}.$$

$$12.73. 2 + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)} + \dots$$

$$12.74. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}.$$

$$12.75. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

$$12.76. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+3} \right)^n.$$

$$12.77. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n.$$

$$12.78. \frac{1}{100} + \frac{1 \cdot 4}{100 \cdot 102} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{100 \cdot 102 \cdot 104} + \dots +$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{100 \cdot 102 \dots (98+2n)} + \dots$$

$$12.79. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1}.$$

$$12.80. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n} - \sqrt[3]{n})}.$$

$$12.81. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}.$$

$$12.82. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n+1)(2\sqrt{n}-1)}.$$

$$12.83. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}.$$

$$12.84. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n n}{2^n}.$$

$$12.85. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n \cdot n}{2^n}.$$

$$12.86. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}.$$

12.87. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^\alpha}$ при различных действительных значениях p и α .

12.88. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^\alpha (\ln \ln n)^\beta}$ при различных действительных значениях p , α и β .

12.89. Убедиться в том, что признак Даламбера неприменим к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_{2k-1} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$, $u_{2k} = \frac{2^k}{3^k}$, тогда как признак Коши показывает, что этот ряд сходится.

3. Признаки условной сходимости. Признак Лейбница. Пусть члены a_n знакочередующегося ряда

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots \quad (7)$$

действительны, монотонно убывают, т. е.

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots, \quad (8)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (9)$$

Тогда ряд (7) сходится, причем для его суммы S имеет место оценка $S < a_1$.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

« Так как $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то выполнены условия (8) и (9), и данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ сходится условно. »

Признак Абеля – Дирихле. Пусть члены последовательности (b_n) монотонно убывают: $b_1 > b_2 > \dots > b_n > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, а частичные суммы $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n = 1, 2, \dots$, ограничены в совокупности, т.е.

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq M \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

« Очевидно, что в точках $x = m\pi$ все члены ряда равны нулю, т.е. при $x = m\pi$ ряд сходится и его сумма равна нулю. Пусть теперь $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Подсчитаем сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin kx &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(k - \frac{1}{2} \right)x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right)x \right) = \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что для любых $n = 1, 2, \dots$ и $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{2}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

Далее, последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ монотонно убывает и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Таким образом, при $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ выполнены условия признака Абеля–Дирихле, и потому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ сходится. Следовательно, ряд сходится при любом x . \triangleright

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

- $$12.90. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}. \quad 12.91. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$
- $$12.92. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}. \quad 12.93. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n.$$
- $$12.94. \frac{1}{3} - \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} + \dots$$
- $$12.95. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}. \quad 12.96. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}.$$
- $$12.97. \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^3}. \quad 12.98. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$
- $$12.99. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n}. \quad 12.100. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}.$$
- $$12.101. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}. \quad 12.102. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n^2}}{n!}.$$
- $$12.103. \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}.$$
- $$12.104. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}. \quad 12.105*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n}.$$
- $$12.106. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}. \quad 12.107. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-i}{2}\right)^n.$$
- $$12.108. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+i}{3}\right)^n. \quad 12.109. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in\pi}{2^n}.$$

Убедиться в том, что к рядам $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с указанными ниже членами ($k \in \mathbb{N}$) нельзя применить признак Лейбница. Исследовать эти ряды на сходимость другими способами.

$$12.110^*. u_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+1}, \quad u_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}.$$

$$12.111. u_{2k-1} = \frac{1}{3k+2}, \quad u_{2k} = -\frac{1}{3k-1}.$$

$$12.112. u_{2k-1} = \frac{1}{3^k}, \quad u_{2k} = -\frac{1}{2^k}.$$

$$12.113. u_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}, \quad u_{2k} = -\frac{1}{k^2}.$$

12.114*. Доказать, что из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$

следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Произведением по Коши рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, члены которого получены по формулам

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Исследовать на сходимость произведение по Коши следующих рядов:

$$12.115^{**}. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \quad 12.116^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

$$12.117^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad 12.118^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

12.119. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, а

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то произведение по Коши сходится.

Пусть $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — произвольная числовая последовательность, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ — частичные суммы сходящегося ряда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, а $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ — остаток этого ряда. Проверить справедливость соотношений (называемых преобразованиями Абеля):

$$12.120. \sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) S_k - v_1 S_0 + v_n S_n.$$

$$12.121. \sum_{k=m+1}^n u_k v_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (v_k - v_{k+1})(S_k - S_m) + v_n(S_n - S_m).$$

$$12.122. \sum_{k=m+1}^n u_k v_k = \sum_{k=m+2}^n (v_k - v_{k-1}) R_{k-1} + v_{m+1} R_m - v_n R_n.$$

12.123. Доказать, что для остатка R_n знакочередующегося ряда (7), удовлетворяющего условиям признака Лейбница, справедливо неравенство $|R_n| < a_{n+1}$.

§ 2. Функциональные ряды

1. Область сходимости функционального ряда. Пусть функции $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, определены в области D . Выражение

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

называется *функциональным рядом*. Если для $z_0 \in D$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ сходится, то говорим, что функциональный ряд (1) *сходится в точке* z_0 .

Если в каждой точке $z \in D_1 \subset D$ числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходятся, то ряд (1) называется *сходящимся в области* D_1 .

Критерий Коши. Для того чтобы функциональный ряд (1) был сходящимся в области D_1 , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $z \in D_1$ существовало $N = N(\varepsilon, z)$ такое, что

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

для всех $n > N(\varepsilon, z)$ и $p \in \mathbb{N}$.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда (1) следует воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши. Именно, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = l(z)$$

или

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = l(z),$$

то для определения области абсолютной сходимости ряда (1) следует решить функциональное неравенство $l(z) < 1$, а для определения области расходимости — функциональное неравенство $l(z) > 1$. При этом для изучения поведения ряда в граничных точках получаемой области, т.е. в точках, описываемых уравнением $l(z) = 1$, требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > -2.$$

▷ Так как $|f_n(x)| = \frac{1}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}$ и $x > -2$, то, применяя признак Коши, имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3(x+2)^{1/2} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Следовательно, ряд сходится, если $\frac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$, т.е. при $x > -\frac{17}{9}$.

При $x = -\frac{17}{9}$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости ряда — полуинтервал $[-17/9, +\infty)$. ▷

Найти области сходимости рядов ($x \in \mathbb{R}$). Исследовать ряды на абсолютную сходимость.

12.124. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}.$

12.125. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \sqrt{n}}.$

12.126. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$

12.127. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x+3)^n}.$

$$12.128. \sum_{n=1}^{\infty} n^x.$$

$$12.129. \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{n 2^n x^n} \right).$$

$$12.130. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}.$$

$$12.131. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

$$12.132. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}.$$

$$12.133. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}.$$

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}, z \in \mathbb{C}.$$

◀ Применяя признак Даламбера, можем записать неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(z-i)^n}{(z-i)^{n+1} n} \right| = \frac{1}{|z-i|} < 1,$$

откуда заключаем, что ряд сходится абсолютно вне круга радиуса 1 с центром в точке i , т.е. при $|z-i| > 1$. На окружности $|z-i| = 1$ ряд, очевидно, расходится. ▶

Найти области абсолютной сходимости рядов ($z \in \mathbb{C}$):

$$12.134. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}.$$

$$12.135. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n}.$$

$$12.136. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^n}{(z-3i)^{2n}}.$$

$$12.137. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz}.$$

$$12.138. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nz^2}.$$

$$12.139. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{nz}.$$

$$12.140^*. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}.$$

$$12.141^*. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n.$$

$$12.142^*. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2}{1-2z} \right)^n.$$

$$12.143^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}.$$

2. Равномерная сходимость. Сходящийся в области D_1 функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* в этой области, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что для остатка ряда (1)

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$$

при всех $n > N(\varepsilon)$ и $z \in D_1$ имеет место оценка

$$|R_n(z)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости. Для того чтобы функциональный ряд (1) был равномерно сходящимся в области D_1 , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $z \in D_1$ выполнялись неравенства

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \quad p = 1, 2, \dots$$

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z^n - z^{n+1}),$$

сумму ряда и показать, что во всей области сходимости ряд сходится неравномерно.

▫ Так как частичные суммы ряда имеют вид

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n (z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1},$$

то можем заключить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$ существует только при $|z| < 1$ и в точке $z = 1$, т. е. областью сходимости ряда является область

$$D_1 = \{z \mid |z| < 1\text{ и }z = 1\},$$

причем сумма ряда равна

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |z| < 1, \\ 0 & \text{при } z = 1. \end{cases}$$

Остаток ряда $R_n(z) = S(z) - S_n(z)$ имеет вид

$$R_n(z) = \begin{cases} z^{n+1} & \text{при } |z| < 1, \\ 0 & \text{при } z = 1. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $N(\varepsilon_0)$ такие, что для любого $n > N(\varepsilon_0)$ найдется z_n такое, что $|z_n| < 1$, но $|R_n(z_n)| > \varepsilon_0$. Так, например, выбирая $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ и $z_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}} e^{i\varphi_n}$, φ_n — произвольно, имеем $|R_n(z_n)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. Это означает, что во всей области сходимости D_1 равномерной сходимости нет. Заметим, однако, что в любой области

$D_r = \{z \mid |z| \leq r < 1\}$ ряд будет сходиться равномерно, так как для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln r}$ такое, что для всех $z \in D_r$ и $n > N(\varepsilon)$ имеем $|R_n(z)| = |z|^{n+1} \leq r^{n+1} < \varepsilon$. \triangleright

Признак Вейерштрасса. Пусть функциональный ряд (1) сходится в области D_1 , и пусть существует сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что для всех $z \in D_1$ и для $n > N_0$ члены ряда (1) удовлетворяют условию

$$|f_n(z)| \leq a_n.$$

Тогда ряд (1) сходится абсолютно и равномерно в области D_1 .

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорирующим* для ряда (1).

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ и показать, что

в этой области ряд сходится равномерно.

« Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1} n^2}{(n+1)^2 z^n} \right| = |z|.$$

Следовательно, в круге $|z| < 1$ ряд сходится. На границе круга, т. е. при $|z| = 1$, получаем сходящийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Значит, исходный ряд сходится в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Но так как для всех $|z| \leq 1$

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

то ряд сходится абсолютно и равномерно. \triangleright

Найти область сходимости и область равномерной сходимости указанных рядов ($x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$):

$$12.144. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}.$$

$$12.145. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}.$$

$$12.146. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

$$12.147. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

$$12.148. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}.$$

$$12.149. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n^2}.$$

$$12.150. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}.$$

$$12.151. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+2)^n}.$$

12.152*. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, сходится абсолютно во всех точках, но не равномерно в любом промежутке, внутри или на границе которого находится точка $x = 0$.

12.153. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, сходится

абсолютно и равномерно на всей числовой оси, тогда как ряд из абсолютных величин членов данного ряда (ряд задачи 12.152) на всей числовой оси сходится неравномерно.

12.154. Используя принцип максимума модуля аналитической функции, доказать, что если члены ряда (1) являются аналитическими в области D функциями и непрерывными в замкнутой области $\bar{D} = D + \Gamma$ и если ряд (1) сходится равномерно на Γ , то он сходится равномерно в замкнутой области \bar{D} (вторая теорема Вейерштрасса).

12.155. Найти область сходимости и область равномерной сходимости, а также сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n+1}} \right).$$

3. Свойства равномерно сходящихся рядов. Сформулируем ряд свойств в виде задач.

12.156. Доказать, что если члены равномерно сходящегося в области D_1 функционального ряда (1) умножить на одну и ту же ограниченную в области D_1 функцию $\varphi(z)$, то равномерная сходимость ряда не нарушится.

12.157. Доказать, что если функции $f_n(z)$ непрерывны в области D_1 и ряд (1) равномерно сходится в этой области, то его сумма $f(z)$ непрерывна в области D_1 .

12.158. Доказать, что если функции $f_n(z)$ непрерывны в области D_1 и ряд (1) равномерно сходится в этой области, то его можно почленно интегрировать по любой кривой l , целиком лежащей в

области D_1 , т. е. имеет место равенство

$$\int_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \right) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(\eta) d\eta.$$

12.159*. Доказать, что если на отрезке $[a, b]$ функции $f_n(x)$ дифференцируемы, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ равномерно сходится, то исходный ряд можно почленно дифференцировать, т. е. имеет место равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Для равномерно сходящихся рядов из аналитических функций имеет место

Теорема Вейерштрасса. Если члены функционального ряда (1), т. е. функции $f_n(z)$, являются аналитическими в области D функциями и в любой замкнутой подобласти $\bar{D}_1 \subset D$ ряд (1) сходится равномерно, то:

а) сумма ряда (1), т. е. функция $f(z)$, является аналитической в области D ;

б) ряд (1) можно почленно дифференцировать любое число раз, т. е. справедливы равенства

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad k = 1, 2, \dots, \quad z \in D; \quad (2)$$

в) в любой замкнутой подобласти $\bar{D}_1 \subset D$ полученные в результате дифференцирования ряды (2) сходятся равномерно.

12.160. Используя утверждение задач 12.157, 12.158 и теорему Морера (теорема, обратная теореме Коши), доказать утверждение а) теоремы Вейерштрасса.

12.161. Воспользовавшись формулой Коши для производной и утверждением задачи 12.158, доказать утверждение б) теоремы Вейерштрасса.

§ 3. Степенные ряды

1. Область сходимости и свойства степенных рядов. Ряд

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (1)$$

называется *степенным* по степеням $z - z_0$. В частности, ряд

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n \quad (2)$$

является степенным по степеням z . С помощью замены $z - z_0 = Z$ ряд (1) сводится к ряду (2).

Теорема Абеля. Если степенной ряд (2) сходится в точке $z = z_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех z таких, что $|z| < |z_1|$, причем сходимость будет равномерной в любом замкнутом круге $|z| \leq r < |z_1|$. Если же ряд (2) расходится в точке $z = z_2$, то он расходится и для всех z таких, что $|z| > |z_2|$.

Из теоремы Абеля следует, что областью сходимости степенного ряда является круг с центром в начале координат (с центром в точке z_0), радиус которого может быть определен применением либо признака Даламбера, либо признака Коши, т. е. из условий

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$$

или

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1.$$

Отсюда для вычисления радиуса R круга сходимости получаем соотношения

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{(z+2)^2}{1 \cdot 3} + \frac{(z+2)^4}{4 \cdot 3^2} + \dots + \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 3^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n}.$$

▷ Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{(z+2)^{2(n+1)}}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+2)^{2(n+1)} n^2 \cdot 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1} (z+2)^{2n}} \right| = \frac{|z+2|^2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|z+2|^2}{3}.$$

Отсюда заключаем, что ряд сходится в круге $|z+2| < \sqrt{3}$. Далее на границе круга, т. е. при $|z+2| = \sqrt{3}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

а это означает, что ряд абсолютно сходится в замкнутом круге $|z+2| \leq \sqrt{3}$, причем сходимость в этом замкнутом круге равномерная. ▷

12.162. Сформулировать теорему Абеля для ряда (1).

12.163*. Установить, что степенной ряд (1) обладает следующими свойствами:

а) в круге сходимости $|z - z_0| < R$ сумма степенного ряда $f(z)$ является функцией аналитической;

б) в круге сходимости $|z - z_0| < R$ степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, причем продифференцированные ряды имеют тот же самый круг сходимости;

в) ряд (1) можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в круге сходимости, причем интеграл зависит только от начала и конца кривой интегрирования, а ряд, полученный из ряда (1) в результате интегрирования от z_0 до z , имеет тот же круг сходимости $|z - z_0| < R$.

12.164*. Пусть степенной ряд (1) сходится в круге $|z - z_0| < R$, $R > 0$, и $f(z)$ — сумма этого ряда. Показать, что значения производных $f^{(n)}(z)$ в точке z_0 можно выразить через коэффициенты ряда (1) по формулам $f^{(n)}(z_0) = n! c_n$, $n = 0, 1, \dots$

Найти область абсолютной сходимости и области равномерной сходимости следующих рядов ($z \in \mathbb{C}$). Заменяя в этих рядах (кроме 12.179, 12.181, 12.187–12.189) z на $x \in \mathbb{R}$, исследовать их на абсолютную и равномерную сходимость.

$$12.165. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

$$12.166. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n \cdot 2^n \sqrt{2n+1}}.$$

$$12.167. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+2)^{2n}}{n}.$$

$$12.168. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1} (z-4)^n}{(n+1) \sqrt{\ln(n+1)}}.$$

$$12.169. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(z-2)^{2n}}{n}. \quad 12.170. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^{2n}}{(2n+1)^{3n}}.$$

$$12.171. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}. \quad 12.172. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n z^n.$$

$$12.173. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(z+1)^n}{(3n-2)2^n}. \quad 12.174. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{(2n)!}.$$

$$12.175. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^n. \quad 12.176. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n z^n}{3n-2}.$$

$$12.177. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)z^n}{n!}.$$

$$12.178. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n+1} 2^n(z-1)^n.$$

$$12.179. \sum_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^n. \quad 12.180. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n(2n+1)}.$$

$$12.181. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^n}. \quad 12.182. \sum_{n=1}^{\infty} (3n+1)(z-1)^n.$$

$$12.183. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-3)^n}{(2n+1)4^n}. \quad 12.184. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{n!}.$$

$$12.185. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n2^n \cdot \ln n}. \quad 12.186. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{3n-1}}{8^{n+1} n \ln^3 n}.$$

$$12.187. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^{2n}}{(n+1)^{2n}}. \quad 12.188. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5(z+i)^{2n+1}}{n!}.$$

$$12.189. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}. \quad 12.190. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n! z^{2n}}{(2n)!}.$$

$$12.191. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n+1} (z-1)^n. \quad 12.192. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

$$12.193. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n(z-3)^{2n-1}}{n(n+1)}. \quad 12.194. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{n\sqrt{n}}.$$

$$12.195. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n}}{n 2^n \ln^2 n}.$$

$$12.196. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1} (z+3)^n.$$

$$12.197. \sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n!}.$$

$$12.198. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (z-5)^n}{(3n+1)^{10}}.$$

$$12.199. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n! 2^n}.$$

$$12.200. \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} z^{n^2}.$$

$$12.201. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^{n^n}}{n^n}.$$

$$12.202. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^{3n}}{n^2}.$$

2. Разложение функций в ряд Тейлора. Имеет место следующая Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0| < R$, однозначно представима в этом круге своим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого определяются по формулам¹⁾

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta-z_0|=r} \frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}} d\eta, \quad n = 0, 1, \dots$$

Следствие. Если функция $f(z)$ аналитична в области D и $z_0 \in D$, то в круге $|z-z_0| < R(z_0, D)$, где $R(z_0, D)$ — наименьшее расстояние от точки z_0 до границы области D или до ближайшей точки z' , в которой $f(z)$ не аналитична, $f(z)$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad (3)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta-z_0|=r} \frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}} d\eta, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если $z_0 = 0$, то ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*.

¹⁾ Здесь и далее для записи криволинейных интегралов по замкнутому контуру (контурных интегралов) мы используем обычный знак интеграла.

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = \operatorname{sh} z$ в ряд по степеням z (т. е. в ряд Маклорена).

▷ Так как $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ является аналитической во всей плоскости, то по теореме Тейлора ее ряд Маклорена будет сходиться к ней во всей плоскости. Имеем

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n+1)} = \operatorname{ch} z, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n)} = \operatorname{sh} z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $c_{2n} = \frac{f^{2n}(0)}{(2n)!} = 0$, а $c_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}$, и искомое разложение имеет вид

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad \triangleright$$

Замечание. Если рассматривать ряд Тейлора функции $f(x)$ действительной переменной, т. е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

то для справедливости равенства (3) (при $z = x$ и $z_0 = x_0$) необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора $R_n(x)$ стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$. Остаточный член может быть записан, например, в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)), \quad \text{где } 0 \leq \theta \leq 1,$$

или в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

или в какой-либо другой форме.

Пример 3. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию e^x .
▷ Функция $f(x) = e^x$ бесконечно дифференцируема и $(e^x)^{(n)} = e^x$. Следовательно, $f^{(n)}(0) = 1$. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

На любом конечном отрезке $x \in [-a, a]$, $a > 0$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \leq e^a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

а потому для любого $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad \triangleright$$

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

$$a) e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$$

$$b) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$$

$$v) \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$z \in \mathbb{C}$.

$$r) \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, |z| < 1.$$

$$d) \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

$|z| < 1$.

$$e) (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

(в случае, когда $\alpha = m \in \mathbb{N}$, функция $(1+z)^m$ раскладывается по биному Ньютона в многочлен, причем разложение имеет место во всей плоскости).

ж) при $\alpha = -1$ из е) получаем бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $-z$:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots, \quad |z| < 1.$$

Пример 4. Разложить в ряд по степеням $z+3$ функцию $\ln(2-5z)$.

▷ Рассмотрим сначала следующее преобразование данной логарифмической функции:

$$\begin{aligned}\ln(2 - 5z) &= \ln(2 - 5(z + 3) + 15) = \ln 17 \left(1 - \frac{5}{17}(z + 3)\right) = \\ &= \ln 17 + \ln\left(1 - \frac{5(z + 3)}{17}\right).\end{aligned}$$

Воспользуемся разложением г) для $\ln(1 + u)$, полагая $u = -\frac{5}{17}(z + 3)$. Так как разложение г) имеет место при $|u| < 1$, то наше разложение будет иметь место при $\frac{5}{17}|z + 3| < 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\ln(2 - 5z) &= \ln 17 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(-\frac{5}{17}(z + 3)\right)^n \frac{1}{n} = \\ &= \ln 17 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{17}\right)^n \frac{(z + 3)^n}{n}, \quad |z + 3| < \frac{17}{5}.\end{aligned}$$

Заметим, что на действительной оси в точке $x = 2/5$ ряд расходится (гармонический ряд), а в точке $x = -32/5$ по признаку Лейбница сходится. Следовательно, $[-32/5, 2/5)$ — промежуток сходимости на действительной оси. ▷

Часто для разложения функций в ряд удобно пользоваться дифференцированием или интегрированием известных разложений, а при разложении рациональной дроби разложить ее на простейшие.

Пример 5. Получить разложение г) для функции $f(z) = \ln(1 + z)$.

▷ Имеем

$$\ln(1 + z) = \int_0^z \frac{d\eta}{1 + \eta},$$

где путь интегрирования не охватывает точку $z = -1$. Заметим, что функция $\frac{1}{1 + \eta}$ при $|\eta| < 1$ является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $-\eta$, т. е.

$$\frac{1}{1 + \eta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta)^n,$$

причем, если $|\eta| \leq |z| < 1$, то ряд сходится равномерно и его можно

почленно интегрировать. Поэтому для z таких, что $|z| < 1$, имеем:

$$\begin{aligned}\ln(1+z) &= \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z (-\eta)^n d\eta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}. \quad \triangleright\end{aligned}$$

Пример 6. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)}.$$

« Разложим $f(z)$ на элементарные дроби. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{2z+5} + \frac{2}{(z-3)^2}.$$

По формуле суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2z}{5}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2z}{5}\right)^n, \quad |z| < \frac{5}{2},$$

и

$$\frac{2}{z-3} = -\frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n, \quad |z| < 3.$$

Замечая, что

$$\left(\frac{2}{z-3}\right)' = -\frac{2}{(z-3)^2},$$

и учитывая утверждение б) задачи 12.163, получим

$$\frac{2}{(z-3)^2} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{3^n} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| = 3.$$

Складывая ряды для $\frac{1}{2z+5}$ и $\frac{2}{(z-3)^2}$, имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{2^n}{5^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}} \right) z^n, \quad |z| < \frac{5}{2}. \quad \triangleright$$

Пример 7. Разложить в ряд по степеням x ($x \in \mathbb{R}$) функцию

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du.$$

«Зная разложение функции $\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (см. разложение в), имеем

$$\frac{\sin u}{u} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k+1)!}, \quad u \in \mathbb{R},$$

а потому, используя свойство в) задачи 12.163, получаем

$$\int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{u^{2k}}{(2k+1)!} du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1!(2k+1)},$$

$x \in \mathbb{R}$. ▷

Используя теорему Тейлора (формулу Тейлора с остаточным членом в какой-либо форме для функций действительной переменной), разложить в ряд по степеням z следующие функции, проверив тем самым справедливость соответствующих соотношений из а)-е):

12.203. e^z . **12.204.** $\cos z$. **12.205.** $\sin z$. **12.206.** $(1+z)^a$.

12.207. 2^z . **12.208.** $\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$. **12.209.** $\cos^2 z$.

Написать первые три ненулевых члена разложения в ряд по степеням z следующих функций:

12.210*. $\operatorname{tg} z$. **12.211.** $\frac{1}{\cos z}$. **12.212.** $\operatorname{th} z$. **12.213.** $e^z \cos z$.

Используя разложения основных элементарных функций а)-ж), а также возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, разложить функции в ряд по степеням z и указать области сходимости полученных рядов²⁾:

12.214. e^{-z^2} . **12.215.** $\sin^2 z$. **12.216.** $\frac{z}{4+z^2}$. **12.217.** $\frac{z}{3+4z}$.

²⁾ См. также задачи 12.289–12.294.

- 12.218. $\sqrt[3]{27 - z}$. 12.219. $\frac{1}{\sqrt{9 + z^2}}$. 12.220*. $\frac{3z + 1}{(z - 2)^2}$.
- 12.221. $\frac{3}{1 + z - 2z^2}$. 12.222. $(1 - z)e^{-2z}$. 12.223. $\operatorname{ch} z$.
- 12.224. $\sin 2z + 2z \cos 2z$. 12.225. $\sin 2z \cos 2z$.
- 12.226. $\ln(1 + z - 2z^2)$. 12.227. $\ln(z^2 + 3z + 2)$.
- 12.228. $\ln(z + \sqrt{1 + z^2})$. 12.229. $\operatorname{arctg} z$. 12.230. $\arcsin z$.
- 12.231. $\int_0^z e^{-\eta^2/2} d\eta$. 12.232. $\int_0^z \frac{\sin \eta^2}{\eta} d\eta$.
- 12.233*. $\frac{z \cos z - \sin z}{z^2}$. 12.234*. $\frac{z \sin z - 1 + \cos z}{z^2}$.

Разложить функции в ряд по степеням $z - z_0$ и определить области сходимости полученных рядов:

- 12.235. $z^3 - 2z^2 - 5z - 2$, $z_0 = -4$. 12.236. $\frac{1}{1 - z}$, $z_0 = 2$.
- 12.237. $\frac{1}{1 - z}$, $z_0 = 3i$.
- 12.238. $\frac{1}{z^2 - 6z + 5}$, $z_0 = 3$.
- 12.239. $\frac{1}{z^2 + 3z + 2}$, $z_0 = -4$. 12.240. $\sqrt[3]{z}$, $z_0 = 1$.
- 12.241*. $\frac{1}{z^2}$, $z_0 = 2$. 12.242. $e^{z^2 - 4z + 1}$, $z_0 = 2$.
- 12.243. ze^{2z-z^2} , $z_0 = 1$.
- 12.244. $\sin(z^2 + 4z)$, $z_0 = -2$.
- 12.245*. $\ln(5z + 3)$, $z_0 = 1$.
- 12.246. $\ln(z^2 + 6z + 12)$, $z_0 = -3$.

Найти области сходимости указанных рядов и их суммы:

- 12.247. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)z^n$. 12.248. $\sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^n$.
- 12.249. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n+1}$. 12.250. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{-2n-2} z^{2n}$, $a \neq 0$.
- 12.251. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)z^{2n}$.

3. Теорема единственности. Аналитическое продолжение. Сформулируем теорему единственности.

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и если на множестве различных точек $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, имеющем предельную точку $a \in D$, выполняются равенства $f(z_n) = g(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, то $f(z) = g(z)$ всюду на D .

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D , а функция $g(z)$ аналитична в области D_1 такой, что пересечение $D \cap D_1 = D_2$ содержит последовательность различных точек $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, имеющую по крайней мере одну предельную точку $a \in D_2$. Пусть, кроме того, $f(z) = g(z)$ для $z \in D_2$. Тогда функция

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{для } z \in D, \\ g(z) & \text{для } z \in D_1 \setminus D_2 \end{cases}$$

называется *аналитическим продолжением* функции $f(z)$ с области D на область $D_1 \setminus D_2$.

Пример 8. Доказать, что если функция $f(z)$ непрерывна в области D , содержащей точку $z = 0$, и если $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, то $f(z)$ не аналитична в области D ($n_0 \geq 1$ — целое).

◁ Так как $f(z)$ непрерывна в D , то на отрезке действительной оси она также непрерывна, а в соседних точках $x = \frac{1}{n}$ и $x = \frac{1}{n+1}$, $n > n_0$, она принимает значения разных знаков. Поэтому существуют точки $x_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, в которых $f(x_n) = 0$, причем $x_n \rightarrow 0$. Следовательно, в точках $x_n \in D$ функция $f(z)$ совпадает с аналитической функцией $g(z) \equiv 0$, а так как $f(z) \not\equiv 0$, то $f(z)$ не может быть аналитической функцией. ▷

Пример 9. Доказать, что функция

$$g(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} + \dots + \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} + \dots$$

является аналитическим продолжением функции

$$f(z) = 1 + 2z + 2^2z^2 + \dots + 2^n z^n + \dots$$

◁ Определим область сходимости рядов для $g(z)$ и $f(z)$. Имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|1-z|^{n+1}}} = \left| \frac{z}{1-z} \right| < 1$$

и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|2^n z^n|} = 2|z| < 1,$$

т.е. ряд для $g(z)$ сходится в области $D_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z < 1/2\}$ (см. задачу 12.143), а ряд для $f(z)$ — в области $D_2 = \{z \mid |z| < 1/2\}$.

Определим суммы этих рядов в указанных областях:

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \left(1 + \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{(1-z)^2} + \dots \right) = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1 - \frac{z}{1-z}} = \frac{1}{1-2z}$$

и

$$f(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Так как $D_2 \subset D_1$ и в области D_2 справедливо тождество $f(z) = g(z)$, то функция $g(z)$ является аналитическим продолжением функции $f(z)$ с области D_2 на область D_1 . \triangleright

12.252. Доказать, что при любом $a \neq 0$ и $|a| \neq 1$ функциональное уравнение $f(z) = f(az)$ не имеет решения, аналитического в точке $z = 0$ и ее окрестности, отличного от $f(z) \equiv \text{const.}$

12.253*. Доказать теорему единственности в том случае, когда $\forall z \in D \quad g(z) = 0$, т.е. доказать следующую теорему: если аналитическая в области D функция $f(z)$ обращается в нуль в точках $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, лежащих в области D и таких, что $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a \in D$, то

$$\forall z \in D \quad f(z) = 0.$$

12.254. Будет ли аналитической в точке $z = 0$ и ее окрестности функция $f(z)$, если она при всех целых $n > n_0$ удовлетворяет соотношению $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}$?

Найти аналитические в окрестности точки $z = 0$ функции $f(z)$, удовлетворяющие условиям:

12.255. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

12.256. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

12.257. Показать, что функция $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ является аналитическим продолжением функции $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$. Найти аналитическое выражение этих функций в общей части областей сходимости рядов.

12.258. Показать, что функция

$$g(z) = \ln(2+2i) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1-2i)^n}{n(2+2i)^n}$$

является аналитическим продолжением функции $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$. Найти аналитическое выражение этих функций в общей части областей сходимости рядов.

§ 4. Применение степенных рядов

1. Вычисление значений функций. Разложения а)–ж) из § 3 позволяют получать значения соответствующих функций в заданных точках с любой точностью.

Пример 1. Найти число e с точностью до 10^{-5} .
 ◁ Подставив $x = 1$ в разложение функции e^x , имеем

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Оценим остаток

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\dots k} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ имеет предельную абсолютную погрешность, равную $\frac{1}{n!n}$. Найдем n , для которого $\frac{1}{n!n} < 0,00001$, или $n!n > 100000$. Получаем $n \geq 8$. Вычисляя $2 + \sum_{k=2}^8 \frac{1}{k!}$ и округляя, находим ответ с требуемой точностью $e = 2,71828$. ▷

12.259. Определить, сколько нужно взять членов в разложении функции $\ln(1+x)$, чтобы вычислить $\ln 2$ с точностью до 10^{-4} .

12.260. Определить, сколько нужно взять членов ряда в разложении функции $\cos x$, чтобы вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до 10^{-4} .

12.261. С какой предельной абсолютной погрешностью можно вычислить

$$\sqrt[5]{36} = (32 + 4)^{1/5} = 2 \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{1/5},$$

взяв три члена биномиального ряда?

12.262. При каких x многочлен $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ дает значение функции $\sin x$ с точностью до 10^{-4} ?

12.263. Какова предельная абсолютная погрешность равенства

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3}$$

при вычислении $\sqrt{5}$?

Используя соответствующие разложения, вычислить указанные значения функций с точностью до 10^{-4} :

12.264. \sqrt{e} .

12.265. $\frac{1}{e}$.

12.266. $\sin \frac{\pi}{5}$.

12.267. $\sin 12^\circ$.

12.268. $\cos 1$.

12.269*. $\sin 1000$.

12.270*. $\sqrt[3]{520}$.

12.271*. $\sqrt{15}$.

12.272*. $\sqrt[4]{700}$.

12.273*. $\ln 2$.

12.274. $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

12.275. $I_0(0,5)$, где $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.

12.276. $\operatorname{sh} 1$.

12.277. $\operatorname{ch} 1$.

В задачах 12.278–12.287, используя разложения в степенные ряды, требуется составить на фортране подпрограммы-функции для вычисления значений указанных функций с заданной предельной абсолютной погрешностью. Использовать параметры X, EPS, где X — аргумент, EPS — предельная абсолютная погрешность. Имена подпрограмм выбрать не совпадающими с именами соответствующих стандартных подпрограмм-функций.

12.278*. $y = \sin x$. **12.279.** $y = \cos x$. **12.280*.** $y = e^x$.

12.281*. $y = (1+x)^\alpha$. **12.282.** $y = \ln(1+x)$.

12.283*. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$. **12.284.** $y = \operatorname{arctg} x$.

12.285. $y = I_0(x)$ (см. задачу 12.275).

12.286. $y = \operatorname{sh} x$. **12.287.** $y = \operatorname{ch} x$.

12.288. Составить на фортране программу решения одной из задач 12.264–12.277, применяя подпрограммы-функции, полученные при решении задач 12.278–12.287. В программе предусмотреть сравнение результатов, вычисленных с помощью составленной подпрограммы-функции и с помощью стандартной подпрограммы-функции, входящей в библиотеку обязательных подпрограмм.

2. Интегрирование функций. Разлагая подынтегральную функцию $f(t)$ в степенной ряд, можно, используя теорему об интегрировании степенных рядов, представить интеграл $\int_0^x f(t) dt$ в виде степенного ряда и

подсчитать величину этого интеграла с заданной точностью при любом значении x из интервала сходимости полученного ряда.

Пример 2. Разложить функцию $\int_0^x e^{-t^2} dt$ в степенной ряд по степеням x .

Используя разложение $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, получим

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$$

на всей числовой оси. Применяя почленное интегрирование, находим

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}. \quad \triangleright$$

Разложить указанные функции в степенные ряды по степеням x :

$$12.289. \int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt. \quad 12.290. \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

$$12.291. \int_0^x \cos t^2 dt. \quad 12.292. \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}.$$

12.293. $\int_0^x I_0(t) t dt$ (см. задачу 12.275). 12.294. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

Вычислить интегралы с точностью до 10^{-4} :

12.295. $\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$ 12.296. $\int_0^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt.$

12.297. $\int_0^{0,5} e^{-t^2} dt.$ 12.298. $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2} dx.$

12.299. $\int_0^{0,8} \frac{dx}{1+x^5}.$ 12.300. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$

В задачах 12.301–12.305, используя разложения в степенные ряды, составить на фортране подпрограмму-функцию для вычисления указанных интегралов с заданной предельной абсолютной погрешностью. Параметры: X, EPS, где X — верхний предел интегрирования, EPS — предельная абсолютная погрешность.

12.301. $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$ 12.302. $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$

12.303. $\int_0^x (1+t^s)^\alpha dt (s > 0, \alpha \neq 0).$

12.304. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt.$ 12.305. $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$

12.306. Используя подпрограммы-функции, полученные при решении задач 12.301–12.305, составить на фортране программу решения одной из задач 12.295–12.300.

3. Нахождение сумм числовых рядов. Убыстрение сходимости. При нахождении суммы числового ряда вычисляют его частичную сумму, для которой величина остатка ряда не превосходит заданной абсолютной погрешности. Используя известные разложения в степенные ряды, сумму числового ряда в некоторых случаях можно выразить в виде значения функции в определенной точке.

Доказать указанные равенства:

$$12.307. \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+n}.$$

$$12.308*. \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)} = \\ = \frac{1}{2(\alpha+n)(\alpha+n+1)}.$$

$$12.309*. \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1) \dots (\alpha+k+p)} = \\ = \frac{1}{p(\alpha+n) \dots (\alpha+n+p-1)} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

$$12.310*. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2.$$

$$12.311*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Найти суммы рядов, не вычисляя частичных сумм:

$$12.312. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}. \quad 12.313. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}. \quad 12.314. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

$$12.315. \int_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}. \quad 12.316. \int_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}.$$

$$12.317. \int_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n \cdot (2n)!}. \quad 12.318. \int_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

При нахождении суммы числового ряда требуется брать большое число членов, если остаток этого ряда медленно стремится к нулю. Такой ряд следует преобразовать в ряд, остаток которого стремится к нулю быстрее. Данное преобразование называется *убыстрением сходимости ряда*. Одним из методов убыстрения сходимости является *метод Куммера*. Неизвестная сумма A сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

вычисляется по формуле

$$A = qB + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - qb_k), \quad (2)$$

где B — известная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ такого, что существует предел

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} \neq 0.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - qb_k) \quad (3)$$

сходится быстрее, чем исходный ряд (1), т. е. остаток ряда (3) есть бесконечно малая более высокого порядка, чем остаток ряда (1).

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ с точностью до 10^{-3} .

« Выясним, сколько членов данного ряда нужно взять для достижения требуемой точности. Оценивая остаток (см. задачу 12.307), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} < 0,001,$$

откуда следует, что $n > 1000$, т. е. для достижения указанной точности требуется взять 1001 член исходного ряда.

Улучшим сходимость ряда. Положив в формуле (2)

$$a_k = \frac{1}{k^2}, \quad b_k = \frac{1}{k(k+1)}, \quad q = 1, \quad a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)},$$

находим (см. задачу 12.307 при $\alpha = 0$ и $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}. \quad (4)$$

Применим формулу (2) для преобразования ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}$, положив $a_k = \frac{1}{k^2(k+1)}$, $b_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $q = 1$ и $a_k - qb_k =$

$= \frac{2}{k^2(k+1)(k+2)}$. Тогда, учитывая (4), имеем (см. задачу 12.308 при $\alpha = 0$ и $n = 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

Вычисление суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ свелось к вычислению суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

Оценивая остаток

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} &< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3n(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

получаем $\frac{2}{3n^3} < 0,001$, откуда $n^3 > \frac{1}{3} \cdot 2000 \approx 666,7$, или $n \geqslant 9$, т. е. требуемая точность достигается при $n = 9$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} = 1 + 0,25 + 2 \cdot 0,1975 = 1,645.$$

Применив преобразование (2) еще раз к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$, можно было бы еще более улучшить сходимость. ▷

В задачах 12.319–12.323, применяя преобразование Куммера, найти суммы указанных рядов с точностью до 10^{-4} , взяв для этого не более 10 членов получившегося ряда. Использовать соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \zeta(p) \quad (p > 1).$$

Значения дзета-функции $\zeta(p)$ взять из таблицы

p	$\zeta(p)$	p	$\zeta(p)$
2	1,6449340668	6	1,0173430620
3	1,2020569032	7	1,0083492774
4	1,0823232337	8	1,0040773562
5	1,0369277551		

$$12.319^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}. \quad 12.320^*. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

$$12.321^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2}. \quad 12.322^*. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(5n+3)}.$$

$$12.323^*. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}.$$

12.324. Составить на фортране программу решения одной из задач 12.319–12.323.

4. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов. Степенные ряды широко применяются при решении дифференциальных уравнений. Для целого ряда дифференциальных уравнений показано, что решение $y(t)$ представимо в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (5)$$

коэффициент которого можно определить с учетом заданного уравнения различными способами?

а) Пусть требуется найти решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, причем функция $f(x, y, y')$ в точке (x_0, y_0, y_1) имеет частные производные любого порядка. Тогда коэффициенты $y^{(k)}(x_0)$ ряда (5) определяются путем последовательного дифференцирования исходного уравнения и подстановки в него x_0 и найденных уже значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ...

Пример 5. Найти решение уравнения $y'' = x^2 y$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Имеем $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, из заданного уравнения находим $y''(0) = 0$.

Далее, дифференцируя уравнение, имеем

$$\begin{aligned} y''' &= x^2 y' + 2xy, \\ y^{\text{IV}} &= x^2 y'' + 4xy' + 2y, \\ y^{\text{V}} &= x^2 y''' + 6xy'' + 6y', \\ &\dots \\ y^{(k+2)} &= x^2 y^{(k)} + 2k xy^{(k-1)} + k(k-1) y^{(k-2)}, \end{aligned}$$

и при $x = 0$ получаем отсюда

$$y^{(k+2)}(0) = k(k-1)y^{(k-2)}(0), \quad k = 2, 3, \dots$$

Так как $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ и $y'(0) = 1$, то

$$y^{(4n)}(0) = y^{(4n+2)}(0) = y^{(4n+3)}(0) = 0$$

И

$$y^{(4n+5)}(0) = (4n+2)(4n+3) y^{(4n+1)}(0) = \\ = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \dots (4n+2)(4n+3), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \dots (4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!} x^{4n+1}.$$

По признаку Даламбера полученный ряд сходится при любых $x \in \mathbb{R}$, т. е. определяемая этим рядом функция $y(x)$ является решением заданного уравнения при любых x . \triangleright

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

12.325. $y'' = x^2y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

12.326. $y'' = -x^2y' - 2xy + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Найти первые 5 членов разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд:

$$12.327. y' \equiv 2 \cos x - xy^2; y(0) \equiv 1.$$

$$12.328. \quad y'' = -2xy, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

12.329. $y'' = y \cos x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

б) Если исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, причем коэффициент при старшей производной в точке x_0 отличен от нуля, то решение следует искать

в виде ряда (5) с неопределенными коэффициентами a_k , $k = 0, 1, \dots$. Законность такого метода вытекает из утверждения, доказываемого в аналитической теории дифференциальных уравнений, которое мы приведем для уравнения 2-го порядка.

Теорема 1. Если в дифференциальном уравнении

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (6)$$

функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $f(x)$ аналитичны в окрестности точки x_0 и $p_0(x_0) \neq 0$, то существует решение уравнения (6), представимое в виде степенного ряда $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$.

Пример 6. Найти решение (в виде степенного ряда) уравнения

$$y'' - xy' + y = 1,$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = y'(0) = 0$.

◀ Ищем решение в виде ряда $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, в котором в силу условий $y(0) = y'(0) = 0$ имеем $a_0 = a_1 = 0$. Следовательно, $y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$.

Подставив это выражение в уравнение, получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 1.$$

Отсюда находим, что $2 \cdot 1 \cdot a_2 = 1$, т. е. $a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, и

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} = (k-1)a_k \quad \text{для } k = 1, 2, \dots$$

Так как $a_1 = 0$, то $a_{2m+1} = 0$ для всех $m = 0, 1, \dots$, а для $k = 2m$, $m = 1, 2, \dots$, получаем рекуррентную формулу

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

из которой выводим равенства

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!} x^{2m+2},$$

причем полученный ряд сходится при всех $x \in \mathbb{R}$. \triangleright

Используя степенные ряды, проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

$$\mathbf{12.330. } y'' + xy' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$\mathbf{12.331. } y'' - xy' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$\mathbf{12.332. } y'' + xy' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

в) Если коэффициент при старшей производной в линейном уравнении в точке x_0 обращается в нуль, то следует воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 2. Если в дифференциальном уравнении

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (7)$$

функции $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичны в окрестности точки x_0 , причем точка x_0 является нулем порядка s функции $p_0(x)$, нулем порядка не ниже $s-1$ функции $p_1(x)$ и нулем порядка не ниже $s-2$ функции $p_2(x)$, то решение уравнения (7) в окрестности точки x_0 существует и представляется в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

где $a_0 \neq 0$ и $r \in \mathbb{R}$.

Пример 7. Найти решение (в виде обобщенного степенного ряда) уравнения

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

\triangleleft Коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям теоремы 2, поэтому ищем решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0.$$

Имеем

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k x^{k+r-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-2}.$$

Подставляя эти ряды в уравнение, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} = 0,$$

т. е.

$$r^2 a_0 x^{r-1} + (r+1)^2 a_1 x^r + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+r)^2 a_k + a_{k-2}) x^{k+r-1} = 0.$$

Отсюда следуют равенства

$$r^2 a_0 = 0, \quad (r+1)^2 a_1 = 0, \quad (k+r)^2 a_k + a_{k-2} = 0.$$

По условию $a_0 \neq 0$. Следовательно, $r = 0$, а тогда

$$a_1 = 0 \quad \text{и} \quad k^2 a_k = -a_{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots$$

Из этих равенств заключаем, что $a_{2m+1} = 0$ для всех $m = 0, 1, \dots$

Учитывая начальное условие $y(0) = 1$, заключаем, что $a_0 = 1$, и имеем рекуррентную формулу

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2},$$

из которой получаем

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{((2m)!!)^2} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m} (m!)^2}.$$

Следовательно, искомое решение записывается в виде

$$y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \triangleright$$

Найти общее решение дифференциального уравнения в виде обобщенного степенного ряда:

12.333*. $xy'' + 2y' + xy = 0$.

12.334. $4xy'' + 2y' + y = 0$.

5. Уравнение и функции Бесселя. Частным случаем уравнения (6), коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 2, является уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (8)$$

Его решениями являются цилиндрические функции Бесселя первого рода порядка ν

$$I_\nu(x) = a_0^{(\nu)} x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} \quad (9)$$

и для нецелых ν

$$I_{-\nu}(x) = a_0^{(\nu)} x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(1-\nu)(2-\nu)\dots(k-\nu)}. \quad (10)$$

Если же ν — целое число, $\nu = n$, то вторым частным решением уравнения Бесселя (8) является функция Неймана (или Вебера), определяемая из соотношения

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{I_\nu(x) \cos \nu \pi - I_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi},$$

являющаяся цилиндрической функцией второго рода порядка n . Постоянная $a_0^{(\nu)}$ в формулах (9) и (10) берется обычно следующая:

$$a_0^{(\nu)} = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad (11)$$

где $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx$ — гамма-функция Эйлера.

12.335. Используя представление (9) для $I_\nu(x)$, доказать следующие соотношения:

$$\frac{d}{dx} (x^\nu I_\nu(x)) = x^\nu I_{\nu-1}(x), \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu} \right) = -\frac{I_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \quad (13)$$

12.336. Исходя из соотношений (12) и (13), вывести соотношения

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x),$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x).$$

12.337*. Используя представление (9) и значение $a_0^{(\nu)}$ из (11), выразить $I_{-1/2}(x)$ и $I_{1/2}(x)$ через элементарные функции.

12.338. Доказать, что если $I_\nu(x)$ — решение уравнения (8), то $I_\nu(ax)$ является решением уравнения

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (14)$$

Записать общее решение уравнения (14).

Используя результат задачи 12.338, найти общие решения уравнений:

12.339. $xy'' + y' + 4xy = 0.$

12.340. $9x^2y'' + 9xy' + (36x^2 - 1)y = 0.$

12.341. $x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4)y = 0.$

12.342. $x^2y'' + xy' + \left(9x^2 - \frac{1}{25}\right)y = 0.$

§ 5. Ряды Лорана

1. Ряды Лорана. Теорема Лорана. Рядом Лорана называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n; \quad (1)$$

при этом ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n$$

называется *главной частью* ряда Лорана, а ряд

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

— *правильной частью*. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = r < R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

то областью сходимости ряда (1) является кольцо $K = \{z | 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$. В этом кольце K сумма ряда $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

является функцией аналитической, причем коэффициенты ряда c_n связаны с функцией $f(z)$ посредством формул

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta-z_0|=r'} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (2)$$

где $r < r' < R$.

Пример 1. Найти область сходимости и сумму ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}.$$

◀ Применяя признак Коши к каждому из этих слагаемых, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n|z-1|^{n+1}}} = \frac{1}{2|z-1|} < 1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n|z-1|^{n-1}}{3^n}} = \frac{|z-1|}{3} < 1.$$

Отсюда заключаем, что областью сходимости исходного ряда является кольцо

$$K = \{z | 1/2 < |z-1| < 3\}.$$

Замечая, что слагаемые являются производными от рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^n(z-1)^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n},$$

можем записать, что в кольце K

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n} &= - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(z-1)^n} \right)' + \\ &+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n} \right)' = - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2(z-1)}} \right)' + \left(\frac{1}{1 - \frac{z-1}{3}} \right)' = \\ &= -2 \left(\frac{z-1}{2z-3} \right)' + \left(\frac{3}{4-z} \right)' = \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, суммой данного ряда является функция

$$f(z) = \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2}, \quad \frac{1}{2} < |z-1| < 3. \quad \triangleright$$

Теорема Лорана. Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 \leq r < |z - z_0| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам (2).

Следствие. Пусть $f(z)$ аналитична в многосвязной области D , ограниченной контуром Γ и внутренними контурами $\gamma_1^-, \gamma_2^-, \dots, \gamma_m^-$ (рис. 2). Если точка z_0 лежит внутри (или на границе) одного из внутренних контуров γ_ν и величина $r = \max_{\eta \in \gamma_\nu} |z_0 - \eta|$ меньше расстояния R от z_0 до остальной части границы области D или до точки, в которой $f(z)$ не аналитична, т. е.

$$0 \leq r = \max_{\eta \in \gamma_\nu} |z_0 - \eta| < R = \min_{\eta \in \Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{\nu-1} \cup \gamma_{\nu+1} \cup \dots \cup \gamma_m} |z_0 - \eta|,$$

то в кольце $r < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ может быть представлена ее рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R,$$

коэффициенты которого $c_n(z_0)$ определяются по формулам (2).

Рядом Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ называется ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad \left(\text{или} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \right), \quad (3)$$

сходящийся в некотором кольце $r < |z| < +\infty$ (соответственно $r < |z-a| < +\infty$), при этом главной частью ряда Лорана является

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n \right)$, а правильной — ряд

$$\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n \left(\sum_{n=-\infty}^0 c_n(z-a)^n \right).$$

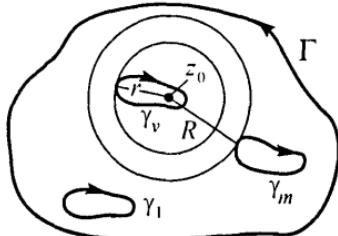


Рис. 2

Пример 2. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$.

▷ Так как аналитичность функции нарушается в точках $z = 0$ и $z = 1$, то областью сходимости ряда Лорана будет кольцо $0 < |z| < 1$. Замечая, что при $n \leq -2$ функция $\frac{1}{z^{n+2}(1-z)}$ аналитична в круге $|z| \leq \rho < 1$, можем записать, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)} dz = 0 \quad \text{для } n = -2, -3, \dots$$

Далее, применяя формулу Коши для функции $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$ и ее производных, для $n \geq -1$ можем записать

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{\varphi(z)}{z^{n+2}} dz = \frac{\varphi^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left. \frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+2}} \right|_{z=0} = 1.$$

Таким образом, для $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (4)$$

т. е. главная часть содержит один член, а правильная — бесконечное число членов. ▷

Вычисление контурных интегралов (2), как правило, достаточно затруднительно. Поэтому для разложения функций в ряды Лорана используются искусственные приемы. Так, в примере 2 функцию $f(z)$ можно было бы представить в виде суммы дробей, т. е.

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z},$$

причем первое слагаемое является уже разложением в ряд Лорана по степеням z , а второе слагаемое есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем z , т. е. имеем разложение (4).

Найти области сходимости и суммы следующих рядов:

$$12.343. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}. \quad 12.344. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n i^n 2^n}{(z+i)^{n+1}}.$$

$$12.345. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+3}}{n!}. \quad 12.346. \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)i^{n+2}(z-i)^n.$$

Найти области сходимости рядов:

$$12.347. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(z+i)^{2n}}{2^n(n+1)} + \frac{4n^2}{3^n(z+i)^n} \right).$$

$$12.348. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(z-2i)^n}{3^n(n^2+1)} + \frac{n2^n}{(z-2i)^n} \right).$$

$$12.349. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n z^n}. \quad 12.350. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+i}{4n(z+1)} \right)^n.$$

$$12.351. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^2}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z} \right)^n.$$

Найти все разложения указанных функций в ряды Лорана по степеням $z - z_0$ и установить области сходимости полученных разложений:

$$12.352. \frac{1}{z(z-1)}, z_0 = 1. \quad 12.353^*. \frac{1}{z(z-1)}, z_0 = \infty.$$

$$12.354. \frac{1}{(z-2)(z+3)}, z_0 = 2. \quad 12.355. \frac{1}{(z-2)(z+3)}, z_0 = -3.$$

$$12.356. \frac{1}{z^2 - 4}, z_0 = \infty. \quad 12.357. \frac{z+1}{z^2 - 3z + 2}, z_0 = 1.$$

$$12.358. \frac{z+1}{z^2 - 3z + 2}, z_0 = 2. \quad 12.359^*. \frac{z^3}{z^2 - 2z + 1}, z_0 = \infty.$$

$$12.360. \frac{z}{(z+1)^3}, z_0 = -1. \quad 12.361. \frac{z^4}{(z+1)^3}, z_0 = \infty.$$

$$12.362. \frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = i. \quad 12.363. \frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = \infty.$$

$$12.364^*. \frac{z}{(z^2 + 1)^2}, z_0 = i. \quad 12.365^*. \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, z_0 = \infty.$$

$$12.366. \frac{\cos z}{z^3}, z_0 = 0. \quad 12.367. \frac{\cos z}{z^3}, z_0 = \infty.$$

$$12.368. \sin \frac{1}{z-2}, z_0 = 2. \quad 12.369. z^2 e^{\frac{1}{z}}, z_0 = 0.$$

$$12.370. z^2 e^{\frac{1}{z}}, z_0 = \infty. \quad 12.371. \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2.$$

12.372. $\frac{1}{z^2 + z}$, $z_0 = 1$.

12.373. $\frac{z+1}{z^2 + 2z - 8}$, $z_0 = i$.

12.374. $\frac{z}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}$, $z_0 = 0$.

12.375. $\frac{1}{(z^2 - 4)(z^2 - 1)}$, $z_0 = 0$.

12.376. Найти три первых члена разложения функции $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$. Какова область сходимости этого ряда?

2. Характер изолированных особых точек. Точка z_0 называется *правильной* точкой для аналитической в области D функции $f(z)$, если существует степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n$ с радиусом сходимости $r(z_0) > 0$ такой, что в общей части круга сходимости $|z - z_0| < r(z_0)$ и области D сумма этого ряда $\varphi_{z_0}(z)$ совпадает с $f(z)$. Точки, не являющиеся правильными, называются *особыми*.

Точка z_0 называется *изолированной* особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $0 < |z - z_0| < R$, а z_0 — особая точка.

Аналогично, точка $z_0 = \infty$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $r < |z| < \infty$ и $z = \infty$ — особая точка.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется: *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \neq \infty;$$

полюсом порядка $m \geq 1$, если для функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ точка z_0 является нулем порядка m , т.е. $g(z)$ имеет вид $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$ (очевидно, что если z_0 — полюс, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$);

существенно особой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

Исследование характера бесконечно удаленной особой точки удобнее проводить путем замены $z = \frac{1}{\eta}$, с помощью которой бесконечно удаленная точка $z = \infty$ переходит в точку $\eta = 0$.

Пример 3. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}} + 1}$$

и определить их характер.

Особыми точками являются точка $z = 0$ и точки, в которых знаменатель обращается в нуль.

Имеем $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$ и $e^{\frac{1}{z}} = -1 = e^{2\pi m i + \pi i}$, т. е. $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$, если $\frac{1}{z_m} = (2m + 1)\pi i$, $m \in \mathbb{Z}$, причем эти точки являются нулями 1-го порядка. Следовательно, в точках $z_m = \frac{1}{(2m + 1)\pi i}$, $m \in \mathbb{Z}$, функция $f(z)$ имеет полюсы 1-го порядка. Точка $z = 0$ не является изолированной особой точкой, так как она является пределом полюсов, ибо $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = 0$. \triangleright

12.377*. Доказать, что отсутствие в разложении (1) главной части, т. е. равенство нулю всех коэффициентов c_n с отрицательными номерами ($n = -1, -2, \dots$), является необходимым и достаточным условием того, что точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

12.378*. Доказать, что наличие в главной части разложения (1) не более $m \geq 1$ членов, причем $c_{-m} \neq 0$, а $c_{-n} = 0$ для $n \geq m + 1$, есть необходимое и достаточное условие того, что точка z_0 является полюсом порядка m для функции $f(z)$.

12.379*. Доказать, что если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то существует последовательность точек (z_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$.

12.380*. Опираясь на результат задачи 12.379, доказать, что если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа $A \neq \infty$ существует последовательность точек $(z_n(A))$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(A) = z_0$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n(A)) = A$.

12.381. Установить области сходимости правильной и главной частей разложения Лорана (3) в окрестности бесконечно удаленной точки.

Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

$$12.382. \frac{1}{(z^2 + i)^3}.$$

$$12.383. \frac{z + 2}{z(z + 1)(z - 1)^3}.$$

$$12.384. \frac{1}{\sin z}.$$

$$12.385. \frac{z}{(z + 1)(z - 2)^3(z + i)^5}.$$

$$12.386. \frac{z}{z^2 \sin(z - 1)}.$$

$$12.387. \frac{z}{(z + 1)^3(e^z - 1)}.$$

$$12.388. \frac{z(\pi - z)}{\sin 2z}.$$

$$12.389. \frac{z - \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} z - 1}.$$

12.390. $\operatorname{tg}^2 z.$

12.391. $e^{\frac{1}{z-3i}}.$

12.392. $\cos \frac{1}{z+2i}.$ 12.393. $\operatorname{tg} \frac{1}{z-1}.$ 12.394. $\frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}.$

12.395. $\frac{1-\cos z}{z^2}.$ 12.396. $\frac{\sin z}{z^5}.$ 12.397. $\frac{1}{e^z - 3}.$

Для заданных ниже функций выяснить характер бесконечно удаленной особой точки (устранимую особую точку считать правильной):

12.398. $\frac{z^2}{5-2z^2}.$ 12.399. $\frac{3z^5 - 5z + 2}{z^2 + z - 4}.$ 12.400. $\frac{z}{1-3z^4}.$

12.401. $1-z+2z^2.$ 12.402. $e^{-z}.$ 12.403. $\cos z.$

12.404. $e^{\frac{1}{z}} + 2z^2 - 5.$ 12.405. $e^{\frac{1}{z^2}}.$ 12.406. $e^{\frac{1}{3-2z}}.$

12.407. $e^{-2z} + 3z^3 - z + 8.$

§ 6. Вычеты и их применение

1. Вычет функции и его вычисление. Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 , за исключением, может быть, самой точки z_0 , то *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки z_0 , обозначаемым $\operatorname{res}[f(z); z_0]$, или $\operatorname{выч}[f(z); z_0]$, называется число, равное значению

интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\eta) d\eta$, где C — некоторый простой замкнутый контур,

лежащий в области аналитичности $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку z_0 . В качестве C удобно брать окружность $|\eta - z_0| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ .

Вычет функции совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$, т. е.

$$\operatorname{выч}[f(z); z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta-z_0|=\rho} f(\eta) d\eta.$$

Если $z_0 = \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{выч}[f(z); \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^-} f(\eta) d\eta,$$

где $C_R^- = \{\eta \mid |\eta| = R\}$, R достаточно велико и обход контура — по часовой стрелке. Заметим, что если

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad r < |z| < +\infty,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\rho>r} \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}} d\eta, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

то

$$\text{выч}[f(z); \infty] = -c_{-1}.$$

Если z_0 — полюс 1-го порядка функции $f(z)$, то

$$\text{выч}[f(z); z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z),$$

причем если $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\text{выч}[f(z); z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если z_0 — полюс порядка $m \geq 2$ функции $f(z)$, то

$$\text{выч}[f(z); z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}((z - z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}.$$

Пример 1. Найти выч $\left[\frac{e^{iz}}{z^2 + 9}; 3i \right]$.

◀ Так как точка $z_0 = 3i$ является полюсом 1-го порядка, то

$$\text{выч} \left[\frac{e^{iz}}{z^2 + 9}; 3i \right] = \lim_{z \rightarrow 3i} (z - 3i) \frac{e^{iz}}{(z + 3i)(z - 3i)} = \frac{e^{i \cdot 3i}}{6i} = -\frac{i}{6e^3}. \quad \triangleright$$

Пример 2. Найти выч $\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}; 1 \right]$.

◀ Точка $z_0 = 1$ является полюсом 3-го порядка, поэтому

$$\begin{aligned} \text{выч} \left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}; 1 \right] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-1)^3 \frac{\cos 2z}{(z-1)^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} (-2^2 \cos 2z) = -2 \cos 2. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Пример 3. Найти выч $\left[e^{\frac{3}{z-2}}; 2 \right]$.

◀ Точка $z_0 = 2$ является существенно особой, поэтому для нахождения вычеста найдем коэффициент c_{-1} разложения $e^{\frac{3}{z-2}}$ в ряд Лорана по степеням $z - 2$. Так как

$$e^{\frac{3}{z-2}} = 1 + \frac{3}{z-2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{3}{z-2} \right)^2 + \dots, \quad 0 < |z-2| < +\infty,$$

то $c_{-1} = 3$. Следовательно,

$$\text{выч } \left[e^{\frac{3}{z-2}}; 2 \right] = 3. \quad \triangleright$$

Найти вычесты указанных ниже функций относительно каждого из ее полюсов, отличных от ∞ :

$$12.408. \frac{z^2 + 1}{z - 2}.$$

$$12.409. \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}.$$

$$12.410. \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$12.411. \frac{1}{z^3(z^2 + 4)^2}.$$

$$12.412. \frac{1}{z(1 - e^{2z})}.$$

$$12.413. \frac{1}{\sin z - \frac{1}{2}}.$$

$$12.414. \frac{\sin 2z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 (z-1)}.$$

$$12.415. \frac{\sin 2z}{(z+1)^4}.$$

$$12.416. \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}. \quad 12.417. \operatorname{tg} z. \quad 12.418. \operatorname{ctg}^2 z. \quad 12.419. \frac{\cos^3 z}{z^3}.$$

$$12.420. \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}. \quad 12.421. \frac{1}{z(1-z^2)}.$$

$$12.422. \frac{1}{z^2 - z^5}. \quad 12.423. \frac{\cos 4z}{(z-2)^6}.$$

Найти вычесты функций относительно точки $z_0 = 0$:

$$12.424. e^{\frac{1}{z}}. \quad 12.425. \cos \frac{1}{z}. \quad 12.426. \sin \frac{1}{z}.$$

Найти вычесты функций относительно точки $z_0 = \infty$:

$$12.427. \sin \frac{1}{z}. \quad 12.428. \frac{1}{(z-1)^2(z^2 + 1)}. \quad 12.429^*. \frac{\sin z}{z^2 + 9}.$$

$$12.430. \frac{z^4 + z}{z^6 - 1}. \quad 12.431. z \cos^2 \frac{\pi}{z}. \quad 12.432. \frac{z^2}{z-1} \sin \frac{1}{z}.$$

2. Теорема о вычетах и их применение к вычислению контурных интегралов.

Первая теорема о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитична в области D , за исключением изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_N , лежащих в этой области, то для любого простого замкнутого контура $C \subset D$, охватывающего точки z_1, z_2, \dots, z_N ,

$$\int_{C+} f(\eta) d\eta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{выч}[f(z); z_k].$$

Вторая теорема о вычетах. Если $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_{N-1} и $z_N = \infty$, то

$$\sum_{k=1}^N \text{выч}[f(z); z_k] = 0.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_{C+} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz$, где $C = \{z | |z| = 3\}$.

Доказательство. Так как внутри контура C находятся две особые точки подынтегральной функции — полюсы 1-го порядка $z_{1,2} = \pm 2i$, то, применяя первую теорему о вычетах, можем записать

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^z}{z^2 + 4} dz &= 2\pi i \left(\text{выч} \left[\frac{e^z}{z^2 + 4}; 2i \right] + \text{выч} \left[\frac{e^z}{z^2 + 4}; -2i \right] \right) = \\ &= 2\pi i \left(\left. \frac{e^z}{2z} \right|_{z=2i} + \left. \frac{e^z}{2z} \right|_{z=-2i} \right) = 2\pi i \left(\frac{e^{2i}}{4i} - \frac{e^{-2i}}{4i} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} (e^{2i} - e^{-2i}) = \pi i \sin 2 = \pi \operatorname{sh} 2i. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10} + 1}.$$

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^{10} + 1}$ имеет десять особых точек $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}$, $k = 0, 1, \dots, 9$, являющихся простыми полюсами,

лежащими на единичной окружности. Так как разложение функции в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^{10} + 1} &= \frac{1}{z^{10} \left(1 + \frac{1}{z^{10}}\right)} = \frac{1}{z^{10}} \left(1 - \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} - \dots\right) = \\ &= \frac{1}{z^{10}} - \frac{1}{z^{20}} + \frac{1}{z^{30}} - \dots, \quad 1 < |z| < +\infty,\end{aligned}$$

то $-c_{-1} = \text{выч} \left[\frac{1}{z^{10} + 1}; \infty \right] = 0$. Поэтому, применяя вторую теорему о вычетах, можем записать, что

$$\sum_{k=0}^9 \text{выч} \left[\frac{1}{z^{10} + 1}; e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}} \right] = -\text{выч} \left[\frac{1}{z^{10} + 1}; \infty \right] = 0.$$

Таким образом,

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^9 \text{выч} \left[\frac{1}{z^{10} + 1}; e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}} \right] = 0. \quad \triangleright$$

Используя теорему о вычетах, вычислить следующие интегралы:

$$12.433. \int_{C-} \frac{dz}{z^4 + 1}, \text{ где } C = \{z \mid |z - 1| = 1\}.$$

$$12.434. \int_{C+} \frac{z dz}{(z - 1)(z - 2)}, \text{ где } C = \{z \mid |z - 2| = 2\}.$$

$$12.435. \int_{C+} \frac{e^z dz}{z^2(z^2 + 9)}, \text{ где } C = \{z \mid |z| = 1\}.$$

$$12.436*. \int_{C+} \frac{\sin z}{z^2 + 9} dz, \text{ где } C = \{z \mid |z| = 4\}.$$

$$12.437. \int_{C+} \frac{dz}{(z - a)^n(z - b)^n}, \text{ где } C = \{z \mid |z| = 1\}, n — \text{натуральное число и } 0 \leq |a| < 1 < |b|.$$

12.438*. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, где $C = \{z \mid |z| = 1\}$, n — натуральное число и $0 \leq |a| < |b| < 1$.

12.439. $\int\limits_{C+} \sin \frac{1}{z} dz$, где $C = \{z \mid |z| = r > 0\}$.

12.440. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где $C = \{z \mid |z| = R < 1\}$.

12.441. $\int\limits_{C+} \frac{z+1}{e^z+1} dz$, где $C = \{z \mid |z| = 4\}$.

12.442. $\int\limits_{|z|=R} \left(\sin \frac{1}{z}\right)^n dz$, $n \in \mathbb{N}$.

12.443. $\int\limits_{|z|=R} z^n e^{\frac{z}{z}} dz$, $n \in \mathbb{N}$. **12.444.** $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{1-e^{z^2}}{z^2(z-i)} dz$.

12.445. $\int\limits_{|z|=5} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}$.

12.446. $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1}$.

12.447. $\int\limits_{|z|=1} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z\right) dz$.

12.448. $\int\limits_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz$. **12.449.** $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}$.

3. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов.

a) Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$, где R — символ рациональной функции, с помощью замены $z = e^{ix}$ приводятся к контурным интегралам от рациональных относительно z функций.

Пример 6. Вычислить интеграл Пуассона

$$I(p) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad |p| \neq 1.$$

▷ Производя замену $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix} dx = iz dx$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$, получаем

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(1 - p \frac{z^2 + 1}{z} + p^2 \right)} = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{-pz^2 + p^2 z + z - p} = \\ &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{p(z-p) \left(z - \frac{1}{p} \right)}. \end{aligned}$$

Так как при любом p , $|p| \neq 1$, внутри круга $|z| < 1$ находится только один корень знаменателя подынтегральной функции, то при $|p| < 1$ имеем:

$$I(p) = \frac{2\pi i^2}{p} \text{выч} \left[\frac{1}{(z-p) \left(z - \frac{1}{p} \right)} ; p \right] = \frac{2\pi}{1-p^2},$$

а если $|p| > 1$, то

$$I(p) = \frac{2\pi i^2}{p} \text{выч} \left[\frac{1}{(z-p) \left(z - \frac{1}{p} \right)} ; \frac{1}{p} \right] = \frac{2\pi}{p^2 - 1}.$$

Таким образом,

$$I(p) = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} & \text{при } |p| < 1, \\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{при } |p| > 1. \end{cases} \quad \triangleright$$

6) Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, где $f(x)$ — функция, непрерывная

на $(-\infty, +\infty)$, аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, \dots, z_N , лежащих в конечной части верхней полуплоскости, и удовлетворяющая для достаточно больших $|z|$ условию

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad M > 0, \quad \delta > 0.$$

В этом случае

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{выч}[f(z); z_k]. \quad (1)$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(z^2 + 9)^2}$.

В верхней полуплоскости функция $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 9)^2}$ имеет один полюс 2-го порядка в точке $z_0 = 3i$, и $f(z) \leq \frac{M}{|z|^4}$ для достаточно больших $|z|$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2} &= 2\pi i \text{выч} \left[\frac{1}{(z^2 + 9)^2}; 3i \right] = \\ &= 2\pi i \frac{d}{dz} \left((z - 3i)^2 \frac{1}{(z^2 + 9)^2} \right) \Big|_{z=3i} = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z + 3i)^2} \right) \Big|_{z=3i} = \\ &= -\frac{4\pi i}{(z + 3i)^3} \Big|_{z=3i} = -\frac{4\pi i}{(6i)^3} = \frac{\pi}{54}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Замечание. Формула (1) справедлива и в том случае, когда функция $f(z)$ имеет вид $f(z) = e^{i\alpha z} F(z)$, где $\alpha > 0$, а функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек z_1, z_2, \dots, z_N и $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$.

Подынтегральная функция является мнимой частью функции $\frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10}$, значение которой совпадают со значениями на действительной оси функции $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10} e^{iz}$. Функция $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$ имеет в верхней полуплоскости полюс 1-го порядка в точке $z_0 = 1 + 3i$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$, т. е. выполнены сформулированные в замечании условия,

а потому можем записать:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx &= 2\pi i \text{ выч} \left[\frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}; 1 + 3i \right] = \\ &= 2\pi i \frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{2(1+3i-1)} = \frac{\pi}{3}(1+3i)e^{-3+i} = \\ &= \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3 \sin 1 + i(3 \cos 1 + \sin 1)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{\pi e^{-3}}{3}(3 \cos 1 + \sin 1).$$

Заметим, что одновременно мы вычислили интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1 - 3 \sin 1). \quad \triangleright$$

Используя один из рассмотренных выше методов, вычислить определенные интегралы:

$$12.450. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}, \quad a > 1.$$

$$12.451. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}, \quad a > b > 0.$$

$$12.452. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx, \quad a > 1.$$

$$12.453. \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1 - 2a \sin x + a^2}, \quad 0 < a < 1.$$

$$12.454. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{a + b \cos x}, \quad a > b > 0.$$

$$12.455. \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x - a) \, dx, \quad \operatorname{Im} a > 0.$$

$$12.456. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} \, dx.$$

$$12.457. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$12.458. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$12.459. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0.$$

$$12.460. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

$$12.461. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} \, dx.$$

$$12.462. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 \, dx}{(a + bx^2)^4}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$12.463. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} \, dx.$$

$$12.464. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + x + 1} \, dx.$$

$$12.465. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} \, dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$12.466. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} \, dx.$$

$$12.467. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} \, dx.$$

$$12.468. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3 + 13x)}{x^4 + 13x^2 + 36} \sin x \, dx.$$

$$12.469. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx.$$

$$12.470. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

4. Принцип аргумента. Пусть функция $f(z)$ в области D , ограниченной простым замкнутым контуром C , имеет конечное число N нулей и конечное число P полюсов, где каждый нуль и каждый полюс считаются столько раз, какова их кратность, причем на контуре C не имеет ни нулей, ни полюсов. Тогда разность $\omega = N - P$ равна числу оборотов радиус-вектора $w = f(z)$ при обходе точкой z контура C .

Если $f(z)$ --- аналитическая в D функция, то $P = 0$ и $\omega = N$.

Пример 9. Найти число нулей многочлена $p(z) = z^3 - 3z + 1$, лежащих в правой полуплоскости.

◀ Рассмотрим контур C , состоящий из полуокружности C_R радиуса R , лежащей в правой полуплоскости, и отрезка мнимой оси $[-iR, iR]$, и для достаточно большого R применим к этому контуру принцип аргумента.

Так как

$$p(z) = z^3 \left(1 - \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right), \quad (2)$$

то очевидно, что при обходе точкой z контура C_R против часовой стрелки $\arg z$ получает приращение π , а потому $\arg(z^3)$ получит приращение 3π (C_R отображается в кривую $w = R^3 e^{i\psi}$, $-3\pi/2 \leq \psi \leq 3\pi/2$). Так как второй сомножитель в (2) для достаточно больших R близок к 1, то и приращение аргумента этого множителя мало. Пусть теперь $z = it$, т. е. точка z движется по мнимой оси от точки iR до точки $-iR$. Тогда

$$p(it) = u + iv = 1 - i(t^3 + 3t), \quad \text{т. е. } u = 1, \quad v = -t^3 - 3t.$$

Это означает, что при изменении t от R до $-R$ при $R \rightarrow +\infty$ $\arg p(it)$ изменяется на π (от $-\pi/2$ до $\pi/2$). Таким образом, общее приращение $\arg p(z)$ при обходе контура равно 4π , а это означает, что $N = 2$, т. е. в правой полуплоскости многочлен $p(z) = z^3 - 3z + 1$ имеет два нуля. ▷

Для данных многочленов найти количество корней, лежащих в правой полуплоскости:

$$12.471^*. p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2.$$

$$12.472. p(z) = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1.$$

$$12.473. p(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3.$$

12.474*. Доказать, что если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в замкнутой области $\bar{D} = D + \Gamma$ и для точек $\eta \in \Gamma$ справедливо неравенство $|\varphi(\eta)| < |f(\eta)|$, то число нулей функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, лежащих в области D , совпадает с числом нулей функции $f(z)$ (теорема Руше).

12.475*. Доказать основную теорему высшей алгебры: многочлен $p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ степени n имеет в плоскости (z) точно n нулей.

Опираясь на теорему Руше (задача 12.474), найти число нулей данных функций в указанных областях:

12.476*. $F(z) = z^5 + 2z^2 + 8z + 1$: а) в круге $|z| < 1$; б) в кольце $1 \leq |z| < 2$.

12.477. $F(z) = z^3 - 5z + 1$: а) в круге $|z| < 1$; б) в кольце $1 \leq |z| < 2$; в) в кольце $2 \leq |z| < 3$.

§ 7. Ряды Фурье. Интеграл Фурье

1. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. Тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

является ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$ (как, впрочем, и на всяком отрезке длины 2π), т. е. интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю.

Если $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ (т. е. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < +\infty$), то существуют числа

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 0, 1, \dots,$$

называемые коэффициентом Фурье функции $f(x)$; ряд

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$. Члены ряда (1) можно записать в виде гармоник

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = A_k \cos(kx - \varphi_k)$$

с амплитудой $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, частотой $\omega_k = k$ и фазой $\varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}$.

Для функции $f(x)$ такой, что $f^2(x) \in L(-\pi, \pi)$, справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Если же $f(x) \in L\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, то коэффициенты Фурье записываются в виде

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \cos \frac{2\pi kx}{l} dx, \quad \beta_k = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \sin \frac{2\pi kx}{l} dx, \quad (2)$$

а ряд Фурье — в виде

$$S(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{2\pi kx}{l} + \beta_k \sin \frac{2\pi kx}{l} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i \frac{2\pi kx}{l}}. \quad (3)$$

Последний ряд называется *рядом Фурье в комплексной форме*. Здесь

$$c_k = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi kx}{l}} dx, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

и для $k \geq 0$

$$c_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} = \bar{c}_k.$$

Суммы рядов (1) и (3) имеют соответственно периоды 2π и l .

Функция $f(x)$ называется *кусочно гладкой* на отрезке $[a, b]$, если сама функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ имеют на $[a, b]$ конечное число точек разрыва 1-го рода.

Теорема. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом l кусочно гладка на отрезке $[-l/2, l/2]$, то ряд Фурье (3) сходится к значению $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности и к значению $(f(x+0) + f(x-0))/2$ в точке разрыва, т. е.

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi kx}{l}}. \quad (4)$$

Если, дополнительно, $f(x)$ непрерывна на всей оси, то ряд (4) сходится к $f(x)$ равномерно.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \operatorname{sign} x, \quad -\pi < x < \pi,$$

и, пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

△ Так как функция нечетная, то (см. задачу 12.479)

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sign} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos nx}{n} \Big|_0^\pi \right) = \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(2m-1)} & \text{при } n = 2m-1, \\ 0 & \text{при } n = 2m, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $-\pi < x < \pi$

$$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1},$$

откуда при $x = \pi/2$ получаем

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1},$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}. \quad \triangleright$$

12.478. Доказать, что если $f(x)$ имеет период l , то при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+l} f(x) dx = \int_0^l f(x) dx = \int_{-l/2}^{l/2} f(x) dx.$$

12.479. Записать выражения коэффициентов Фурье (2) для четной и нечетной функций на $[-l/2, l/2]$.

Разложить периодическую с периодом l функцию в ряд Фурье, построить графики его первых частичных сумм $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$ и найти значение $S(x_0)$ суммы полученного ряда в заданной точке x_0 :

$$12.480. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{при } -\pi < x < 0, \end{cases} \quad l = 2\pi, x_0 = \pi.$$

12.481. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$, $l = 2\pi$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

12.482. $f(x) = |x|$ при $x \in (-1, 1)$, $l = 2$, $x_0 = 1$.

Разложить в ряд Фурье следующие функции периода l :

12.483. $f(x) = |\cos x|$, $-\pi < x < \pi$; $l = 2\pi$.

12.484. $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$; $l = 2\pi$.

12.485. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\tau < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < \tau; \end{cases} l = 2\tau$.

12.486. $f(x) = |\sin x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$; $l = 2\pi$.

12.487. $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$; $l = 1$.

12.488. $f(x) = 10 - x$, $5 < x < 15$; $l = 10$.

12.489. $f(x) = \sin ax$, $-\pi < x < \pi$, $l = 2\pi$.

12.490. $f(x) = \cos ax$, $-\pi < x < \pi$, $l = 2\pi$.

12.491. $f(x) = \operatorname{sh} ax$, $-\pi < x < \pi$, $l = 2\pi$.

12.492. $f(x) = \operatorname{ch} ax$, $-\pi < x < \pi$, $l = 2\pi$.

Доопределяя необходимым образом заданную в промежутке $(0, a)$ функцию до периодической, получить для нее: а) ряд Фурье по косинусам, б) ряд Фурье по синусам.

12.493. $f(x) = e^x$, $x \in (0, \ln 2)$.

12.494. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

12.495. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$

12.496. $f(x) = x \sin x$, $x \in (0, \pi)$.

12.497. $f(x) = x^2$, $x \in (0, 1)$.

12.498. $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$, $x \in (0, \pi)$.

12.499. $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in (0, \pi)$. **12.500.** $f(x) = x$, $x \in (0, l)$.

12.501. Используя ряд Фурье, полученный в задаче 12.482, найти суммы следующих рядов:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; б) ${}^* \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(4k+1)^2(4k+3)^2}$.

12.502. Используя ряд Фурье, полученный в задаче 12.497, найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$.

12.503. Используя равенство Парсеваля для функции задачи 12.481, найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

12.504*. Зная выражение ядра Дирихле

$$\mathcal{D}_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

найти выражение ядра Фейера $\mathcal{F}_n(x)$:

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \mathcal{D}_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx.$$

12.505. Используя равенство Парсеваля для функции задачи 12.484, найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

12.506. Зная выражение для ядра Дирихле (см. задачу 12.504), получить интегральное представление для частных сумм

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряда Фурье функции $f(x)$ периода 2π .

12.507. Зная выражение для ядра Фейера (см. задачу 12.504), получить интегральное представление сумм Фейера

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x)$$

функции $f(x)$ периода 2π .

12.508.** Используя полученное в задаче 12.507 выражение для сумм Фейера $\sigma_n(f, x)$, показать, что для непрерывной на оси функции $f(x)$ в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f, x) = f(x)$.

2. Двойные ряды Фурье. Если функция $f(x, y)$ имеет период l по переменной x , период h по переменной y , непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в прямоугольнике $K = \{(x, y) | -l/2 < x < l/2, -h/2 < y < h/2\}$, то $f(x, y)$ представима двойным рядом Фурье

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} \left(a_{m,n} \cos \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h} + \right. \\ & + b_{m,n} \sin \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h} + c_{m,n} \cos \frac{2\pi mx}{l} \sin \frac{2\pi ny}{h} + \\ & \left. + d_{m,n} \sin \frac{2\pi mx}{l} \sin \frac{2\pi ny}{h} \right), \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} 1/4 & \text{при } m = n = 0, \\ 1/2 & \text{при } m > 0, \quad n = 0 \text{ или } m = 0, \quad n > 0, \\ 1 & \text{при } m > 0, \quad n > 0 \end{cases}$$

и при $m \geq 0, n \geq 0$

$$a_{m,n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \cos \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h} dx dy,$$

$$b_{m,n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \sin \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h} dx dy,$$

$$c_{m,n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \cos \frac{2\pi mx}{l} \sin \frac{2\pi ny}{h} dx dy,$$

$$d_{m,n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \sin \frac{2\pi mx}{l} \sin \frac{2\pi ny}{h} dx dy,$$

В комплексной форме ряд Фурье для $f(x, y)$ записывается в виде

$$f(x, y) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} e^{2\pi i(\frac{mx}{l} + \frac{ny}{h})},$$

где

$$c_{m,n} = \frac{1}{lh} \iint_K f(x, y) e^{-2\pi i(\frac{mx}{l} + \frac{ny}{h})} dx dy, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Разложить в двойной ряд Фурье функцию $f(x, y) = xy$ в квадрате $-\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi$.

▷ Принимая во внимание четность или нечетность подынтегральных функций, находим

$$a_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K xy \cos mx \cos ny dx dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} y \cos ny dy \int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx dx = 0, \quad m, n \geq 0;$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} y \cos ny dy \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx dx = 0, \quad m, n \geq 0;$$

$$c_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin ny dy \int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx dx = 0, \quad m, n \geq 0;$$

$$d_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin ny dy \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} y \sin ny dy \int_0^{\pi} x \sin mx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left(-y \frac{\cos ny}{n} \Big|_0^\pi + \frac{\sin ny}{n^2} \Big|_0^\pi \right) \left(-x \frac{\cos mx}{m} \Big|_0^\pi + \frac{\sin mx}{m^2} \Big|_0^\pi \right) = \\ = \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{\pi(-1)^{m+1}}{m} = (-1)^{m+n} \frac{4}{mn}, \quad m, n \geq 1.$$

Следовательно, при $x \in (-\pi, \pi), y \in (-\pi, \pi)$

$$xy = 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\sin mx \sin ny}{mn}. \quad \triangleright$$

Разложить в двойной ряд Фурье следующие функции:

12.509. $f(x, y) = xy$ при $0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi, l = h = 2\pi$.

12.510. $f(x, y) = \frac{\pi - x}{2} \cdot \frac{\pi - y}{2}$ при $-\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi$,
 $l = h = 2\pi$.

12.511. $f(x, y) = x^2y$ при $-1 < x < 1, -2 < y < 2$, $l = 2$,
 $h = 4$.

12.512. $f(x, y) = x \left(\frac{\pi - y}{2} \right)^2$ при $-1 < x < 1, -\pi < y < \pi$,
 $l = 2, h = 2\pi$.

3. Интеграл Фурье. Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, т. е. $f(t) \in L(-\infty, +\infty)$, и кусочно гладка на каждом конечном отрезке действительной оси, то она представляется в виде интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad (5)$$

где

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt. \quad (6)$$

Преобразование (6), которое будем обозначать $\mathfrak{F}[f]$, называют *прямым*, а (5) — *обратным преобразованием Фурье*, выраженным в комплексной форме. В действительной форме эти преобразования записываются в виде:

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (7)$$

(прямое) и

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) d\omega \quad (8)$$

(обратное), $\omega = 2\pi\nu$.

Если функция $f(t)$ четная, то (7) и (8) записываются в следующей симметрической форме:

$$\mathfrak{F}_c[f] = \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (9)$$

и

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (10)$$

и называются парой *косинус-преобразований Фурье*. Если же $f(t)$ нечетная, то имеем пару *синус-преобразований Фурье*

$$\mathfrak{F}_s[f] = \hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

и

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Пример 3. Найти преобразование Фурье для функции $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$.

Подставляя заданную $f(t)$ в (6), получаем

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(2\pi i \nu - \alpha)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(2\pi i \nu + \alpha)t} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha - 2\pi i \nu} e^{(\alpha - 2\pi i \nu)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{\alpha + 2\pi i \nu} e^{-(2\pi i \nu + \alpha)t} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{\alpha - 2\pi i \nu} + \frac{1}{\alpha + 2\pi i \nu} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 \nu^2}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathfrak{F}[e^{-\alpha|t|}] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 \nu^2}, \quad \alpha > 0.$$

Подставляя это выражение в (5), получаем

$$e^{-\alpha|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i \nu t}}{\alpha^2 + 4\pi^2 \nu^2} d\nu = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega. \quad (*)$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \frac{\sin \omega t}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = 0. \quad \triangleright$$

Пример 4. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0.$$

▷ Так как функция $f(t)$ четная, получим пару косинус-преобразований Фурье. Потому воспользуемся формулами (9) и (10). Используя результат задачи 8.192, получаем

$$\mathfrak{F}_c[e^{-\alpha t^2}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}},$$

$$e^{-\alpha t^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cos \omega t d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cos \omega t d\omega. \triangleright$$

Найти преобразование Фурье в комплексной форме для функций:

12.513. $f(t) = \operatorname{sign}(t-a) - \operatorname{sign}(t-b)$, $b > a$.

12.514. $f(t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{|t|}{a}\right) & \text{при } |t| < a, \\ 0 & \text{при } |t| > a. \end{cases}$

12.515. $f(t) = \begin{cases} \cos at & \text{при } |t| < \pi/a, \\ 0 & \text{при } |t| > \pi/a, \end{cases} \quad a > 0.$

12.516. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} t & \text{при } |t| < 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$

Найти пару косинус- или синус-преобразований Фурье указанных функций:

12.517*. $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$, $a > 0$.

12.518*. $f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}$, $a > 0$.

12.519. $f(t) = te^{-t^2}$.

12.520. $f(t) = e^{-\alpha|t|} \cos \beta t$, $\alpha > 0$.

12.521. Доказать, что преобразование (6) является непрерывной функцией, причем $\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$.

4. Спектральные характеристики ряда и интеграла Фурье. Спектральной функцией $S(\nu_k)$ ряда Фурье или спектральной плотностью называется отношение коэффициента Фурье функции $f(x)$ периода l

$$c_k = c(\nu_k) = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(u) e^{-2\pi i \nu_k u} du,$$

$\nu_k = \frac{k}{l}$, $k \in \mathbb{Z}$, к приращению частоты

$$\Delta \nu_k = \frac{k+1}{l} - \frac{k}{l} = \frac{1}{l},$$

т. е.

$$S(\nu_k) = \frac{C(\nu_k)}{\Delta \nu_k} = \int_{-l/2}^{l/2} f(u) e^{-2\pi i \nu_k u} du.$$

Амплитудным спектром $\rho(\nu_k)$ называется модуль спектральной функции, а фазовым спектром $\Phi(\nu_k)$ — взятый с обратным знаком аргумент спектральной функции, т. е.

$$\rho(\nu_k) = |S(\nu_k)| = l|c(\nu_k)|$$

и

$$\Phi(\nu_k) = -\arg S(\nu_k).$$

На графиках $\rho(\nu_k)$ и $\Phi(\nu_k)$ обычно строят только ординаты ρ и Φ в точках ν_k и спектр называют линейчатым.

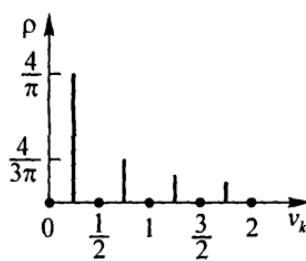
Пример 5. Найти спектральную функцию ряда Фурье и построить амплитудный и фазовый спектры для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-2, -1), \\ 1 & \text{при } x \in (-1, 1), \quad f(x+4) = f(x), \\ 0 & \text{при } x \in (1, 2). \end{cases}$$

◀ Имеем $\nu_k = k/4$ и

$$\begin{aligned} S(\nu_k) &= \int_{-2}^2 f(x) e^{-2\pi i \nu_k x} dx = \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-2\pi i \nu_k x} dx = \left. \frac{e^{-2\pi i \nu_k x}}{-2\pi i \nu_k} \right|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{\pi \nu_k} \frac{e^{2\pi i \nu_k} - e^{-2\pi i \nu_k}}{2i} = \frac{\sin 2\pi \nu_k}{\pi \nu_k}. \end{aligned}$$

Следовательно,



$$\Phi(\nu_k) = -\arg S(\nu_k) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \sin 2\pi\nu_k \geq 0, \\ -\pi, & \text{если } \sin 2\pi\nu_k < 0. \end{cases}$$

Графики $\rho(\nu_k)$ и $\Phi(\nu_k)$ представлены на рис.3. ▷ Спектральной функцией интеграла Фурье называется прямое преобразование Фурье

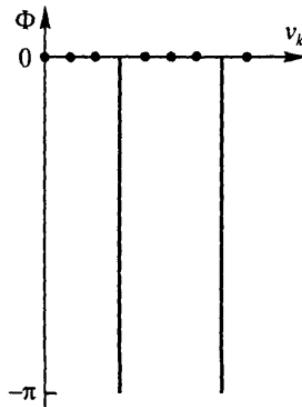


Рис. 3

Величина $\rho(\nu) = |S(\nu)|$ называется *амплитудным спектром*, а величина $\Phi(\nu) = -\arg S(\nu)$ — *фазовым спектром*.

Найти спектральные функции $S(\nu_k)$ или $S(\nu)$ и построить амплитудные и фазовые спектры следующих функций:

$$12.522. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in (-2T, -T), \\ -1 & \text{при } t \in (-T, 0), \\ 1 & \text{при } t \in (0, T), \\ 0 & \text{при } t \in (T, 2T), \end{cases} \quad f(t+4T) = f(t).$$

$$12.523. f(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{при } t \in (1, 3), \end{cases} \quad f(t+3) = f(t).$$

$$12.524. f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| < a, \\ 0 & \text{при } |t| > a, \end{cases} \quad a > 0.$$

$$12.525^*. f(t) = \begin{cases} \cos \pi t & \text{при } |t| \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{при } |t| > 1/2. \end{cases}$$

$$12.526. f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{при } t \in (-1, 0), \\ 1-t & \text{при } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$$

$$12.527. f(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } t \in (0, 2), \\ 0 & \text{при } t \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{cases}$$

5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Аналитическое вычисление преобразования Фурье (спектральной функции) (11) и обратного преобразования (5) вызывает, как правило, значительные трудности. Разработаны методы их численной реализации, одним из которых является так называемое *дискретное преобразование Фурье*:

$$\tilde{S}(\nu_n) = y_n = \frac{T}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{-i \frac{\pi k n}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (12)$$

где $t_k = k \frac{T}{2N}$ (T — длина заданного интервала) и $\nu_n = n \frac{1}{T}$. Обратное к (12) преобразование имеет вид

$$f(t_k) = x_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{2N-1} y_n e^{i \frac{\pi k n}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (13)$$

Преобразования (12) и (13) выполняются с помощью так называемых *быстрых алгоритмов* (БПФ), состоящих в том, что если $2N = r_1 r_2 \dots r_n$, r_ν — целые ≥ 2 , то матрица преобразования (12) (или (13))

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{2N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(2N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q^{2N-1} & q^{2(2N-1)} & \dots & q^{(2N-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $q = e^{-i \frac{\pi}{N}}$ ($q = e^{i \frac{\pi}{N}}$ для (13)), представляется в виде произведения n квадратных матриц W_ν порядка $2N$,

$$W = W_n W_{n-1} \dots W_2 W_1, \quad (14)$$

имеющих каждая по $r_\nu \cdot 2N$ отличных от нуля элементов. Умножение матрицы W_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) на вектор-столбец $Z = (z_0, z_1, \dots, z_{2N-1})^\top$ за счет отбрасывания умножения на нули может быть произведено за $r_\nu \cdot 2N$ операций комплексного умножения на множители q^k и сложения. Все ДПФ (12) вычисляется тогда за $(r_1 + r_2 + \dots + r_n)2N$ таких операций и умножения конечного результата на множитель $T/2N$.

Если $2N = 2^n$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n = 2$), то в качестве матрицы $W_m = (c_{\nu,j}^{(m)})$, $k, j = 1, 2, \dots, 2^n$, для разложения (14) можно взять матрицу, элементы которой выражаются следующим образом ($q = e^{-i \frac{\pi}{2^{n-2}}}$): пусть $\nu = 0, 1, \dots, 2^{n-m}-1$ и $\mu = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$, тогда

$$c_{\nu \cdot 2^m + \mu, \nu \cdot 2^{m-1} + \mu}^{(m)} = c_{\nu \cdot 2^m + 2^{m-1} + \mu, \nu \cdot 2^{m-1} + \mu}^{(m)} = 1,$$

$$c_{\nu \cdot 2^m + \mu, 2^{n-1} + \nu \cdot 2^{m-1} + \mu}^{(m)} = -c_{\nu \cdot 2^m + 2^{m-1} + \mu, 2^{n-1} + \nu \cdot 2^{m-1} + \mu}^{(m)} = q^{(\mu-1)2^{n-m}}, \quad (15)$$

$$c_{k,j}^{(m)} = 0 \quad \text{для остальных пар } (k,j).$$

12.528. Выписать матрицы W_1 , W_2 и W_3 , соответствующие формулам (15) при $2N = 2^3 = 8$.

12.529. Пусть $X = (x_0, x_1, \dots, x_7)^\top$. Составить произведения $Z^{(1)} = W_1 X$, $Z^{(2)} = W_2 Z^{(1)} = W_2(W_1 X)$ и $Z^{(3)} = W_3 Z^{(2)} = W_3(W_2 W_1 x)$. Сравнить полученный результат с произведением WX .

Для конечной последовательности комплексных чисел $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ ДПФ по формуле (12) можно представить в виде

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1),$$

а обратное ДПФ (ОДПФ) — в виде

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1).$$

Обозначим кратко ДПФ и ОДПФ соответственно

$$Y = \mathfrak{F}[X] \quad \text{и} \quad X = \mathfrak{F}^{-1}[Y],$$

где $X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^\top$, $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^\top$.

Глава 13

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Элементарные функции

1. Понятие функции комплексной переменной. Множество точек E расширенной комплексной плоскости ($z = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству. Связное открытое множество точек комплексной плоскости называется *областью* и обозначается через D , G и т. п. Область D называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством: в противном случае область D называется *многосвязной*.

Если каждому комплексному числу z , принадлежащему области D , поставлено в соответствие некоторое комплексное число w , то говорят, что в области D определена комплексная функция $w = f(z)$.

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда функция $w = f(z)$ может быть представлена с помощью двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ действительных переменных x и y :

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

где

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Пример 1. Указать область, определяемую условием $|z| - \operatorname{Im} z < 1$.
« Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{Im} z = y$, то получаем неравенство

$$\sqrt{x^2 + y^2} - y < 1$$

или

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 1 + y.$$

Из последнего неравенства следует, что $y > -1$. Возводя обе части неравенства в квадрат, находим $x^2 + y^2 < 1 + 2y + y^2$. Следовательно, искомая область определяется неравенством $y > \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, т. е. представляет собой открытое множество точек, ограниченное графиком параболы $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ и содержащее точку $O(0, 0)$. »

Пример 2. Найти действительную и мнимую части функции $f(z) = iz^2 - \bar{z}$.

▷ Полагая $z = x + iy$, находим

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = i(x + iy)^2 - (x - iy) = \\ &= i(x^2 - y^2 + 2ixy) - (x - iy) = -x(1 + 2y) + i(x^2 - y^2 + y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = -x(1 + 2y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = x^2 - y^2 + y. \quad \triangleright$$

Описать области, заданные следующими соотношениями, и установить, являются ли они односвязными:

- | | |
|--|--|
| 13.1. $ z - z_0 < R$. | 13.2. $1 < z - i < 2$. |
| 13.3. $2 < z - i < +\infty$. | 13.4. $0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$. |
| 13.5. $ z - z_0 > R$. | 13.6. $0 < z + i < 2$. |
| 13.7. $\operatorname{Im}(iz) < 1$. | 13.8. $\operatorname{Re} \frac{1}{z} > \frac{1}{4}$. |

Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

- | | |
|---|--|
| 13.9* . $\operatorname{Im} \frac{z+1}{z-i} = 0$. | 13.10. $ z - i + z + i < 4$. |
| 13.11. $\operatorname{Re} \frac{z-2i}{z+2i} = 0$. | 13.12. $ z - 5 - z + 5 < 6$. |
| 13.13. $\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$. | 13.14* . $\arg \frac{i-z}{z+i} = 0$. |

Записать с помощью неравенств следующие открытые множества точек комплексной плоскости:

- | | |
|--|--|
| 13.15. Первый квадрант. | |
| 13.16. Левая полуплоскость. | |
| 13.17. Полоса, состоящая из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние, меньшее трех. | |
| 13.18. Внутренность эллипса с фокусами в точках $1 + i$, $3 + i$ и большой полуосью, равной 3. | |
| 13.19. Внутренность угла с вершиной в точке z_0 раствора $\pi/4$, симметричного относительно луча, параллельного положительной мнимой полуоси. | |

Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

- | | |
|--|--|
| 13.20. $f(z) = i\bar{z} + 2z^2$. | 13.21. $f(z) = 2i - z + iz^2$. |
| 13.22. $f(z) = \frac{z+i}{i-\bar{z}}$. | 13.23. $f(z) = \frac{\bar{z}}{i} + \frac{i}{\bar{z}}$. |

13.24. $f(z) = \operatorname{Re}(z^2 + i) + i \operatorname{Im}(z^2 - i)$.

13.25. $f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{iz + \bar{z}}$.

Определить функцию $w = f(z)$ по известным действительной и мнимой частям:

13.26. $u(x, y) = x + y, v(x, y) = x - y$.

◀ Если $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, то $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ и $y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$. Тогда

$$u(x, y) = x + y = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - \frac{i}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\bar{z};$$

$$v(x, y) = x - y = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{i}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}\bar{z}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\bar{z} + \frac{1+i}{2}iz + \frac{1-i}{2}i\bar{z} = \\ &= \left(\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}i\right)z + \left(\frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2}i\right)\bar{z} = (1+i)\bar{z}. \end{aligned}$$

Таким образом, $f(z) = (1+i)\bar{z}$.

Рассмотренный в задаче метод позволяет в общем случае получить для функции комплексной переменной выражение, зависящее от z и \bar{z} . ▷

13.27. $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2y - 1, v(x, y) = 2xy + 2x$.

13.28. $u(x, y) = x \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2}, v(x, y) = y \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}$.

13.29. $u(x, y) = \frac{1}{x}, v(x, y) = \frac{1}{y}$.

Функция $w = f(z)$ называется *однолистной* в области D , если любым различным значениям $z_1 \neq z_2$, взятым из области D , соответствуют различные значения функции $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Найти области однолистности следующих функций:

13.30. $f(z) = z^2$.

◀ Пусть $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Найдем условие, при котором $z_1^2 = z_2^2$, хотя $z_1 \neq z_2$. Имеем $\rho_1^2 e^{i2\varphi_1} = \rho_2^2 e^{i2\varphi_2}$. Отсюда заключаем, что $\rho_1 = \rho_2$, а $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2k\pi$ ($k = 0, 1$). Так как $z_1 \neq z_2$, то $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. Таким образом, область однолистности функции $w = z^2$ не должна содержать внутри себя точек, модули которых совпадают, а аргументы отличаются

на π , т. е. областью однолистности является любая полуплоскость, например $\operatorname{Re} z > 0$ или $\operatorname{Im} z > 0$. \triangleright

$$13.31. f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}. \quad 13.32. f(z) = e^z.$$

$$13.33. f(z) = e^{3iz}.$$

$$13.34. f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Геометрически заданную на D функцию $f(z)$ можно рассматривать как отображение области D плоскости (z) на некоторое множество G плоскости (w) , являющееся совокупностью значений $f(z)$, соответствующих всем $z \in D$.

Пример 3. Исследовать отображение, осуществляемое линейной функцией $w = az + b$.

Это отображение можно рассматривать как композицию трех простейших отображений. Действительно, положим

$$w_1 = |a|z,$$

$$w_2 = e^{i \arg a} w_1,$$

$$w_3 = w_2 + b.$$

Тогда нетрудно видеть, что $w = w_3 \circ w_2 \circ w_1$. Из геометрического смысла произведения и суммы комплексных чисел ясно, что отображение w_1 есть отображение растяжения (сжатия при $0 < |a| < 1$), отображение w_2 представляет собой поворот всей плоскости (w_1) относительно начала на угол $\varphi = \arg a$ и, наконец, отображение w_3 есть параллельный перенос плоскости w_2 на вектор, изображающий комплексное число b . \triangleright

Найти образы указанных точек при заданных отображениях:

$$13.35. z_0 = 1 + i, \quad w = z^2 + i.$$

$$13.36. z_0 = \frac{1+i}{2}, \quad w = (z - i)^2.$$

$$13.37. z_0 = 1 - \frac{i}{2}, \quad w = \frac{\operatorname{Im} z}{z}.$$

$$13.38. z_0 = 3 - 2i, \quad w = \frac{z}{\bar{z}}.$$

13.39. Найдите образы координатных осей Ox и Oy при отображении $w = \frac{z+i}{z-i}$.

Для отображений, задаваемых указанными функциями, найти образы линий $x = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и образ области $|z| < r$, $\operatorname{Im} z > 0$:

$$13.40. w = z^2. \quad 13.41^{**}. w = \frac{1}{z}.$$

Один из наиболее употребляемых способов задания функций — задание с помощью формулы — в случае функций комплексной переменной часто приводит к многозначным функциям.

Говорят, что в области D определена многозначная функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие несколько комплексных чисел w .

Пример 4. Найти все значения функции $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{z}$ в точке $z_0 = i$.

Так как $|i| = 1$ и $\arg i = \pi/2$, то в соответствии с определением корня n -й степени из комплексного числа (см. Часть 2, гл. 5, § 5) находим

$$w_k = \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{i}{2}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1.$$

Таким образом,

$$w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = -i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{5\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \frac{5\pi}{4} - i \sin \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \triangleright$$

Найти все значения следующих функций в указанных точках:

13.42. $w = z + \sqrt[4]{z}$, $z_0 = -1$.

13.43. $w = \frac{\sqrt{z} + i}{\sqrt{z} - i}$, $z_0 = i$.

13.44. $w = \sqrt{1 - \sqrt{z}}$, $z_0 = -i$.

13.45. $w = \sqrt{i + \sqrt{z}}$, $z_0 = -1$.

Найти $\operatorname{Arg} f(z)$, если $z = re^{i\varphi}$:

13.46. $f(z) = z^2$. 13.47. $f(z) = z^3$.

13.48. $f(z) = \sqrt[3]{z + 1}$. 13.49. $f(z) = \sqrt{z - 8}$.

13.50. $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$. 13.51. $f(z) = \sqrt{(z - 2)/(z + 1)}$.

2. Основные элементарные функции комплексной переменной. Следующие функции (как однозначные, так и многозначные) называются **основными элементарными**:

1. Дробно-рациональная функция

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Частными случаями этой функции являются:

а) линейная функция

$$az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0;$$

6) степенная функция

$$z^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

в) дробно-линейная функция

$$\frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0;$$

г) функция Жуковского

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

2. Показательная функция

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

3. Тригонометрические функции

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), & \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, & \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned}$$

4. Гиперболические функции

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), & \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned}$$

5. Логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

Функция $\operatorname{Ln} z$ является многозначной. В каждой точке z , отличной от нуля и ∞ , она принимает бесконечно много значений. Выражение $\ln |z| + i \arg z$ называется главным значением логарифмической функции и обозначается через $\operatorname{Ln} z$. Таким образом,

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i.$$

6. Общая степенная функция

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Эта функция многозначная, ее главное значение равно $e^{a \ln z}$. Если $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то получаем многозначную функцию — корень n -й степени из комплексного числа:

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi))} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}.$$

7. Общая показательная функция

$$a^z = e^{z \ln a}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Главное значение этой многозначной функции равно $e^{z \ln a}$. В дальнейшем при $a > 0$ полагаем $a^z = e^{z \ln a}$.

8. Обратные тригонометрические функции $\text{Arcsin } z$, $\text{Arccos } z$, $\text{Arctg } z$ и обратные гиперболические функции $\text{Arsh } z$, $\text{Arch } z$, $\text{Arth } z$. Определения этих многозначных функций рассмотрены в примере 7 и задачах 13.70–13.74.

Отображения, осуществляемые некоторыми элементарными функциями и простейшие свойства этих функций будут рассмотрены позднее (в § 3); здесь ограничимся только вычислением конкретных значений этих функций.

Пример 5. Вычислить $\sin i$.

« Имеем:

$$\sin i = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = i \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = i \operatorname{sh} 1. \quad \triangleright$$

Пример 6. Вычислить $\operatorname{ch}(2 - 3i)$.

« Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(2 - 3i) &= \frac{e^{2-3i} + e^{-2+3i}}{2} = \frac{1}{2}(e^2(\cos 3 - i \sin 3) + e^{-2}(\cos 3 + i \sin 3)) = \\ &= \cos 3 \operatorname{ch} 2 - i \sin 3 \operatorname{sh} 2. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Пример 7. Найти аналитическое выражение для функции $\text{Arccos } z$ при любом комплексном z . Вычислить $\text{Arccos } 2$.

« Так как равенство $w = \text{Arccos } z$ равносильно равенству $\cos w = z$, то можем записать $z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$. Отсюда находим

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0.$$

Решая это квадратное относительно e^{iw} уравнение, получаем

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

(здесь рассматриваются оба значения корня). Из этого равенства находим $iw = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$, т. е.

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{Arccos} 2 = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi. \triangleright$$

13.52. Используя данное выше определение функции e^z , доказать, что e^z имеет чисто мнимый период $2\pi i$, т. е. $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Выделить действительную и мнимую части следующих функций:

$$\mathbf{13.53. } w = e^{1-z}. \quad \mathbf{13.54. } w = e^{(\bar{z}+i)^2}.$$

$$\mathbf{13.55. } w = \sin(z-i). \quad \mathbf{13.56. } w = \operatorname{sh}(z+2i).$$

$$\mathbf{13.57. } w = \operatorname{tg}(z+1). \quad \mathbf{13.58. } w = 3^{1/z}.$$

Доказать тождества:

$$\mathbf{13.59. } \sin iz = i \operatorname{sh} z. \quad \mathbf{13.60. } \cos iz = \operatorname{ch} z.$$

$$\mathbf{13.61. } \operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z.$$

Вычислить значения функции в указанных точках:

$$\mathbf{13.62. } \cos(1+i). \quad \mathbf{13.63. } \operatorname{ch} i. \quad \mathbf{13.64. } \operatorname{sh}(-2+i).$$

$$\mathbf{13.65. } \ln(-1). \quad \mathbf{13.66. } \ln i. \quad \mathbf{13.67. } \ln \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{13.68. } \operatorname{ctg} \pi i. \quad \mathbf{13.69. } \operatorname{th} \pi i.$$

Получить аналитические выражения для указанных ниже функций и для каждой из них найти значение в соответствующей точке z_0 (см. пример 7):

$$\mathbf{13.70. } w = \operatorname{Arcsin} z, \quad z_0 = i.$$

$$\mathbf{13.71. } w = \operatorname{Arctg} z, \quad z_0 = i/3.$$

$$\mathbf{13.72. } w = \operatorname{Arsh} z, \quad z_0 = i.$$

$$\mathbf{13.73. } w = \operatorname{Arch} z, \quad z_0 = -1.$$

$$\mathbf{13.74. } w = \operatorname{Arth} z, \quad z_0 = 1-i.$$

Найти значение модуля и главное значение аргумента заданных функций в указанных точках:

$$\mathbf{13.75. } w = \sin z, \quad z_0 = \pi + i \ln 3.$$

$$\mathbf{13.76. } w = z^2 e^z, \quad z_0 = -\pi i.$$

$$\mathbf{13.77. } w = 1 + \operatorname{ch}^2 z, \quad z_0 = i \ln 2.$$

$$\mathbf{13.78. } w = \operatorname{th} z, \quad z_0 = 1 + i\pi.$$

Найти все значения степеней:

$$13.79. 2^i. \quad 13.80. (-1)^i.$$

$$13.81. (1+i)^i. \quad 13.82. (-1)^{\sqrt{2}}.$$

$$13.83. (3-4i)^{1+i}. \quad 13.84. (-3+4i)^{1+i}.$$

$$13.85. \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i}. \quad 13.86. \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1-i}.$$

Решить уравнения:

$$13.87. e^z - i = 0. \quad 13.88. e^{ix} = \cos \pi x \ (x \in \mathbb{R}).$$

$$13.89. \ln(z-i) = 0. \quad 13.90. \operatorname{sh} iz = -1.$$

3. Предел и непрерывность функции комплексной переменной. Число $A \neq \infty$ называется *пределом* функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ и обозначается $A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Говорим, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, если для любого $R > 0$ найдется $\delta = \delta(R) > 0$ такое, что для всех $z \neq z_0$ таких, что $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z)| > R.$$

Следует иметь в виду, что для данной функции $f(z)$ существование предела по любому фиксированному пути ($z \rightarrow z_0$) еще не гарантирует существование предела $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$.

Пример 8. Пусть $f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$. Показать, что $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ не существует.

«Для предела при $r \rightarrow 0$ по любому лучу $re^{i\varphi}$ имеем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}} \right) = \sin 2\varphi,$$

т.е. эти пределы различны для различных направлений — они заполняют сплошь отрезок $[-1, 1]$, и, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$$

не существует. ▷

Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0 , если она определена в этой точке и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D , называется *непрерывной* в этой области.

Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной* в области D , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек z_1 и z_2 из области D таких, что $|z_1 - z_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

13.91. Используя логическую символику, записать данное выше определение непрерывности функции в области.

Вычислить следующие пределы:

$$13.92. \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 4iz - 3}{z - i}. \quad 13.93. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{\operatorname{ch} iz}.$$

$$13.94. \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{4}} \frac{\sin iz}{\operatorname{ch} z + i \operatorname{sh} z}. \quad 13.95. \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{2iz} + 1}{e^{iz} + i}.$$

Доказать непрерывность на всей комплексной плоскости следующих функций:

$$13.96. w = \bar{z}. \quad 13.97. w = |z| \operatorname{Re} z.$$

$$13.98. w = e^{\bar{z}}. \quad 13.99. w = \cos |z|.$$

Как доопределить данные функции в точке $z = 0$, чтобы они стали непрерывными в этой точке:

$$13.100. f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}. \quad 13.101. f(z) = \frac{z \operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}.$$

$$13.102. f(z) = e^{-1/|z|}. \quad 13.103. f(z) = z/|z|.$$

13.104. Доказать, что функция $f(z) = e^{-1/z}$ непрерывна в полукруге $0 < |z| \leqslant 1, |\arg z| \leqslant \pi/2$, но не является равномерно непрерывной в этом полукруге, а в любом секторе $0 < |z| \leqslant 1, |\arg z| \leqslant \alpha < \pi/2$ она равномерно непрерывна.

§ 2. Аналитические функции. Условия Коши–Римана

1. Производная. Аналитичность функции. Если в точке $z \in D$ существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z + \Delta z \in D,$$

то он называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначается через $f'(z)$ или $\frac{df(z)}{dz}$.

Если в точке $z \in D$ функция $f(z)$ имеет производную $f'(z)$, то говорим, что функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z .

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется *аналитической в области D* . Будем также говорить, что $f(z)$ *аналитическая в точке $z_0 \in D$* , если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0 .

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической в области D , необходимо и достаточно существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих условиям Коши–Римана

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x},\end{aligned}\tag{1}$$

или, в полярных координатах,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{2}$$

При выполнении условий (1) или (2) производная $f'(z)$ может быть записана соответственно:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x},\tag{3}$$

или

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).\tag{4}$$

Формулы дифференцирования функций комплексной переменной аналогичны соответствующим формулам дифференцирования функций действительной переменной.

Пример 1. Доказать, что функция $f(z) = e^{2z}$ аналитична и найти $f'(z)$.

◀ Имеем

$$e^{2z} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y),$$

т. е.

$$u(x, y) = e^{2x} \cos 2y, \quad v(x, y) = e^{2x} \sin 2y.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x} \sin 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x} \cos 2y.$$

Следовательно, условия (1) выполняются во всей плоскости, и по первой из формул (3)

$$(e^{2z})' = 2e^{2x} \cos 2y + i2e^{2x} \sin 2y = 2e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = 2e^{2z}. \triangleright$$

Пример 2. Показать, что функция $w = z^3$ аналитична во всей комплексной плоскости (кроме $z = \infty$).

▷ Действительно, имеем $z = re^{i\varphi}$ и

$$w = z^3 = r^3 e^{i3\varphi} = r^3 \cos 3\varphi + ir^3 \sin 3\varphi,$$

причем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \cos 3\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 3r^2 \sin 3\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -3r^3 \sin 3\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 3r^3 \cos 3\varphi,$$

т. е. при любом конечном $z = re^{i\varphi}$ выполнены условия (2). Применяя первую из формул (4), имеем

$$f'(z) = (z^3)' = \frac{r}{z}(3r^2 \cos 3\varphi + i3r^2 \sin 3\varphi) = 3z^2. \triangleright$$

Пример 3. Показать, что логарифмическая функция $w = \ln z$ аналитична во всех конечных точках, кроме $z = 0$, причем

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

▷ Так как

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),$$

то имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

т. е. выполнены условия (2), и по первой из формул (4) находим

$$(\ln z)' = \frac{r}{z} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{z}. \triangleright$$

Аналитические функции находят применение при описании различных процессов.

Пример 4. Рассмотрим плоское безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ — компоненты вектора скорости \mathbf{v} течения вдоль осей x и y , и пусть

$$V(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y) \tag{5}$$

— комплексная скорость течения. Показать, что $V(z)$ — аналитическая функция.

▷ Из несжимаемости жидкости следует, что дивергенция вектора скорости тождественно равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Далее, течение является безвихревым тогда и только тогда, когда ротор его вектора скорости равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Но равенства (6) и (7) являются условиями Коши-Римана для функции (5), т. е. комплексная скорость $V(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$. ▷

Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

$$13.105^*. w = \bar{z}. \quad 13.106^*. w = \operatorname{Re} z. \quad 13.107. w = z \operatorname{Im} z.$$

$$13.108. w = z \operatorname{Re} z. \quad 13.109^{**}. w = |z|. \quad 13.110. w = |z - 1|^2.$$

13.111*. Предполагая выполненными условия Коши-Римана (1) в декартовых прямоугольных координатах, доказать справедливость условий Коши-Римана (2) в полярных координатах и справедливость формул (4) вычисления производной в полярных координатах.

Проверить выполнение условий Коши-Римана (1) или (2) и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

$$13.112. f(z) = e^{3z}. \quad 13.113. f(z) = \sin z.$$

$$13.114. f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 13.115. f(z) = \cos z.$$

$$13.116. f(z) = \ln(z^2). \quad 13.117. f(z) = \sin \frac{z}{3}.$$

13.118*. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D . Доказать, что если одна из функций

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z),$$

$$r(x, y) = |f(z)|, \quad \theta(x, y) = \arg f(z)$$

сохраняет в области постоянное значение, то и $f(z) \equiv \text{const}$ в D .

2. Свойства аналитических функций. Ряд свойств, характерных для дифференцируемых функций действительной переменной, сохраняется и для аналитических функций.

13.119. Доказать, что если $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в области D функции, то функции $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ также аналитичны в области D , а частное $f(z)/g(z)$ — аналитическая функция

во всех точках области D , в которых $g(z) \neq 0$. При этом имеют место формулы

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

13.120. Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция с областью значений $G = \{f(z) | z \in D\}$, и пусть функция $\varphi(w)$ аналитична в области G . Доказать, что $F(z) = \varphi(f(z))$ — аналитическая в области D функция.

Используя утверждение задачи 13.119, найти области аналитичности функций и их производные:

$$13.121. f(z) = \operatorname{tg} z.$$

$$13.122. f(z) = z \cdot e^{-z}.$$

$$13.123. f(z) = \frac{z \cdot \cos z}{1 + z^2}.$$

$$13.124. f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$$

$$13.125. f(z) = \frac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}.$$

$$13.126. f(z) = \frac{e^z}{z}.$$

$$13.127. f(z) = \operatorname{cth} z.$$

$$13.128. f(z) = \frac{\cos z}{\cos z - \sin z}.$$

13.129. Доказать, что действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями, т. е. их лапласианы равны нулю:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

13.130. Получить выражение лапласиана Δu в полярных координатах ($u = u(r, \varphi)$).

Заметим, что заданием действительной или мнимой части аналитическая в области D функция определяется с точностью до произвольной (комплексной) постоянной. Например, если $u(x, y)$ — действительная часть аналитической в области D функции $f(z)$, то

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y dx + u'_x dy,$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка в области D и путь интегрирования также лежит в области D .

Пример 5. Проверить, что функция $u = x^2 - y^2 - 5x + y + 2$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ и найти $f(z)$.

▷ Так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

во всей плоскости, то $u(x, y)$ — гармоническая функция, а тогда

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (2y - 1) dx + (2x - 5) dy = \int_{x_0}^x (2y_0 - 1) dx + \\ &+ \int_{y_0}^y (2x - 5) dy = (2y_0 - 1)(x - x_0) + (2x - 5)(y - y_0) = \\ &= 2xy - x - 5y + 5y_0 + x_0 - 2x_0y_0, \end{aligned}$$

т. е.

$$v(x, y) = 2xy - x - 5y + C$$

и

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 5x + y + 2 + i(2xy - x - 5y + C) = \\ &= (x^2 - 2ixy - y^2) - 5(x + iy) + (-xi + y) + 2 + Ci = z^2 - 5z - iz + 2 + Ci. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Пример 6. Показать, что функция вида

$$u(x, y) = a(x^2 + y^2) + bx + cy + d, \quad a \neq 0,$$

не является действительной (или мнимой) частью никакой аналитической функции.

▷ Действительно, это следует из соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4a \neq 0. \quad \triangleright$$

Проверить гармоничность приведенных ниже функций в указанных областях и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

13.131. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad 0 \leq |z| < +\infty$.

13.132. $v(x, y) = 2e^x \sin y, \quad 0 \leq |z| < +\infty$.

13.133. $u(x, y) = 2xy + 3, \quad 0 \leq |z| < +\infty$.

13.134. $v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad 0 < |z| < +\infty$.

$$13.135. u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

$$13.136. u(x, y) = x^2 - y^2 + xy, \quad 0 \leq |z| < +\infty.$$

$$13.137. v(x, y) = xy, \quad 0 \leq |z| < +\infty.$$

§ 3. Конформные отображения

1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Пусть $w = f(z)$ — аналитическая в точке z_0 функция и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $k = |f'(z_0)|$ геометрически равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ (точнее, при $k > 1$ имеет место растяжение, а при $k < 1$ — сжатие). Аргумент производной $\varphi = \arg f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой L , проходящей через точку z_0 , чтобы получить касательную в точке $w_0 = f(z_0)$ к образу L' этой кривой при отображении $w = f(z)$. При этом, если $\varphi > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а если $\varphi < 0$, то по часовой.

Таким образом, геометрический смысл модуля и аргумента производной состоит в том, что при отображении, осуществляющем аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, $k = |f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия бесконечно малого линейного элемента в точке z_0 , а $\varphi = \arg f'(z_0)$ — угол поворота этого элемента.

Пример 1. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ в точке $z_0 = 1 - i$ при отображении $w = z^2 - z$.

▷ Так как $w' = 2z - 1$ и $w'|_{z=1-i} = 1 - 2i$, то

$$k = |1 - 2i| = \sqrt{5} \quad \text{и} \quad \varphi = \arg(1 - 2i) = -\arctg 2. \quad \triangleright$$

Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданных отображений $w = f(z)$ в указанных точках:

$$13.138. w = z^2, \quad z_0 = \sqrt{2}(1+i). \quad 13.139. w = z^2, \quad z_0 = i.$$

$$13.140. w = z^3, \quad z_0 = 1+i. \quad 13.141. w = z^3, \quad z_0 = 1.$$

$$13.142. w = \sin z, \quad z_0 = 0. \quad 13.143. w = ie^{2z}, \quad z_0 = 2\pi i.$$

Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях:

$$13.144. w = 1/z. \quad 13.145. w = e^{z-1}.$$

$$13.146. w = \ln(z+1). \quad 13.147. w = z^2 + 2z.$$

Найти множества всех тех точек z_0 , в которых при следующих отображениях коэффициент растяжения $k = 1$:

$$13.148. w = (z-1)^2. \quad 13.149. w = z^2 - iz.$$

$$13.150. w = \frac{1+iz}{1-iz}. \quad 13.151. w = -z^3.$$

Найти множества всех тех точек z_0 , в которых при следующих отображениях угол поворота $\varphi = 0$:

$$13.152. w = -\frac{i}{z}. \quad 13.153^*. w = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

$$13.154. w = z^2 + iz. \quad 13.155. w = z^2 - 2z.$$

2. Конформные отображения. Линейная и дробно-линейная функции.

Взаимно однозначное отображение области D плоскости (z) на область G плоскости (w) называется **конформным**, если в каждой точке области D оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Критерий конформности отображения. Для того чтобы отображение области D , задаваемое функцией $w = f(z)$, было конформным, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной и аналитической в области D функцией, причем $f'(z) \neq 0$ всюду в D .

В дальнейшем образ области D при отображении функцией $w = f(z)$ обозначается через E либо через $f(D)$.

Пример 2. Показать, что отображение, осуществляющее функцией $w = z^3$, конформно в области

$$D = \{z \mid 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < 2\pi/3\}.$$

« Необходимо проверить, что заданная функция является аналитической, однолистной в D и что всюду в D $f'(z) \neq 0$. Аналитичность функции $w = z^3$ показана выше (см. пример 2 § 2), соотношение $w' = 3z^2 \neq 0$ для любого $z \in D$ очевидно. Однолистность следует из того, что область D содержится в угле с вершиной в начале координат и величиной $2\pi/3$ (см. задачу 13.31). »

Выяснить, какие из заданных функций $w = f(z)$ определяют конформные отображения указанных областей D :

$$13.156. w = (z+i)^2, \quad D = \{z \mid 1 < |z+i| < 3, 0 < \arg z < 3\pi/2\}.$$

$$13.157. w = |z|^2, \quad D = \{z \mid |z| < 1\}.$$

$$13.158. w = e^z, \quad D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}.$$

$$13.159. w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad D = \left\{ z \mid \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}.$$

$$13.160. w = (z-1)^3, \quad D = \{z \mid |z-1| < 1\}.$$

Отображение, осуществляющее линейной функцией $w = az + b$, рассмотрено выше (см. пример 3 § 1). Оно представляет собой композицию растяжения ($w_1 = |a|z$), поворота ($w_2 = e^{i\arg a}w_1$) и параллельного перевода ($w_3 = w_2 + b$). Обратная к линейной функции также есть линейная функция $z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$. Так как $w' = a \neq 0$, то отображение w конформно во всей расширенной плоскости, причем имеет две неподвижные точки $z_1 = \frac{b}{1-a}$ (при $a \neq 1$) и $z_2 = \infty$.

Пример 3. Выяснить, существует ли линейная функция, отображающая треугольник с вершинами $0, 1, i$ в плоскости (z) на треугольник с вершинами $0, 2, 1+i$ в плоскости (w) .

▫ Заметим, что треугольник с вершинами $0, 1, i$ подобен треугольнику с вершинами $0, 2, 1+i$, причем вершина в точке $z_1 = 0$ соответствует вершине в точке $w_1 = 1+i$, вершина в точке $z_2 = 1$ — вершине в точке $w_2 = 0$ и вершина в точке $z_3 = i$ — вершине в точке $w_3 = 2$. Выполним последовательно преобразования:

а) $w_1 = e^{i5\pi/4}z$ — поворот около начала координат на угол $\alpha = 5\pi/4$ против часовой стрелки;

б) $w_2 = \sqrt{2}w_1$ — гомотетия с коэффициентом $k = \sqrt{2}$;

в) $w_3 = w_2 + (1+i)$ — параллельный перенос на вектор, изображающий комплексное число $1+i$.

В результате треугольник с вершинами $0, 1, i$ отображается на треугольник с вершинами $0, 2, 1+i$, а осуществляющая это отображение целая линейная функция имеет вид

$$\begin{aligned} w = w_3 \circ w_2 \circ w_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}z + (1+i) = \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) z + 1+i = (1+i)(1-z). \end{aligned} \quad \triangleright$$

13.161. Доказать, что отображение, осуществляющее целой линейной функцией, имеет две неподвижные точки (совпадающие, если $a = 1$).

Для указанных ниже отображений найти конечную неподвижную точку z_0 (если она существует), угол поворота φ и коэффициент гомотетии k :

13.162. $w = 2z + 1$.

13.163. $w = iz + 4$.

13.164. $w = e^{i\frac{\pi}{4}}z - e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

13.165. $w = az + b$.

Дробно-линейная функция

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0,$$

осуществляет конформное отображение расширенной плоскости (z) на расширенную плоскость (w) . При этом под углом между кривыми в точке $z = \infty$ понимается угол в точке $z^* = 0$ между образами этих кривых, полученных путем отображения $z^* = \frac{1}{z}$. Простейшей дробно-линейной

функцией (отличной от линейной) является функция $w = \frac{1}{z}$, которая может быть представлена в виде композиции инверсии относительно единичной окружности $w_1 = \frac{1}{\bar{z}}$ и комплексного сопряжения $w_2 = \bar{w}_1$. Простейшая дробно-линейная функция отображает окружности плоскости (z)

в окружности плоскости (w) (прямая линия считается окружностью бесконечного радиуса). Так как общая дробно-линейная функция представляется в виде композиции линейной функции $w_1 = cz + d$, простейшей дробно-линейной $w_2 = \frac{1}{w_1}$ и снова линейной $w_3 = \frac{bc - ad}{c}w_2 + \frac{a}{c}$, то она также отображает окружность в окружность.

Дробно-линейная функция $w = w(z)$ вполне определяется заданием образов трех точек. Именно, если $z_1 \rightarrow w_1$, $z_2 \rightarrow w_2$ и $z_3 \rightarrow w_3$, то

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (1)$$

Замечание. Если одна из точек z_1 , z_2 или z_3 либо w_1 , w_2 или w_3 является бесконечно удаленной, то в формуле (1) все разности, содержащие эту точку, следует заменить единицами.

Пример 4. Найти образ окружности $x^2 + y^2 = 2x$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

« Полагая $z = x + iy$, имеем $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Подставив эти значения в уравнение окружности, находим

$$x^2 + y^2 - 2x = z \cdot \bar{z} - (z + \bar{z}) = 0,$$

и после замены $z = \frac{1}{w}$ имеем

$$\frac{1}{w\bar{w}} - \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = 0,$$

т.е. $w + \bar{w} = 1$. Если $w = u + iv$, то $w + \bar{w} = 2u$. Таким образом, окружность $x^2 + y^2 - 2x = 0$ преобразуется в прямую $u = 1/2$, параллельную мнимой оси. »

Пример 5. Найти дробно-линейное отображение, переводящее точки $-1, i, i + 1$ в точки $0, 2i, 1 - i$.

« Используя формулу (1), имеем

$$\frac{w - 0}{w - 2i} \cdot \frac{1 - i - 2i}{1 - i - 0} = \frac{z + 1}{z - i} \cdot \frac{i + 1 - i}{i + 1 + 1},$$

откуда

$$\frac{w}{w - 2i} = \frac{1}{5} \frac{z + 1}{z - i}$$

и

$$w = -\frac{2i(z + 1)}{4z - 5i - 1}. \quad \triangleright$$

Найти образы следующих линий при отображении $w = \frac{1}{z}$:

13.166. Окружности $x^2 + y^2 = y/3$.

13.167. Прямой $y = -x/2$.

13.168. Прямой $y = x - 1$.

13.169. Окружности $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

13.170. Доказать, что проходящая через начало координат окружность $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy = 0$ преобразуется функцией $w = 1/z$ в прямую, а любая прямая $Bx + Cy + D = 0$ — в окружность, проходящую через начало координат.

Найти дробно-линейное преобразование по заданным условиям:

13.171. Точки $i, 1, 1+i$ переходят в точки $0, \infty, 1$.

13.172. Точки 1 и i неподвижны, а точка 0 переходит в ∞ .

13.173. Точки $\frac{1}{2}$ и 2 неподвижны, а $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ переходит в ∞ .

13.174. Доказать, что дробно-линейное преобразование $w = \frac{az+b}{cz+d}$ имеет две неподвижные точки. При каком условии эти точки совпадают? Когда бесконечно удаленная точка является неподвижной?

Точки z_1 и z_2 называются симметричными относительно прямой, если они лежат на перпендикуляре к этой прямой по разные стороны от нее и на равных расстояниях.

Точки z_1 и z_2 называются *симметричными относительно окружности*, если они лежат на одном луче, выходящем из центра этой окружности, по разные стороны от нее и так, что произведение расстояний от этих точек до центра равно квадрату радиуса.

Точки M и N , симметричные относительно прямой или окружности в плоскости (z) , отображаются дробно-линейной функцией в точки M' и N' , симметричные относительно образа этой прямой или окружности в плоскости (w) .

13.175. Найти точки, симметричные с точкой $1+i$ относительно окружностей:

а) $|z| = 1$; б) $*|z - i| = 2$.

13.176. Для отображения $w = \frac{z-i}{z+i}$ найти образ точки, симметричной точке $1-i$ относительно:

а) прямой $y = x$; б) окружности $|z - 1| = 3$.

Пример 6. Найти отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ такое, чтобы точка $z = \alpha$ ($|\alpha| < 1$) отображалась в центр круга $w = 0$.

⟨ Запишем дробно-линейное отображение в виде

$$w = g \frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

Так как точка $z = \alpha$ переходит в точку $w = 0$, то $z_0 = \alpha$, а так как симметричной с точкой $w = 0$ является точка $w = \infty$, то z_1 является симметричной с точкой $z = \alpha$ относительно окружности $|z| = 1$, т.е.

$z_1 = \frac{1}{\bar{\alpha}}$. Поэтому

$$w = g\bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}.$$

Далее, точки окружности $|z| = 1$ переходят в точки окружности $|w| = 1$, а поэтому при $z = e^{i\varphi}$ имеем

$$1 = |g\bar{\alpha}| \left| \frac{e^{i\varphi} - \alpha}{\bar{\alpha}e^{i\varphi} - 1} \right|.$$

Но

$$\left| \frac{e^{i\varphi} - \alpha}{e^{i\varphi}\bar{\alpha} - 1} \right|^2 = \frac{(e^{i\varphi} - \alpha)(e^{-i\varphi} - \bar{\alpha})}{(e^{i\varphi}\bar{\alpha} - 1)(e^{-i\varphi}\alpha - 1)} = \frac{1 + |\alpha|^2 - e^{i\varphi}\bar{\alpha} - e^{-i\varphi}\alpha}{|\alpha|^2 + 1 - e^{i\varphi}\bar{\alpha} - e^{-i\varphi}\alpha} = 1.$$

Следовательно, $|g\bar{\alpha}| = 1$, т.е. $g\bar{\alpha} = e^{i\theta}$, и искомое отображение имеет вид

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z\bar{\alpha} - 1}. \quad (2)$$

Для отображения (2) единичного круга на себя найти параметры α и θ по заданным условиям:

13.177. $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = 0$.

13.178. $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = \pi/2$.

13.179. $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \pi/2$.

13.180. Доказать, что функция

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}, \quad \operatorname{Im} \alpha > 0, \quad (3)$$

осуществляет отображение верхней полуплоскости на единичный круг.

Определить параметры α и θ в формуле (3) по заданным условиям:

13.181. $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\pi/2$.

13.182. $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = \pi$.

13.183. $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \pi/2$.

Найти образ E области D при заданном дробно-линейном отображении:

13.184. $D = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$; $w = \frac{z - i}{z + i}$.

$$13.185^*. D = \left\{ z \mid 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}; \quad w = \frac{z}{z-1}.$$

$$13.186^*. D = \left\{ z \mid 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}; \quad w = 1 + \frac{1}{z}.$$

$$13.187. D = \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}; \quad w = i \frac{1-z}{1+z}.$$

$$13.188. D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}; \quad w = \frac{z-1}{z-2}.$$

13.189. D — двуугольник (круговая луночка), заключенный между окружностями $|z-1|=1$, $|z-i|=1$; $w = -\frac{z}{z-1-i}$.

13.190**. Найти область D в плоскости (z) , которая при отображении $w = \frac{z}{1-z}$ преобразуется во внутренность круга $|w| < r$ плоскости (w) .

3. Степенная функция. Отображение, осуществляющее степенной функцией $w = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), является конформным в любом угле $D = \left\{ z \mid \frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ (кроме точки $z=0$), причем образом этого угла является вся плоскость (w) с разрезом по положительной части действительной оси (лучу $\arg z = \frac{2k\pi}{n}$) соответствует верхний, а лучу $\arg z = \frac{2(k+1)\pi}{n}$ — нижний край разреза). Обратная функция $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi+2k\pi}{n})}$, где $k = 0, 1, \dots, n-1$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, является, как известно, многозначной. Ее однозначная ветвь (выделяемая заданием образа одной из точек) отображает плоскость (z) с разрезом по неотрицательной части действительной оси на соответствующий угол

$$E = \left\{ w \mid \frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\},$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$ — фиксировано.

Пример 7. Найти отображение внутренности двуугольника с вершинами z_1 и z_2 , образованного окружностями C_1 и C_2 , на единичный круг.

Преобразование $w_1 = -\frac{z-z_1}{z-z_2}$ отображает точку $z = \frac{z_1+z_2}{2}$ в точку $w_1 = 1$, точку $z = z_1$ — в нуль, а точку $z = z_2$ — в бесконечность. Таким образом, отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2 , отображается на положительную действительную полуось. Дуги окружностей, образующие двуугольник, отображаются в лучи $\arg w_1 = \alpha\pi$ и $\arg w_1 = -\beta\pi$. Следовательно, область D отображается на сектор $E_1 = \{w_1 \mid -\beta\pi < \arg w_1 < \alpha\pi\}$

(ср. с задачей 13.189). Повернем этот сектор на угол $\beta\pi$, т. е. произведем преобразование $w_2 = e^{i\beta\pi}w_1$, и возведем полученную функцию в степень $\frac{1}{\beta + \alpha}$:

$$w_3 = (w_2)^{\frac{1}{\beta+\alpha}}.$$

Сектор отобразится в верхнюю полуплоскость. Функция

$$w_4 = e^{i\theta} \frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \bar{w}_3^0}$$

осуществляет отображение полуплоскости на единичный круг. Величины w_3^0 и θ определяются дополнительным заданием отображения

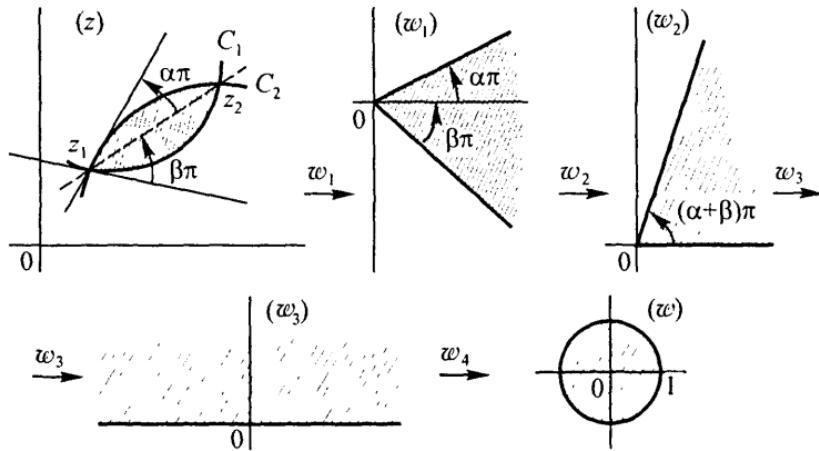


Рис. 4

точки z_0 в точку $w = 0$ и условием $\arg w'(z_0) = \gamma$. Окончательно, $w = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (рис. 4). □

Найти функцию, отображающую заданную область D плоскости (z) на верхнюю полуплоскость (в ответах указана одна из функций, осуществляющих указанное отображение, причем если функция многозначна, то имеется в виду одна из ее однозначных ветвей):

13.191. $D = \{z \mid |z| < 1, |z - 1| < 1\}.$

13.192. $D = \{z \mid -\pi/4 < \arg z < \pi/2\}.$

13.193. $D = \{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}.$

13.194. $D = \{z \mid |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}.$

13.195. $D = \{z \mid |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/4\}.$

13.196. $D = \{z \mid |z| > 2, 0 < \arg z < 3\pi/2\}.$

13.197. $D = \{z \mid |z| < 2, \operatorname{Im} z > 1\}.$

13.198. $D = \{z \mid |z| < 1, |z + i| < 1\}.$

13.199. $D = \{z \mid |z| < 1, |z + i| > 1\}.$

13.200. $D = \{z \mid |z| > 1, |z + i| < 1\}.$

13.201. D — плоскость (z) , разрезанная по отрезку $[-i, i]$.

13.202. D — плоскость (z) , разрезанная по отрезку, соединяющему точки $1+i$ и $2+2i$.

13.203. D — плоскость с разрезом по лучам $(-\infty, -R]$ и $[R, +\infty)$, $R > 0$.

13.204. D — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку, соединяющему точки 0 и ih ($h > 0$).

4. Функция Жуковского. Имеем $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $w' = \frac{1}{2} \frac{z^2 - 1}{z^2}$.

Функция Жуковского¹⁾ осуществляет конформное отображение как внешности, так и внутренности единичного круга плоскости (z) на плоскость (w) с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. Полная плоскость (z) отображается на двулистную риманову поверхность, склеенную крест-накрест по разрезам $[-1, 1]$.

Обратная функция

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

двузначна, причем каждая ветвь осуществляет отображение плоскости (w) с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внутренность или на внешность единичного круга в плоскости (z) .

Пример 8. Найти образ полярной сетки $\rho = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ при преобразовании плоскости (z) с помощью функции Жуковского.

Полагая $z = \rho e^{i\varphi}$, имеем

$$w = u + iv = \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \right) = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi + i \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi.$$

¹⁾Конформное отображение, осуществляющее функцией $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$,

было использовано впервые Н. Е. Жуковским в качестве метода получения одного класса аэродинамических профилей, названных профилями Жуковского. Профили Жуковского отображаются на круг, для которого можно легко решить задачу обтекания, а это дает возможность исследовать обтекание крыла самолета.

Следовательно,

$$u = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi,$$

и для $\rho \neq 1$ имеем

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2} = 1 \quad (4)$$

и

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1. \quad (5)$$

Из этих равенств заключаем, что окружности $|z| = \rho \neq 1$ отображаются в эллипсы плоскости (w) с полуосами $a = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$ и $b = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)$

при $\rho > 1$ или $b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right)$ при $\rho < 1$. Лучи $\varphi = \text{const}$ в плоскости (z) преобразуются в плоскости (w) в гиперболы с полуосами $a = |\cos \varphi|$ и $b = |\sin \varphi|$.

Заметим, что фокусные расстояния $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ эллипсов (4) и $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ гипербол (5) равны 1, т. е. (4) и (5) — семейства софокусных эллипсов и гипербол. ▷

Пример 9. Найти отображение плоскости (z) с разрезами по отрезку, соединяющему точки 0 и $4i$, и по отрезку, соединяющему точки $2i$ и $2 + 2i$, на внутренность единичного круга $|w| < 1$.

◀ Искомое отображение w находим в виде композиции пяти отображений. Функция $w_1 = z - 2i$ переводит точку $z = 2i$ в начало координат, а функция $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1$ осуществляет поворот плоскости (w_1) на угол $\pi/2$. Точка $z = 4i$ переходит в результате этих отображений в точку $w_2 = -2$, точка $z = 2i$ — в точку $w_2 = 0$, точка $z = 2 + 2i$ — в точку $w_2 = 2i$, а точка $z = 0$ — в точку $w_2 = 2$. Далее, в результате отображений $w_3 = w_2^2$ и $w_4 = w_3/4$ разрез отображается в отрезок $[-1, 1]$ плоскости (w_4) , и, наконец,

$$w_5 = w_4 + \sqrt{w_4^2 - 1},$$

отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внутренность единичного круга, причем выбирается та ветвь этой функции, которая при $w_4 = \infty$ обращается в нуль. Итак, $w = w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (рис. 5). ▷

В задачах 13.205–13.207 найти образцы заданных областей при отображении $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

13.205. Внутренности круга $|z| < R$ при $R < 1$ и внешности круга $|z| > R$ при $R > 1$.

13.206. Внутренности круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/2, 1]$.

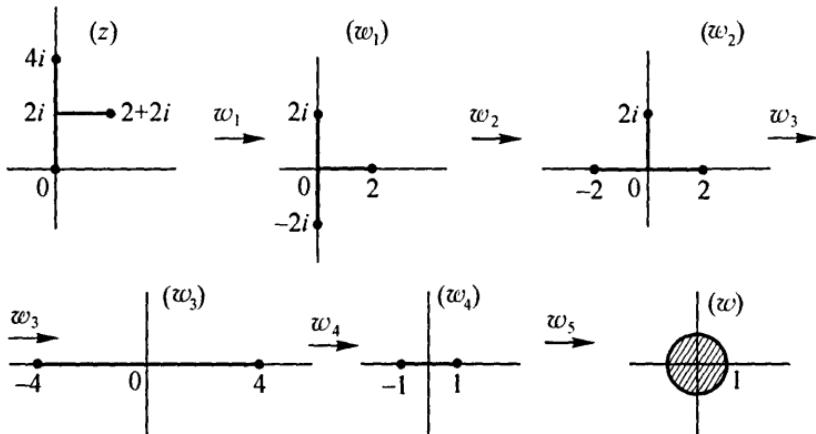


Рис. 5

13.207. Внутренности круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[-1/2, 1]$.

13.208*. Найти отображение круга $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[1/3, 1]$ на круг $|w| < 1$.

13.209*. Найти отображение области $D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| > R\}$ (верхняя полуплоскость с выкинутым полукругом) на верхнюю полуплоскость.

13.210*. Отобразить внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) на внешность единичного круга.

5. Показательная функция. Функция $w = e^z$ однолистна в любой полосе шириной менее 2π , параллельной действительной оси. Она отображает полосу $-\infty < x < +\infty, -\pi < y < \pi$ в полную плоскость (w) с разрезом по действительной отрицательной полуоси. Вся плоскость (z) отображается на бесконечнолистную риманову поверхность. Обратная функция $z = \ln w = \ln w + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \dots$, однозначна на этой римановой поверхности, а ее главное значение $\ln w = \ln |w| + i \arg w$ определяет конформное отображение всей плоскости (w) с разрезом $(-\infty, 0]$ на полосу $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ шириной 2π , параллельную действительной оси.

Пример 10. Найти отображение полосы шириной H , $0 < \operatorname{Re} z < H$, параллельной мнимой оси, на единичный круг плоскости (w) .

▷ Искомое решение получим, например, с помощью композиции отображений:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}z, \quad w_2 = \frac{\pi}{H}w_1, \quad w_3 = e^{w_2}, \quad w_4 = e^{i\theta} \frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \bar{w}_3^0}.$$

При последовательном выполнении этих отображений заданная полоса преобразуется в области, показанные на рис. 6. ▷

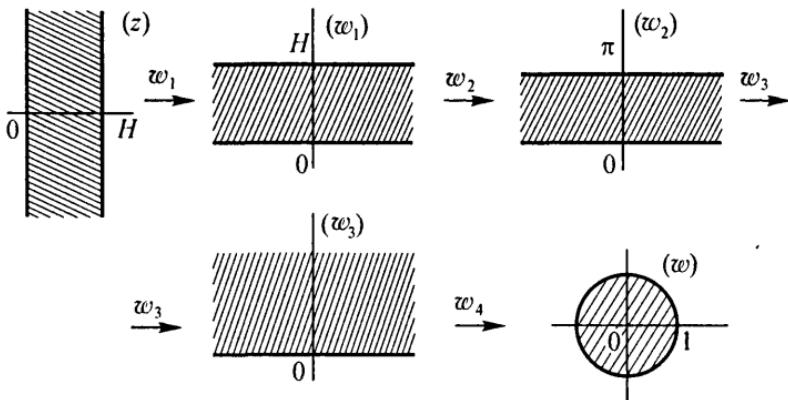


Рис. 6

Найти образ E области D при отображении $w = e^z$:

13.211. $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$.

13.212. $D = \{z \mid |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$.

13.213. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$.

13.214. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \operatorname{Re} z > 0\}$.

13.215. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

13.216. Найти образы прямых $x = C$ и $y = C$ при отображении $w = e^z$.

Найти образы следующих областей при отображении $w = \ln z$, $w(i) = \frac{\pi i}{2}$:

13.217. $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}. \quad$ **13.218.** $\{z \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

13.219. $\{z \mid |z| < 1, z \notin [0, 1]\}$.

13.220. $\{z \mid |z| \notin [-\infty, -1] \cup [0, +\infty]\}$.

6. Тригонометрические и гиперболические функции. Функция $w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ однолистна в полуполосе $-\pi < x < \pi, y > 0$ и

отображает эту полуполосу на плоскость (w) с разрезом $(-\infty, 1]$. Риманова поверхность этой функции более сложная, чем у предыдущих, так как склеивание листов происходит отдельно по лучу $(-\infty, -1)$ и по отрезку $[-1, 1]$.

Функция $w = \sin z$ сводится к предыдущей с помощью соотношения $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. К $\sin z$ и $\cos z$ сводятся и гиперболические функции: $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$, $\operatorname{ch} z = \cos iz$.

13.221.** Найти образ E полуполосы $D = \{z | 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

13.222. Найти образы прямых $x = C$, $y = C$ при отображении $w = \operatorname{ch} z$.

13.223. Найти образ E прямоугольника $D = \{z | -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, -h < \operatorname{Im} z < h, h > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

§ 4. Интеграл от функции комплексной переменной

1. Интеграл по кривой и его вычисление. Пусть l — дуга направленной кусочно гладкой кривой в плоскости (z), точки $z_k \in l$, $k = 0, 1, \dots, n$, разбивают дугу l на частичные дуги, на каждой из которых выбрано по одной точке ξ_k , $k = 1, \dots, n$. По определению полагаем

$$\int_l f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \quad (1)$$

при условии, что предел в правой части (1) существует и не зависит ни от способа разбиения дуги l на частичные дуги, ни от выбора точек ξ_k . Если функция $f(z)$ непрерывна на l , то интеграл (1) существует.

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то вычисление интеграла (1) сводится к вычислению двух криволинейных интегралов 2-го рода

$$\int_l f(z) dz = \int_l u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_l v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (2)$$

Пример 1. Пользуясь определением (1), вычислить $\int_l \operatorname{Re} z dz$, где l — радиус-вектор точки $1+i$.

◀ Разбиваем радиус-вектор точки $1+i$ на n равных частей, т. е. полагаем

$$z_k = \frac{k}{n} + i \frac{k}{n}, \quad \Delta z_k = \frac{1}{n}(1+i), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

и пусть $\xi_k = z_k$. Тогда интегральная сумма запишется в виде

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z_k \Delta z_k = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{1+i}{n} = \frac{1+i}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1+i}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_l \operatorname{Re} z \, dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(i+1)(n+1)}{2n} = \frac{1+i}{2}. \quad \triangleright$$

Пример 2. Используя представление интеграла в форме (2) и правила вычисления криволинейных интегралов 2-го рода, вычислить интеграл $\int_l |z|\bar{z} \, dz$, где l — верхняя полуокружность $|z| = 1$ с обходом против часовой стрелки.

◀ Имеем

$$\int_l |z|\bar{z} \, dz = \int_l \sqrt{x^2 + y^2}(x \, dx + y \, dy) + i \int_l \sqrt{x^2 + y^2}(-y \, dx + x \, dy).$$

Переходя к параметрическому уравнению кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, и учитывая, что $\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = 1$ в точках кривой, получаем

$$\int_l |z|\bar{z} \, dz = \int_0^\pi (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) \, dt + i \int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \pi i. \quad \triangleright$$

Если дуга l задана параметрическим уравнением $z = z(t)$, причем начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям параметра $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно, то

$$\int_l f(z) \, dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) \, dt. \quad (3)$$

Пример 3. Используя формулу (3), вычислить интеграл $\int_l (z + \bar{z}) \, dz$,

где l — дуга окружности $|z| = 1$, $\pi/2 \leq \arg z \leq 3\pi/2$.

◀ Положим $z(t) = e^{it}$, $\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$. Тогда $z'(t) = ie^{it}$ и, используя формулу (3), находим:

$$\int_l (z + \bar{z}) \, dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (e^{it} + e^{-it})ie^{it} \, dt = i \left(\frac{1}{2i}e^{2it} + t \right) \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \pi i. \quad \triangleright$$

Непосредственным суммированием вычислить следующие интегралы:

13.224. $\int_l \operatorname{Im} z \, dz$, где l — радиус-вектор точки $2 - i$.

13.225. $\int_l |z| \, dz$, где l — радиус-вектор точки $-2 - 3i$.

13.226. Доказать, что при изменении направления пути интегрирования интеграл изменит знак, т. е.

$$\int_{l^+} f(z) \, dz = - \int_{l^-} f(z) \, dz.$$

13.227. Доказать, что если a_1 и a_2 — постоянные, то

$$\int_l (a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)) \, dz = a_1 \int_l f_1(z) \, dz + a_2 \int_l f_2(z) \, dz.$$

13.228. Доказать, что если кривая интегрирования l является объединением кривых l_1 и l_2 , то

$$\int_l f(z) \, dz = \int_{l_1} f(z) \, dz + \int_{l_2} f(z) \, dz.$$

13.229*. Доказать, что имеет место оценка

$$\left| \int_l f(z) \, dz \right| \leq \int_l |f(z)| \, ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

Вычислить интегралы по заданным контурам:

13.230. $\int_l (2z + 1)\bar{z} \, dz$, $l = \{z \mid |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.

13.231. $\int_l \operatorname{Im} z \, dz$, $l = \{(x, y) \mid y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$.

13.232. $\int_l (iz^2 - 2\bar{z}) \, dz$, $l = \{z \mid |z| = 2, 0 \leq \arg z \leq \pi/2\}$.

13.233. $\int\limits_l \operatorname{Re}(z + z^2) dz, l = \{(x, y) | y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}.$

13.234. $\int\limits_l (\bar{z}^2 - z) dz, l = \{z | |z| = 1, \pi \leq \arg z \leq 2\pi\}.$

13.235. $\int\limits_l \bar{z}e^z dz, l$ — отрезок прямой от точки $z_0 = 1$ до точки $z_1 = i.$

13.236. $\int\limits_l e^{\bar{z}} dz, l$ — отрезок прямой от точки $z_0 = \pi$ до точки $z_1 = -i\pi.$

13.237. $\int\limits_l z \operatorname{Im}(z^2) dz, l = \{z | \operatorname{Re} z = 1, |\operatorname{Im} z| \leq 10\}.$

13.238. $\int\limits_l \operatorname{Re}(\cos z) \sin z dz, l = \{z | \operatorname{Re} z = \pi/3, |\operatorname{Im} z| \leq 1/2\}.$

13.239. $\int\limits_l \cos \bar{z} dz, l$ — отрезок прямой от точки $z_0 = \pi$ до точки $z_1 = \frac{\pi}{2} + i.$

13.240. $\int\limits_l \operatorname{sh} \bar{z} dz, l$ — отрезок прямой от точки $z_0 = \ln 2$ до точки $z_1 = \ln 10 + \pi i \ln 5.$

13.241. $\int\limits_l \operatorname{Im} z^2 \operatorname{Re} z^3 dz, l = \{(x, y) | y = 3x^3, 0 \leq x \leq 1\}.$

13.242. $\int\limits_l \frac{z}{\bar{z}} dz, l = \{z | |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/2\}.$

Пусть в области D задана многозначная функция $w = f(z).$ Однозначная функция $w = \varphi(z),$ аналитическая в области $D,$ называется *однозначной ветвью* функции $f(z),$ если для любой точки $z_0 \in D$ значение $\varphi(z_0)$ принадлежит множеству значений функции $f(z)$ в точке $z = z_0,$ т. е. $\varphi(z_0) \in \{f(z_0)\}.$ Многозначная в области D функция может иметь как конечное число однозначных ветвей (например, $w = \sqrt[n]{z},$ так и бесконечное (например, $w = \operatorname{Ln} z$).

Точка z комплексной плоскости, обладающая тем свойством, что обход вокруг нее в достаточно малой окрестности влечет за собой пере-

ход от одной ветви многозначной функции к другой, называется *точкой ветвления (разветвления)* рассматриваемой многозначной функции. Так, точками ветвления многозначной функции $w = \sqrt[3]{z}$ являются точки $z = 0$ и $z = \infty$. В каждой из своих точек ветвления многозначная функция принимает только одно значение, т. е. различные однозначные ветви функции в этих точках совпадают.

При интегрировании многозначной функции необходимо выделять ее однозначную ветвь. Во всех задачах ниже это достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования.

Вычислить интегралы по заданным контурам:

$$\begin{aligned} & \textbf{13.243. } \int_l \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}, \quad l = \{z \mid |z| = 1, -\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2\}, \sqrt[3]{1} = \\ & = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

«Функция $\sqrt[3]{z}$ является многозначной:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} e^{\frac{i}{3}(\varphi+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2,$$

где $\varphi = \arg z$. Условию $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ удовлетворяет та однозначная ветвь этой функции, для которой $k = 1$. Действительно, при $k = 1$ (и так как $\arg 1 = 0$)

$$\sqrt[3]{1} = e^{\frac{i}{3}(0+2\pi)} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Полагая теперь $z(\varphi) = e^{i\varphi}$ ($-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$) на кривой l , находим

$$\sqrt[3]{z} = e^{\frac{i}{3}(\varphi+2\pi)}, \quad z'(\varphi) = ie^{i\varphi},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_l \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{\frac{i}{3}(\varphi+2\pi)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3})} i d\varphi = \\ &= \frac{3}{2} e^{i(\frac{2\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3})} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{2} (e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\pi}) = \frac{9}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

$$\textbf{13.244. } \int_l \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}, \quad l = \{z \mid |z| = 1, 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi\}, \quad \sqrt[3]{1} = 1.$$

$$13.245. \int_l \sqrt{\bar{z}} dz, \quad l = \{z \mid |z| = 1, \pi/2 \leq \arg z \leq \pi\}, \quad \sqrt{1} = -1.$$

$$13.246. \int_l \frac{\ln^2 z}{z} dz, \quad l = \{z \mid |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/2\},$$

$$\ln 1 = 2\pi i.$$

$$13.247. \int_l \ln z dz, \quad l = \{z \mid |z| = 1\}, \quad \ln i = \frac{\pi}{2}i.$$

$$13.248. \int_l z^n \ln z dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad l = \{z \mid |z| = 1\}, \quad \ln(-1) = \pi i.$$

2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , ограниченной контуром Γ , и γ — замкнутый контур в D , то

$$\oint_{\gamma} f(\eta) d\eta = 0. \quad (4)$$

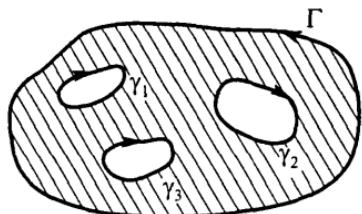
Если, дополнительно, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то

$$\oint_{\Gamma} f(\eta) d\eta = 0$$

(теорема Коши).

Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D , ограниченной контуром Γ и внутренними по отношению к нему контурами $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, и непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma^+ \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_k^-$, где знаки в верхних индексах означают направления обходов (рис. 7), то

$$\oint_{\Gamma^+ \cup \bigcup_{\gamma=1}^k \gamma^-} f(\eta) d\eta = 0 \quad (5)$$



(теорема Коши для многосвязной области).

Рис. 7

Если функция $f(z)$ определена и непрерывна в односвязной области D и такова, что для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$

$$\oint_{\gamma} f(\eta) d\eta = 0,$$

то при фиксированном $z_0 \in D$ функция

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta$$

является аналитической в области D , причем $\Phi'(z) = f(z)$.

Функция $\Phi(z)$ называется первообразной или неопределенным интегралом от $f(z)$, причем если $F(z)$ — одна из первообразных для $f(z)$, то

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\eta) d\eta = F(z_2) - F(z_1).$$

Если $f(z)$ аналитична в области D , $z_0 \in D$ и $\gamma \subset D$ — контур, охватывающий точку z_0 , то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} d\eta. \quad (6)$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}} d\eta, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Пример 4. Доказать, что если $f(z)$ — аналитическая и ограниченная в выпуклой области D функция, то для любых двух точек z_1 и z_2 из этой области имеет место оценка

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(\eta) d\eta \right| \leq \max_{z \in D} |f(z)| |z_2 - z_1|.$$

Из выпуклости области следует, что если $z_1 \in D$, $z_2 \in D$, то и отрезок, соединяющий эти точки, также принадлежит области D . Из теоремы Коши следует, что в качестве пути интегрирования можем взять именно этот отрезок, а потому, применяя оценку задачи 13.229, имеем

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(\eta) d\eta \right| \leq \max_{z \in D} |f(z)| \left| \int_{z_1}^{z_2} ds \right| = |z_2 - z_1| \max_{z \in D} |f(z)|. \quad \triangleright$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int_0^z \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = F(z) - F(0),$$

если путь интегрирования не охватывает ни одну из точек $z_{1,2} = \pm i$.

« Так как подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ является аналитической всюду, кроме точек $z_{1,2} = \pm i$, то интеграл $F(z)$ имеет смысл во всех точках, кроме $z = \pm i$, и при условии, что путь интегрирования не проходит через эти точки. Следовательно, если путь интегрирования не охватывает ни одну из точек $z_{1,2} = \pm i$, то в качестве одной из первообразных для функции $\frac{1}{z^2+1}$ можно взять однозначную функцию $F(z) = \operatorname{arctg} z$, и, учитывая, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$, имеем

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2}. \quad \triangleright$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z^2+1} dz.$$

« Запишем интеграл в виде

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{\frac{z+i}{z-i}} dz$$

и, используя формулу Коши (6), находим

$$I = 2\pi i \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z+i} \Bigg|_{z=i} = 2\pi i \frac{\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2i} = -\pi. \quad \triangleright$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz.$$

« Так как внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, то рассмотрим многосвязную область D , ограниченную окружностью $\Gamma = \{z \mid |z-2| = 3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1 = \{z \mid |z| = \rho\}$ и $\gamma_2 = \{z \mid |z-1| = \rho\}$

$(0 < \rho < 1/2)$. Тогда в этой области D функция $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ является аналитической, и по формуле (5) можем записать:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z) dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z) dz = 0,$$

откуда следует, что

$$I = \oint_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz = \oint_{\gamma_1^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz + \oint_{\gamma_2^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)} dz.$$

Применяя теперь соответственно формулы (7) и (6), находим

$$\oint_{\gamma_1^+} \frac{z-1}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{e^z}{z-1} \right)'' \Big|_{z=0} = \pi i \frac{e^z(z^2 - 4z + 5)}{(z-1)^3} \Big|_{z=0} = -5\pi i,$$

$$\oint_{\gamma_2^+} \frac{e^z/z^3}{z-1} dz = 2\pi i \frac{e^z}{z^3} \Big|_{z=1} = 2\pi ei.$$

Таким образом, $I = \pi i(2e - 5)$. \triangleright

Вычислить интегралы:

$$13.249. \int_l e^z dz, \quad l = \{(x, y) | y = x^3, 1 \leq x \leq 2\}.$$

$$13.250. \int_l \sin z dz, \quad l = \{z | z = t^2 + it, 1/2 \leq t \leq 3/2\}.$$

$$13.251. \int_l z^2 \cos z dz, \quad l — отрезок прямой от точки z_0 = i до$$

точки $z_1 = 1$.

$$13.252. \int_l \operatorname{tg} z dz, \quad l = \{(x, y) | x = y^2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$13.253*. \int_l (z - z_0)^n dz, \quad n — целое число, \quad l = \{z | |z - z_0| = R\}.$$

$$13.254. \int_l (z - z_0)^n dz, \quad n — целое число, \quad l = \{z | |z - z_0| = R, \\ \operatorname{Im}(z - z_0) > 0\}.$$

13.255. Вычислить интеграл $\int_l (z - 1) \cos z dz$ по произвольной кривой l , соединяющей точки $z_0 = \pi$ и $z_1 = \frac{3\pi}{2}i$.

13.256*. Какие значения принимает интеграл $\int_l \frac{dz}{z - \frac{1}{2}}$, если в качестве l брать произвольные кривые, соединяющие точки $z_0 = 1$ и $z_1 = \frac{1+i}{2}$?

Вычислить интегралы (обход контуров — против часовой стрелки):

$$\text{13.257. a)} \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z - 2i} dz; \quad \text{б)} \oint_{|z|=4} \frac{z^2}{z - 2i} dz.$$

$$\text{13.258. a)} \oint_{|z|=4} \frac{e^{2z}}{z - \pi i} dz; \quad \text{б)} \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z - \pi i} dz.$$

$$\text{13.259. a)} \oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{1+z^2}; \quad \text{б)} \oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2}; \quad \text{в)} \oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{1+z^2}.$$

$$\text{13.260. a)} \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2 - 1} dz; \quad \text{б)} \oint_{|z|=4} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2 - 1} dz.$$

$$\text{13.261.} \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 + 2z}. \quad \text{13.262.} \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz.$$

$$\text{13.263.} \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2 - 2z} dz.$$

$$\text{13.264.} \oint_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2 - z} dz.$$

$$\text{13.265.} \oint_C \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}, \text{ где:}$$

- a) $C = \{z \mid |z-1| = 1\}$; б) $C = \{z \mid |z+1| = 1\}$;
 в) $C = \{z \mid |z| = R, R \neq 1\}$.

$$13.266. \oint_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz.$$

$$13.267. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz.$$

$$13.268. \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)} dz.$$

$$13.269. \oint_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz.$$

$$13.270. \oint_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz.$$

$$13.271. \oint_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2 + 4)^2} dz.$$

13.272. Доказать теорему о среднем: если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| \leq R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$, то значение функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности, т. е.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi R} \oint_{|\eta-z_0|=R} f(\eta) ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

13.273*. Известно, что если $f(z) \not\equiv \text{const}$ — аналитическая в области D и непрерывная в замкнутой области $\bar{D} = D \cup L$ функция, то $\max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$ достигается только на границе области (принцип максимума модуля). Доказать, что если, кроме того, $\forall z \in \partial D f(z) \neq 0$, то и $\min_{z \in \bar{D}} |f(z)|$ достигается также на границе.

13.274. Используя формулу (6) для $f'(z)$, доказать теорему Лиувилля: если $f(z)$ — аналитическая и ограниченная во всей плоскости (z) функция, то $f(z) \equiv \text{const}$.

Глава 14

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Преобразование Лапласа

1. Определение и свойства преобразования Лапласа. Преобразованием Лапласа функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (которая, вообще говоря, может принимать и комплексные значения), называется функция $F(p)$ комплексной переменной p , определяемая следующим равенством:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Оригиналом называется всякая функция $f(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$, причем принимается, что $f(0) = f(+0)$;
- 2) существуют такие постоянные σ и M , что

$$|f(t)| < M e^{\sigma t} \quad \text{при } t > 0 \quad (2)$$

(величина $\sigma_0 = \inf \sigma$ называется *показателем роста* функции $f(t)$);

3) на любом конечном отрезке $[0, t]$ функция $f(t)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва, причем только 1-го рода.

Если $f(t)$ — оригинал, то стоящий в правой части равенства (1) интеграл Лапласа сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$. При этом функция $F(p)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и называется *изображением* функции $f(t)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ символически записывается в виде $F(p) \doteq f(t)$.

Пример 1. Найти показатель роста многочлена $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$.

△ Заметим, что для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0}{e^{\sigma t}} = 0.$$

Значит, для любого $\sigma > 0$ существует такое число $M = M(\sigma)$, что выполняется неравенство:

$$|a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0| < M(\sigma) e^{\sigma t}, \quad t > 0.$$

Следовательно, $\sigma_0 = \inf_{\sigma > 0} \sigma = 0$.

Заметим, что при $\sigma = \sigma_0 = 0$ неравенство (2) не выполняется. ▷

Пример 2. Найти изображение функции Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

◁ Так как функция Хевисайда является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$, то

$$\eta(t) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

при $\operatorname{Re} p > 0$. ▷

Всюду в дальнейшем под заданной с помощью формулы функцией $f(t)$ будем понимать произведение этой функции на функцию Хевисайда $\eta(t)$, т. е. считать $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Проверить, являются ли следующие функции оригиналами, и найти их показатели роста:

$$14.1. f(t) = e^{3t+2}. \quad 14.2. f(t) = e^{t^3}.$$

$$14.3. f(t) = e^{-t}. \quad 14.4. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1/\sqrt{t}, & t > 1. \end{cases}$$

$$14.5. f(t) = \ln(t+1). \quad 14.6. f(t) = t^3.$$

$$14.7. f(t) = t \sin \frac{1}{t}. \quad 14.8. f(t) = e^{1/t}.$$

Используя формулу (1), найти изображения для следующих оригиналов:

$$14.9. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ -1, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & 3 \leq t. \end{cases}$$

$$14.10. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ \frac{1}{2}(4-t), & 2 \leq t < 4, \\ 0, & 4 \leq t. \end{cases}$$

$$14.11. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \tau, \\ 1, & \tau \leq t. \end{cases}$$

$$14.12. f(t) = \begin{cases} t(2-t), & 0 \leq t < 2, \\ 0, & 2 \leq t. \end{cases}$$

$$14.13. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t < 2, \\ 3 - t, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & 3 \leq t. \end{cases}$$

$$14.14. f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(\pi - t), & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin t, & \frac{3\pi}{2} \leq t < 2\pi, \\ 0, & 2\pi \leq t. \end{cases}$$

Свойства преобразования Лапласа:

1. Свойство линейности. Для любых постоянных C_k , $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n C_k F_k(p), \quad \operatorname{Re} p > \max \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}.$$

2. Теорема подобия. Для любой постоянной $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha \sigma_0.$$

3. Теорема смещения. Умножению оригинала на $e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, соответствует смещение аргумента изображения на α , т. е.

$$e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha), \quad \operatorname{Re}(p - \alpha) > \sigma_0.$$

4. Теорема запаздывания. Запаздыванию оригинала на τ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$, т. е.

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

5. Дифференцирование оригинала. Если $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, являются оригиналами, то для любого $k = 1, 2, \dots, n$

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k F(p) - (p^{k-1} f(0) + p^{k-2} f'(0) + \cdots + f^{(k-1)}(0)).$$

В частности,

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

6. Интегрирование оригинала:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

7. Дифференцирование изображения. Умножению оригинала на множитель t соответствует умножение изображения на -1 и дифференцирование его по аргументу p :

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n = 1, 2, \dots$$

8. Интегрирование изображения. Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то

$$\frac{1}{t} f(t) \doteq \int_p^\infty F(q) dq.$$

9. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Если $f(t, \alpha) \doteq F(p, \alpha)$ и функции $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ и $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha$, рассматриваемые как функции переменной t , являются оригиналами, то

$$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \doteq \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{и} \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha \doteq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha) d\alpha.$$

10. Теорема Бореля об изображении свертки. Свертки оригиналов

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

соответствует произведение изображений, т. е.

$$f_1 * f_2 \doteq F_1(p)F_2(p).$$

11. Интеграл Диомеля. Если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + (f' * g)(t) = g(0)f(t) + (g' * f)(t).$$

Зная изображение функции Хевисайда $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$ (см. пример 2), можно с помощью перечисленных выше свойств 1–11 построить таблицу изображений основных функций:

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	6	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	7	$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	8	$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
4	$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p - \alpha)^{n+1}}$	9	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
5	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 \beta^2}$	10	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$

С помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы основных изображений можно найти изображения большинства функций, встречающихся на практике.

Пример 3. Найти изображение функции $\sin^3 t$.

▷ Имеем по формуле Эйлера

$$\begin{aligned}\sin^3 t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{4} \left(\frac{3(e^{it} - e^{-it})}{2i} - \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} \right) = \\ &= \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t.\end{aligned}$$

Используя свойство линейности и формулу 6 таблицы, находим:

$$\sin^3 t = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{p^2 + 9} = \frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}. \quad \triangleright$$

Пример 4. Найти изображение функции $t^2 \cos 2t$.

▷ Используя формулу Эйлера и формулу 4 таблицы изображений, получаем:

$$t^2 \cos 2t = \frac{1}{2} t^2 (e^{2it} + e^{-2it}) = \frac{1}{(p - 2i)^3} + \frac{1}{(p + 2i)^3} = 2 \frac{p^3 - 12p}{(p^2 + 4)^3}.$$

Заметим, что изображение указанной функции можно было бы получить и другим способом, а именно, дважды дифференцируя изображение $\cos 2t$. ▷

Пример 5. Найти изображение функции $\operatorname{Si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ (этую

функцию называют *интегральным синусом*).

▫ Используя теорему интегрирования изображения, находим

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{dp}{q^2 + 1} = \arctg q \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg p.$$

Отсюда по теореме интегрирования оригинала получаем

$$\text{Si } t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg p \right). \quad \triangleright$$

Пример 6. Найти изображение функции $\int_0^t \cos(t - \tau) e^{-2\tau} d\tau$.

▫ Используя теорему Бореля об изображении свертки, получаем

$$\int_0^t \cos(t - \tau) e^{-2\tau} d\tau = \cos t * e^{-2t} \doteq \frac{p}{(p^2 + 1)(p + 2)}. \quad \triangleright$$

Пример 7. Найти изображение оригинала $f(t)$, если

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{при } t \geq \pi. \end{cases}$$

▫ Используя функцию Хевисайда и учитывая, что $\eta(t - \pi) = 1$ при $t \geq \pi$, функцию $f(t)$ запишем в виде

$$f(t) = \sin t + \eta(t - \pi) \sin(t - \pi).$$

Пользуясь формулой 6 таблицы и теоремой запаздывания, получаем

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{e^{-\pi p}}{p^2 + 1} = \frac{1 + e^{-\pi p}}{p^2 + 1}. \quad \triangleright$$

14.15*. Доказать следующие теоремы о связи «начальных» и «конечных» значений оригинала изображения. Если $f(t) \doteq F(p)$, то

а) $f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$

и (если существует конечный $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$)

б) $f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$.

14.16. Доказать следующие соотношения¹⁾:

a) $\frac{t^n}{n!} \cos \beta t = \frac{\widetilde{\operatorname{Re}}((p + \beta i)^{n+1})}{(p^2 + \beta^2)^{n+1}}$;

б) $\frac{t^n}{n!} \sin \beta t = \frac{\widetilde{\operatorname{Im}}((p + \beta i)^{n+1})}{(p^2 + \beta^2)^{n+1}}$.

Найти изображения заданных функций:

14.17. $\frac{1}{2}t^2 + 1$.

14.18. $t^2 - \frac{1}{2}e^t$.

14.19. $e^{-t} + 3e^{-2t} + t^2$.

14.20. $2 \sin t - \cos \frac{t}{2}$.

14.21. $\cos^2 t$.

14.22. $\sin^2(t - a)$.

14.23. $\operatorname{sh}^3 t$.

14.24. $\operatorname{ch} t \sin t$.

14.25. $\operatorname{sh} 3t \cos 2t$.

14.26. $t \operatorname{ch} 2t$.

14.27. $\sin t - t \cos t$.

14.28. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t)$.

14.29. $t^2 e^{-t}$.

14.30. $t^3 e^{2t}$.

14.31. $e^{2t} \cos t$.

14.32. $e^{-t} \sin^2 t$.

14.33. $t^2 \operatorname{ch} 2t$.

14.34. $t e^{-t} \sin t$.

14.35. $t e^{-t} \operatorname{sh} t$.

14.36*. $\int\limits_0^t e^{-\frac{t-\tau}{2}} \tau d\tau$.

14.37. $\int\limits_0^t (t - \tau)^2 \cos 2\tau d\tau$.

14.38. $\int\limits_0^t \tau e^{t-\tau} \sin(t - \tau) d\tau$.

14.39*. $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - 1}{\tau} d\tau$.

14.40. $\int\limits_0^t \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau$.

14.41. $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau}{\tau} d\tau$.

14.42*. $\int\limits_0^t \frac{\cos \beta \tau - \cos \alpha \tau}{\tau} d\tau$.

14.43. $\int\limits_0^t \frac{e^{\beta \tau} - e^{\alpha \tau}}{\tau} d\tau$.

¹⁾ Здесь обозначения $\widetilde{\operatorname{Re}}$ и $\widetilde{\operatorname{Im}}$ подчеркивают тот факт, что действительная и мнимая части соответствующего комплексного многочлена берутся условно, т.е. p считается вещественным числом.

Найти изображения дифференциальных выражений при заданных начальных условиях:

14.44. $x^{IV}(t) + 4x'''(t) + 2x''(t) - 3x'(t) - 5; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

14.45. $x'''(t) + 6x''(t) + x'(t) - 2x(t); \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1.$

14.46. $x''(t) + 5x'(t) - 7x(t) + 2; \quad x(0) = \alpha, \quad x'(0) = 0.$

Используя теорему запаздывания, найти изображения следующих функций:

14.47. $\eta(t-1)e^{t-1}. \quad \text{14.48. } \eta(t-2)\sin^2((t-2)/2).$

14.49*. $\eta(t-1)te^t. \quad \text{14.50*. } \eta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin t.$

14.51. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ 0 & \text{при } t \geq \tau \end{cases}$

(единичный импульс, действующий в течение промежутка времени от $t = 0$ до $t = \tau$).

14.52. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T, \\ 1 & \text{при } T \leq t < T + \tau, \\ 0 & \text{при } t \geq T + \tau \end{cases}$

(запаздывающий единичный импульс).

14.53. $f(t) = \begin{cases} \frac{h}{\tau}, & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ h, & \text{при } \tau \leq t < 2\tau, \\ -\frac{h}{\tau}(t-3\tau), & \text{при } 2\tau \leq t < 3\tau, \\ 0 & \text{при } t \geq 3\tau. \end{cases}$

14.54. $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \leq t < \pi/2, \\ -\cos t & \text{при } \pi/2 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{при } t \geq \pi. \end{cases}$

14.55. $f(t) = \begin{cases} h & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ he^{-(t-1)} & \text{при } t \geq 1. \end{cases}$

14.56. $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \leq t < \pi, \\ \operatorname{sh}(t-\pi) & \text{при } t \geq \pi. \end{cases}$

14.57*. Доказать, что если $f(t)$ — периодическая функция с периодом l , то

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pl}} \int_0^l e^{-pt} f(t) dt.$$

Используя результат задачи 14.57, найти изображения периодических функций (аналитические формулы определяют заданные функции на периоде $[0, l]$):

$$14.58. f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ 0 & \text{при } \tau \leq t < T; \end{cases} \quad l = T$$

(периодическая последовательность единичных импульсов).

$$14.59. f(t) = \sin \beta t \text{ при } 0 < t < \pi/\beta; \quad l = \pi/\beta \quad (\text{т. е. } f(t) = |\sin \beta t|).$$

$$14.60. f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{при } \pi \leq t < T; \end{cases} \quad l = T.$$

$$14.61. f(t) = \begin{cases} h & \text{при } 0 \leq t < c, \\ -h & \text{при } c \leq t < 2c; \end{cases} \quad l = 2c.$$

$$14.62. f(t) = \frac{h}{c}t \text{ при } 0 \leq t < c; \quad l = c.$$

$$14.63. f(t) = \begin{cases} \frac{h}{c}t & \text{при } 0 \leq t < c, \\ -\frac{h}{c}t & \text{при } c \leq t < 2c; \end{cases} \quad l = 2c.$$

$$14.64. f(t) = \cos \beta t \text{ при } 0 \leq t < \frac{\pi}{2\beta}, \quad l = \frac{\pi}{2\beta}.$$

$$14.65. f(t) = |\sin t|, \quad l = 2\pi.$$

2. Расширение класса оригиналов. Класс оригиналов можно расширить, включив в него функции, которые могут быть неограничены в окрестности конечного множества точек, но такие, что интеграл Лапласа от них тем не менее в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ сходится абсолютно. К числу таких обобщенных оригиналов относится степенная функция $f(t) = t^\mu$ при $\mu > -1$, функция $\ln t$ и некоторые другие. В частности, к такому классу относится всякая функция $f(t)$, которая в некоторых точках $t = t_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) является бесконечно большой порядка, меньшего единицы, т. е. такая, что $\lim_{t \rightarrow t_k} (t - t_k)^{r_k} f(t) = 0$ при некотором $r_k < 1$, и если вне некоторых окрестностей точек t_k она удовлетворяет условиям, при которых функцию можно считать оригиналом.

Пример 8. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t) = t^\mu$, $\mu > -1$.

Имеем $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^\mu dt$ или, после подстановки $pt = \tau$,

$$F(p) = \frac{1}{p^{\mu+1}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^\mu d\tau = \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}.$$

Итак, $\frac{t^\mu}{\Gamma(\mu + 1)} \doteq \frac{1}{p^{\mu+1}} {}^2$). \triangleright

Замечание. Если μ — целое положительное число, то $\Gamma(\mu + 1) = \mu!$, и мы приходим к формуле 2 таблицы изображений.

Пример 9. Найти изображение функции $f(t) = t^\mu \ln t$, $\mu > -1$.

\triangleleft Из соответствия $t^\mu \doteq \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}}$ с помощью дифференцирования по параметру μ получаем

$$t^\mu \ln t \doteq \frac{\Gamma'(\mu + 1)}{p^{\mu+1}} - \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}} \ln p = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}} \left(\frac{\Gamma'(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} - \ln p \right).$$

В частности, положив $\mu = 0$, с учетом того, что $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma'(1) = -\gamma$ ($\gamma = 0,577215\dots$ — постоянная Эйлера), получаем

$$\ln t \doteq -\frac{\gamma + \ln p}{p}. \quad \triangleright$$

Найти изображения функций:

$$14.66. f(t) = \frac{t^\mu e^{\alpha t}}{\Gamma(\mu + 1)}, \quad \mu > -1.$$

$$14.67. f(t) = \frac{t^\mu e^{\alpha t} \ln t}{\Gamma(\mu + 1)}, \quad \mu > -1.$$

$$14.68. f(t) = e^{\alpha t} \ln t. \quad 14.69. f(t) = \frac{t^\mu}{\Gamma(\mu + 1)} \cos \beta t, \quad \mu > -1.$$

$$14.70. f(t) = \frac{t^\mu}{\Gamma(\mu + 1)} \sin \beta t, \quad \mu > -1.$$

$$14.71. f(t) = \cos \beta t \cdot \ln t. \quad 14.72. f(t) = \sin \beta t \cdot \ln t.$$

$$14.73. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < a, \\ \frac{1}{\sqrt{t-a}} & \text{при } t > a. \end{cases}$$

§ 2. Восстановление оригинала по изображению

1. Элементарный метод. Во многих случаях заданное изображение можно преобразовать к такому виду, когда оригинал легко восстанавливается непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений.

²⁾ Здесь под функцией комплексной переменной $1/p^{\mu+1}$ понимается та из ветвей этой многозначной функции, которая на вещественной положительной полусоси комплексной плоскости (p) принимает вещественные значения, т.е. $1/p^{\mu+1} = e^{-(\mu+1)\ln p}$. Аналогичное замечание относится к изображениям функций $t^\mu e^{\alpha t}$, $t^\mu e^{\alpha t} \ln t$, $t^\mu \cos \beta t$, $t^\mu \sin \beta t$.

Для преобразования изображения широко используется в этом случае метод разложения рациональной дроби в сумму простейших.

Пример 1. Найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 5}.$$

« Первый способ. Выделяя полный квадрат в знаменателе и далее, используя табличное изображение для $\sin \beta t$ и теорему смещения, получаем:

$$\frac{1}{p^2 + 2p + 5} = \frac{1}{(p+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \frac{2}{(2+1)^2 + 4} \doteq \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

Второй способ. Раскладывая дробь в сумму простейших и используя изображение для e^{at} , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 + 2p + 5} &= \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{p - (-1 + 2i)} - \frac{1}{p - (-1 - 2i)} \right) \doteq \\ &\doteq \frac{1}{4i} (e^{(-1+2i)t} - e^{(-1-2i)t}) = \frac{1}{2} e^{-t} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t. \end{aligned} \quad \triangleright$$

Пример 2. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$.

« Первый способ. Раскладывая дробь в сумму простейших, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} &= \frac{1}{(p-i)^2(p+i)^2} = \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{i}{p+i} + \frac{1}{(p-i)^2} + \frac{1}{(p+i)^2} \right) \doteq \\ &\doteq -\frac{1}{4} (ie^{it} - ie^{-it} + te^{it} + te^{-it}) = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

Второй способ. Заметим, что

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)',$$

причем согласно теореме о дифферентировании изображения

$$-\left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)' \doteq t \sin t.$$

Применяя теперь теорему об интегрировании оригинала, находим

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)' \doteq \frac{1}{2} \int_0^t \tau \sin \tau \, d\tau = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t).$$

Третий способ. Используя теорему Бореля об изображении свертки, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} &= \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t - \tau) \sin \tau \, d\tau = \\ &= \sin t \int_0^t \cos \tau \sin \tau \, d\tau - \cos t \int_0^t \sin^2 \tau \, d\tau = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

Пример 3. Найти оригинал для функции $\frac{p^2 e^{-2p}}{p^3 + 1}$.

«Найдем сначала оригинал для дроби $\frac{p^2}{p^3 + 1}$, причем в отличие от двух предыдущих примеров разложение дроби в сумму простейших произведем в множестве действительных чисел. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{p^3 + 1} &= \frac{p^2}{(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{2p-1}{p^2-p+1} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p+1} + 2 \frac{p - \frac{1}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) \doteq \frac{1}{3} \left(e^{-t} + 2e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \end{aligned}$$

А теперь, применяя теорему запаздывания, учтем сомножитель e^{-2p} . Окончательно находим:

$$\frac{p^2 e^{-2p}}{p^3 + 1} \doteq \frac{1}{3} \eta(t-2) \left(e^{-(t-2)} + 2e^{\frac{1}{2}(t-2)} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(t-2) \right). \quad \triangleright$$

Найти оригиналы для заданных функций:

14.74. $\frac{1}{(p-1)^2}.$

14.75. $\frac{1}{(p+1)(p-3)}.$

14.76. $\frac{1}{p^2 + 4p + 3}.$

14.77. $\frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}.$

$$14.78. \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

$$14.79. \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p}.$$

$$14.80. \frac{p}{(p^2 - 4)(p^2 + 1)}.$$

$$14.81. \frac{p}{(p^2 + 4)^2}.$$

$$14.82. \frac{p}{p^3 + 1}.$$

$$14.83. \frac{p}{p^4 + 4}.$$

$$14.84. \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

$$14.85. \frac{e^{-2p}}{(p + 1)^3}.$$

$$14.86. \frac{1}{p - 2} + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{3e^{-4p}}{p^2 + 9}. \quad 14.87. \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{2pe^{-p}}{p^2 - 4}.$$

2. Формула обращения. Теоремы разложения. Если $f(t)$ — оригинал и $F(p)$ — его изображение, то в любой точке непрерывности $f(t)$ справедлива формула обращения Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp,$$

где интегрирование производится по любой прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\sigma > \sigma_0$.

Замечание. Во всякой точке t_0 , являющейся точкой разрыва функций $f(t)$, правая часть формулы Меллина равна $\frac{1}{2}(f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0))$.

Непосредственно применение формулы обращения часто затруднительно, и обычно пользуются теоремами разложения, являющимися следствиями из нее:

Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням $1/p$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad t \geq 0 \quad (f(t) = 0 \text{ при } t < 0)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Вторая теорема разложения. Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек p_1, p_2, \dots, p_n , лежащих в конечной части полуплоскости $\operatorname{Re} p \leq \sigma_0$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{выч}[e^{pt} F(p); p_k].$$

Если, в частности, $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ — многочлены степеней m и n соответственно ($n > m$), p_1, p_2, \dots, p_r — корни многочлена $Q_n(p)$ с кратностями, соответственно равными l_1, l_2, \dots, l_r ($l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$), то

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}} ((p - p_k)^{l_k} F(p) e^{pt}). \quad (1)$$

Если все коэффициенты многочленов $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ — действительные числа, то в правой части (1) полезно объединить слагаемые, относящиеся к взаимно сопряженным комплексным корням; сумма каждой пары таких членов равна удвоенной действительной части одного из них.

В частном случае, когда все корни p_1, p_2, \dots, p_n многочлена $Q_n(p)$ простые, используя формулу для вычисления вычета относительно полюса первого порядка (см. с. 101), получим

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2)$$

Пример 4. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$.

◁ *Первый способ.* Разложение функции $F(p)$ в окрестности точки $p = \infty$ имеет вид

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! p^{n+1}}.$$

Поэтому, в соответствии с первой теоремой разложения, оригиналом для $F(p)$ является функция $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2} = I_0(2\sqrt{t})$ (I_0 — функция Бесселя первого рода с нулевым индексом).

Второй способ. Воспользуемся второй теоремой разложения. Для этого надо найти вычет функции $\frac{1}{p} e^{pt} e^{-1/p}$ относительно ее единственной особой точки $p = 0$ (это существенно особая точка), т. е. коэффициент при $1/p$ разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $p = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} e^{pt} e^{-1/p} &= \left(1 + pt + \frac{p^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{p^n t^n}{n!} + \dots \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2! p^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n! p^{n+1}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Выделив в произведении рядов члены, содержащие $1/p$, найдем:

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{выч} \left[\frac{1}{p} e^{pt} e^{-1/p}; 0 \right] = \\ &= 1 - t + \frac{t^2}{(2!)^2} + \cdots + (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2} + \cdots = I_0(2\sqrt{t}). \quad \triangleright \end{aligned}$$

В этом примере решение, использующее первую теорему разложения, оказалось более простым, чем решение при помощи второй теоремы разложения.

Пример 5. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{(p^2 + \beta^2)^3}$.

◀ Воспользуемся второй теоремой разложения. Функция $F(p)$ имеет два полюса 3-го порядка $p = \pm\beta i$, и ее оригинал определяется равенством

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{выч} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2 + \beta^2)^3}; \beta i \right] + \text{выч} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2 + \beta^2)^3}; -\beta i \right] = \\ &= 2\operatorname{Re} \left(\text{выч} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2 + \beta^2)^3}; \beta i \right] \right). \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{выч} \left[\frac{e^{pt}}{(p^2 + \beta^2)^3}; \beta i \right] &= \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow \beta i} \frac{d^2}{dp^2} \left((p - \beta i)^3 \frac{e^{pt}}{(p^2 + \beta^2)^3} \right) = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow \beta i} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt}}{(p + \beta i)^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow \beta i} \left(\frac{t^2 e^{pt}}{(t + \beta i)^3} - \frac{6te^{\beta it}}{(p + \beta i)^4} + \frac{12e^{\beta it}}{(t + \beta i)^5} \right) = \\ &= -\frac{t^2 e^{\beta it}}{16\beta^3 i} - \frac{3te^{\beta it}}{16\beta^4} + \frac{3e^{\beta it}}{16\beta^5 i} \end{aligned}$$

(при дифферентировании мы воспользовались формулой Лейбница для производной произведения). Выделив действительную часть этого выражения и удвоив ее, получим

$$f(t) = -\frac{t^2 \sin \beta t}{8\beta^3} - \frac{3t \cos \beta t}{8\beta^4} + \frac{3 \sin \beta t}{8\beta^5}. \quad \triangleright$$

Пример 6. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{p^4 - 1}$.

« Знаменатель дроби здесь имеет только простые корни $p_{1,2} = \pm 1$, $p_{3,4} = \pm i$. Поэтому в соответствии с формулой (2) получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{4p_k^3} e^p k^t = \frac{1}{4} \left(e^t - e^{-t} + \frac{e^{it}}{i^3} + \frac{e^{-it}}{(-i)^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^t - e^{-t}}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2} (\sin t - \sin t). \quad \triangleright \end{aligned}$$

Этот пример можно было решить, исходя из разложения $\frac{1}{p^4 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 - 1} - \frac{1}{p^2 + 1} \right)$.

Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригиналы для заданных функций:

$$14.88. \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}. \quad 14.89. \sin \frac{1}{p}.$$

$$14.90. \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}. \quad 14.91. \frac{1}{p} e^{1/p^2}.$$

$$14.92*. \frac{1}{p-1} e^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Пользуясь второй теоремой разложения или с помощью разложения на элементарные дроби, найти оригиналы для заданных функций:

$$14.93. F(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 5}. \quad 14.94. F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

14.95. $F(p) = \frac{Q'(p)}{Q(p)}$, где $Q(p) = (p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)$ и все числа p_k попарно различны.

$$14.96. F(p) = \frac{1}{(p^4 - 1)^2}. \quad 14.97. F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2(p^2 - 4)}.$$

$$14.98. F(p) = \frac{p^3}{(p^4 - 1)^2}. \quad 14.99. F(p) = \frac{p^5}{p^6 - 1}.$$

$$14.100. F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)^3}. \quad 14.101. F(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 3}.$$

$$14.102. F(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2(p^2 - 1)^2}. \quad 14.103. F(p) = \frac{p}{p^4 - 5p^2 + 4}.$$

$$14.104. F(p) = \frac{p^3}{(p^4 - 1)(p^4 + 4)}.$$

§ 3. Применения операционного исчисления

1. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами. Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t) \quad (1)$$

(где $f(t)$ — оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (2)$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т. е. от уравнения (1) с условиями (2) перейти к операторному уравнению

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) X(p) + Q(p) = F(p),$$

где $X(p)$ — изображение искомого решения, $F(p)$ — изображение функции $f(t)$, а $Q(p)$ — некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0 = x'_0 = \cdots = x_0^{(n-1)} = 0$. Решив операторное уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}$$

($L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$ — характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для $X(p)$, мы получим искомое решение $x(t)$. Если считать $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (1). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо одного операторного уравнения мы получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений искомых функций.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $x'' + 2x' + x = te^{-t}$, а также его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1, x'_0 = 2$.

◀ Пусть $x(t) = X(p)$, тогда

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0, \quad x''(t) \doteq p^2 X(p) - px_0 - x'_0.$$

По таблице изображений находим $te^{-t} \doteq \frac{1}{(p+1)^2}$, и операторное уравнение имеет вид

$$(p^2 + 2p + 1)X(p) - (p+2)x_0 - x'_0 = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Отсюда находим

$$X(p) = \frac{p+2}{(p+1)^2}x_0 + \frac{1}{(p+1)^2}x'_0 + \frac{1}{(p+1)^4}.$$

Для отыскания оригинала в данном случае проще всего представить $X(p)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{(p+1)+1}{(p+1)^2}x_0 + \frac{1}{(p+1)^2}x'_0 + \frac{1}{(p+1)^4} = \\ &= \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{x_0 + x'_0}{(p+1)^2} + \frac{x_0}{p+1}. \end{aligned}$$

Пользуясь таблицей изображений, находим общее решение

$$x(t) = \frac{1}{3!}t^3e^{-t} + (x_0 + x'_0)te^{-t} + x_0e^{-t}.$$

Обозначив $x_0 = C_1$, $x_0 + x'_0 = C_1$, его можно записать в виде

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3e^{-t} + (C_1 + C_2t)e^{-t}.$$

Частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям,

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3e^{-t} + (1 + 3t)e^{-t}. \triangleright$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $x'' + x = f(t)$ при нулевых начальных условиях, если

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t & \text{при } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(\pi - t) & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq t < \pi, \\ 0 & \text{при } t \geq \pi. \end{cases}$$

▫ Запишем $f(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(1 - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{2}{\pi}t - \left(\eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \eta(t - \pi)\right) \frac{2}{\pi}(t - \pi) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(t - 2\eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \eta(t - \pi)(t - \pi)\right). \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой запаздывания, отсюда находим

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}}{p^2}.$$

Так как начальные условия нулевые, то, полагая $x(t) \doteq X(p)$, приходим к операторному уравнению

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}}{p^2},$$

из которого после несложных преобразований находим

$$X(p) = \frac{2}{\pi} \left(1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}\right) \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1}\right).$$

Так как $\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} \doteq t - \sin t$, то, снова применяя теорему запаздывания, находим

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\pi} \left((t - \sin t) - 2\eta \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right) \left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right) + \\ &\quad + \eta(t - \pi)((t - \pi) - \sin(t - \pi)), \end{aligned}$$

т. е.

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(t - \sin t) & \text{при } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(-\sin t - 2\cos t - t + \pi) & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq t < \pi, \\ -\frac{4}{\pi} \cos t & \text{при } t \geq \pi. \end{cases} \quad \triangleright$$

Пример 3. Найти решение системы

$$\begin{aligned} x' + y &= e^t, \\ x + y' &= e^{-t} \end{aligned}$$

при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Пусть $x(t) \doteq X(p)$, $y(t) \doteq Y(p)$, тогда $x'(t) \doteq pX(p) - x_0$, $y'(t) \doteq pY(p) - y_0$, и получаем операторную систему

$$pX(p) - x_0 + Y(p) = \frac{1}{p-1},$$

$$pY(p) - y_0 + X(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Решая систему, найдем

$$X(p) = \frac{p}{p^2 - 1}x_0 - \frac{1}{p^2 - 1}y_0 + \frac{p^2 + 1}{(p^2 - 1)^2},$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2 - 1}y_0 + \frac{1 - x_0}{p^2 - 1} - \frac{2p}{(p^2 - 1)^2}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \operatorname{ch} t - y_0 \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t, \\ y(t) = y_0 \operatorname{ch} t + (1 - x_0) \operatorname{sh} t - t \operatorname{sh} t. \end{cases} \triangleright$$

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$14.105. x'' + 9x = \cos 3t. \quad 14.106. x'' - 4x' + 4x = e^{2t}.$$

$$14.107. x'' + 2x' = te^{-2t}. \quad 14.108. x'' + x' - 2x = e^t.$$

$$14.109. x'' + x' = e^{-t} \sin t.$$

Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

$$14.110. x''' + x = 0; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 2.$$

$$14.111. x'' + 2x' + x = e^{-t}; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

$$14.112. x'' + 3x' = e^{-3t}; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

$$14.113. x'' - 2x' + 2x = \sin t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$14.114. x'' + 4x = \sin 2t; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$$

$$14.115. x'' - 9x = \operatorname{sh} t; \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 3.$$

$$14.116. x''' - x'' = e^t; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$14.117. x^{\text{IV}} - x = \operatorname{sh} t; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \quad x'''(0) = 1.$$

$$14.118. x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-t}; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

Найти при нулевых начальных условиях решения следующих дифференциальных уравнений:

$$14.119. x' + x = f(t), \text{ где } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < 2, \\ 0 & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

$$14.120. x'' + x = f(t), \text{ где } f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{при } 0 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{при } t \geq \pi. \end{cases}$$

$$14.121. x'' - x' = f(t), \text{ где } f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{при } t \geq 1. \end{cases}$$

$$14.122. x'' + x = f(t), \text{ где } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ -1 & \text{при } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

14.123**. С помощью интеграла Диомеля доказать следующее утверждение: если $x_1(t)$ — решение уравнения $x^{(n)} + a_1x^{(n-1)}l + \dots + a_nx = 1$ при нулевых начальных условиях

$(x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0)$, то решением уравнения $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$ при тех же начальных условиях является функция

$$x(t) = \int_0^t x'_1(\tau) f(t - \tau) d\tau = x_1(t)f(0) + \int_0^t f'(\tau)x_1(t - \tau) d\tau$$

($f(t)$ — произвольный оригинал).

З а м е ч а н и е. Результат задачи 14.123 позволяет находить решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части этого уравнения.

Пользуясь результатом задачи 14.123, найти решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{14.124. } x' - x = \frac{1}{e^t + 3}. \quad \mathbf{14.125. } x'' - x = \frac{1}{1 + e^t}.$$

$$\mathbf{14.126. } x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t}. \quad \mathbf{14.127. } x'' + x = \frac{1}{2 + \cos t}.$$

$$\mathbf{14.128. } x'' + x = e^{-t^2}.$$

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений

$$\mathbf{14.129. } \begin{aligned} x'' + y' &= t, \\ y'' - x' &= 0. \end{aligned} \quad \mathbf{14.130. } \begin{aligned} x'' + y' &= \operatorname{sh} t - \sin t, \\ y'' + x' &= \operatorname{ch} t - \cos t. \end{aligned}$$

Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

$$\mathbf{14.131. } \begin{aligned} x' + y &= 0, \\ x + y' &= 0; \end{aligned} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

$$\mathbf{14.132. } \begin{aligned} 2x'' + x - y' &= -3 \sin t, \\ x + y' &= -\sin t; \\ x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\mathbf{14.133. } \begin{aligned} x'' - y' &= 0, \\ x - y'' &= 2 \sin t; \\ x(0) &= -1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = 1. \end{aligned}$$

$$\mathbf{14.134. } \begin{aligned} x'' - y' &= 0, \\ x' - y'' &= 2 \cos t; \\ x(0) &= y'(0) = 0, \quad x'(0) = y(0) = 2. \end{aligned}$$

$$\mathbf{14.135. } \begin{aligned} x'' - y' &= e^t, \\ x' + y'' - y &= 0; \\ x(0) &= 1, \quad y(0) = -1, \quad x'(0) = y'(0) = 0. \end{aligned}$$

$$14.136. \quad x'' + y' = 2 \sin t;$$

$$y'' + z' = 2 \cos t,$$

$$z'' - x = 0;$$

$$x(0) = z(0) = y'(0) = 0, \quad x'(0) = y(0) = -1, \quad z'(0) = 1.$$

Проинтегрировать при нулевых начальных условиях системы дифференциальных уравнений:

$$14.137. \quad x'' - y' = f_1(t), \quad \text{где } f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{при } t \geq \pi, \end{cases}$$

$$y' + x = f_2(t),$$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t < \pi/2, \\ \pi - t & \text{при } \pi/2 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{при } t \geq \pi. \end{cases}$$

$$14.138. \quad x'' - y = 0, \quad \text{где } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \pi, \\ -1 & \text{при } \pi \leq t < 2\pi, \\ 0 & \text{при } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

$$y'' - x = f(t),$$

2. Решение линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Используя теорему свертывания, можно легко найти изображения решений интегральных уравнений Вольтерра 1-го и 2-го рода (а в простейших случаях по найденному изображению найти и само решение) в том случае, когда ядром в соответствующем уравнении служит функция вида $K(t - \tau)$, где $K(t)$ — оригинал. Этот метод применим и к интегро-дифференциальным уравнениям с таким же ядром.

Пример 4. Найти решение уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau) d\tau = t \cos t.$$

▷ Пусть $x(t) = X(p)$; так как

$$\cos t = \frac{p}{p^2 + 1}, \quad t \cos t = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2},$$

$$\int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau) d\tau = \frac{pX(p)}{p^2 + 1}$$

(по теореме свертывания), то приходим к операторному уравнению

$$\frac{pX(p)}{p^2 + 1} = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2},$$

откуда

$$X(p) = \frac{p^2 - 1}{p(p^2 + 1)} = \frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p}.$$

Таким образом, $x(t) = 2 \cos t - 1$. ▷

Пример 5. Найти решение уравнения

$$x'' + x = \sin t + \int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau) d\tau$$

при начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

« Полагая $x(t) \doteq X(p)$, имеем

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - 1, \quad \sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1},$$

$$\int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau) d\tau \doteq \frac{X(p)}{p^2 + 1}.$$

Получаем операторное уравнение

$$(p^2 + 1)X(p) - 1 = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{X(p)}{p^2 + 1},$$

или

$$((p^2 + 1)^2 - 1)X(p) = p^2 + 2.$$

Отсюда находим $X(p) = 1/p^2$ и $x(t) = t$. ▷

Решить следующие интегральные и интегро-дифференциальные уравнения:

$$14.139. \int_0^t \operatorname{ch}(t - \tau)x(\tau) d\tau = \operatorname{ch}t - \cos t.$$

$$14.140. 3 \int_0^t \operatorname{sh}(t - \tau)x(\tau) d\tau = x(t) - e^{-t}.$$

$$14.141. \int_0^t e^{t-\tau} \sin(t - \tau)x(\tau) d\tau = x'' - x' + e^t(1 - \cos t); \quad x(0) = x'(0) = 1.$$

$$14.142. \int_0^t \operatorname{sh}(t - \tau)x(\tau) d\tau = x'' - x' + \frac{1}{2}t \operatorname{sh}t; \quad x(0) = 1,$$

$$x'(0) = 0.$$

Проинтегрировать уравнения Абеля:

$$14.143. \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \pi.$$

$$14.144. \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = t^\beta, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad \beta > -1.$$

3. Интегрирование линейных уравнений в частных производных.

Применение операционных методов для интегрирования линейных уравнений в частных производных рассмотрим на примере.

Пример 6. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z = \sin x \cos y,$$

удовлетворяющее условиям $z(0, y) = \sin y$, $z(x, 0) = 0$ ($x \in [0, +\infty)$, $y \in [0, +\infty)$).

↔ Переходим к операторному уравнению относительно аргумента y , полагая $z(x, y) \doteq Z(x, p)$. Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial y} \doteq pZ(x, p) - z(x, 0) = pZ(x, p),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \doteq \frac{\partial}{\partial x}(pZ(x, p)) = pZ'_x(x, p)$$

(по теореме о дифференцировании операторных соотношений по параметру). Получаем операторное уравнение:

$$pZ'_x(x, p) + Z(x, p) = \frac{p \sin x}{p^2 + 1} \quad \left(\text{так как } \cos y \doteq \frac{p}{p^2 + 1} \right).$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение по аргументу x , находим

$$Z(x, p) = C_1(p)e^{-\frac{x}{p}} + \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \sin x - \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2} \cos x.$$

В силу начального условия $z(x, 0) = 0$ и теоремы о связи начального значения оригинала и конечного значения изображения мы должны иметь $\lim_{p \rightarrow \infty} pZ(x, p) = z(x, 0) = 0$, откуда находим $\lim_{p \rightarrow \infty} pC_1(p) = 0$, причем

если $C_1(p) \doteq \varphi(y)$, то $\varphi(0) = 0$ (в силу той же теоремы). Запишем теперь $Z(x, p)$ в следующем виде:

$$Z(x, p) = pC_1(p) \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{p}} + \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \sin x - \frac{1}{2} \frac{(p^2 + 1) + (p^2 - 1)}{(p^2 + 1)^2} \cos x.$$

Но так как

$$pC_1(p) \doteq \varphi'(y), \quad \frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}} \doteq I_0(2\sqrt{xy})$$

(см. решение примера 4 из § 2),

$$\frac{p}{(p^2 + 1)^2} \doteq \frac{1}{2}y \sin y, \quad \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2} = y \cos y,$$

то находим:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \int_0^y \varphi'(t) I_0(2\sqrt{x(y-t)}) dt + \\ &+ \frac{1}{2}y \sin y \sin x - \frac{1}{2}(\sin y + y \cos y) \cos x = \\ &= \int_0^y \varphi'(t) I_0(2\sqrt{x(y-t)}) dt - \frac{1}{2} \sin y \cos x - \frac{1}{2}y \cos(x+y) \end{aligned}$$

(первое слагаемое получено по теореме свертывания оригиналов). Так как $I_0(0) = 1$, то, полагая $x = 0$, находим:

$$z(0, y) = \int_0^y \varphi'(t) dt - \frac{1}{2} \sin y - \frac{1}{2}y \cos y = \varphi(y) - \frac{1}{2} \sin y - \frac{1}{2}y \cos y = \sin y$$

(по начальным условиям); поэтому $\varphi(y) = \frac{3}{2} \sin y + \frac{1}{2}y \cos y$, $\varphi'(y) = 2 \cos y - \frac{1}{2}y \sin y$, и окончательно находим

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \int_0^y \left(2 \cos t - \frac{1}{2}t \sin t \right) I_0(2\sqrt{x(y-t)}) dt - \\ &- \frac{1}{2} \sin y \cos x - \frac{1}{2}y \cos(x+y). \quad \triangleright \end{aligned}$$

Проинтегрировать следующие линейные уравнения в частных производных:

$$14.145. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = \cos x; \quad z(0, y) = y, \quad z'_x(0, y) = 0.$$

$$14.146. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} - a^2 z = f(x); \quad z(0, y) = -y, \quad z'_x(0, y) = 0.$$

14.147.** Уравнения длинной линии в случае отсутствия потерь (линейное сопротивление R и утечка G равны нулю) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} &= -C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},\end{aligned}\tag{3}$$

где $u(x, t)$ — напряжение, $i(x, t)$ — ток в точках линии в момент времени t , L — индуктивность и C — емкость, отнесенные к единице длины. Найти решения уравнений (3), удовлетворяющие начальным условиям

$$u(x, 0) = i(x, 0) = 0\tag{4}$$

и граничному условию

$$u(0, t) = q(t) = E \sin \omega t.$$

14.148. В уравнениях длинной линии

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - Ri(x, t), \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} &= -C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - Gu(x, t),\end{aligned}\tag{5}$$

в случае линии без искажений, величины R , L , C и G связаны соотношениями $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \nu$. Найти решения уравнений (5), удовлетворяющие начальным условиям (4) и граничному условию

$$u(0, t) = q(t) = E(\eta(t) - \eta(t - \tau)), \quad \tau > 0.$$

4. Вычисление несобственных интегралов. Один из способов вычисления несобственных интегралов вида $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ основан на применении теоремы операционного исчисления о связи «конечного» значения оригинала и «начального» значения изображения: если $\varphi(t) \doteq \Phi(t)$ и существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Phi(p)$ (см. задачу 14.15).

Из этой теоремы и соотношения

$$\int_0^t f(t) dt = \frac{1}{p} F(p) \quad (f(t) \doteq F(p))$$

при условии сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ следует соотношение

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = F(0). \quad (6)$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

« Так как $t = \frac{1}{p^2 + 1}$, то по теореме интегрирования изображения имеем

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{dq}{q^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

поэтому по формуле (1) находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad \triangleright$$

Пусть функции

$$f(t, u) \text{ и } \psi(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u) du$$

являются оригиналами и $f(t, u) \doteq F(p, u)$. Тогда, применяя теорему об интегрировании по параметру, будем иметь

$$\psi(t) \doteq \Psi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u) du.$$

Поэтому, если интеграл, определяющий $\Psi(p)$, можно вычислить, то для отыскания интеграла $\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u) du$ достаточно найти оригинал для $\Psi(p)$, т. е.

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u) du \doteq \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u) du. \quad (7)$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu du}{\alpha^2 + u^2}$.

▷ Имеем $\cos tu = \frac{p^2}{p^2 + u^2}$. Поэтому (по формуле (7))

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos tu du}{\alpha^2 + u^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{p du}{(p^2 + u^2)(\alpha^2 + u^2)} = \\ &= \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{du}{\alpha^2 + u^2} - \frac{du}{p^2 + u^2} \right) = \\ &= \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p} \right) = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{1}{p + \alpha}. \end{aligned}$$

Но $\frac{1}{p + \alpha} = e^{-\alpha t}$. Отсюда

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu du}{\alpha^2 + u^2} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha t}. \quad \triangleright$$

Еще один способ вычисления несобственных интегралов при помощи операционного исчисления дает

Теорема Парсеваля. Если $f_1(t) = F_1(p)$, $f_2(t) = F_2(p)$ и функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ аналитичны при $\operatorname{Re} p \geq 0$, то

$$\int_0^{+\infty} f_1(u) F_2(u) du = \int_0^{+\infty} F_1(v) f_2(v) dv. \quad (8)$$

При этом из сходимости одного из этих интегралов следует сходимость другого³).

Пример 9. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u}{u} du$, $\alpha > 0$.

▷ Имеем $e^{-\alpha t} \sin \beta t = \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$, $\eta(t) = \frac{1}{p}$. Полагая $f_1(u) = e^{-\alpha u} \sin \beta u$, $F_2(u) = \frac{1}{u}$, имеем $F_1(v) = \frac{\beta}{(v + \alpha)^2 + \beta^2}$, $f_2(v) = \eta(v)$.

³) Если для одной из функций $F_1(p)$ или $F_2(p)$ условие аналитичности выполнено лишь при $\operatorname{Re} p > 0$, то сходимость одного из интегралов может не иметь места.

Поэтому по формуле (8)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u \, du}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\beta \eta(v) \, dv}{(v + \alpha)^2 + \beta^2} = \beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v + \alpha)^2 + \beta^2}$$

$(\eta(u) = 1$, так как $v > 0$). Но

$$\beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v + \alpha)^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{v + \alpha}{\beta} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u \, du}{u} = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad \triangleright$$

Вычислить несобственные интегралы, используя формулу (6):

$$14.149. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \cos \gamma t}{t} dt, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$$14.150*. \int_0^{+\infty} t^\mu e^{-\alpha t} \ln t \, dt, \quad \alpha > 0, \quad \mu > -1.$$

Вычислить несобственные интегралы, используя формулу (7):

$$14.151. \int_0^{+\infty} \frac{u \sin tu \, du}{u^2 + \alpha^2}. \quad 14.152. \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \, du.$$

Вычислить несобственные интегралы, используя теорему Парсеваля (формула (8)):

$$14.153. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{\sqrt{u}} \, du, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$$14.154. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha u - \sin \beta u}{u \sqrt{u}} \, du, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$$14.155*. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \, dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

5. Суммирование рядов. Методы операционного исчисления могут быть использованы при суммировании числовых и функциональных рядов.

Пример 10. Пусть $f(t) \doteq F(p)$ (область аналитичности $F(p)$: $\operatorname{Re} p \geq k$). Доказать, что сумма S ряда $\sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ может быть найдена по формуле

$$S = (\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t) dt}{1 \mp e^{-t}}. \quad (9)$$

По условию $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$. Имеем: $\frac{(\pm 1)^k e^{-kt}}{1 \mp e^{-t}} = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} (\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t) dt}{1 \mp e^{-t}} &= \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt} dt = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n). \end{aligned} \quad \triangleright$$

Используя формулу (9), найти суммы следующих числовых рядов:

$$14.156^{**}. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^2}. \quad 14.157^{**}. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}.$$

$$14.158*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}.$$

$$14.159*. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{3}{n^2+3n+1}.$$

Пример 11. Пусть $f(t) \doteq F(p)$ (область аналитичности $F(p)$: $\operatorname{Re} p \geq 0$). Пусть, кроме того, $\Phi(t, x)$ — производящая функция бесконечной последовательности функций $\varphi_n(x)$, т. е.

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n.$$

Доказать, что сумма $S(x)$ сходящегося на $[a, b]$ функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n)\varphi_n(x)$$

может быть найдена по формуле

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t) dt. \quad (10)$$

▫ Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t) dt &= \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-nt} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) F(n) = S(x). \end{aligned} \quad \triangleright$$

Используя формулу (10), с помощью подходящей производящей функции просуммировать следующие ряды:

$$14.160^*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$14.161^*. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$14.162^{**}. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, \pi).$$

$$14.163^*. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \in (0, \pi).$$

6. Применение операционного исчисления при расчете электрических цепей. Методы операционного исчисления широко используются при расчетах процессов, протекающих в электрических цепях. Пусть $i(t)$ и $u(t)$ — соответственно ток и напряжение в цепи. Применение операторного метода основано на справедливости законов Кирхгофа для операторных тока $I(p) = i(t)$ и напряжения $U(p) = u(t)$. На основании закона Ома для основных элементов электрической цепи могут быть записаны следующие соотношения:

$$u_R(t) = R i(t)$$

для сопротивления R ,

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

для индуктивности L и

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u_C(0)$$

для емкости C . Переходя к изображениям, отсюда получаем

$$U_R(p) = RI(p),$$

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0),$$

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{1}{p} u_C(0).$$

Используя закон Ома в операторной форме, для произвольного участка цепи можем записать

$$U(p) = Z(p)I(p), \quad (11)$$

где $Z(p)$ — операторное сопротивление указанного участка цепи. Для участков с сопротивлением R , индуктивностью L или емкостью C при нулевых начальных условиях операторное сопротивление имеет, соответственно, вид:

$$Z_R(p) = R, \quad Z_L(p) = Lp, \quad Z_C(p) = \frac{1}{Cp}.$$

При ненулевых начальных условиях к имеющимся в цепи источникам э.д.с. добавляются дополнительные источники. Величины э.д.с. дополнительных источников определяются запасами энергии в индуктивности и емкости и равны в операторном виде, соответственно, $Li(0)$ и

$$-\frac{1}{p} u_C(0).$$

Соотношение (11) является основным для расчетов заданного участка цепи в операторной форме.

Пример 12. Найти ток $i(t)$ в цепи, изображенной на рис. 8 при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$. Начальные условия нулевые.

▷ Так как $(e)t = E = E/p$, то, используя соотношение (11), находим:

$$Z(p)I(p) = E/p, \quad (12)$$

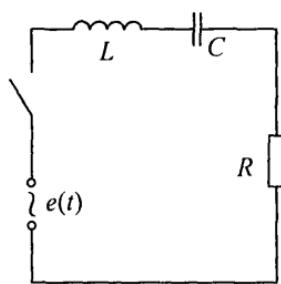


Рис. 8

где операторное сопротивление $Z(p)$ цепи, изображенной на рис. 8, имеет вид

$$Z(p) = Z_L(p) + Z_C(p) + Z_R(p) = Lp + \frac{1}{Cp} + R,$$

в силу нулевых начальных условий. Подставляя полученное выражение для $Z(p)$ в (12), находим

$$I(p) = \frac{E}{pZ(p)} = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{E}{L} \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}. \quad (13)$$

Для отыскания оригинала $i(t)$ следует рассмотреть три случая в зависимости от вида корней квадратного трехчлена в правой части выражения (13).

Пусть $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$, тогда по формуле 10 таблицы изображений находим

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t.$$

Пусть $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$, тогда воспользуемся формулой 3 той же таблицы:

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Наконец, если $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$, то комбинируя формулы 8 и 3, находим:

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} t. \quad \triangleright$$

14.164. Найти ток $i(t)$ в RC -цепи (последовательно включены сопротивление R и емкость C) при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$, если $u_C(0) = u_0$.

14.165. Найти ток $i(t)$ в RL -цепи (последовательно включены сопротивление R и индуктивность L) при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$.

14.166. Найти ток $i(t)$ в цепи, изображенной на рис. 9, при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$, если $u_C(0) = u_0$.

Для изображенных на рис. 9–12 электрических цепей определить напряжение на указанном элементе цепи при подключении постоянной э.д.с. $e(t) = E$ (там, где необходимо, положить $u_C(0) = 0$):

14.167. Рис. 9. $u_{L_1}(t) = ?$ **14.168.** Рис. 10. $u_L(t) = ?$

14.169. Рис. 11. $u_{R_1}(t) = ?$ **14.170.** Рис. 12. $u_C(t) = ?$

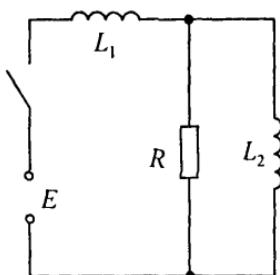


Рис. 9

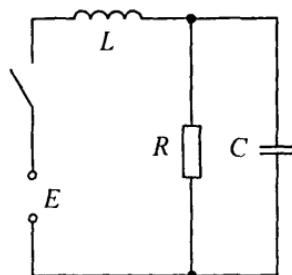


Рис. 10

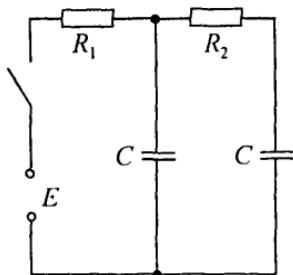


Рис. 11

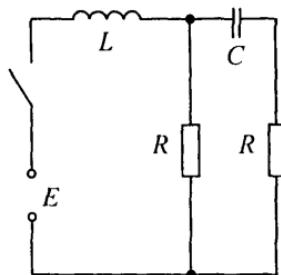


Рис. 12

При расчете электрических цепей, когда воздействие на схему представляет собой функцию произвольного вида, полезно использовать интеграл Диоамеля (см. § 1, свойство 11 преобразования Лапласа). Сначала определяется переходная характеристика цепи — закон изменения напряжения или тока при подаче на вход схемы единичного воздействия $e(t) = \eta(t)$. В этом случае, из соотношения (11) находим операторный ток $I_1(p) = \frac{1}{pZ(p)}$, где $Z(p)$ — операторное сопротивление всей цепи.

Если теперь на вход схемы подается произвольное $e(t)$, то операторный ток $I(p)$ имеет вид

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = pI_1(p)U(p),$$

где $U(p) \doteq e(t)$. Применяя формулу Дюамеля, окончательно находим:

$$\begin{aligned} i(t) &= e(0)i_1(t) + \int_0^t e'(\tau)i_1(t-\tau)d\tau = \\ &= e(0)i_1(t) + \int_0^t e'(t-\tau)i_1(\tau)d\tau = e(0)i_1(t) + e' * i_1. \quad (14) \end{aligned}$$

Пример 13. Найти ток в RL -цепи при подключении э.д.с. $e(t) = e^{\mu t}$.

Сначала определяем переходную характеристику цепи, в данном случае ток $i_1(t)$, возникающий в RL -цепи при подключении э.д.с. $e(t) = \eta(t)$. Имеем (см. ответ к задаче 14.165)

$$i_1(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Для определения тока $i(t)$ воспользуемся формулой (14). Предварительно вычислим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} e' * i_1 &= \int_0^t e'(t-\tau)i_1(\tau)d\tau = \\ &= \frac{\mu}{R} \int_0^t e^{\mu(t-\tau)} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau} \right) d\tau = \frac{\mu}{R} e^{\mu t} \int_0^t \left(e^{-\mu\tau} - e^{-\tau(\mu+\frac{R}{L})} \right) d\tau = \\ &= \frac{\mu}{R} e^{\mu t} \left(-\frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \Big|_0^t + \frac{1}{\mu + \frac{R}{L}} e^{-\tau(\mu+\frac{R}{L})} \Big|_0^t \right) = \\ &= \frac{1}{L \left(\mu + \frac{R}{L} \right)} \left(e^\mu - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \end{aligned}$$

Теперь окончательно находим

$$i(t) = e(0)i_1(t) + e' * i_1 = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R/L}{\mu + R/L} \left(e^{\mu t} - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right). \quad \triangleright$$

14.171. Найти ток в RL -цепи при включении синусоидальной э.д.с. $e(t) = E \sin \omega t$.

14.172. Найти ток в RC -цепи, в которую при нулевых начальных условиях подключена э.д.с. $e(t) = Ete^{-\frac{1}{CR}t}$.

14.173. К электрическому контуру, изображеному на рис. 8, подключена э.д.с. вида $e(t) = Et^2e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \right)$. Найти ток в контуре (начальные условия нулевые).

§ 4. Дискретное преобразование Лапласа и его применение

1. Z -преобразование и дискретное преобразование Лапласа. Z -преобразованием числовой (действительной или комплексной) бесконечной последовательности (a_n) называется функция комплексной переменной $F(z)$, определяемая при $|z| > R = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ рядом Лорана

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad (1)$$

и аналитически продолженная в круг $|z| < R$. Если последовательность (a_n) удовлетворяет условию $|a_n| < Me^{\alpha n}$ ($M > 0$, α — постоянные), то функция $F(z)$ будет аналитической в области $|z| > e^\alpha$, т.е. вне круга с центром в нулевой точке и радиусом $R = e^\alpha$.

Формула (1) дает разложение $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (являющейся правильной точкой $F(z)$), поэтому для восстановления последовательности (a_n) по ее Z -преобразованию надо $F(z)$ любым способом разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки; в частности, можно воспользоваться формулой для определения коэффициентов этого разложения (см. формулу (2) § 5 гл. 12)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz \quad (2)$$

(C — контур, внутри которого лежат все особые точки функции $F(z)$ ⁴)).

Пример 1. Восстановить (a_n) по ее Z -преобразованию $F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$.

⁴) Формула (2) является фактически формулой обращения Z -преобразования.

▫ Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) = \\ &= \frac{1}{(a-b)z} \left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}} - \frac{1}{1-\frac{b}{z}} \right) = \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $a_n = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}$ при $n \geq 1$, $a_0 = 0$. ▷

Введем вместо последовательности (a_n) решетчатую функцию $f(n)$, полагая $a_n = f(n)$. По-прежнему $f(n)$ удовлетворяет условию $|f(n)| < M e^{\alpha n}$, и примем дополнительно, что $f(n) = 0$ при $n < 0$; такие решетчатые функции будем называть *дискретным оригиналом*. *Дискретное преобразование Лапласа* функции $f(n)$ мы получим, если в Z -преобразовании положим $z = e^q$:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-nq}. \quad (3)$$

Связь между дискретным оригиналом $f(n)$ и его изображением $F^*(q)$

обозначают символом $f(n) \doteq F^*(q)$ (иногда пишут $F^*(q) = D[f(n)]$). Изображение $F^*(q)$ — функция комплексной переменной с периодом 2π , при этом в основной полосе $-\pi < \operatorname{Im} q \geq \pi$ она аналитична при $\operatorname{Re} q > \alpha$. Таким образом, все ее особые точки лежат в этой полосе слева от прямой $\operatorname{Re} q = \alpha$.

Из формулы (3) вытекает следующая формула обращения дискретного преобразования Лапласа:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-\pi i}^{\gamma+\pi i} F^*(q) e^{nq} dq. \quad (4)$$

Пример 2. $f(n) = a^n$, найти $F^*(q)$.

▫ Имеем $F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-nq} = \frac{1}{1 - ae^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - a}$; а потому $a^n \doteq$

$\frac{e^q}{e^q - a}$. Полагая $a = 1$, получим $1^n = n$ ($n \doteq \frac{e^q}{e^q - 1}$). ▷

Свойства дискретного преобразования Лапласа (всюду ниже предполагается $f_j(n) \doteq F_j^*(q)$):

1. Линейность:

$$\sum_{j=1}^r C_j f_j(n) \doteq \sum_{j=1}^r C_j F_j^*(q).$$

2. Формула смещения:

$$e^{\alpha n} f(n) \doteq F^*(q - a).$$

3. Формулы запаздывания и опережения:

a) $f(n - k) \doteq e^{-kq} F^*(q),$

б) $f(n + k) \doteq e^{kq} \left(F^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) e^{-rq} \right).$

4. Дифференцирование по параметру:

Если $f(n, x) \doteq F^*(q, x)$, то $\frac{\partial f(n, x)}{\partial x} \doteq \frac{\partial F^*(q, x)}{\partial x}.$

5. Дифференцирование и интегрирование изображения:

a) $n^k f(n) \doteq (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} F^*(q),$

б) $\frac{f(n)}{n} \doteq \int_q^\infty (F^*(s) - f(0)) ds \quad (n \geq 1).$

6. Изображение конечных разностей оригинала:

$$\Delta^k f(n) \doteq (e^q - 1)^k F^*(q) - e^q \sum_{r=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-r-1} \Delta^r f(0).$$

7. Изображение конечных сумм оригинала. Если

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k), \text{ то } g(n) \doteq \frac{F^*(q)}{e^q - 1}.$$

8. Умножение изображений. Если

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{r=0}^n f_1(r) f_2(n - r)$$

(это — так называемая «свертка» оригиналов), то

$$f_1(n) * f_2(n) \doteq F_1^*(q) \cdot F_2^*(q).$$

Приведем таблицу изображений основных решетчатых функций:

№	$f(n)$	$F^*(q)$
1	$f(n) = \begin{cases} C, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	C
2	$\eta(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$
3	a^n	$\frac{e^q}{e^q - a}$
4	$e^{\alpha n}$	$\frac{e^q}{e^q - e^\alpha}$
5	n	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2}$
6	n^2	$\frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}$
7	$\frac{n^{[2]}}{2!} = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^3}$
8	$\frac{n^{[k]}}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = C_n^k$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^{k+1}}$
9	$\sin \beta n$	$\frac{e^q \sin \beta}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1}$
10	$\cos \beta n$	$\frac{e^q(e^q - \cos \beta)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1}$
11	$\operatorname{sh} \beta n$	$\frac{e^q \operatorname{sh} \beta}{e^{2q} - 2e^q \operatorname{ch} \beta + 1}$
12	$\operatorname{ch} \beta n$	$\frac{e^q(e^q - \operatorname{ch} \beta)}{e^{2q} - 2e^q \operatorname{ch} \beta + 1}$
13	$\frac{n^{[k]}}{k!} e^{\alpha n} = C_n^k e^{\alpha n}$	$\frac{e^{q+k\alpha}}{(e^q - e^\alpha)^{k+1}}$
13'	$\frac{n^{[k]}}{k!} a = C_n^k a^n$	$\frac{a^k e^q}{(e^q - a)^{k+1}}$

Пример 3. Найти изображение функции $f(n) = e^{\alpha n} \sin \beta n$.

▷ Применяем теорему смещения (свойство 2) и, используя формулу 9 таблицы изображений, находим

$$e^{\alpha n} \sin \beta n \stackrel{F(q-\alpha)}{=} \frac{e^{q-\alpha} \sin \beta}{e^{2(q-\alpha)} - 2e^{q-\alpha} \cos \beta + 1} = \frac{e^{q+\alpha} \sin \beta}{e^{2q} - 2e^{q+\alpha} \cos \beta + e^{2\alpha}}.$$

В частности,

$$a^n \sin \beta n = e^{n \ln a} \sin \beta n \stackrel{F(q)}{=} \frac{ae^q \sin \beta}{e^{2q} - 2ae^q \cos \beta + a^2}. \triangleright$$

Найти изображения следующих решетчатых функций:

$$14.174. f(n) = e^{\alpha n} \cos \beta n.$$

$$14.175. f(n) = a^n \cos \beta n.$$

$$14.176. f(n) = n^2 e^{\alpha n}.$$

$$14.177. f(n) = n^2 a^n.$$

$$14.178*. f(n) = \frac{(n-1)^{[k]}}{k!} = C_{n-1}^k.$$

$$14.179*. f(n) = \frac{(n+m)^{[k]}}{k!} = C_{n+m}^k. \quad 14.180**. f(n) = \frac{\sin \beta n}{n}.$$

Пример 4. Найти решетчатую функцию $f(n)$ по ее изображению $F^*(q) = \frac{e^q}{(e^{2q} - 9)^2}$.

▷ Первый способ. Разложим на простейшие дроби функцию

$$\frac{F^*(q)}{e^q} = \frac{1}{(e^{2q} - 9)^2},$$

положив $e^q = z$:

$$\frac{1}{(z^2 - 9)^2} = \frac{1}{36} \left(\frac{1}{(z-3)^2} + \frac{1}{(z+3)^2} \right) - \frac{1}{108} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+3} \right).$$

Таким образом:

$$\frac{e^{2q}}{(e^{2q} - 9)^2} = \frac{1}{108} \left(\frac{3e^q}{(e^q - 3)^2} + \frac{3e^q}{(e^q + 3)^2} - \frac{e^q}{e^q - 3} + \frac{e^q}{e^q + 3} \right).$$

Но по формулам 3 и 13' таблицы изображений имеем:

$$\frac{e^q}{e^q - 3} \stackrel{F(q)}{=} 3^n, \quad \frac{e^q}{e^q + 3} \stackrel{F(q)}{=} (-3)^n,$$

$$\frac{3e^q}{(e^q - 3)^2} \stackrel{F(q)}{=} n3^n, \quad \frac{3e^q}{(e^q + 3)^2} \stackrel{F(q)}{=} -n(-3)^n.$$

Отсюда после элементарных преобразований находим:

$$\frac{e^q}{(e^{2q} - 9)^2} \stackrel{?}{=} \frac{3^{n-3}(n-1)(1 - (-1)^n)}{4}.$$

Второй способ. Переходим к Z -преобразованию (полагая $e^q = z$): $\frac{e^q}{(e^{2q} - 9)^2} = \frac{z}{(z^2 - 9)^2}$. Используя формулу обращения (2) и применяя теорему о вычетах, получаем

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{(z^2 - 9)^2} z^{n-1} dz = \\ &= \text{выч} \left[\frac{z^n}{(z^2 - 9)^2}; 3 \right] + \text{выч} \left[\frac{z^n}{(z^2 - 9)^2}; -3 \right]. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \text{выч} \left[\frac{z^n}{(z^2 - 9)^2}; 3 \right] &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^n}{(z+3)^2} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 3} \left(\frac{n z^{n-1}}{(z+3)^2} - \frac{2z^n}{(z+3)^3} \right) = \frac{(n-1) \cdot 3^{n-3}}{4}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\text{выч} \left[\frac{z^n}{(z^2 - 9)^2}; -3 \right] = -(-1)^n \frac{(n-1)3^{n-3}}{4}.$$

Суммируя эти вычеты, приходим к прежнему результату. \triangleright

Найти решетчатые функции по их изображениям

$$14.181. F^*(q) = \frac{e^q}{(e^q - 1)(e^{2q} - 4)}.$$

$$14.182. F^*(q) = \frac{e^q}{e^{4q} + 1}.$$

$$14.183. F^*(q) = \frac{e^{2q}}{e^{2q} + 2e^q + 2}.$$

$$\text{Пример 5. Найти сумму } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\beta.$$

\triangleleft Используем свойство 7 дискретного преобразования Лапласа:

$$f(n) \stackrel{?}{=} \frac{e^q(e^q - \cos \beta)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1} = F^*(q),$$

поэтому

$$S_n = \frac{F^*(q)}{e^q - 1} = \frac{e^q(e^q - \cos \beta)}{(e^q - 1)(e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1)}.$$

Разлагал на простейшие множители дробь

$$\frac{e^q - \cos \beta}{(e^q - 1)(e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1)}$$

и добавляя множитель e^q , находим

$$\frac{e^q(e^q - \cos \beta)}{(e^q - 1)(e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q(e^q - 2 \cos \beta - 1)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1} \right).$$

Но $\frac{e^q}{e^q - 1} = \eta(n)$ (формула 2 таблицы изображений). Следовательно,

$$\frac{e^q(e^q - 2 \cos \beta - 1)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1} = \frac{e^q(e^q - \cos \beta)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1} - \frac{e^q(1 + \cos \beta)}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1}.$$

$$\therefore \cos \beta n - \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} \sin \beta n.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(\eta(n) - \cos \beta n + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \sin \beta n) = \\ &= \frac{\sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{2n-1}{2} \beta}{2 \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \frac{n\beta}{2} \cos \frac{n-1}{2} \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad \triangleright$$

Найти следующие суммы:

$$14.184. \sum_{k=r}^{n-1} \frac{k^{[r]}}{r!} = \sum_{k=r}^{n-1} C_k^r.$$

$$14.185. \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sin k\beta.$$

$$14.186*. \sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k)^2.$$

Пример 6. Найти сумму степенного ряда

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) t^n = 1 + \sqrt{2}t + t^2 - t^4 - \sqrt{2}t^5 - t^6 + \dots$$

Данный ряд сходится при $|t| < 1$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Заменяя t на e^{-q} , приходим к дискретному изображению функции $f(n) = \cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4}$:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} \right) e^{-nq}.$$

Но

$$\cos \frac{n\pi}{4} = \frac{e^q \left(e^q - \cos \frac{\pi}{4} \right)}{e^{2q} - 2e^q \cos \frac{\pi}{4} + 1}; \quad \sin \frac{n\pi}{4} = \frac{e^q \sin \frac{\pi}{4}}{e^{2q} - 2e^q \cos \frac{\pi}{4} + 1}$$

(см. формулы 9 и 10 таблицы изображений). Поэтому

$$f(n) = \cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} = \frac{e^q \left(e^q - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + e^q \frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{2q} - \sqrt{2}e^q + 1} = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2}e^q + 1}.$$

Отсюда, возвращаясь к аргументу t , находим

$$S(t) = \frac{t^{-2}}{t^{-2} - \sqrt{2}t^{-1} + 1} = \frac{1}{1 - t\sqrt{2} + t^2}. \quad \triangleright$$

Найти суммы следующих степенных рядов:

$$14.187. \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{6} t^n.$$

$$14.188. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} \right) t^n.$$

2. Решение разностных уравнений. Пусть дано уравнение

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \cdots + a_k x(n) = \varphi(n) \quad (5)$$

(a_0, a_1, \dots, a_k — постоянные) с заданными (или произвольными) начальными условиями: $x(0) = x_0, x(1) = x_1, \dots, x(k-1) = x_{k-1}$. Правая часть уравнения (5) — решетчатая функция $\varphi(n)$ — предполагается ортогональной.

Полагая $x(n) = X^*(q)$ и применяя формулу опережения (свойство 3, б)), составляем операторное уравнение (оно линейно относительно $X^*(q)$) и определяем из него $X^*(q)$. Затем одним из способов, изложенных в п. 1, по изображению найдем искомое решение $x(n)$.

Если исходное уравнение было задано не через последовательные значения неизвестной функции, а через ее конечные разности, т. е. имеет вид

$$b_0 \Delta^k x(n) + b_1 \Delta^{k-1} x(n) + \cdots + b_k x(n) = \varphi(n), \quad (6)$$

то вследствие громоздкости формул для отыскания изображений конечных разностей решетчатых функций (п. 1, свойство 6) его следует предварительно преобразовать к виду (5) при помощи известных формул, связывающих конечные разности функции с ее последовательными значениями:

$$\Delta^r x(n) = x(n+r) - C_r^1 x(n+r-1) + C_r^2 x(n+r-2) + \cdots + (-1)^r x(n). \quad (7)$$

Аналогично решаются и системы разностных уравнений.

Пример 7. Решить уравнение $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.
◀ Полагаем $x_n := X^*(q)$. По формуле опережения находим:

$$x_{n+1} := e^q (X^*(q) - x_0) = e^q (X^*(q) - 1) = e^q X^*(q) - e^q,$$

$$x_{n+2} := e^{2q} (X^*(q) - x_0 - x_1 e^{-q}) = e^{2q} (X^*(q) - 1 - 2e^{-q}) = \\ = e^{2q} X^*(q) - e^{2q} - 2e^q.$$

Внося эти выражения в исходное уравнение, приходим к операторному уравнению

$$(e^{2q} - e^q + 1) X^*(q) = e^{2q} + e^q.$$

Таким образом,

$$X^*(q) = \frac{e^{2q} + e^q}{e^{2q} - e^q + 1}.$$

Так как $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $X^*(q)$ запишем в следующем виде:

$$X^*(q) = \frac{e^q \left(e^q - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} e^q}{e^{2q} - 2e^q \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{e^q \left(e^q - \cos \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} e^q \sin \frac{\pi}{3}}{e^{2q} - 2e^q \cos \frac{\pi}{3} + 1}.$$

Отсюда по формулам 10 и 11 таблицы изображений п. 1 находим

$$x_n = \cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3} = 2 \sin \frac{2n+1}{6}\pi. \quad ▷$$

Замечание. Записать ответ в форме $x_n = 2 \cos \frac{n-1}{3}\pi$ нельзя, так как в этом случае получим $x_0 = 0 \neq 1$ (по условию равенства нулю решетчатой функции от отрицательного аргумента).

Пример 8. Решить уравнение $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3^n$ при произвольных начальных условиях x_0, x_1 .

◀ Полагая $x_n \leftarrow X^*(q)$ и используя приведенные при решении примера 1 изображения

$$x_{n+1} \leftarrow e^q X^*(q) - x_0 e^q, \quad x_{n+2} \leftarrow e^{2q} X^*(q) - x_0 e^{2q} - x_1 e^q,$$

приходим к операторному уравнению

$$(e^{2q} - 4e^q + 4)X^*(q) - x_0 e^{2q} - (x_1 - 4x_0)e^q = \frac{e^q}{e^q - 3}$$

$\left(\text{поскольку по формуле 3 таблицы п. 1 } 3^n \leftarrow \frac{e^q}{e^q - 3} \right)$. Отсюда находим

$$X^*(q) = \frac{x_0 e^{2q}}{(e^q - 2)^2} + (x_1 - 4x_0) \frac{e^q}{(e^q - 2)^2} + \frac{e^q}{(e^q - 3)(e^q - 2)^2}.$$

Разлагая дробь $\frac{1}{(e^q - 3)(e^q - 2)^2}$ на простейшие, имеем

$$X^*(q) = x_0 \frac{e^{2q}}{(e^q - 2)^2} + (x_1 - 4x_0 - 1) \frac{e^q}{(e^q - 2)^2} - \frac{e^q}{e^q - 2} + \frac{e^q}{e^q - 3}.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{e^q}{e^q - 3} &\leftarrow 3^n, & \frac{e^q}{e^q - 2} &\leftarrow 2^n, \\ \frac{2e^q}{(e^q - 2)^2} &\leftarrow n \cdot 2^n, & \frac{2e^{2q}}{(e^q - 2)^2} &\leftarrow (n+1)2^{n+1} \end{aligned}$$

(последнее соотношение следует из предыдущего по формуле опережения). Переходя от $X^*(q)$ к оригиналам, находим:

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 \frac{n+1}{2} 2^{n+1} + \frac{x_1 - 4x_0 - 1}{2} n \cdot 2^n - 2^n + 3^n = \\ &= \frac{x_1 - 2x_0 - 1}{2} n \cdot 2^n + (x_0 - 1)2^n + 3^n = (C_1 + C_2 n)2^n + 3^n. \end{aligned} \quad \triangleright$$

Пример 9. Решить систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_{n+2} - y_n &= 0, \\ y_{n+2} + x_n &= 0 \end{aligned}$$

при начальных условиях $x_0 = y_0 = 1, x_1 = \sqrt{2}, y_1 = 0$.

◀ Полагая $x_n := X^*(q)$, $y_n := Y^*(q)$ и по формуле опережения имеем:

$$x_{n+2} := e^{2q}(X^*(q) - x_0 - x_1 e^{-q}) = e^{2q}X^*(q) - e^{2q} - \sqrt{2}e^q,$$

$$y_{n+2} := e^{2q}(Y^*(q) - y_0 - y_1 e^{-q}) = e^{2q}Y^*(q) - e^{2q}.$$

Получаем систему операторных уравнений

$$\begin{aligned} e^{2q}X^*(q) - Y^*(q) &= e^{2q} + \sqrt{2}e^q, \\ e^{2q}Y^*(q) + X^*(q) &= e^{2q}. \end{aligned}$$

Так как $e^{4q} + 1 = (e^{2q} + \sqrt{2}e^q + 1)(e^{2q} - \sqrt{2}e^q + 1)$, то решение этой системы запишется в виде

$$X^*(q) = \frac{e^{4q} + \sqrt{2}e^{3q} + e^{2q}}{e^{4q} + 1} = \frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2} \cdot e^q + 1},$$

$$Y^*(q) = \frac{e^{4q} - e^{2q} - \sqrt{2}e^q}{e^{4q} + 1} = \frac{e^{2q} - \sqrt{2}e^q}{e^{2q} - \sqrt{2}e^q + 1}.$$

Применяя формулу опережения, имеем:

$$\frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2}e^q + 1} = \sqrt{2} \frac{e^q \cdot e^q \sin \frac{\pi}{4}}{e^{2q} - 2e^q \cos \frac{\pi}{4} + 1} \vdash \sqrt{2} \sin(n+1)\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{e^{2q} - \sqrt{2}e^q}{e^{2q} - \sqrt{2}e^q + 1} = \frac{e^q \left(e^q - \cos \frac{\pi}{4} \right) - e^q \sin \frac{\pi}{4}}{e^{2q} - 2e^q \cos \frac{\pi}{4} + 1} \vdash$$

$$\vdash \cos \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{4} = \sqrt{2} \cos \frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$x_n = \sqrt{2} \sin \frac{(n+1)\pi}{4}, \quad y_n = \sqrt{2} \cos \frac{(n+1)\pi}{4}. \quad \triangleright$$

Решить следующие линейные разностные уравнения:

14.189. $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 10x_n = 0; \quad x_0 = 3, \quad x_1 = -1.$

14.190. $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0; \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1.$

14.191. $x_{n+2} - \sqrt{3}x_{n+1} + x_n = 0; \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

14.192. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0;$ начальные условия произвольные.

14.193. $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 2^n; \quad x_0 = x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$

14.194. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2 \cdot 4^n;$ начальные условия произвольные.

Решить системы линейных разностных уравнений:

14.195. $x_{n+1} - x_n + y_n = 3^n,$

$$y_{n+1} + 2x_n = -3^n; \quad x_0 = 3, \quad y_0 = 0.$$

14.196. $5x_{n+1} - 12x_n - y_n = 0,$

$$5y_{n+1} - 6x_n - 13y_n = 0;$$

начальные условия произвольные.

Глава 15

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Интегральные уравнения Вольтерра

1. Уравнения Вольтерра 2-го рода: основные понятия, связь с дифференциальными уравнениями. Линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода называется уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt, \quad (1)$$

где $y(x)$ — искомая функция, а $K(x, t)$ и $f(x)$ — известные функции, определенные соответственно в треугольнике $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq x$ и на отрезке $[a, b]$. Функция $K(x, t)$ называется *ядром* интегрального уравнения (1), функция $f(x)$ — *свободным членом* этого уравнения.

Решением уравнения (1) называется всякая функция $y(x)$, $x \in [a, b]$, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Вопрос о существовании и единственности решения решается различным образом в зависимости от свойств ядра $K(x, t)$ и свободного члена $f(x)$, а также от того, в каком классе функций ищется решение. Всюду в дальнейшем, если не оговаривается противное, мы будем предполагать, что функции $K(x, t)$ и $f(x)$ непрерывны в своей области определения. При этом условии уравнение (1) имеет, и притом единственное, решение в классе функций, непрерывных на $[a, b]$.

Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода используются обычно при описании динамики различных процессов в системах. В частности, всякая задача Коши для линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = f(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

может быть сведена к решению некоторого линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

Пример 1. Составить интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши

$$u'' + 2u' + u = x^2, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

◀ Положим

$$u''(x) = y(x). \quad (2)$$

Интегрируя (2) с учетом начальных условий, последовательно находим

$$u'(x) = u'(0) + \int_0^x y(t) dt = \int_0^x y(t) dt, \quad (3)$$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x ds \int_0^s y(t) dt = 1 + \int_0^x (x-t)y(t) dt. \quad (4)$$

Подставляя (2)–(4) в исходное дифференциальное уравнение, получаем

$$y(x) + 2 \int_0^x y(t) dt + \left(1 + \int_0^x (x-t)y(t) dt \right) = x^2,$$

или

$$y(x) = x^2 - 1 - \int_0^x (2+x-t)y(t) dt. \quad (5)$$

Таким образом, показано, что если $u(x)$ — решение исходной задачи Коши, то функция $y(x) = u''(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (5). Обратно, если $y(x)$ — решение этого уравнения, то функция $u(x)$, определяемая соотношением (4), удовлетворяет как исходному дифференциальному уравнению, так и начальным условиям. Следовательно, рассматриваемая задача Коши эквивалентна интегральному уравнению (5). ▷

Проверить, что данные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений:

$$\text{15.1. } y(x) = e^{2x}, \quad y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

$$\text{15.2. } y(x) = xe^{x^3/3}, \quad y(x) = x + \int_0^x xt y(t) dt.$$

$$\text{15.3. } y(x) = e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right).$$

$$y(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \sin(x-t) y(t) dt.$$

Составить интегральные уравнения, соответствующие следующим задачам Коши:

$$15.4. u' + 2xu = e^x, \quad y(0) = 1.$$

$$15.5. u'' - 2u' + u = 0, \quad u(2) = 1, \quad u'(2) = -2.$$

$$15.6. u'' - \sin x \cdot u' + e^x u = x, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -1.$$

$$15.7. u''' + xu = e^x, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = u''(0) = 0.$$

$$15.8. u^{IV} + u'' - u = 0, \quad u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 1.$$

15.9*. Показать, что задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = f(x),$$

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

сводится к интегральному уравнению вида (1) с ядром

$$K(x, t) = - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!},$$

зависящим лишь от разности $x - t$ своих аргументов (*интегральное уравнение типа свертки*, см. п. 3).

Задача Коши для произвольного дифференциального уравнения 1-го порядка вида

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

эквивалентна в общем случае нелинейному интегральному уравнению Вольтерра

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(t)) dt.$$

Аналогично, задача Коши для произвольного дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0,$$

$$y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

может быть сведена к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра.

Пример 2. Составить систему интегральных уравнений, соответствующую задаче Коши

$$y'' = 2y - y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

◀ Полагая $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, сведем исходную задачу к задаче Коши для нормальной системы 2-го порядка

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = 2y_1 - y_2^2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

В свою очередь, полученная система дифференциальных уравнений с учетом начальных условий эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = \int_0^x (2y_1(t) - y_2^2(t)) dt. \quad \triangleright$$

Составить интегральные уравнения или системы уравнений, соответствующие следующим задачам Коши:

15.10. $y' = 1 + x \sin y$, $y(\pi) = 2\pi$.

15.11. $y' = -1 + 3x^2 + y^2$, $y(1) = 1$.

15.12. $y'' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

15.13. $y''' = \frac{3}{2}xy'^2$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

15.14. $y''' = x + xy^2 - y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

Во многих случаях решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (или системы таких уравнений) в свою очередь может быть сведено к решению некоторой задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Укажем здесь два способа, посредством которых это может быть сделано.

а) Если в исходном интегральном уравнении (1) ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ имеют непрерывные производные $K'(x, t)$ и $f'(x)$, то это уравнение может быть продифференцировано (один или несколько раз), что и позволяет в ряде случаев свести его к задаче Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения.

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt. \quad (6)$$

◀ Последовательно дифференцируя интегральное уравнение, получаем

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt, \quad (7)$$

$$y''(x) = -\sin x + y(x) - \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt. \quad (8)$$

Исключая из уравнений (6) и (8) интеграл $\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt$, получаем

для неизвестной функции $y(x)$ дифференциальное уравнение $y''(x) = 0$. Из (6) и (7) находим начальные условия: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Следовательно, $y(x) = x$. \triangleright

Рассмотренный прием всегда приводит к цели в том случае, когда ядро $K(x, t)$ имеет вид многочлена по степеням бинома $x - t$ (см. задачу 15.9).

Пример 4. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = x + 2 \sin x - 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt. \quad (9)$$

\triangleleft Дважды дифференцируя уравнение (9), получаем

$$y'(x) = 1 + 2 \cos x - \int_0^x y(t)dt, \quad (10)$$

$$y''(x) = -2 \sin x - y(x). \quad (11)$$

Уравнение (11), или в стандартной форме

$$y'' + y = -2 \sin x, \quad (12)$$

и есть дифференциальное уравнение для функции $y(x)$. Начальные условия найдем из (9) и (10) при $x = 0$:

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 3. \quad (13)$$

Решая задачу Коши (12), (13), находим

$$y(x) = 2 \sin x + (x-1) \cos x,$$

что и является решением исходного интегрального уравнения. \triangleright

б) Пусть исходное интегральное уравнение (1) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \left(\sum_{i=1}^n p_i(x) q_i(t) \right) y(t) dt \quad (14)$$

(уравнение с вырожденным ядром).

Запишем его следующим образом:

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n p_i(x) \int_0^x q_i(t) y(t) dt. \quad (15)$$

Вводя функции

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_0^x q_1(t) y(t) dt, \\ \dots \dots \dots & \\ u_n(x) &= \int_0^x q_n(t) y(t) dt \end{aligned} \tag{16}$$

и подставляя их в (15), заключаем, что решение интегрального уравнения (14) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n p_i(x) u_i(x). \tag{17}$$

Далее, дифференцируя соотношения (16) и подставляя вместо $y(x)$ выражение (17), получаем для неизвестных функций $u_i(x)$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u'_1(x) &= q_1(x) f(x) + \sum_{i=1}^n q_1(x) p_i(x) u_i(x), \\ \dots \dots \dots & \\ u'_n(x) &= q_n(x) f(x) + \sum_{i=1}^n q_n(x) p_i(x) u_i(x). \end{aligned}$$

Из (16) при $x = 0$ находим начальные условия: $u_1(0) = \dots = u_n(0) = 0$. Определив функции $u_i(x)$ и подставив их в (17), получим решение $y(x)$ интегрального уравнения (14).

Пример 5. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} x} y(t) dt.$$

◀ Полагая $u(x) = \int_0^x \operatorname{ch} t y(t) dt$, получим

$$y(x) = 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} x} u(x).$$

Далее, дифференциальное уравнение для $u(x)$ имеет вид

$$u'(x) = \operatorname{ch} x y(x) = \operatorname{ch} x \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch} x} u(x) \right)$$

или

$$u' - u = \operatorname{ch} x.$$

Решая это уравнение с учетом начального условия $u(0) = 0$, находим $u(x) = \frac{1}{2}(xe^x + \operatorname{sh} x)$, откуда

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} \frac{xe^x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \quad \triangleright$$

Решить интегральные уравнения, сведя их предварительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$15.15. \quad y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt.$$

$$15.16. \quad y(x) = 1 + \int_0^x ty(t) dt.$$

$$15.17. \quad y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt.$$

$$15.18. \quad y(x) = e^{-x} \cos x - \int_0^x \cos x e^{-(x-t)} y(t) dt.$$

$$15.19. \quad y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-t) y(t) dt.$$

$$15.20. \quad y(x) = x - 1 + \int_0^x (x-t) y(t) dt.$$

$$15.21. \quad y(x) = \sin x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt.$$

$$15.22. \quad y(x) = \operatorname{ch} x - \int_0^x \operatorname{sh} (x-t) y(t) dt.$$

$$15.23. \quad y(x) = x + \int_0^x (4 \sin(x-t) - x+t) y(t) dt.$$

$$15.24. \quad y(x) = 1 + \int_0^x ((x-t)^2 - (x-t)) y(t) dt.$$

2. Метод последовательных приближений. Решение с помощью резольвенты. Метод последовательных приближений применительно к линейному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt$$

заключается в следующем. Строится последовательность функций $y_0(x)$, $y_1(x)$, \dots , $y_n(x)$, \dots , где нулевое приближение $y_0(x)$ — произвольная функция, а последующие приближения определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ непрерывны соответственно при $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq x$ и на отрезке $[a, b]$, то построенная таким образом последовательность приближений $y_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, при $n \rightarrow \infty$ сходится к единственному непрерывному решению интегрального уравнения.

Обычно полагают $y_0(x) = f(x)$, однако это вовсе не обязательно: удачный выбор нулевого приближения часто позволяет ускорить сходимость последовательности $y_n(x)$ к точному решению.

Пример 6. Методом последовательных приближений решить уравнение

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x - t) y(t) dt.$$

◀ Положим

$$y_0(x) = 1.$$

Тогда

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x (x - t) dt = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x (x - t) \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Для n -го приближения получим

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

откуда

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x. \quad \triangleright$$

Решить интегральные уравнения методом последовательных приближений:

$$\mathbf{15.25. } y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt, \quad y_0(x) = 0.$$

$$\mathbf{15.26. } y(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x y(t) dt,$$

$$\text{a) } y_0(x) = 1, \quad \text{б) } y_0(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

$$\mathbf{15.27. } y(x) = 1 - x^2 + \int_0^x xy(t) dt,$$

$$\text{а) } y_0(x) = 1 - x^2, \quad \text{б) } y_0(x) = 1.$$

$$\mathbf{15.28. } y(x) = 1 + \int_0^x xy(t) dt, \quad y_0(x) = 1.$$

$$\mathbf{15.29. } y(x) = 1 + \int_0^x ty(t) dt, \quad y_0(x) = 1.$$

$$\mathbf{15.30. } y(x) = 1 + \int_0^x t^p y(t) dt, \quad y_0(x) = 1, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{15.31. } y(x) = x - \int_0^x (x-t) y(t) dt, \quad y_0(x) = 0.$$

$$\mathbf{15.32. } y(x) = 1 + \int_0^x (x-t) y(t) dt, \quad y_0(x) = 0.$$

$$\mathbf{15.33. } y(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-t} y(t) dt, \quad y_0(x) = 0.$$

$$\mathbf{15.34. } y(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} y(t) dt, \quad y_0(x) = 0.$$

В задачах 15.35–15.37 методом последовательных приближений найти для заданных нелинейных уравнений Вольтерра второе приближение $y_2(x)$; в качестве нулевого приближения взять $y_0(x) = 0$:

$$15.35. \quad y(x) = \int_0^x (t^2 - y^2(t)) dt.$$

$$15.36. \quad y(x) = x - \pi + \int_0^x t \sin y(t) dt.$$

$$15.37. \quad y(x) = \int_0^x t e^{-y(t)} dt.$$

Часто вместо одного уравнения рассматривают семейство уравнений

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt, \quad (18)$$

соответствующих различным значениям числового параметра λ . Предполагая, что λ фиксировано, будем решать уравнение (18) методом последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения $y_0(x) = f(x)$. Тогда получим

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) f(t) dt = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t) f(t) dt,$$

где

$$K_1(x, t) = K(x, t);$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K(x, s) \left(\int_a^s K_1(s, t) f(t) dt \right) ds = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x \left(\int_t^x K(x, s) K_1(s, t) ds \right) f(t) dt = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K_2(x, t) f(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$K_2(x, t) = \int_t^s K(x, s) K_1(s, t) ds.$$

Вообще,

$$\begin{aligned} y_n(x) &= f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda^j \int_a^x K_j(x, t) f(t) dt = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x, t) \right) f(t) dt, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$K_j(x, t) = \int_t^x K(x, s) K_{j-1}(s, t) ds, \quad j = 2, 3, \dots, \quad (20)$$

$$K_1(x, t) = K(x, t).$$

Ядра $K_j(x, t)$ называются *повторными* или *итерированными*.

Если ядро $K(x, t)$ непрерывно, то ряд

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t) \quad (21)$$

при любых фиксированных значениях λ сходится (равномерно относительно $x \in [a, b]$ и $t \in [0, x]$) к функции $R(x, t, \lambda)$, называемой *резольвентой ядра* $K(x, t)$. Следовательно, соотношение (19) в пределе при $n \rightarrow \infty$ переходит в формулу

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (22)$$

выражающую решение интегрального уравнения через резольвенту.

Пример 7. Найти резольвенту $R(x, t, \lambda)$ ядра $K(x, t) = x$ и, используя ее, решить интегральное уравнение

$$y(x) = x - \frac{1}{2} \int_0^x xy(t) dt.$$

◁ Из рекуррентных соотношений (20) получаем

$$K_1(x, t) = x,$$

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, s) K_1(s, t) ds = \int_t^x xs ds = x \frac{x^2 - t^2}{2},$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x K(x, t) K_2(s, t) ds = \int_t^x xs \frac{s^2 - t^2}{2} ds = x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - t^2}{2} \right)^2.$$

Вообще, можно проверить (например, методом математической индукции), что

$$K_j(x, t) = x - \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{x^2 - t^2}{2} \right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Подставляя это выражение для итерированных ядер в формулу (21), найдем резольвенту

$$R(x, t, \lambda) = x \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \left(\frac{x^2 - t^2}{2} \right)^{j-1} = xe^{\lambda \frac{x^2 - t^2}{2}}.$$

Найдем теперь решение заданного интегрального уравнения. В рассматриваемом случае $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $f(x) = x$, поэтому на основании (22) получаем

$$y(x) = x - \frac{1}{2} \int_0^x xe^{-\frac{x^2 - t^2}{4}} \cdot t dt = x - xe^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x d \left(e^{\frac{t^2}{4}} \right) = xe^{-\frac{x^2}{4}}. \quad \triangleright$$

Найти резольвенты для следующих ядер:

15.38. $K(x, t) = 1.$

15.39. $K(x, t) = t.$

15.40. $K(x, t) = x^2.$

15.41. $K(x, t) = xt.$

15.42. $K(x, t) = xt^2.$

15.43. $K(x, t) = e^{xt}.$

15.44. $K(x, t) = 2^{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}.$

15.45. $K(x, t) = \frac{1 + x^2}{1 + t^2}.$

15.46. $K(x, t) = \frac{t^2 - t + 1}{x^2 - x + 1}.$

15.47. $K(x, t) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}.$

15.48. Показать, что для произвольного ядра вида $K(x, t) = x^p t^q$, где p и q — некоторые положительные целые числа, резольвента имеет вид

$$R(x, t, \lambda) = x^p t^q e^{\lambda \frac{x^{p+q+1} - t^{p+q+1}}{p+q+1}}.$$

15.49. Показать, что для произвольного ядра вида $K(x, t) = \frac{K(x)}{K(t)}$, $K(t) \neq 0$, резольвента имеет вид

$$R(x, t, \lambda) = \frac{K(x)}{K(t)} e^{\lambda(x-t)}.$$

Найти с помощью резольвенты решения следующих интегральных уравнений:

$$\text{15.50. } y(x) = 1 - \int_0^x ty(t) dt.$$

$$\text{15.51. } y(x) = x + \int_0^x xty(t) dt.$$

$$\text{15.52. } y(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

$$\text{15.53. } y(x) = \operatorname{ch} x + \int_0^x \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t} y(t) dt.$$

$$\text{15.54. } y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1+t^2}{1+x^2} y(t) dt.$$

3. Уравнения Вольтерра 2-го рода типа свертки. Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x-t) y(t) dt, \quad (23)$$

в котором ядро $K(x, t) = K(x-t)$ зависит лишь от разности аргументов, называется *уравнением типа свертки*. Если в (23) a — конечное число, то, не ограничивая общности (см. задачу 15.65), можно считать $a = 0$, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Для решения уравнений типа свертки используется преобразование Лапласа.

Предположим, что функции $f(x)$ и $K(u)$ — оригиналы (см. гл. 17, § 1, п. 1). Можно показать, что в этом случае решение $y(x)$ также будет оригиналом и, следовательно, к обеим частям уравнения (23) можно применить преобразование Лапласа. Полагая

$$y(x) \doteq Y(p), \quad f(x) \doteq F(p), \quad K(u) \doteq \tilde{K}(p)$$

и используя теорему о свертке, согласно которой $\int_0^x K(x-t) y(t) dt \doteq \tilde{K}(p) Y(p)$, получим

$$Y(p) = F(p) + \tilde{K}(p) Y(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)}.$$

Оригинал $y(x)$ для $Y(p)$ будет решением интегрального уравнения.

Пример 8. Используя преобразование Лапласа, решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) y(t) dt.$$

« \triangleleft Так как $1 \doteq \frac{1}{p}$ и $\operatorname{ch} u \doteq \frac{p}{p^2 - 1}$, то, применяя к обеим частям заданного уравнения преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, получим

$$Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 - 1} Y(p).$$

Отсюда

$$Y(p) \left(1 - \frac{p^2}{p^2 - 1} \right) = \frac{1}{p},$$

$$Y(p) = \frac{p^2 - 1}{p(p^2 - p - 1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\left(p - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}}$$

и, следовательно, $y(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2} x$. \triangleright

С помощью преобразования Лапласа найти решения заданных уравнений типа свертки:

15.55. $y(x) = e^x - x - 1 + \int_0^x y(t) dt.$

15.56. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t) y(t) dt.$

$$15.57. y(x) = xe^{2x} - \int_0^x e^{2(x-t)} y(t) dt.$$

$$15.58. y(x) = \sin x + \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

$$15.59. y(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt.$$

$$15.60. y(x) = \sin x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt.$$

$$15.61. y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt.$$

$$15.62. y(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-t)e^{x-t} y(t) dt.$$

$$15.63. y(x) = 1 + \int_0^x \cos(x-t) \sin(x-t) y(t) dt.$$

$$15.64. y(x) = 1 + x \cos x - \sin x + \int_0^x (x-t) \sin(x-t) y(t) dt.$$

15.65. Показать, что если $y(x)$ — решение уравнения (23) с $a \neq 0$, то функция $y^*(x) = y(x+a)$ удовлетворяет уравнению

$$y^*(x) = f^*(x) + \int_0^x K(x-t) y^*(t) dt,$$

где $f^*(x) = f(x+a)$.

15.66. Показать, что для ядра $K(x, t) = K(x-t)$ все итерированные ядра, а следовательно, и резольвента также зависят лишь от разности аргументов $x-t$.

Решение уравнений типа свертки можно провести и несколько иным способом, а именно — путем использования преобразования Лапласа для нахождения резольвенты. В самом деле, резольвента ядра $K(x, t) = K(x-t)$ зависит лишь от разности аргументов (см. задачу 15.66) и,

следовательно, решение уравнения

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t) y(t) dt \quad (24)$$

можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t) dt, \quad (25)$$

где $R(x-t) = R(x, t, 1)$, а $R(x, t, \lambda)$ — резольвента ядра $K(x, t) = K(x-t)$. Применяя к обеим частям уравнений (24) и (25) преобразование Лапласа, получим

$$Y(p) = F(p) + \tilde{K}(p) Y(p), \quad Y(p) = F(p) + \tilde{R}(p) F(p),$$

откуда

$$\tilde{R}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}. \quad (26)$$

Оригинал $R(u) \doteq \tilde{R}(p)$ определяет резольвенту $R(x-t)$, зная которую, из (25) найдем и решение уравнения.

Пример 9. С помощью резольвенты найти решение уравнения

$$y(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t e^{-\frac{x-t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(x-t) y(t) dt.$$

В рассматриваемом случае $K(u) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-u/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} u$ и

$$\tilde{K}(p) = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

Из (26) получим $\tilde{R}(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \doteq 1 - e^{-u}$, т. е. $R(x-t) = 1 - e^{-(x-t)}$. Учитывая, что $f(x) = 1$, с помощью (25) находим решение

$$y(x) = 1 + \int_0^x (1 - e^{-(x-t)}) dt = x + e^{-x}. \quad \triangleright$$

Найдя резольвенту с помощью преобразования Лапласа, решить следующие интегральные уравнения:

$$15.67. \quad y(x) = 1 + \int_0^x e^{-2(x-t)} \cdot y(t) dt.$$

$$15.68. \quad y(x) = 2 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 y(t) dt.$$

$$15.69. \quad y(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \sin(x-t) y(t) dt.$$

$$15.70. \quad y(x) = e^{-\frac{x}{2}} + \int_0^x (1 - e^{-(x-t)}) y(t) dt.$$

$$15.71. \quad y(x) = 1 + \int_0^x e^{-\frac{x-1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(x-t) y(t) dt.$$

Используя преобразование Лапласа, решить систему уравнений типа свертки:

$$15.72. \quad y_1(x) = -1 + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = x - \int_0^x y_1(t) dt.$$

$$15.73. \quad y_1(x) = -x + \int_0^x y_2(t) dt,$$

$$y_2(x) = -3x^2 + x - 5 \int_0^x y_1(t) dt + 2 \int_0^x y_2(t) dt.$$

$$15.74. \quad y_1(x) = x + \int_0^x y_2(t) dt,$$

$$y_2(x) = \frac{x^3}{6} + 2x - 1 - \int_0^x (x-t) y_1(t) dt.$$

$$15.75. \quad y_1(x) = e^x - \int_0^x y_1(t) dt + 4 \int_0^x e^{x-t} y_2(t) dt,$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-t)} y_1(t) dt + \int_0^x y_2(t) dt.$$

$$15.76. \quad y_1(x) = x + \int_0^x y_2(t) dt, \quad y_2(x) = 1 - \int_0^x y_1(t) dt,$$

$$y_3(x) = \sin x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t) y_1(t) dt.$$

4. Уравнения Вольтерра 1-го рода. Линейным интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода называется уравнение вида

$$\int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (27)$$

где $y(x)$ — искомая функция, а $K(x, t)$ и $f(x)$ — заданные функции, определенные соответственно в треугольнике $a \leq x, t \leq b, t \leq x$ и на отрезке $[a, b]$. Классическим примером уравнения этого типа является *уравнение Абеля*

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x),$$

а также его обобщение с ядром вида $K(x, t) = \frac{1}{(x-t)^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, имеющим интегрируемую особенность при $x = t$. В настоящем пункте ограничимся рассмотрением уравнений, для которых ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ непрерывны всюду в своей области определения.

К уравнениям Вольтерра 1-го рода приводит, например, следующая важная задача, часто встречающаяся на практике. Пусть задана некоторая линейная динамическая система, $x(t)$ — ее входной, а $y(t)$ — выходной сигналы. Тогда, как известно, зависимость $y(t)$ от $x(t)$ может быть записана в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (28)$$

где $g(t, \tau)$ — весовая функция, определяемая свойствами системы. Если в частности, выполнено условие физической реализуемости (т. е.

$g(t, \tau) = 0$ при $\tau > t$) и система находилась в покое до момента времени t_0 (т. е. $x(t) = 0$ при $t < t_0$), то (28) принимает вид

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Если теперь требуется по известному выходному сигналу восстановить внешнее воздействие, то мы приходим к уравнению Вольтерра 1-го рода (29) относительно $x(t)$ при заданной функции $y(t)$.

В отличие от уравнений Вольтерра 2-го рода, решение уравнения Вольтерра 1-го рода (27) существует только в том случае, когда свободный член $f(x)$ удовлетворяет ряду дополнительных условий, зависящих в каждом конкретном случае от свойств ядра $K(x, t)$.

В частности, каково бы ни было ядро, необходимым условием существования решения, как это видно из (27) при $x = 0$, является равенство $f(a) = 0$.

Пример 10. Найти условия разрешимости в классе непрерывных функций и решение уравнения

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} y(t) dt = f(x), \quad n = 1, 2, \dots, x \in [0, c]. \quad (30)$$

Предположим, что непрерывное решение $y(x)$ существует. Тогда из (30) следует, что $f(0) = 0$ и существует непрерывная производная $f'(x)$, $x \in [0, c]$. Дифференцируя (30) последовательно n раз, получаем

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} y(t) dt = f'(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int_0^x y(t) dt = f^{(n-1)}(x),$$

$$y(x) = f^{(n)}(x).$$

Таким образом, если непрерывное решение $y(x)$ существует, то функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до n -го порядка включительно, причем

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0; \quad (31)$$

при этом решение единственно и должно иметь вид $y(x) = f^{(n)}(x)$. Подставляя в (30) $y(x) = f^{(n)}(x)$ и n раз интегрируя по частям с учетом

соотношений (31), найдем, что функция $y(x) = f^{(n)}(x)$ действительно является решением исходного уравнения (проверьте!). \triangleright

Если ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ ($f(a) = 0$) уравнения (27) таковы, что существуют непрерывные производные $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ и $f'(x)$ и, кроме того, функция $K(x, x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$, то уравнение (27) эквивалентно уравнению Вольтерра 2-го рода и, следовательно (см. п. 1), имеет единственное непрерывное решение. В самом деле, предполагая существование непрерывного решения и дифференцируя (27) с учетом перечисленных условий, получаем

$$K(x, x) y(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t) dt = f'(x)$$

или

$$y(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} + \int_a^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t) dt, \quad (32)$$

т. е. $y(x)$ есть решение уравнения Вольтерра 2-го рода (32). Обратно, непосредственной проверкой убеждаемся, что решение уравнения (32) при условии $f(a) = 0$ удовлетворяет исходному уравнению (см. задачу 15.77).

Пример 11. Решить уравнение

$$\int_0^x (2 + x^2 - t^2) y(t) dt = x^2,$$

сведя его к уравнению Вольтерра 2-го рода.

\triangleleft Дифференцируя это уравнение, получаем

$$2y(x) + \int_0^x 2xy(t) dt = 2x$$

или

$$y(x) = x - \int_0^x xy(t) dt$$

— уравнение Вольтерра 2-го рода. Ядро $K(x, t) = -x$ выражено и, полагая $u(x) = \int_0^x y(t) dt$, получаем

$$y(x) = x - xu(x),$$

$$u'(x) = y(x) = x - xy(x)$$

или

$$u' + xu = x, \quad u(0) = 0.$$

Отсюда $u(x) = 1 - e^{-x^2/2}$ и $y(x) = xe^{-x^2/2}$. \triangleright

Если в исходном уравнении Вольтерра 1-го рода (27) $K(x, x) \equiv 0$ на $[a, b]$, то после дифференцирования этого уравнения снова получается уравнение 1-го рода, и — при выполнении соответствующих условий — можно повторить описанный выше прием. При этом, однако, следует всякий раз внимательно учитывать отмеченные выше ограничения на свободный член, необходимые для разрешимости уравнения.

Пример 12. Решить уравнение

$$\int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = e^x - 1. \quad (33)$$

\triangleleft Условия существования и непрерывности производных для ядра и свободного члена здесь выполнены. Дифференцируя дважды, получаем

$$\int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = e^x, \quad (34)$$

$$y(x) - \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = e^x. \quad (35)$$

Уравнение (35) есть уравнение Вольтерра 2-го рода и оно имеет единственно непрерывное решение $y(x) = 2e^x - x - 1$, которое может быть найдено, например, операционным методом. Однако функция $y(x) = 2e^x - x - 1$ не удовлетворяет исходному уравнению, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Дело здесь в том, что уравнение (34) не имеет решения, так как $e^x|_{x=0} = 1 \neq 0$. А поскольку решение уравнения (35) должно удовлетворять уравнению (34), то и исходное уравнение (33) не имеет решения. \triangleright

15.77. Доказать, что решение уравнения (32), в котором $f(a) = 0$, является решением и уравнения (27).

Решить заданные уравнения Вольтерра 1-го рода, сводя их к уравнениям 2-го рода:

$$15.78. \int_0^x (x-t) y(t) dt = e^x - x - 1.$$

$$15.79. \int_0^x e^{x-t} y(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

$$15.80. \int_0^x 3^{x-t} y(t) dt = x.$$

$$15.81. \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = 1 - \cos x.$$

$$15.82. \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt = \operatorname{sh} x - x.$$

$$15.83. \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = x^3.$$

$$15.84. \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = x^3 + x^2.$$

$$15.85. \int_0^x (1+x-t) y(t) dt = \frac{1}{2} e^{-x} \sin x.$$

$$15.86. \int_0^x (1-x^2+t^2) y(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

$$15.87. \int_1^x (2t-x) y(t) dt = x^3 - 1.$$

Решить уравнения Вольтерра 1-го рода типа свертки, применяя преобразование Лапласа непосредственно к заданному уравнению (см. также п. 3):

$$15.88. \int_0^x (x-t) y(t) dt = \operatorname{ch} x - 1.$$

$$15.89. \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = \frac{1}{2} x^4.$$

$$15.90. \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt = x \sin x.$$

$$15.91. \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$15.92. \int_0^x (x-t) \sin(x-t) y(t) dt = \sin^2 x.$$

$$15.93. \int_0^x (x-t) e^{x-t} y(t) dt = \frac{1}{2} e^{2x} - x e^x - \frac{1}{2}.$$

$$15.94. \int_0^x e^{x-t} \cos(x-t) y(t) dt = x e^x.$$

$$15.95. \int_0^x e^{x-t} \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}.$$

$$15.96. \int_0^x (x-t) \operatorname{sh}(x-t) y(t) dt = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$15.97*. \int_0^x \sqrt{x-t} y(t) dt = x^3 \sqrt{x}.$$

§ 2. Интегральные уравнения Фредгольма

1. Основные понятия. Метод последовательных приближений и ре- зольвента для уравнений Фредгольма 2-го рода. Линейными интегральными уравнениями Фредгольма называются уравнения вида

$$y(x) - \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (1)$$

(уравнения 2-го рода) и

$$\int_z^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (2)$$

(уравнения 1-го рода). В (1) и (2) $y(x)$ — искомая функция, а ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ предполагаются заданными соответственно в квадрате $a \leq x, t \leq b$ и на отрезке $[a, b]$. Если, в частности,

$K(x, t) = 0$ при $a \leq x < t$, то уравнения (1) и (2) превращаются в уравнения Вольтерра 2-го и 1-го рода соответственно.

Мы ограничимся рассмотрением уравнений Фредгольма 2-го рода, наиболее интересных и важных для приложений.

Далее будем предполагать, что пределы интегрирования a и b в (1) — конечные числа, а функции $K(x, t)$ и $f(x)$ либо непрерывны в своей области определения, либо, в более общем случае, удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt = B_K^2 < +\infty. \quad (3)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty. \quad (4)$$

Если $f(x) = 0$ всюду на $[a, b]$, то уравнение Фредгольма 2-го рода (1) называется *однородным*, в противном случае оно называется *неоднородным*. Решением уравнения (1) будем называть всякую функцию $y(x)$ класса $L_2(a, b)$, обращающую это уравнение в тождество относительно $x \in [a, b]$.

Обычно рассматривается не одно уравнение (1), а семейство уравнений

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (5)$$

зависящих от числового параметра λ , который может принимать как действительные, так и комплексные значения. В отличие от уравнений Вольтерра 2-го рода, существование и единственность решения уравнения (5) существенно зависят от значения параметра λ (см. подробно об этом в п. 3). В настоящем пункте рассмотрим случай, когда число λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| < \frac{1}{B_K} = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \right)^{-1/2} \quad (6)$$

(точнее, $|\lambda| < \lambda_1$, где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число уравнения (5), см. п. 3).

При условии (6) уравнение (5) имеет единственное решение (непрерывное, если непрерывны $K(x, t)$ и $f(x)$), которое может быть найдено методом последовательных приближений подобно тому, как это делается в случае уравнений Вольтерра 2-го рода (см. п. 2 § 1). А именно, перепишем уравнение (5) в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

и далее, выбрав произвольно нулевое приближение $y_0(x)$, построим последовательность $y_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, полагая

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если число λ удовлетворяет условию (6), то при $n \rightarrow \infty$ последовательность $y_n(x)$ сходится (в общем случае в метрике $L_2(a, b)$), а в случае непрерывного ядра и равномерно на $[a, b]$) к точному решению $y(x)$.

Пример 1. Методом последовательных приближений решить уравнение

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 y(t) dt = \sin \pi x.$$

▷ В данном случае, полагая $\lambda = 1/2$ и $K(x, t) = 1$, имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt = B_K^2 = 1$$

и, следовательно, условие $|\lambda| < 1/B_K$ выполнено. Приняв $y_0(x) = \sin \pi x$, последовательно находим

$$y_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_0(t) dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi t dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi},$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_1(t) dt = \\ &= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} \right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_2(t) dt = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) dt = \\ &= \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi}. \end{aligned}$$

Вообще,

$$y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k},$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}.$$

Поэтому решением уравнения является функция

$$y(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi},$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. \triangleright

Методом последовательных приближений найти решение заданных уравнений Фредгольма 2-го рода, предварительно убедившись, что условие (6) выполнено:

$$15.98. \quad y(x) - \int_0^1 xty(t) dt = 2x.$$

$$15.99. \quad y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 ty(t) dt = 1.$$

$$15.100. \quad y(x) - \pi \int_0^1 (1-x) \sin 2\pi t y(t) dt = \frac{1}{2}(1-x).$$

$$15.101. \quad y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin xy(t) t dt = 2 \sin x.$$

$$15.102. \quad y(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(x+t) + \cos(x-t)) y(t) dt = \cos x.$$

Если в качестве нулевого приближения выбрать свободный член уравнения (5), т. е. $y_0(x) = f(x)$, то для n -го приближения получается общая формула (см. также § 1, п. 2)

$$\begin{aligned} y_n(x) &= f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda^j \int_a^b K_j(x, t) f(t) dt = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x, t) \right) f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (7)$$

где итерированные ядра определяются соотношениями

$$K_1(x, t) = K(x, t), \quad K_j(x, t) = \int_a^b K(x, s) K_{j-1}(s, t) ds, \quad j = 2, 3, \dots \quad (8)$$

При $|\lambda| < 1/B_K$ ряд

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t) \quad (9)$$

сходится и функция $R(x, t, \lambda)$, называемой *резольвентой* ядра $K(x, t)$. Следовательно, (7) в пределе при $n \rightarrow \infty$ переходит в формулу

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (10)$$

выражающую решение интегрального уравнения через резольвенту.

З а м е ч а н и е. Понятие резольвенты как функции $R(x, t, \lambda)$, с помощью которой по формуле (10) определяется решение интегрального уравнения, сохраняет смысл для любых значений λ , при которых это уравнение однозначно разрешимо. Метод последовательных приближений и формула (9) дают представление для резольвенты в виде ряда по степеням λ (называемого *рядом Неймана*), годное лишь в области $|\lambda| < 1/B_K$.

Существует, однако, общий метод нахождения резольвенты — метод определителей Фредгольма, который в принципе позволяет построить резольвенту для любого значения λ , при котором интегральное уравнение имеет единственное решение. Этот метод здесь не рассматривается.

П р и м е р 2. С помощью итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$y(x) - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{x}{1+t^2} y(t) dt = 1 + x^2.$$

В данном случае $K(x, t) = \frac{x}{1+t^2}$ и для итерированных ядер на основании (8) получаем

$$K_1(x, t) = K(x, t) = \frac{x}{1+t^2},$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_1(s, t) ds = \int_0^1 \frac{x}{1+s^2} \frac{s}{1+t^2} ds = \frac{\ln 2}{2} \frac{x}{1+t^2},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_2(s, t) ds = \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{x}{1+s^2} \frac{s}{1+t^2} ds = \\ = \left(\frac{\ln 2}{2} \right)^2 \frac{x}{1+t^2},$$

.....

$$K_j(x, t) = \left(\frac{\ln 2}{2} \right)^{j-1} \frac{x}{1+t^2}.$$

Поэтому резольвента ядра равна

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\ln 2}{2} \lambda \right)^{j-1} \frac{x}{1+t^2} = \frac{1}{1 - \frac{\ln 2}{2} \lambda} \frac{x}{1+t^2},$$

причем этот ряд сходится в области

$$|\lambda| < \frac{2}{\ln 2}. \quad (11)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$B_K^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{(1+t^2)^2} dx dt = \frac{\pi+2}{24},$$

т. е. условие (6) приводит к неравенству

$$|\lambda| < 2 \sqrt{\frac{6}{\pi+2}}. \quad (12)$$

Так как $2 \sqrt{\frac{6}{\pi+2}} < \frac{2}{\ln 2}$, то из сравнения (11) и (12) видно, что в рассматриваемом случае область сходимости ряда Неймана для резольвенты шире, чем это гарантируется условием (6) (в соответствии с замечанием на с. 236).

Далее, для заданного уравнения $\lambda = \frac{1}{\ln 2}$ и, следовательно, $R\left(x, t, \frac{1}{\ln 2}\right) = 2 \frac{x}{1+t^2}$. Решение уравнения на основании (10) равно

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 2 \frac{x}{1+t^2} (1+t^2) dt = 1 + \frac{2}{\ln 2} x + x^2. \quad \triangleright$$

Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение заданных интегральных уравнений:

$$15.103. y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi y(t) dt = \sin x.$$

$$15.104. y(x) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{x+t} y(t) dt = x.$$

$$15.105. y(x) + \pi \int_0^1 x \sin 2\pi t y(t) dt = \cos 2\pi x.$$

$$15.106. y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^t y(t) dt = e^{-x}.$$

$$15.107. y(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t y(t) dt = 1.$$

Ядра $K(x, t)$ и $L(x, t)$ называются *ортогональными* в квадрате $a \leq x, t \leq b$, если выполняются условия

$$\int_a^b K(x, s) L(s, t) ds = \int_a^b L(x, s) K(s, t) ds = 0$$

для всех $a \leq x, t \leq b$. Если, в частности, ядро $K(x, t)$ ортогонально самому себе, то для него второе итерированное ядро $K_2(x, t) = 0$ всюду в квадрате $a \leq x, t \leq b$. Следовательно, для такого ядра ряд Неймана для резольвенты сходится при любых значениях λ , а сама резольвента совпадает с ядром $K(x, t)$.

Пример 3. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$y(x) - \int_{-1}^1 \cos \pi x \cos 3\pi t y(t) dt = \cos 3\pi x.$$

▫ Ядро $K(x, t) = \cos \pi x \cos 3\pi t$ ортогонально самому себе:

$$\int_{-1}^1 K(x, s) K(s, t) ds = \int_{-1}^1 (\cos \pi x \cos 3\pi s)(\cos \pi s \cos 3\pi t) ds = 0.$$

Поэтому резольвента $R(x, t, \lambda) = \cos \pi x \cos 3\pi t$ и решение заданного уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos 3\pi x + \int_{-1}^1 \cos \pi x \cos^2 3\pi t dt = \cos 3\pi x + \cos \pi x. \quad \triangleright$$

15.108. Доказать, что если ядра $L(x, t)$ и $M(x, t)$ ортогональны, то резольвента ядра $K(x, t) = L(x, t) + M(x, t)$ равна сумме резольвент $L(x, t)$ и $M(x, t)$, т. е.

$$R_K(x, t, \lambda) = R_L(x, t, \lambda) + R_M(x, t, \lambda).$$

Используя ортогональность ядер и результат задачи 15.108, решить интегральные уравнения:

$$15.109. y(x) - \int_0^1 x \left(1 - \frac{3}{2}t\right) y(t) dt = 1.$$

$$15.110. y(x) - \int_0^1 \sin 2\pi x y(t) t dt = x.$$

$$15.111. y(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x + 2i) y(t) dt = x.$$

$$15.112. y(x) - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^2 + 1 + xt) y(t) dt = 1.$$

$$15.113. y(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin t + \sin 2x) y(t) dt = \sin(x).$$

2. Решение уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Ядро $K(x, t)$ называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^n p_j(x) q_j(t).$$

Соответствующее интегральное уравнение

$$y(x) - \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n p_j(x) q_j(t) \right) y(t) dt = f(x) \quad (13)$$

решается путем сведения к системе линейных алгебраических уравнений следующим образом.

Перепишем уравнение (13) в виде

$$y(x) - \sum_{j=1}^n p_j(x)s_j = f(x), \quad (14)$$

где неизвестные s_j определяются через искомое решение $y(x)$ равенствами

$$s_j = \int_a^b q_j(t) y(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Умножая тождество (14) последовательно на $q_i(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, и далее интегрируя обе части на отрезке $[a, b]$, с учетом (15) получим для неизвестных чисел s_i следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$s_i - \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b q_i(x) p_j(x) ds \right) s_j = \int_a^b q_i(x) f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Введем обозначения

$$a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx, \quad f_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx. \quad (17)$$

Тогда система (16) запишется в виде

$$s_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

или в матричной форме

$$(E - A)S = F, \quad (19)$$

где E — единичная матрица, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $S = (s_1, \dots, s_n)^\top$, $F = (f_1, \dots, f_n)^\top$.

Если s_1, \dots, s_n — какое-нибудь решение системы (18), то в соответствии с (14) функция

$$y(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n p_j(x) s_j \quad (20)$$

будет решением исходного интегрального уравнения (13). Если же система (18) несовместна, то и интегральное уравнение не имеет решения.

Этот метод применим, конечно, и в том частном случае, когда уравнение (13) однородное, т. е. $f(x) = 0$.

Пример 4. Решить уравнение

$$y(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \sin x \sin t + t \right) y(t) dt = \sin 2x.$$

« Ядро $K(x, t) = \frac{1}{\pi} \sin x \sin t + t$ — вырожденное. Полагая

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{\pi} \sin x, & p_2(x) &= 1, \\ q_1(t) &= \sin t, & q_2(t) &= t, \end{aligned}$$

по формулам (17) вычисляем

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2 x dx = 1, & a_{12} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0, \\ a_{21} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} x \sin x dx = 2, & a_{22} &= \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, \\ f_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \sin 2x dx = 0, & f_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin 2x dx = -\pi. \end{aligned}$$

Система (19) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix},$$

ее общее решение: $s_1 = C$, $s_2 = -\pi + 2C$, где C — произвольная постоянная. Следовательно, любая функция вида

$$y(x) = \sin 2x + \frac{C}{\pi} \sin x - \pi + 2C = \sin 2x + C \left(\frac{1}{\pi} \sin x + 2 \right) - \pi$$

есть решение заданного интегрального уравнения и других решений это уравнение не имеет. ▷

Пример 5. Решить уравнение

$$y(x) - 2 \int_0^1 \sqrt{xt} y(t) dt = x.$$

Следуя изложенному выше общему методу, запишем это уравнение в виде

$$y(x) - 2\sqrt{x}s = x,$$

где $s = \int_0^1 \sqrt{t}y(t) dt$. Умножая обе части на \sqrt{x} и интегрируя, получаем

$$s - 2 \int_0^1 x dx \cdot s = \int_0^1 x^{3/2} dx,$$

или $s - s = 2/5$. Последнее уравнение не имеет решения относительно s , следовательно, исходное интегральное уравнение также не имеет решения. \triangleright

Найти все решения или установить неразрешимость заданных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром:

$$15.114. y(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \sin t y(t) dt = \sin x.$$

$$15.115. y(x) - \frac{2e}{e^2 - 1} \int_0^1 \operatorname{ch} xy(t) dt = 1.$$

$$15.116. y(x) - \frac{24}{7} \int_0^1 (1 - x^2) \left(1 - \frac{3}{2}t\right) y(t) dt = x.$$

$$15.117. y(x) - \int_0^1 (1 + x) \cos 2\pi t y(t) dt = x.$$

$$15.118. y(x) - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} t y(t) dt = \cos^2 x.$$

$$15.119. y(x) - 4 \int_0^1 x t^2 y(t) dt = 0.$$

$$15.120. y(x) + \int_0^1 e^x t y(t) dt = 0.$$

$$15.121. y(x) - \int_0^1 (2x - t)y(t) dt = \cos 2\pi x.$$

$$15.122. y(x) - \int_0^1 (1 + 2xt)y(t) dt = -\frac{1}{6}(x + 3).$$

$$15.123. y(x) - \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}xt + x^2(t - 1) \right) y(t) dt = 0.$$

$$15.124. y(x) - \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(x - t)y(t) dt = \sin 2x.$$

$$15.125. y(x) + \int_0^1 (x - \sqrt{t})y(t) dt = \frac{5}{3}x + \sqrt{x} - \frac{1}{6}.$$

$$15.126. y(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x - t)y(t) dt = 0.$$

$$15.127. y(x) - 3 \int_0^1 (x^2t^2 + 4xt + 1) \cdot y(t) dt = 2\pi^2 \cos 2\pi x.$$

$$15.128. y(x) - \int_{-1}^1 (xt + x^2)y(t) dt = 0.$$

3. Характеристические числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма. Значения параметра λ , при которых однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = 0 \quad (21)$$

имеет ненулевые (нетривиальные) решения $y(x) \not\equiv 0$, называются *характеристическими числами* этого уравнения или ядра $K(x, t)$, а каждое ненулевое решение — *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ . Заметим, что число $\lambda = 0$ не является характеристическим, так как при $\lambda = 0$ уравнение (21) имеет лишь нулевое решение. Если λ — характеристическое число, то число $\mu = 1/\lambda$ называется *собственным числом* интегрального уравнения. При этом $\mu \neq 0$.

Из результатов п. 2 следует, что в случае уравнения с вырожденным ядром

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n p_j(x) q_j(t) \right) y(t) dt = 0 \quad (22)$$

всякое решение имеет вид

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n s_j p_j(x), \quad (23)$$

где $\mathbf{S} = (s_1, \dots, s_n)^\top$ — решение однородной системы

$$(E - \lambda A)\mathbf{S} = 0 \quad (24)$$

с матрицей $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx$, $i, j = 1, \dots, n$. Заметим, что если заменить λ на $1/\mu$, то система (23) принимает вид

$$(A - \mu E)\mathbf{S} = 0, \quad \mu \neq 0. \quad (25)$$

Отсюда следует, что собственные числа интегрального уравнения (22) совпадают с отличными от нуля собственными числами матрицы A , а собственные функции определяются соотношением (23), где $\mathbf{S} = (s_1, \dots, s_n)^\top$ — соответствующие собственные векторы этой матрицы.

Пример 6. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (xt - 2x^2) y(t) dt = 0.$$

« Ядро $K(x, t) = xt - 2x^2$ вырожденное. Полагая

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x, & p_2(x) &= -2x^2, \\ q_1(t) &= t, & q_2(t) &= 1, \end{aligned}$$

найдем элементы матрицы A в (25):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, & a_{12} &= -2 \int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{2}, \\ a_{21} &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, & a_{22} &= -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение для определения собственных чисел матрицы A имеет вид

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \mu & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{36} = \left(\mu + \frac{1}{6}\right)^2 = 0,$$

откуда $\mu = -1/6$ — единственное собственное число матрицы A . Соответствующие собственные векторы находим из системы уравнений

$$\left(A + \frac{1}{6}E\right)\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

общее решение которой $s_1 = C$, $s_2 = C$, где C — произвольная постоянная. Следовательно, окончательно получаем, что заданное интегральное уравнение имеет единственное характеристическое число $\lambda = \frac{1}{\mu} = -6$,

а соответствующие собственные функции имеют вид

$$y(x) = -6(s_1x - 2s_2x^2) = C(x - 2x^2),$$

где C — произвольная постоянная. \triangleright

Интегральное уравнение может вообще не иметь характеристических чисел (например, в том случае, когда ядро $K(x, t)$ вольтерровское или, в случае вырожденного ядра, матрица A в (24) нулевая) либо не имеет действительных характеристических чисел.

Пример 7. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos t y(t) dt = 0.$$

\triangleleft Имеем

$$y(x) - \lambda x s = 0, \quad s = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t y(t) dt,$$

откуда

$$s - \lambda s \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0.$$

Но $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0$, поэтому при любом λ последнее уравнение имеет

только одно решение: $s = 0$. Следовательно, при любом λ интегральное

уравнение имеет только тривиальное решение, т. е. не имеет характеристических чисел. \triangleright

Пример 8. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t) y(t) dt = 0.$$

\triangleleft Ядро

$$K(x, t) = \sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$$

вырожденное, причем можно положить

$$p_1(x) = \sin x, \quad p_2(x) = -\cos x,$$

$$q_1(t) = \cos t, \quad q_2(t) = \sin(t);$$

матрица $A = \left(a_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} q_i(x) p_j(x) dx \right)_{i,j=1}^2$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix};$$

характеристическое уравнение

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} -\mu & -\pi \\ \pi & -\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \pi^2 = 0$$

имеет только комплексные корни $\mu_{1,2} = \pm i\pi$. Найдем соответствующие собственные векторы. Для $\mu_1 = i\pi$

$$(A - i\pi E) S_{\mu_1} = \begin{pmatrix} -i\pi & -\pi \\ \pi & -i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_1} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Для $\mu_2 = -i\pi$

$$(A + i\pi E) S_{\mu_2} = \begin{pmatrix} i\pi & -\pi \\ \pi & i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_2} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Окончательно заключаем, что заданное интегральное уравнение действительных характеристических чисел не имеет, но имеет два комплексных характеристических числа $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\mu_{1,2}} = \mp i \frac{1}{\pi}$. Соответствующие собственные функции имеют вид (см. (26) и (27))

$$y_1(x) = \lambda_1 (C_1 \sin x - iC_1 \cos x) = A_1 e^{ix},$$

$$y_2(x) = \lambda_2 (C_2 \sin x + iC_2 \cos x) = A_2 e^{-ix},$$

где A_1 и A_2 — произвольные комплексные постоянные. \triangleright

Найти характеристические числа и собственные функции заданных интегральных уравнений с вырожденным ядром (ограничиться случаем действительных характеристических чисел):

$$15.129. y(x) - \lambda \int_0^1 (1 + 2x) ty(t) dt = 0.$$

$$15.130. y(x) - \lambda \int_0^1 (1 - x^2) y(t) dt = 0.$$

$$15.131. y(x) - \lambda \int_{-1}^1 |x| y(t) dt = 0.$$

$$15.132. y(x) - \lambda \int_0^\pi x \sin t y(t) dt = 0.$$

$$15.133. y(x) - \lambda \int_0^\pi \cos x \cos t y(t) dt = 0.$$

$$15.134. y(x) - \lambda \int_0^1 (x + t) y(t) dt = 0.$$

$$15.135. y(x) - \lambda \int_0^1 (xe^t + 2t) y(t) dt = 0.$$

$$15.136. y(x) - \lambda \int_0^1 \left(x \sin 2\pi t - \frac{1}{2\pi} \right) y(t) dt = 0.$$

$$15.137. y(x) - \lambda \int_0^\pi \sin(x + t) y(t) dt = 0.$$

$$15.138. y(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x - t) y(t) dt = 0.$$

Для уравнений Фредгольма 2-го рода вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (28)$$

где a и b — конечные числа, ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ интегрируемы с квадратом в области $a \leq x, t \leq b$ и на отрезке $[a, b]$ (в частности, непрерывны), справедливы следующие теоремы Фредгольма (при формулировке которых мы ограничимся случаем действительного ядра $K(x, t)$).

1. Однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = 0 \quad (29)$$

имеет либо конечное, либо счетное множество характеристических чисел; если этих чисел счетное множество, то они стремятся к бесконечности.

2. Если λ — характеристическое число, то уравнение (29) и сопряженное ему однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K^*(x, t) y(t) dt = 0, \quad (30)$$

где $K^*(x, t) = K(t, x)$, имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.

3. Альтернатива Фредгольма: либо неоднородное уравнение (28) имеет одно и только одно решение для любой функции $f(x) \in L_2(a, b)$, либо соответствующее однородное уравнение (29) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. (Другими словами, если число λ не является характеристическим, то уравнение (28) имеет, и притом единственное, решение для любой функции $f(x) \in L_2(a, b)$.)

4. Если λ — характеристическое число, то для того чтобы уравнение (28) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x)$ был ортогонален любому решению $y^*(x)$ однородного сопряженного уравнения (30), т. е.

$$\int_a^b f(x) y^*(x) dx = 0.$$

Проиллюстрируем теорему Фредгольма на примере интегрального уравнения с вырожденным ядром.

Пример 9. Исследовать решения интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos t + x \sin t) y(t) dt = \cos x \quad (31)$$

в зависимости от значений параметра λ .

◀ Решение интегрального уравнения сводится к решению неоднородной системы

$$(E - \lambda A)\mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad (32)$$

где

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

и $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)^T \left(f_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx \right)$. В рассматриваемом случае имеем

$$p_1(x) = x^2, \quad p_2(x) = x,$$

$$q_1(t) = \cos t, \quad q_2(x) = \sin t,$$

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot x^2 dx = 4\pi, \quad a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot x dx = 0,$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot x^2 dx = 0, \quad a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot x dx = -2\pi,$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi, \quad f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0.$$

Система (32) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - 4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 + 2\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Характеристическое уравнение

$$\det(E - \lambda A) = (1 + 2\pi\lambda)(1 - 4\pi\lambda) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$ и $\lambda_2 = -\frac{1}{2\pi}$, являющиеся характеристическими числами соответствующего однородного уравнения.

При любом $\lambda \neq \frac{1}{4\pi}, -\frac{1}{2\pi}$ система (33) имеет единственное решение

$$s_1 = \frac{\pi}{1 - 4\pi\lambda}, \quad s_2 = 0;$$

соответствующее решение интегрального уравнения:

$$y(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1 - 4\pi\lambda}x^2, \quad \lambda \neq \frac{1}{4\pi}, \quad -\frac{1}{2\pi}.$$

При $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$ из (33) получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система, а вместе с ней и исходное интегральное уравнение решения не имеют.

При $\lambda = \lambda_2 = -1/(2\pi)$ система (33) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

и имеет решения $s_1 = \pi/3, s_2 = C$. Соответствующие решения интегрального уравнения таковы:

$$y(x) = \cos x + \lambda_2(s_1x^2 + s_2x) = \cos x - \frac{1}{6}x^2 + Cx,$$

где C — произвольная постоянная. \triangleright

Исследовать решения заданных уравнений с вырожденным ядром при различных значениях параметра λ :

$$15.139. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 x(1+t)y(t) dt = x^2.$$

$$15.140. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 xy(t) dt = \sin 2\pi x.$$

$$15.141. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 (1+2x)ty(t) dt = 1 - \frac{3}{2}x.$$

$$15.142. \quad y(x) - \lambda \int_0^1 x \sin 2\pi t y(t) dt = x.$$

$$15.143. y(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t y(t) dt = \operatorname{ctg} x.$$

$$15.144. y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \arccos t y(t) dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$15.145. y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos t y(t) dt = \cos x.$$

$$15.146. y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (1+xt) y(t) dt = \sin \pi x.$$

$$15.147. y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x+t) y(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x.$$

$$15.148. y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) y(t) dt = 1.$$

4. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром. Ядро $K(x, t)$ называется *симметричным*, если оно удовлетворяет условию

$$K(x, t) = K(t, x)$$

для всех $a \leq x, t \leq b$.

Для симметричных ядер, удовлетворяющих условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty,$$

дополнительно к основным теоремам Фредгольма (см. п. 3) справедливы следующие утверждения:

1. Симметричное ядро, отличное от тождественного нуля, имеет по крайней мере одно характеристическое число.

2. Характеристические числа симметричного ядра действительны, а собственные функции, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны.

На практике часто встречается случай, когда интегральное уравнение с симметричным ядром является решением некоторой самосопряженной однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В таких случаях нахождение характеристических чисел и собственных функций ядра сводится к решению указанной краевой задачи.

Пример 10. Найдите характеристические числа и собственные функции ядра

$$K(x, t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ (t+1)x, & 0 \leq t \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (34)$$

▫ Заметим, что ядро (34) симметричное. Действительно, из (34) следует

$$K(x, t) = \begin{cases} x(t+1), & 0 \leq t \leq x \leq 1, \\ (x+1)t, & 0 \leq x \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (35)$$

Сравнивая (34) и (35), видим, что $K(x, t) = K(t, x)$ для любой пары (x, t) .

Однородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt = 0 \quad (36)$$

с ядром (34) запишем следующим образом:

$$y(x) = \lambda \left(x \int_0^x (t+1) y(t) dt + (x+1) \int_x^1 t y(t) dt \right). \quad (37)$$

Далее, дважды проинтегрируем (37):

$$\begin{aligned} y'(x) = \lambda & \left(\int_0^x (t+1) y(t) dt + x(x+1) y(x) + \right. \\ & \left. + \int_x^1 t y(t) dt - (x+1) xy(x) \right), \end{aligned} \quad (38)$$

$$y''(x) = \lambda((x+1)y(x) - xy(x)) = \lambda y(x). \quad (39)$$

Таким образом, число λ и функция $y(x)$ таковы, что

$$y'' - \lambda y = 0. \quad (40)$$

Найдем теперь краевые условия, которым должна удовлетворять ис-
комая функция $y(x)$. Для этого, подставляя в (37) и (38) $x = 0$ и $x = 1$,

получим

$$\begin{aligned}y(0) &= \lambda \int_0^1 t y(t) dt, \quad y(1) = \lambda \int_0^1 (t+1) y(t) dt, \\y'(0) &= \lambda \int_0^1 t y(t) dt, \quad y'(1) = \lambda \int_0^1 (t+1) y(t) dt,\end{aligned}$$

откуда

$$y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1). \quad (41)$$

Соотношение (40) и (41) образуют в совокупности однородную краевую задачу, решая которую, найдем характеристические числа и соответствующие им собственные функции исходного интегрального уравнения.

Рассмотрим три случая.

1) $\lambda = 0$. Уравнение (40) принимает вид

$$y'' = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 + C_2 x. \quad (42)$$

Используя краевые условия (41), получим для нахождения постоянных C_1 и C_2 систему

$$C_1 = C_2,$$

$$C_1 + C_2 = C_2,$$

которая имеет единственное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Следовательно, краевая задача, а вместе с ней и уравнение (36) при $\lambda = 0$ имеют лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, т.е. $\lambda = 0$ не является характеристическим числом. Впрочем, это можно было заметить сразу из уравнения (36): если в нем $\lambda = 0$, то $y(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = \omega^2 > 0$. Уравнение (40) имеет вид

$$y'' - \omega^2 y = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}.$$

Краевые условия (41) приводят к системе

$$C_1 + C_2 = \omega C_1 - \omega C_2,$$

$$C_1 e^\omega + C_2 e^{-\omega} = \omega C_1 e^\omega - \omega C_2 e^{-\omega}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega & 1 + \omega \\ e^\omega - \omega e^\omega & e^{-\omega} + \omega e^{-\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Эта система имеет нетривиальные решения в том и только в том случае, когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} 1-\omega & 1+\omega \\ e^\omega - \omega e^\omega & e^{-\omega} + \omega e^{-\omega} \end{vmatrix} = (1-\omega)(1+\omega) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^\omega & e^{-\omega} \end{vmatrix} = -2(1-\omega)(1+\omega) \operatorname{sh} \omega = 0,$$

т. е. $\omega = \pm 1$ ($\omega^2 > 0!$), или $\lambda = \omega^2 = 1$.

При $\omega = 1$ из (43) получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $y(x) = C_1 e^x$, C_1 — произвольная постоянная.

Аналогично, при $\omega = -1$ получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{e} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

откуда $y(x) = C_2 e^{-x}$, C_2 — произвольная постоянная.

Таким образом, $\lambda = 1$ — характеристическое число ядра (35), соответствующая ему линейно независимая система собственных функций состоит из двух функций $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, а любая собственная функция имеет вид $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3) $\lambda = -\omega^2 < 0$. В этом случае уравнение (40) имеет вид

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Краевые условия (41) приводят к системе

$$C_1 = \omega C_2,$$

$$C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega = -\omega C_1 \sin \omega + \omega C_2 \cos \omega$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \cos \omega + \omega \sin \omega & \sin \omega - \omega \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Эта система имеет отрицательные решения в том и только в том случае, когда $\omega^2 \sin \omega = 0$, т. е. $\omega_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, или $\lambda_n = -\omega_n^2 = -\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

При $\omega = \omega_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, из системы (44) получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi n \\ (-1)^n & -\pi n(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1 = \pi n C$, $C_2 = C$ и $y(x) = C(\pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x)$, где C — произвольная постоянная и $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Заметим, однако, что в этом выражении для $y(x)$ переход от n к $-n$ приводит лишь к смене знака, т. е. к изменению константы C . С учетом этого получаем, что каждому из характеристических чисел $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, соответствует одна базисная собственная функция $y_n = \pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$, а любая собственная функция имеет вид

$$y(x) = C(\pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

C — произвольная постоянная.

Подводя итог, заключаем, что для заданного ядра задача о характеристических числах и собственных функциях имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, \quad y_{0,1} = e^x, \quad y_{0,2} = e^{-x}, \\ \lambda_n &= -\pi^2 n^2, \quad y_n = \pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad \triangleright$$

Для заданных симметричных ядер найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции, сводя интегральное уравнение к однородной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$15.149. K(x, t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$15.150. K(x, t) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq t, \\ -t, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$15.151. K(x, t) = \begin{cases} -x-1, & 0 \leq x \leq t, \\ -t-1, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$15.152. K(x, t) = \begin{cases} \cos t \sin x, & 0 \leq x \leq t, \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$15.153. K(x, t) = \begin{cases} \sin t \cos x, & 0 \leq x \leq t, \\ \cos t \sin x, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$15.154. K(x, t) = \begin{cases} \frac{\sin(t-1) \sin x}{\sin 1}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{\sin t \sin(x-1)}{\sin 1}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$15.155. K(x, t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(t-1)\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{\operatorname{sh}t\operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh}1}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$15.156. K(x, t) = \frac{1}{2} \sin|x-t|, \quad 0 \leq x \leq t \leq \pi.$$

$$15.157. K(x, t) = \begin{cases} -e^{-t}\operatorname{ch}x, & 0 \leq x \leq t, \\ -\operatorname{ch}te^{-x}, & t \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Если задано неоднородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (45)$$

с симметричным ядром $K(x, t) = K(t, x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty,$$

то его решение в общем случае может быть найдено следующим образом.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (46)$$

— последовательность характеристических чисел ядра $K(x, t)$, а

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots \quad (47)$$

— соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций. При этом в последовательности (46) каждое характеристическое число выписывается столько раз, каков его ранг, т. е. число линейно независимых функций, соответствующих этому характеристическому числу.

Если параметр λ в уравнении (45) не совпадает ни с одним из характеристических чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots$, то решение этого уравнения (существующее и единственное в силу 3-й теоремы Фредгольма для любой правой части $f(x)$) дается формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x), \quad (48)$$

где

$$f_n = \int_a^b f(x) y_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (49)$$

Если же параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, имеющих ранг r , т. е.

$$\lambda = \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_{m+r}$$

для некоторого m , то решение существует в том и только в том случае, когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям, соответствующим данному характеристическому числу, т. е. выполнены r условий

$$\int_a^b f(x) y_n(x) dx = 0, \quad n = m + 1, m + 2, \dots, m + r. \quad (50)$$

В этом случае уравнение имеет бесконечное множество решений, имеющих вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m+1, \dots, m+r}}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) + C_1 y_{m+1}(x) + \dots + C_r y_{m+r}(x), \quad (51)$$

где C_1, \dots, C_r — произвольные постоянные.

Пример 11. Найти все решения неоднородного интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^\pi K(x, t) y(t) dt = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2}, \quad (52)$$

$$K(x, t) = \begin{cases} \cos t \sin x, & 0 \leq x \leq t, \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

при различных значениях параметра λ .

◀ Характеристические числа и соответствующие им собственные функции ядра (52) имеют вид (см. задачу 15.152)

$$\lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad y_n = \sin \frac{2n+1}{2} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что в данном случае каждое характеристическое число имеет ранг $r = 1$, а последовательность собственных функций ортогональна, но не нормирована на отрезке $[0, \pi]$: нормированные собственные функции имеют вид

$$y_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2n+1}{2} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

По формулам (49) для $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2}$ получаем

$$\begin{aligned} f_n &= \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2n+1}{2} x dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{4} \int_0^\pi \sin \frac{2n+1}{2} x dx - \int_0^\pi \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x dx \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{2(2n+1)} - \frac{\pi}{2} \delta_{n,0} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n+1} & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2n+1}.$$

При $\lambda = \lambda_0 = -3/4$ в силу ортогональности $f(x)$ к собственной функции $y_0(x) = \sin \frac{x}{2}$ получаем бесконечное множество решений вида

$$y(x) = \frac{\pi}{4} \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{n(n+1)(2n+1)} + C \sin \frac{x}{2},$$

где C — произвольная постоянная.

Наконец, при $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, уравнение решения не имеет. \triangleright

Найти решения неоднородных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром при различных значениях параметра λ (характеристические числа и собственные функции соответствующих ядер см. в задачах 15.149–15.157):

15.158. $y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt = 1,$

$$K(x, t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$15.159. y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2} x,$$

$$K(x, t) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq t, \\ -t, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$15.160. y(x) - \lambda \int_0^\pi K(x, i) y(t) dt = x - \pi,$$

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin t \cos x, & 0 \leq x \leq t, \\ \cos t \sin x, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$15.161. y(x) - \lambda \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin |x-t| y(t) dt = 1.$$

§ 3. Численные методы решения интегральных уравнений

Существуют различные методы численного решения интегральных уравнений: *метод конечных сумм*, *метод моментов*, *метод коллокации* и др. Ниже будут рассмотрены два из них — метод конечных сумм и метод моментов.

Пусть задано интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (ср. § 2, п. 1 настоящей главы)

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $y(x)$ — искомая функция, $K(x, t)$ и $f(x)$ — известные функции, определенные в прямоугольнике $a \leq x, t \leq b$ и на отрезке $[a, b]$ соответственно, λ — параметр, не равный собственному числу соответствующего однородного уравнения.

Метод конечных сумм. Этот метод основан на приближенном вычислении определенного интеграла с помощью некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) dx + R_F, \quad (2)$$

где $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, — точки отрезка $[a, b]$, $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора функции $F(x)$, и R_F — ошибка формулы (2), порожденная приближенным вычислением интеграла. В случае равноотстоящих узлов $x_i = a + (i-1)h, i = 1, \dots, n$,

где $h = \frac{b-a}{n-1}$, коэффициенты A_i в приближенных формулах (2) имеют следующие значения:

1) для формулы прямоугольников

$$A_i = h, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad A_n = 0;$$

2) для общей формулы трапеций

$$A_1 = A_n = h/2, \quad A_2 = \dots = A_{n-1} = h;$$

3) для общей формулы Симпсона при $n = 2m + 1$

$$A_1 = A_{2m+1} = h/3, \quad A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = 4h/3,$$

$$A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = 2h/3.$$

Вводя обозначения

$$y(x_i) = y_i, \quad K(x_i, x_j) = K_{ij}, \quad f(x_i) = f_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

интегральное уравнение (1) на основании формулы (2), в которой ошибка R_F отброшена, можно заменить системой n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных \tilde{y}_i — приближенных значений точного решения $y(x)$ в узлах x_i :

$$\tilde{y}_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Система (3) может быть решена одним из численных методов линейной алгебры, например, методом Гаусса.

Найдя \tilde{y}_i из (3), для решения $y(x)$ получаем из уравнения (1) приближенное аналитическое выражение

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) \tilde{y}_j.$$

Пример 1. Используя квадратурную формулу Симпсона, методом конечных сумм найти приближенное решение уравнения

$$y(x) - 0,5 \int_0^1 xe^t(y) dt = e^{-x}.$$

В вычислениях положить $n = 3$.

Выбираем равноотстоящие узлы $x_1 = 0, x_2 = 0,5, x_3 = 1$. Значения ядра $K(x, t) = xe^t$ и правой части $f(x) = e^{-x}$ в точках (x_i, t_j) и x_i соответственно оформим в виде таблиц:

Таблица значений $K_{ij} = K(x_i, t_j)$

t_j	x_i		
	0	0,5	1
0	0	0,5	1
0,5	0	0,8244	1,6487
1	0	1,3592	2,7183

Таблица значений $f_i = f(x_i)$

x_i	0	0,5	1
f_i	1	0,6065	0,3679

Квадратурная формула Симпсона (см. (3)) в нашем случае имеет вид

$$\int_0^1 F(x) dx \approx \frac{1}{6}(F(0) + 4F(0,5) + F(1)),$$

так как $h = 1/2$, $A_1 = h/3 = 1/6$, $A_2 = 4h/3 = 4/6$, $A_3 = h/3 = 1/6$.

Для определения приближенных значений \tilde{y}_i , $i = 1, 2, 3$, решения $y(x)$ в узлах x_i согласно (3) получим, используя таблицы значений K_{ij} и f_i , следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_2 - \frac{0,5}{6}(0,5y_1 + 3,2976y_2 + 1,3592y_3) &= 0,6065, \\ y_3 - \frac{0,5}{6}(y_1 + 6,5948y_2 + 2,7183y_3) &= 0,3679. \end{aligned} \quad (4)$$

После упрощения система (4) перепишется в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ 0,7252y_2 - 0,1133y_3 &= 0,6482, \\ 0,5496y_2 - 0,7735y_3 &= -0,4512. \end{aligned} \quad (5)$$

Решая систему (5), находим

$$\tilde{y}_1 = 1, \quad \tilde{y}_2 = 1,1079, \quad \tilde{y}_3 = 1,3706.$$

Следовательно, приближенное решение интегрального уравнения выражается формулой

$$\tilde{y}(x) = e^{-x} + 1,003x.$$

Заметим, что точное решение уравнения есть $y(x) = e^{-x} + x$. \triangleright

Изложенный выше метод применяется также для приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

В последнем случае полагают, что

$$K_{ij} = 0, \quad j > l.$$

Действительно, уравнение Вольтерра с ядром $K(x, t)$ можно свести к уравнению Фредгольма с ядром $K^*(x, t)$, вводя функцию

$$K^*(x, t) = \begin{cases} K(x, t), & a \leq t \leq x, \\ 0, & x < t. \end{cases}$$

Метод моментов. В методе моментов приближенное решение \tilde{y} интегрального уравнения ищется в виде суммы $f(x)$ и линейной комбинации линейно независимых на отрезке $[a, b]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, т. е.

$$\tilde{y}(x) \equiv y_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (6)$$

где c_1, c_2, \dots, c_n — некоторые постоянные. Подставляя (6) в (1), получаем невязку

$$R[y_n(x)] = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt, \quad (7)$$

где

$$\psi_i(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно методу моментов коэффициенты $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ определяются из условий ортогональности невязки ко всем функциям $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$. Эти условия дают следующую систему линейных уравнений:

$$\int_a^b R[y_n(x)] \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или в силу (7)

$$\sum_{j=1}^n c_j (\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij}) = \lambda \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx,$$

$$\beta_{ij} = \int_a^b dx \int_a^b K(x, t) \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt,$$

$$\gamma_i = \int_a^b dx \int_a^b K(x, t) f(t) \varphi_i(t) dt.$$

Если определить $D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij})$ системы (8) отличен от нуля, то коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n определяются однозначно. Подставляя их найденные значения в (6), получаем приближенное решение исходного интегрального уравнения.

Замечание. Для удобства вычислений интегралов систему (8) иногда формируют, используя условие ортогональности невязки (7) к некоторой иной системе функций, отличной от системы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$.

Пример 2. Найти приближенное решение уравнения

$$y(x) = \int_0^1 K(x, t) y(t) dt = 1,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Используя выражение для ядра $K(x, t)$, перепишем уравнение в виде

$$y(x) - \left(\int_0^x t(x-1) y(t) dt + \int_x^1 (t-1) xy(t) dt \right) = 1.$$

Положим $\tilde{y}(x) = y_2(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2$. Тогда невязка $R[y_2(x)]$ имеет

вид

$$\begin{aligned} R[y_2(x)] &= \\ &= c_1 x + c_2 x^2 - \left[(x-1) \left(c_1 \frac{x^3}{3} + c_2 \frac{x^4}{4} \right) + x \left(-\frac{c_1}{6} - c_1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{c_2}{12} + c_2 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \right) \right] - \frac{(x-1)x^2}{2} + \frac{x(x-1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Из условия ортогональности невязки $R[y_2(x)]$ к функциям x и x^2 получаем следующую систему:

$$\int_0^1 R[y_2(x)] x dx = 0,$$

$$\int_0^1 R[y_2(x)] x^2 dx = 0.$$

После вычисления интегралов и некоторых преобразований получим следующую систему линейных уравнений для определения c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} 0,3555c_1 + 0,3146c_2 &= -0,1167, \\ 0,2638c_1 + 0,2417c_2 &= -0,025. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим $c_1 = 0,027$, $c_2 = -0,029$. Приближенное решение исходного интегрального уравнения имеет вид $\hat{y}(x) = 1 + 0,027x - 0,029x^2$. ▷

Замечание. Мы не приводим оценок точности приближенного решения для изложенных методов ввиду довольно громоздких выкладок. Изложение этих вопросов можно найти в специальной литературе¹⁾.

Решить интегральные уравнения методом конечных сумм, либо методом моментов. В методе моментов использовать функции $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$15.162. y(x) - 4 \int_0^1 \sin^2(xt^2) y(t) dt = 2x - \pi.$$

$$15.163. y(x) - \int_0^1 e^{\arcsin \frac{xt}{2}} y(t) dt = \operatorname{tg} x.$$

¹⁾ См., например, Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. — Т. 2. — М.: Физматгиз, 1962, гл. 10, § 10.

$$15.164. y(x) - \int_0^1 \operatorname{tg} e^{0,1(x^2+t)} y(t) dt = \operatorname{ctg}(x+5).$$

$$15.165. y(x) - \int_0^1 \sin(x+1)^t y(t) dt = x^2 + 5.$$

$$15.166. y(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 + \sin xt) y(t) dt = \cos 2x.$$

$$15.167. y(x) + \frac{1}{4} \int_0^1 x \ln(x^2 + 10t^2 + 3) y(t) dt = x^2 + 3x.$$

$$15.168. y(x) - 5 \int_0^1 \operatorname{tg} e^{0,1tx} y(t) dt = \cos^2 x.$$

$$15.169. y(x) - \int_0^1 (1 + \sin e^{xt}) y(t) dt = \frac{1}{8}(x+8).$$

$$15.170. y(x) - 3 \int_0^1 (x^2 t^2 + e^{xt} + 1) y(t) dt = \cos 2x.$$

$$15.171. y(x) + 5 \int_0^1 e^{xt+t^2} y(t) dt = \ln(1+x).$$

$$15.172. y(x) + \int_0^1 (x \sin t - \sqrt{t}) y(t) dt = \cos 3x.$$

$$15.173. y(x) - \int_0^1 (xt + x^2 \cos t) y(t) dt = x - 2.$$

$$15.174. y(x) - \int_0^1 (x+3)e^{xt+t^2} y(t) dt = x(e^x + 2).$$

$$15.175. y(x) - \frac{1}{5} \int_0^1 \cos \ln((t+5)x) y(t) dt = \sin x.$$

$$15.176. y(x) - \int_0^1 (5x \arcsin t - \ln(t+8)) y(t) dt = x^2 + 8.$$

$$15.177. y(x) - 4 \int_0^1 x e^{x^2+tx} y(t) dt = e^{2x} + 8.$$

$$15.178. y(x) + \int_0^1 \cos 2\pi(x^2+tx) y(t) dt = x^2 + \sin x.$$

$$15.179. y(x) - 4 \int_0^1 (x^2 t + \sin xt + \ln(t+4)) y(t) dt = e^{x^2} + 8.$$

$$15.180. y(x) - \int_0^x (x - \sin xt) y(t) dt = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$15.181. y(x) - \int_0^x (1 + x^2 t - e^{tx}) y(t) dt = e^{2x} + x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$15.182. y(x) - \int_0^x \sin(3x - 8tx) y(t) dt = 1 - 2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$15.183. y(x) - \int_0^x e^{t^3 x^2 - 5tx} y(t) dt = e^{3x} + 9, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$15.184. y(x) - \int_0^x (x \ln(t+8) - t) y(t) dt = \frac{1}{4} e^{2x} + x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Глава 16

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Основные задачи и уравнения математической физики

1. Вывод уравнений и постановка задач математической физики.

Многие задачи механики, физики, широкий круг инженерно-технических задач приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, являющихся частным случаем так называемых *уравнений математической физики*.

Их вывод опирается на механические или физические законы. Из всего многообразия таких задач мы ограничимся лишь несколькими простейшими, иллюстрирующими некоторые методы построения математических моделей реальных физических или механических процессов.

Пример 1. Вывести уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле.

◀ Обозначим температуру тела в точке $M(x, y, z)$ в момент времени t символом $u(x, y, z, t)$. Как известно, в теле происходит движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. В теории теплопроводности принято, что количество тепла ΔQ , проходящего через некоторый элемент поверхности $\Delta\sigma$, лежащий внутри данного тела, пропорционально $\Delta\Pi\Delta t$, где $\Delta\Pi$ — поток вектора $\operatorname{grad} u$ через элемент $\Delta\sigma$, т. е.

$$\Delta Q = k\Delta\Pi\Delta t. \quad (1)$$

Здесь $k = k(x, y, z)$ — коэффициент теплопроводности.

Выделим внутри тела произвольный объем V , ограниченный гладкой замкнутой поверхностью Σ , и составим уравнение теплового баланса для выделенного объема. Пусть Q_1 — количество тепла, входящего в V через поверхность Σ за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$. Тогда из (1) следует, что

$$Q_1 = \oint_{\Sigma} \oint k(M)(\operatorname{grad} u, d\sigma) \Delta t.$$

Обозначим Q_2 количество тепла, выделяемого или поглощаемого в объеме V за промежуток $(t, t + \Delta t)$ вследствие имеющихся в этом объеме источников (или стоков), плотность которых, т. е. количество поглощаемого или выделяемого тепла за единицу времени в единице объема,

обозначим $F(x, y, z, t)$. Ясно что

$$Q_2 = \iiint_V F(x, y, z, t) dv \Delta t,$$

а тогда, используя формулу Гаусса–Остроградского, для общего количества тепла, приходящего в объем V за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, получаем выражение

$$Q_1 + Q_2 = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dv \Delta t + \iiint_V F(x, y, z, t) dv \Delta t. \quad (2)$$

С другой стороны, на изменение температуры объема тела V за время $(t, t + \Delta t)$ на величину $\Delta_t u = u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t) \approx \frac{\partial u(M, t)}{\partial t} \Delta t$ необходимо затратить следующее количество тепла:

$$\begin{aligned} Q_3 &= \iiint_V [u(x, y, z + \Delta t) - u(x, y, z, t)] \gamma(x, y, z) \rho(x, y, z) dv \approx \\ &\approx \iiint_V \gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} dv \Delta t, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma = \gamma(M)$ — теплоемкость вещества, а $\rho = \rho(M)$ — его плотность. Но $Q_1 + Q_2 = Q_3$, а потому из (2) и (3) следует соотношение

$$\iiint_V \left[\gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - F(x, y, z, t) \right] dv = 0.$$

Так как объем V произволен, а подынтегральная функция непрерывна, то отсюда следует, что в любой момент времени t должно выполняться соотношение

$$\gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(M, t). \quad (4)$$

Это уравнение (4) называется *уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела*. Если тело однородно, то γ , ρ и k постоянные и уравнение (4) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (5)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma \rho}}, \quad f(x, y, z, t) = \frac{1}{\gamma \rho} F(x, y, z, t). \quad \triangleright$$

Для вычисления температуры тела $u(x, y, z, t)$ в любой точке тела и в любой момент времени t недостаточно решения уравнения (4) или (5). Из физических соотношений следует, что необходимо знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе тела (граничное условие). Точно так же и для решения других задач математической физики требуется знание начальных (если процесс нестационарный) и граничных условий. Поэтому под *постановкой задачи* в дальнейшем подразумевается выбор функции, характеризующей исследуемый физический процесс, вывод (или выбор) соответствующего этому процессу уравнения, установление граничных условий и формулировка начальных условий.

Пример 2. Поставить задачу об определении температуры однородного изотропного стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура есть некоторая функция x , а на концы стержня подается извне заданный тепловой поток.

◀ Температура стержня зависит только от координаты точки $x \in [0, l]$ и времени t , т. е. $u = u(x, t)$. Внутри стержня источники тепла отсутствуют, т. е. $F(x, y, z, t) \equiv 0$. Поэтому уравнение (5) принимает вид $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, где $a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}$. Начальное условие записывается в виде $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, где $\varphi(x)$ — заданная функция. Граничные условия имеют вид

$$u'_x(0, t) = -\frac{1}{k\sigma} q_1(t), \quad u'_x(l, t) = \frac{1}{k\sigma} q_2(t), \quad 0 < t < \infty,$$

где σ — площадь поперечного сечения стержня, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — тепловые потоки (количество тепла, поступающего в единицу времени) в стержень через его концы. Таким образом, имеем задачу:

Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < \infty, \quad (6)$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (\text{начальное условие}),$$

$$u'_x(0, t) = -\frac{1}{k\sigma} q_1(t), \quad u'_x(l, t) = \frac{1}{k\sigma} q_2(t) \quad (\text{граничные, или краевые, условия}). \triangleright \quad (7)$$

Рассмотренная в примере 2 задача относится к так называемым *смешанным задачам*, в которых участвуют как начальные, так и граничные условия. Граничные условия (7), наложенные на значение производной $u'_x(x, t)$, называют *условиями второго рода*. Рассматриваются также

задачи с *условиями первого рода*, наложенными на значения функции $u(x, t)$,

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t) \quad (8)$$

и с *условиями третьего рода*, наложенными как на значения функции $u(x, t)$, так и на значения производной $u'_x(x, t)$,

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u \right) \right|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u \right) \right|_{x=l} = \psi_2(t). \quad (9)$$

Условия (9) означает упругое закрепление в точках $x = 0$ и $x = l$.

Кроме смешанной задачи достаточно часто встречается *задача Коши*, состоящая в отыскании решения $u(x, t)$ в области $-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$, удовлетворяющего только начальным условиям (например, условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ для уравнения (6)).

16.1.** Вывести уравнение малых колебаний закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ натянутой струны, т. е. свободно изгибающейся в плоскости горизонтальной тонкой нити. Действующая на струну сила натяжения T значительно больше силы тяжести, т. е. действием силы тяжести можно пренебречь.

16.2. Используя уравнение задачи 16.1, поставить задачу о вынужденных колебаниях закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ горизонтальной однородной струны, если в момент $t = 0$ струна имела форму $\varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, и скорость струны в каждой ее точке задается функцией $\psi(x)$.

16.3*. Используя уравнение задачи 16.1, поставить задачу о свободных колебаниях закрепленной на конце $x = l$ горизонтальной однородной струны, левый конец которой (при $x = 0$) движется так, что касательная в этом конце (при $x \rightarrow +0$) в любой момент времени горизонтальна. В момент $t = 0$ струна имела формулу $\varphi(x)$, а скорость каждой точки равна нулю.

16.4.** Рассматривая однородную двухпроводную линию равномерно распределенных индуктивностей, сопротивлений, емкостей и утечки, вывести *волновое уравнение*, называемое также уравнением длинной линии. (Ввести величины: L — индуктивность, C — емкость, R — сопротивление, G — коэффициент утечки, которые считать относительными к единице длины.)

16.5. Используя уравнение задачи 16.4, поставить задачу об отыскании закона изменения напряжения и силы тока в длинной линии ($0 \leq x < \infty$) без потерь (т. е. $R = G = 0$), если известны начальные напряжение $\varphi(x)$, сила тока $\psi(x)$, а напряжение в точке $x = 0$ постоянно и равно E_0 .

17.6*. Воспользовавшись уравнение (6) примера 2, поставить задачу о распределении температуры внутри однородного изотропного стержня, начальная температура которого равна u_0 , при свободном внутреннем теплообмене, если в левом конце его (при

$x = 0$) поддерживается постоянная температура u_0 , а через правый конец (при $x = l > 0$) происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой задана функцией $\varphi(t)$.

16.7. На границе бесконечного изотропного однородного цилиндра, направляющая которого — кривая L — лежит в плоскости, перпендикулярной образующей, поддерживается температура, зависящая только от положения точки на L . Используя уравнение (5) примера 1, поставить задачу об установившемся стационарном распределении температуры внутри цилиндра (*плоская задача Дирихле*).

2. Приведение уравнений к каноническому виду. Общее уравнение второго порядка относительно функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (10)$$

Методы решения таких уравнений и характер описываемых этими уравнениями процессов зависят от вида квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j \quad (11)$$

в каждой точке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ некоторой области D n -мерного пространства.

Как известно, выбором линейного преобразования матрица $(a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0))_{i,j=1}^n$ квадратичной формы (11) может быть приведена к каноническому (диагональному) виду, причем согласно закону инерции число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов канонического вида матрицы не зависит от способа диагонализации.

В соответствии с этим уравнение (10) в точке M_0 (в области D) называется *уравнением эллиптического типа*, если все n коэффициентов канонического вида квадратичной формы одного знака, т. е. квадратичная форма (11) является положительно либо отрицательно определенной в точке M_0 (соответственно в области D). К уравнениям эллиптического типа обычно приводят задачи о стационарных тепловых процессах, об отыскании гармонических в области D функций.

Уравнение (10) имеет *гиперболический тип* в точке M_0 (в области D), если в точке M_0 (соответственно в области D) $n - 1$ коэффициент канонического вида квадратичной формы (11) имеет один знак, а один коэффициент противоположен им по знаку. К уравнениям гиперболического типа приводят различные задачи о колебательных процессах. В более общем случае уравнение (10) имеет *ультрагиперболический тип*, если t коэффициентов канонического вида квадратичной формы одного знака, а остальные $n - t$ — противоположного.

Наконец, уравнение (10) имеет в точке M_0 (в области D) *параболический тип*, если в точке M_0 (соответственно в области D) хотя бы один из коэффициентов канонического вида квадратичной формы (11) равен нулю. Такие уравнения описывают процессы распространения тепла, диффузии и некоторые другие.

В случае двух независимых переменных x и y уравнение (10) обычно записывается следующим образом:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (12)$$

Соответствующая ему квадратичная форма имеет вид

$$a(x, y)t_1^2 + 2b(x, y)t_1t_2 + c(x, y)t_2^2.$$

Тип уравнения (12) может быть определен и без приведения квадратичной формы к каноническому виду. Именно: уравнение (12) имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ (в области D)

эллиптический тип, если $ac - b^2 > 0$,

гиперболический тип, если $ac - b^2 < 0$,

параболический тип, если $ac - b^2 = 0$

в точке M_0 (соответственно в области D).

Уравнение

$$a(x, y) dy^2 - 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2 = 0 \quad (13)$$

называется *характеристическим* для уравнения (12), а его общие интегралы

$$\varphi(x, y) = C, \quad \psi(x, y) = C$$

— *характеристиками*.

Характеристики линейного уравнения в частных производных второго порядка (12) используются для приведения его к каноническому виду. Для уравнения гиперболического типа ($ac - b^2 < 0$) характеристики действительны и различны. Полагая $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$, приводим уравнение (12) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (14)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \Phi_1 \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0, \quad (14')$$

если положить дополнительно $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$.

Для уравнения эллиптического типа ($ac - b^2 > 0$) характеристики комплексные и комплексно сопряжены ($\varphi(x, y) = \bar{\psi}(x, y)$). Полагая $\xi = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \bar{\psi}(x, y)) = \operatorname{Re} \varphi(x, y)$ и $\eta = \frac{1}{2i}(\varphi(x, y) - \bar{\psi}(x, y)) = \operatorname{Im} \varphi(x, y)$, уравнение (12) приводим к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (15)$$

В случае уравнения параболического типа ($ac - b^2 = 0$) имеется только одна характеристика $\varphi(x, y) = C$. Полагая $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — произвольная функция, независимая с $\varphi(x, y)$ (т. е. якобиан $I = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0$), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_3 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (16)$$

Уравнения (14), (14'), (15), (16) называются **каноническими**.

Рассмотренный метод приведения уравнения (12) к каноническому виду (14)–(16) и решение полученного уравнения носит название *метода характеристик*.

Так как для каждого типа канонических уравнений разработаны определенные методы как аналитического, так и численного решения, то задача приведения уравнений (12) к каноническому виду представляет практический интерес.

Заметим, что в различных областях тип одного и того же уравнения (12) может быть различным.

Пример 3. Определить тип уравнения

$$y^2 u''_{xx} + x^2 u''_{yy} - \frac{x^2}{y} u'_y - \frac{y^2}{x} u'_x = 0 \quad (17)$$

и привести его к каноническому виду.

Так как $ac - b^2 = y^2 x^2 > 0$ во всех точках, не лежащих на прямых $x = 0$ или $y = 0$, то в любом открытом квадранте заданное уравнение имеет эллиптический тип. Составим характеристическое уравнение

$$y^2 dy^2 + x^2 dx^2 = 0.$$

Оно имеет комплексно сопряженные общие интегралы $y^2 + ix^2 = k$ и $y^2 - ix^2 = k$. Поэтому полагаем $\xi = y^2$ и $\eta = x^2$. Тогда имеем

$$u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = u'_\eta \cdot 2x,$$

$$u'_y = u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi \cdot 2y,$$

$$u''_{xx} = (u''_{\eta\xi} \xi'_x + u''_{\eta\eta} \eta'_x) \cdot 2x + u'_\eta \cdot 2 = u''_{\eta\eta} \cdot 4x^2 + 2u'_\eta,$$

$$u''_{yy} = (u''_{\xi\xi} \xi'_y + u''_{\xi\eta} \eta'_y) \cdot 2y + u'_\xi \cdot 2 = u''_{\xi\xi} \cdot 4y^2 + 2u'_\xi.$$

Подставив эти значения в исходное уравнение, получим

$$y^2(4x^2u''_{\eta\eta} + 2u'_{\eta}) + x^2(4y^2u''_{\xi\xi} + 2u'_{\xi}) - \frac{x^2}{y}2yu'_{\xi} - \frac{y^2}{x}2xu'_{\eta} = 0,$$

т. е. $4x^2y^2(u''_{\eta\eta} + u''_{\xi\xi}) = 0$. Сокращая на $4x^2y^2 \neq 0$, приходим к уравнению канонического вида $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$. Отсюда заключаем, что решение уравнения является гармонической функцией по переменным ξ и η . \triangleright

В задачах 16.8–16.18 определить тип уравнений и привести их к каноническому виду:

$$16.8. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$16.9. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$16.10. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$16.11. x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$16.12. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$16.13. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$16.14. xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}y \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ в области } x \geq 0, y > 0.$$

$$16.15. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \operatorname{ctg} x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

$$16.16. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$16.17. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в области } x \geq 0.$$

$$16.18. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

16.19**. Найти общее решение уравнения из задачи 16.8.

16.20. Найти общее решение уравнения из задачи 16.9.

16.21. Найти общее решение уравнения из задачи 16.11.

16.22. Найти общее решение уравнения из задачи 16.15.

16.23. Найти общее решение уравнения из задачи 16.18.

§ 2. Аналитические методы решения уравнений математической физики

1. Метод Даламбера. Одним из широко используемых способов решения уравнений колебаний струны является метод характеристик, называемый в этом случае *методом Даламбера*. В основе его лежит тот факт, что с помощью замены $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

преобразуется в уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ (см. задачу 16.5), которое имеет общее решение $u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + F(\eta)$, где Φ и F — произвольные дважды дифференцируемые функции. Для определения этих функций Φ и F , т. е. для определения закона колебаний струны, требуется использовать начальные условия, а для некоторых задач и граничные. Если вернуться к старым переменным x и t , то решение имеет вид

$$u(x, t) = \Phi(x + at) + F(x - at).$$

Здесь $F(x - at)$ характеризует прямую волну (кривая $F(x)$ смещается вправо со скоростью a), а $\Phi(x + at)$ — обратную волну (кривая $\Phi(x)$ смещается влево со скоростью a).

Если рассматривается задача Коши для бесконечной струны $-\infty < x < \infty$, то по заданным начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2)$$

определяются функции Φ и F и искомое решение (*формула Даламбера*)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (3)$$

Пример 1. Найти решение $u(x, t)$ задачи Коши ($-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

◀ Используя формулу Даламбера (3), имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\cos(x - t) + \cos(x + t)] = \cos x \cos t. \quad ▷$$

Используя формулу Даламбера, найти решения $u(x, t)$ следующих задач Коши ($-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$):

16.24. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$, $u'_t(x, 0) = 0$.

16.25. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$, $u'_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$.

16.26. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$, $u'_t(x, 0) = \sin x$.

16.27. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$, $u'_t(x, 0) = \cos x$.

16.28. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $u'_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$.

16.29*. Найти закон свободных колебаний бесконечной струны, если начальная скорость каждой ее точки равна нулю, а начальное отклонение задается функцией

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0) \cup (2l, \infty), \\ x & \text{при } x \in (0, l), \\ 2k - x & \text{при } x \in (l, 2l). \end{cases}$$

Построить на чертеже профиль струны в моменты времени $t = l/2a$ и $t = l/a$ (a — входящая в уравнение (1) постоянная).

16.30*. Найти решение уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \varphi(x) \equiv 0$,

$$u'_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > h, \\ -a & \text{при } -h < x < 0, \\ a & \text{при } 0 < x < h. \end{cases}$$

Построить профиль струны в моменты времени $t = h/(2a)$ и $t = 3h/(2a)$.

В случае полубесконечной струны кроме начальных условий (2), заданных при $0 \leq x < \infty$, необходимо добавить еще граничное условие (конец струны предполагается в точке $x = 0$)

$$u(0, t) = 0 \tag{4}$$

для закрепленной в точке $x = 0$ струны,

$$u'_x(0, t) = 0 \tag{5}$$

для свободного конца в точке $x = 0$,

$$u'_x(0, t) - hu(0, t) = 0$$

для упругого закрепления в точке $x = 0$.

Из условий (2) и (4) следует, что $\varphi(0) = 0$.

В случае однородных граничных условий (4) или (5) решение задачи о колебании полубесконечной струны сводится к решению задачи о колебании бесконечной струны путем продолжения начальных условий на всю ось нечетным образом для условия (4), т. е. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, и четным образом для условия (5), т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = \psi(x)$.

Пример 2. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$, удовлетворяющее условиям $u(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin^2 x$, $u(0, t) = 0$.

◀ Продолжим функции $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = \sin^2 x$ на отрицательную полуось нечетным образом:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{при } x < 0; \end{cases} \\ \psi_1(x) &= \begin{cases} \sin^2 x & \text{при } x \geq 0, \\ -\sin^2 x & \text{при } x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Тогда по формуле Даламбера (3) решение запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_1(z) dz] = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}[(x + at)^2 + (x - at)^2] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin^2 z dz & \text{при } t \leq \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}[(x + at)^2 - (x - at)^2] + \\ + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \sin^2 z dz - \int_{x-at}^0 \sin^2 z dz \right] & \text{при } t > \frac{x}{a} > 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 + a^2 t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{4a} \cos 2x \sin 2at & \text{при } t \leq \frac{x}{a}, \\ 2axt + \frac{1}{4a}[2x - \sin 2x \cos 2at] & \text{при } t > \frac{x}{a} > 0. \end{cases} \quad \triangleright\end{aligned}$$

Замечание. Как следует из формулы Даламбера (3) и уравнения (1), входящая в условие (2) функция $\varphi(x)$ должна иметь вторую производную, а функция $\psi(x)$ — первую. Однако в последующих задачах мы будем рассматривать функции $\varphi(x)$ с угловыми точками, а функции $\psi(x)$ — с точками разрыва, предполагая тем не менее, что определяемая по формуле (3) функция является решением (вообще говоря, обобщенным) исходного уравнения (1). Это объясняется тем, что путем незначительных изменений функции φ и ψ можно сделать достаточно гладкими и полученные для этих сглаженных функций по формуле (3) решения $u^*(x, t)$ будут мало отличаться от $u(x, t)$.

Используя метод продолжения и формулу Даламбера, найти решения следующих задач:

16.31. В области $0 \leq x < \infty, 0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \sin x, \quad u'_x(0, t) = 0.$$

16.32. В области $0 \leq x < \infty, 0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0.$$

16.33. В области $0 \leq x < \infty, 0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}, \quad u(0, t) = 0.$$

16.34. В области $0 \leq x < \infty, 0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad u'_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}, \quad u(0, t) = 0.$$

16.35. В области $0 \leq x < \infty, 0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad u'_t(x, 0) = \sin x, \quad u(0, t) = 0.$$

16.36. В области $0 \leq x < \infty, 0 < t < \infty$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l} & \text{при } x \in [0, l], \\ 0 & \text{при } x \in (l, \infty), \end{cases}$$

$$u'_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0.$$

Построить график решения в моменты $t = l/(4a)$ и $t = 3l/(4a)$.

16.37. Полуограниченная струна ($u(0, t) = 0$) в начальный момент имеет форму $u(x, 0) = 0$ и начальную скорость

$$u'_t(x, 0) = \begin{cases} c & \text{при } x \in [0, l], \\ 0 & \text{при } x \in [l, \infty). \end{cases}$$

Найти форму струны для момента времени $t = l/a$ и $t = 5l/a$, где a — входящая в уравнение (1) константа.

2. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы. Одним из наиболее распространенных аналитических методов решения уравнений математической физики является так называемый *метод Фурье*, который опирается на свойства ортогональных систем и ортогональных разложений. Поэтому изложению метода Фурье мы предпосылаем ряд задач на свойства ортогональных систем, ортогональных рядов и на решение краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть в векторном пространстве \mathcal{U} введено *скалярное (внутреннее) произведение* (\mathbf{x}, \mathbf{y}) векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ и $\mathbf{y} \in \mathcal{U}$ (см. Часть 1, гл. 3, § 1, п. 3), удовлетворяющее условиям:

- 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}),$
- 2) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}),$
- 3) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \lambda \in \mathbb{O},$
- 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0,$ причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0.$

Нормой элемента $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, обозначаемой $\|\mathbf{x}\|$, называется число, равное $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, т. е. $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}).$ Последовательность векторов $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{U}$ называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет условию: для всех $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любых $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}_{n_1} - \mathbf{x}_{n_2}\| < \varepsilon.$ Пространство \mathcal{U} называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность векторов $\{\mathbf{x}_n\}$ этого пространства имеет предел $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}.$ Полное линейное векторное пространство со скалярным произведением называется *пространством Гильберта* и обозначается буквой $H.$

16.38*. Доказать, что удовлетворяющее условиям 1)–4) скалярное произведение есть непрерывная функция относительно сходимости по норме, т. е. если $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ и $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и $|(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{y})| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty.$

16.39. Доказать, что линейные операции над векторами гильбертова пространства H непрерывны, т. е. если $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$, $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \rightarrow 0$ и последовательность чисел $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ($n \rightarrow \infty$), то $\|(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| \rightarrow 0$ и $\|\lambda_n \mathbf{x}_n - \lambda \mathbf{x}\| \rightarrow 0.$

16.40*. Доказать, что конечномерное евклидово пространство является полным.

16.41. Пусть l_2 — векторное пространство бесконечных последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ с действительными (комплексными) компонентами $x_n, n \in \mathbb{N}$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$ До-

полнением) компонентами $x_n, n \in \mathbb{N}$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$ До-

казать, что соотношение $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ задает скалярное произведение в пространстве l_2 .

16.42. Доказать, что счетное множество $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_n, n \in \mathbb{N}; \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\}$ образует ортонормированный базис в пространстве l_2 относительно скалярного произведения задачи 16.41.

16.43*. Доказать, что l_2 является пространством Гильберта.

16.44. Пусть $L_2(a, b)$ — пространство заданных на $[a, b]$ комплекснозначных функций $f(x)$ таких, что $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Считая известным, что из условия $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$ следует $f(x) =$

$= \theta(x)$, где $\theta(x)$ — нулевой элемент пространства $L_2(a, b)$, доказать, что если $f(x) \in L_2(a, b)$, $g(x) \in L_2(a, b)$, то соотношение $(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ определяет скалярное произведение в

$L_2(a, b)$. Написать неравенство Коши–Буняковского в $L_2(a, b)$, называемое также *неравенством Шварца* (см. Часть 1, с. 122).

16.45*. Доказать, что последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \in [-1, -1/n], \\ nt & \text{при } t \in [-1/n, 1/n], \\ 1 & \text{при } t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

фундаментальна в пространстве непрерывных на отрезке $[-1, 1]$

функций с нормой $\left(\int_{-1}^1 (f(t) - g(t))^2 dt \right)^{1/2}$, но не имеет предела.

Таким образом, это пространство не является полным.

16.46. Пусть $L_2^\rho(a, b)$ — пространство заданных на $[a, b]$ функций $f(x)$ таких, что $\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty$, где весовая функция $\rho(x) \geq 0$ и может обращаться в нуль только в отдельных точках

Доказать, что если $f(x) \in L_2^\rho(z, b)$, $g(x) \in L_2^\rho(a, b)$, то соотношение

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$$

определяет скалярное произведение в $L_2^\rho(a, b)$ (см. условие задачи 16.44).

Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, заданных на отрезке $[a, b]$, называется *ортогональной на $[a, b]$* , если

a) $\varphi_n(x) \in L_2(a, b)$, $n = 0, 1, \dots$;

b) $(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ d_n \neq 0 & \text{при } m = n. \end{cases}$

Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ называется *ортогональной на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$* , если

a) $\varphi_n(x) \in L_2^\rho(a, b)$, $n = 0, 1, \dots$;

b) $(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ d_n \neq 0 & \text{при } m = n. \end{cases}$

Если $d_n = 1$ для всех $n = 0, 1, \dots$, то система называется *ортонормированной на $[a, b]$* или соответственно *ортонормированной на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$* .

На примерах следующих задач убедиться в существовании ортогональных и ортогональных с весом систем функций:

16.47. Доказать, что тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

ортонормирована на $[-\pi, \pi]$.

16.48. Доказать, что система функций $\left\{ \cos \frac{\pi nx}{l} \right\}_{n=0}^\infty$ ортогональна на отрезке $[0, l]$.

16.49. Доказать, что система функций $\left\{ \sin \frac{2\pi nx}{l} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ ортогональна на отрезке $[0, l/2]$.

16.50. Пусть система функций $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ из $L_2(a, b)$ линейно независима на $[a, b]$. Доказать по индукции, что построенные по рекуррентной формуле функции

$$\varphi_0(x) = \frac{f_0(x)}{\|f_0\|},$$

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (f_n, \varphi_k) \varphi_k(x)}{\left\| f_n - \sum_{k=0}^{n-1} (f_n, \varphi_k) \varphi_k \right\|}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

образуют ортонормированную на $[a, b]$ систему (метод ортогонализации Шмидта).

16.51. Используя метод ортогонализации Шмидта (см. задачу 16.50), найти первые четыре функции (ортонормированные полиномы Лежандра $\widehat{P}_0(x), \widehat{P}_1(x), \widehat{P}_2(x)$ и $\widehat{P}_3(xx)$), полученные при ортогонализации системы степеней $1, x, x^2, \dots$ на отрезке $[-1, 1]$.

16.52. Используя метод ортогонализации Шмидта (см. задачу 16.50), найти первые 4 функции, получаемые при ортогонализации системы степеней $1, x, x^2, \dots$ на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ортонормированные полиномы Чебышева).

16.53*. Ненормированный полиномы Чебышева с коэффициентом 1 при старшей степени имеют вид

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

($n \in \mathbb{N}$). Доказать, что система $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

16.54. Используя метод ортогонализации Шмидта (см. задачу 16.50), найти первые 3 функции, полученные при ортогонализации системы степеней $1, x, x^2, \dots$ на отрезке $[0, 1]$.

Функции Радемахера $r_n(x)$ определяются следующим образом:

$$r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^{n+1} \pi x, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

16.55. Построить графики функций Радемахера $r_n(x)$ для $n = 0, 1, 2, 3$.

16.56. Показать, что при $\mu > \nu$ каждый интервал постоянства функции $r_\nu(x)$ содержит четное число $2^{\mu-\nu}$ интервалов постоянства $r_\mu(x)$.

16.57. Доказать ортонормированность системы $\{r_n(x)\}_{n=0}^\infty$ на отрезке $[0, 1]$.

Функции Уолша $W_n(x)$, $x \in [0, 1]$, в нумерации Пэли определяются следующим образом:

$$W_0(x) \equiv 1, \quad W_{2^k}(x) = r_k(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

и если $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_\nu}$, $n_1 > n_2 > \dots > n_\nu \geq 0$, то

$$W_n(x) = \prod_{k=1}^{\nu} W_{2^{n_k}}(x) = \prod_{k=1}^{\nu} r_{n_k}(x),$$

где $r_n(x)$ — функции Радемахера, причем в точках разрыва

$$W_n(x) = \frac{1}{2}[W_n(x+0) + W_n(x-0)].$$

16.58. Построить графики функций Уолша $W_n(x)$ для $n = 0, 1, \dots, 8$.

16.59. Доказать ортонормированность системы $\{W_n(x)\}_{n=0}^\infty$ на отрезке $[0, 1]$.

16.60.** Пусть $J_\nu(x)$ — решение уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, а $\{\mu_k^{(\nu)}\}_{k=1}^\infty$ — корни $J_\nu(x)$. Доказать, что система функций $\{J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)\}_{k=1}^\infty$ ортогональна на отрезке $[0, 1]$ с весом $\rho(x) = x$.

Отыскание решения $y(x)$, $x \in [a, b]$, уравнения

$$(k(x)y'(x))' - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющего однородным краевым условиям одного из типов

- 1) $y(a) = y(b) = 0$,
- 2) $y'(a) = y'(b) = 0$,

3) $y(x)$ ограничено при $x \rightarrow a+0$ и $x \rightarrow b-0$, будем называть *задачей Штурма–Лиувилля*. При этом предполагаем, что функции $k(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $k(a) = k(b) = 0$ в случае условия типа 3), $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$ и $\rho(x)$ ограничена для $x \in [a, b]$.

В общую задачу Штурма–Лиувилля краевые условия 1)–3) могут входить и в некоторых линейных комбинациях.

Нетривиальные решения $y(x) \not\equiv 0$ уравнения (6), удовлетворяющие одному из краевых условий 1)–3), существуют не при всех λ . Значение λ^* , при котором существует нетривиальное решение $y^*(x)$ задачи Штурма–Лиувилля, называется *собственным числом уравнения* (6), а соответствующее ему решение $y^*(x)$ — *собственной функцией*.

Заметим, что собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ задачи Штурма–Лиувилля, соответствующие различным собственным числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$, т. е.

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x)y_2(x)\rho(x) dx = 0.$$

Найти собственные числа и собственные функции следующих задач:

16.61.** $y'' - \lambda y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$.

16.62. $y'' - \lambda y = 0$, $y'(0) = y'(l) = 0$.

16.63. $y'' - \lambda y = 0$, $y(0) = y'(l) = 0$.

16.64. $y'' - \lambda y = 0$, $y'(0) = y(l) = 0$.

16.65.** $y''(r) + \frac{1}{r}y'(r) + \omega^2 y(r) = 0$, $y(R) = 0$.

3. Ортогональные ряды. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — ортонормированная на $[a, b]$ система функций, а функция $f(x) \in L_2(a, b)$. Тогда существуют числа

$$c_n = c_n(f) = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots,$$

называемые *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по системе Φ . Ряд с этими коэффициентами

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

называемые *ортогональным разложением* или *рядом Фурье* функции $f(x)$ по системе Φ .

Если система Φ только ортогональна, а не нормирована, то

$$c_n = \frac{1}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

16.66. Используя результат задачи 16.60 (см. решение), найти выражение коэффициентов Фурье–Бесселя функции $f(x) \in L_2^\rho(0, 1)$ ($\rho(x) = x$) по системе $\{I_\nu(\mu_k^{(\nu)})x\}_{k \in \mathbb{N}}$.

16.67*. Нормированные полиномы Лежандра $P_n(x)$ (см. задачу 16.51) можно определить также соотношением (формула Родрига)

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \cdot \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

они образуют ортогональную на $[-1, 1]$ систему, т. е.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Найти первые 4 коэффициента разложения функции $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$, если известно, что $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 3x^2/2 - 1/2$, $P_3(x) = 5x^3/2 - 3x/2$.

16.68. Записать выражение коэффициентов Фурье функции $f(x) \in L_2^\rho(-1, 1)$ ($\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) по системе полиномов Чебышева (см. задачу 16.53).

16.69. Для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ вычислить первые четыре коэффициента ее разложения по системе Уолша в нумерации Пэли.

16.70*. Доказать, что частные суммы $S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$

разложения функции $f(x)$ по системе Φ дают решение следующей задачи о наилучшем среднеквадратичном приближении: в множестве

$$M_n = \left\{ T_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right\}$$

«полиномов» $T_n(x)$ по системе Φ порядка не выше n найти тот, который дает минимум интегралов

$$\min_{T_n \in M_n} \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 dx.$$

16.71. Используя результат задачи 16.70, вывести неравенство Бесселя для конечных сумм

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx$$

и для бесконечных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

16.72. Написать неравенство Бесселя задачи 16.71 для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ периода 2π по тригонометрической системе $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ортогональная система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется *полной*, если из равенства

$$(f, \varphi_n) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

следует, что $f(x) = 0$ почти во всех точках отрезка $[a, b]$.

Для полных ортонормированных систем неравенство Бесселя обращается в *равенство Парсеваля*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx.$$

Рассмотренные ранее тригонометрические системы, система Уолша, система функций Бесселя, системы полиномов Лежандра и Чебышева являются полными.

16.73. Каков смысл неравенства Бесселя и равенства Парсеваля в конечномерном евклидовом векторном пространстве?

16.74*. Доказать, что система функций Радемахера не является полной на отрезке $[0, 1]$.

4. Метод Фурье решения уравнений математической физики. Метод Фурье, широко используемый при решении ряда задач математической физики, состоит в следующем. Искомая функция, зависящая от нескольких переменных, ищется в виде произведения функций, каждая из которых зависит лишь от одной или нескольких переменных. После подстановки этого произведения в исходное уравнение получается несколько обыкновенных дифференциальных уравнений, часть из которых вместе с краевыми условиями исходной задачи являются краевыми задачами Штурма–Лиувилля. Искомое решение представляется рядом по произведениям собственных функций этих задач Штурма–Лиувилля.

Пример 3. Найти отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия закрепленной на конце $x = 0$ однородной горизонтальной струны, правый конец которой при $x = l$ перемещается так, что касательная к струне остается постоянно горизонтальной. В начальный момент времени струна имела форму $\frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l}$, начальные скорости отсутствовали.

◀ Предполагая, что струна совершает малые колебания, получаем следующую смешанную краевую задачу: найти решение уравнения свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (7)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u'(l, t) = 0. \quad (9)$$

Решение этой задачи ищем в виде произведения $u(x, t) = X(x)T(t)$, подставляя которое в (7), находим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив обе части этого уравнения на $a^2 X(x)T(t)$, получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (10)$$

Каждое отношение в (10) зависит от своей переменной, поэтому равенство возможно только в том случае, когда каждое из этих отношений постоянно. Полагая $\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$ и используя граничные условия (9), получаем задачу Штурма–Лиувилля

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X'(l) = 0,$$

собственными числами которой являются числа $\lambda_k = -\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2$, а собственными функциями — функции $X_k(x) = \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x$, $k = 1, 2, \dots$ (см. задачу 16.63).

Подставив в (10) вместо отношения $\frac{X''(x)}{X(x)}$ его значение $\lambda_k = -\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2$, получим при каждом $k = 1, 2, \dots$ уравнение

$$T''(t) + \left(\frac{2k-1}{2l}\pi a\right)^2 T(t) = 0,$$

общим решением которого является функция

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{2k-1}{2l}\pi at + B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi at.$$

Таким образом, решениями уравнения (7), удовлетворяющими граничным условиям (10), являются функции

$$u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) =$$

$$= \left(A_k \cos \frac{2k-1}{2l}\pi at + B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi at \right) \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x,$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Из линейности уравнения (7) следует, что любая линейная комбинация этих уравнений, т. е. формально составленный ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2k-1}{2l}\pi at + B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi at \right) \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x \quad (11)$$

при условиях на коэффициенты A_k и B_k , допускающих возможность его двукратного почлененного дифференцирования по t и по x , также является решением уравнения (7), удовлетворяющим граничным условиям (9).

Потребуем, чтобы представленное рядом (11) решение $u(x, t)$ удовлетворяло также граничным условиям (8), т. е. чтобы

$$u(x, 0) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x$$

и

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2l}\pi a B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x.$$

Из этих равенств заключаем, что если числа A_k являются коэффициентами Фурье функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{15} \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l} = \frac{1}{30} \left(\sin \frac{7\pi x}{2l} + \sin \frac{15\pi x}{2l} \right)$$

по системе $\left\{ \sin \frac{2k-1}{2l} \pi x \right\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. если $A_k = 0$ при $k \neq 4$ и $k \neq 8$, а $A_4 = A_8 = 1/30$ и если $B_k = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$, то функция

$$u(x, t) = \frac{1}{30} \left(\cos \frac{7\pi at}{2l} \sin \frac{7\pi x}{2l} + \cos \frac{15\pi at}{2l} \sin \frac{15\pi x}{2l} \right)$$

является искомым решением уравнения (7). \triangleright

16.75. Найти отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ однородной горизонтальной струны, если в начальный момент струна имела форму $\frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}$, а начальные скорости отсутствовали.

16.76. Найти отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ однородной горизонтальной струны, если в начальный момент точки струны находились в положении равновесия и сей была придана начальная скорость $\frac{1}{3} \sin \frac{5\pi x}{l}$.

16.77. Найти отклонение $u(x, t)$ от положения равновесия закрепленной на конце $x = l$ однородной горизонтальной струны, левый конец которой при $x = 0$ перемещается так, что касательная к струне остается горизонтальной, если в начальный момент струна имела форму $\frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2l}$, а начальная скорость отсутствовала.

16.78. Найти отклонение $u(x, t)$ закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ однородной горизонтальной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке $x = l/2$ и отклонением от положения равновесия h , а начальные скорости отсутствовали.

Указание. Решить уравнение колебаний закрепленной на концах струны $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ при начальных условиях

$$u(x, 0) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

16.79. Найти колебания закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ однородной горизонтальной струны, находящейся в положении

жении равновесия, если в начальный момент времени ударом молоточка в точке $x = l/3$ ей сообщается постоянная начальная скорость

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0 & \text{при } \left| x - \frac{l}{3} \right| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0 & \text{при } \left| x - \frac{l}{3} \right| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases}$$

где π/h — ширина молоточка.

16.80. Найти закон свободных колебаний закрепленной на конце $x = 0$ однородной горизонтальной струны, если правый ее конец при $x = l$ перемещается так, что касательная к струне остается постоянно горизонтальной. В начальный момент струна находилась в положении равновесия и ей была придана начальная скорость $u'_t(x, 0) = \sin \pi x/l$.

Указание. Граничными условиями в данном случае являются условия $u(0, t) = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$, а системой собственных функций является система $\left\{ \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$.

16.81. Закрепленной в точке $x = l$ однородной горизонтальной струне, левый конец которой в точке $x = 0$ может перемещаться с горизонтальной касательной, придана начальная скорость $v = \frac{x(l-x)}{l^2}$. Найти закон ее свободных колебаний, если в начальный момент она имела форму $\varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$.

Указание. Системой собственных функций задачи является система $\left\{ \cos \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$.

16.82. На концах однородного изотропного стержня длиной l поддерживается нулевая температура. Предполагая, что стенки стержня теплоизолированы от окружающей среды, найти закон распределения температуры в стержне, если известно, что в начальный момент имелось следующее распределение температуры: $u(x, 0) = u_0 \frac{x(l-x)}{x^2}$, где $u_0 = \text{const}$.

Указание. Решить уравнение распространения тепла $u'_t = a^2 u''_{xx}$.

16.83. Один конец стержня (при $x = 0$) поддерживается при постоянной нулевой температуре, а второй (при $x = l$) теплоизолирован от окружающей среды (т. е. производная от $u(x, t)$ по x

на этом конце равна нулю: $u'_x(l, t) = 0$). Найти закон распределения температуры внутри стержня, если начальная температура задана функцией

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < l/2, \\ u_0 & \text{при } l/2 < x < l. \end{cases}$$

Указание. Системой собственных функций является система

$$\left\{ \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

16.84.** Однородная прямоугольная мембрана ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq m$), закрепленная вдоль всего контура, лежащего в горизонтальной плоскости, и имеющая в начальный момент форму $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, начала колебаться с начальной скоростью $u'_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$. Найти закон свободных колебаний мембранны. Получить решение в случае $\varphi(x, y) = \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$, $\psi(x, y) = 0$, если натяжение мембранны T_0 равно ее поверхностной плотности ρ , т. е. $a^2 = \frac{T_0}{\rho} = 1$.

16.85*. Точкам закрепленной по контуру однородной квадратной мембранны со стороной l , находящейся в начальный момент в положении равновесия, придали начальные скорости $u'_t(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l}$. Найти закон свободных колебаний мембранны.

16.86*. Закрепленной по контуру однородной квадратной мембрани со стороной l придали форму $u(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$. Найти закон свободных колебаний, если начальная скорость точек мембранны постоянна и равна a/l , где a — входящая в уравнение колебаний постоянная.

16.87.** Найти стационарное распределение температуры в прямоугольнике $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, если на границе прямоугольника поддерживается заданная температура:

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad x \in (0, a),$$

$$u(0, y) = \varphi(y) = y(b-y), \quad u(a, y) = \psi(y) = \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$y \in (0, b).$$

16.88*. Найти решение $u(x, y)$ уравнения Лапласа $\Delta u \equiv u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ в прямоугольнике $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0, y) = y(b - y), \quad u(a, y) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 0.$$

16.89. Найти решение $u(x, y)$ уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \alpha, \quad u(a, y) = \alpha y, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 0.$$

16.90.** Найти свободные колебания закрепленной по краю однородной круглой мембранны радиуса l , если в начальный момент отклонение в каждой точке определялось равенством $u(r, \varphi, 0) = \alpha I_0\left(\frac{\mu_1 r}{l}\right)$, в котором μ_1 — первый положительный корень, $I_0(x)$, а начальная скорость мембранны равна ca , где a — постоянная, входящая в уравнение колебаний мембранны.

16.91.** Найти закон стационарного распределения температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса R , если на его поверхности поддерживается заданная температура:

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = f(\varphi) = \sin \varphi.$$

В случае, когда исходное уравнение в частных производных является неоднородным, т. е. в характеризуемом этим уравнением физическом процессе имеются внешние силы и источники, предварительно находится система собственных функций соответствующего однородного уравнения и решение ищется в виде ряда по этим собственным функциям с переменными коэффициентами.

Пример 4. Найти форму $u(x, t)$ (отклонение от положения равновесия) закрепленной на конце $x = 0$ однородной струны, правый конец которой имеет горизонтальную касательную и на которую действует внешняя сила с плотностью $F(x, t) \neq 0$. В начальный момент $t = 0$ струна имела форму $\varphi(x)$ и каждая точка имела скорость $\psi(x)$. Найти $u(x, t)$ при условии, что $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, а $F(x, t) = a^2 = T_0/\rho$.

◀ Предполагая, что струна совершает малые колебания, имеем следующую первую краевую задачу: найти решение $u(x, t)$ уравнения вынужденных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (12)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (14)$$

Чтобы найти собственные функции однородного уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ с граничными условиями (13), положим $u(x, t) = X(x)T(t)$ и после разделения переменных получим уравнения

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda \quad (15)$$

с граничными условиями

$$X(0) = X'(l) = 0. \quad (16)$$

Решая уравнение $X'' - \lambda X = 0$ с краевыми условиями (16), находим собственные числа $\lambda_k = -\left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2$ и соответствующие собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (17)$$

(см. задачу 16.63).

Рассматривая t как параметр, разложим функцию $F(x, t)$ в ряд по системе $\left\{ \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l},$$

где

$$A_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(v, t) \sin \frac{\pi(2k-1)v}{2l} dv, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Будем искать решение уравнения (12) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad (18)$$

подставляя который в (12) (считаем, что $c_k(t)$ таковы, что возможно двукратное почленное дифференцирование по x и по t) и сравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $c_k(t)$:

$$c_k''(t) + \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} c_k(t) = A_k(t), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Из начальных условий (14) следует, что функции $c_k(t)$ должны удовлетворять условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}$$

и

$$u'(x, 0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k(0) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Пусть

$$c_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(v) \sin \frac{\pi(2k-1)v}{2l} dv \quad (20)$$

и

$$c'_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(v) \sin \frac{\pi(2k-1)v}{2l} dv, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

т. е. $c_k(0)$ и $c'_k(0)$ являются коэффициентами Фурье соответственно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе (17). Найдем теперь решения $c_k(t)$ уравнений (19), удовлетворяющие условиям (20) и (21), и, подставляя их в ряд (18), получим искомое решение $u(x, t)$.

По условию $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, поэтому

$$c_k(0) = c'_k(0) = 0 \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Далее, так как $F(x, t) = a^2$, то

$$\begin{aligned} A_k(t) = A_k &= \frac{2}{t} \int_0^t a^2 \sin \frac{\pi(2k-1)v}{2l} dv = \\ &= -\frac{2a^2}{l} \frac{2l}{\pi(2k-1)} \cos \frac{\pi(2k-1)v}{2l} \Big|_{v=0}^t = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}. \end{aligned}$$

Поэтому требуется найти решения дифференциальных уравнений

$$c''_k(t) + \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} c_k(t) = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

удовлетворяющие условиям

$$c_k(0) = c'_k(0) = 0. \quad (23)$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (22) мнимые, поэтому частные решения уравнений (22) ищем в виде $c_k(t) = \gamma_k t$. Подставив эти значения в (22), найдем, что

$$\gamma_k = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3},$$

а поэтому общее решение каждого из уравнений (22) запишется в виде

$$c_k(t) = a_k \cos \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \beta_k \sin \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и из условий (23) получим

$$c_k(0) = \alpha_k + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} = 0,$$

$$c'_k(0) = \beta_k + \frac{\pi a(2k-1)}{2l} = 0,$$

т. е. $\beta_k = 0$ и $\alpha_k = -\frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}$, $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} c_k(t) &= \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} \left(1 - \cos \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} \right) = \\ &= \frac{32l^2}{\pi^3(2k-1)^3} \sin^2 \frac{\pi a(2k-1)t}{4l} \end{aligned}$$

и искомое решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{32l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin^2 \frac{\pi a(2k-1)t}{4l} \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}. \quad \triangleright$$

16.92*. Для $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x-l)$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

16.93*. Для $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a^2}{l^2} \sin \frac{\pi at}{l}$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

16.94. Найти температуру стержня при $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура его концов равна нулю, а в точке $x_0 \in (0, l)$ находится сосредоточенный источник с постоянной мощностью Q .

Указание. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями $u(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0$, в котором $f(x, t) = Q\delta(x - x_0)/c\rho$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, c — удельная теплопроводность и ρ — удельная плотность. При

вычислении коэффициентов $A_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(v, t) \sin \frac{\pi k v}{l} dv$ использовать

следующее свойство δ -функции:

если $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

16.95. Для $0 \leq x \leq 2$ и $t \geq 0$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \frac{\pi x}{4},$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = 0$ и граничным условиям $u(0, t) = 0$ и $u'_x(2, t) = 0$.

В примерах 3 и 4 краевые условия являлись однородными (см. определение задачи Штурма–Лиувилля перед задачей 16.61). Если же рассматривается задача с неоднородными краевыми условиями, то с помощью замены $u = v + U$ путем надлежащего выбора функции U задача сводится к решению уравнения относительно функции v уже с однородными краевыми условиями. Выбор функции U определяется видом заданных краевых условий.

Пример 5. Найти закон свободных колебаний горизонтальной струны, правый конец которой при $x = l$ закреплен, а левый при $x = 0$ движется по закону $u(0, t) = \sin \frac{\pi a t}{l}$. Начальные скорость и отклонение равны нулю.

Имеем уравнение $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ с начальными условиями $u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0$ и неоднородными граничными условиями $u(0, t) = \sin \frac{\pi at}{l}$, $u(l, t) = 0$. Произведем замену $u(x, t) = v(x, t) + \frac{l-x}{l} \sin \frac{\pi at}{l}$. Тогда относительно функции $v(x, t)$ получим неоднородное уравнение

$$v''_{tt} = a^2 v''_{xx} + \frac{\pi^2 a^2 (l-x)}{l^3} \sin \frac{\pi at}{l}$$

с начальными условиями $v(x, 0) = 0$, $v'_t(x, 0) = \frac{\pi a(l-x)}{l^2}$ и однородными граничными условиями $v(0, t) = v(l, t) = 0$. Однородное уравнение $v''_{tt} = a^2 v''_{xx}$ с этими граничными условиями имеет систему собственных функций $\left\{ \sin \frac{\pi kx}{l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$, поэтому ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin \frac{\pi kx}{l}.$$

Подставив это выражение в неоднородное уравнение, получим бесконечную систему уравнений

$$C''_k(t) + \left(\frac{\pi k a}{l} \right)^2 C_k(t) = A_k(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

где $A_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\pi^2 a^2 (l-x)}{l^3} \sin \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi kx}{l} dx = \frac{2\pi a^2}{l^2 k} \sin \frac{\pi at}{l}$, причем

из начальных условий имеем следующие условия на $C_k(0)$ и $C'_k(0)$:

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(0) \sin \frac{\pi kx}{l} = 0, \text{ т. е. } C_k(0) = 0 \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \text{ и}$$

$$v'_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C'_k(0) \sin \frac{\pi kx}{l} = -\frac{\pi a(l-x)}{l^2}, \text{ т. е.}$$

$$C'_k(0) = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{\pi a(l-x)}{l^2} \sin \frac{\pi kx}{l} dx = -\frac{2a}{lk} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}.$$

При $k = 1$ в уравнении (24) имеет место резонанс (см. указание к задаче 16.93), поэтому частное решение ищется в форме $\tilde{C}_1(t) = t \left(A_1 \cos \frac{\pi at}{l} + B_1 \sin \frac{\pi at}{l} \right)$; подставив его в уравнение, найдем, что

$\tilde{C}_1(t) = -\frac{at}{l} \cos \frac{\pi at}{l}$. Используя затем условия $C_1(0) = 0$ и $C'_1(0) = -\frac{2a}{l}$, находим, что

$$C_1(t) = -\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi at}{l} - \frac{at}{l} \cos \frac{\pi at}{l}.$$

Далее, используя условия $C_k(0) = 0$ и $C'_k(0) = -\frac{2a}{lk}$, при $k \geq 2$ получаем следующие решения уравнений (24):

$$C_k(t) = -\frac{2}{\pi(k^2 - 1)} \sin \frac{\pi kat}{l} + \frac{2}{\pi k(k^2 - 1)} \sin \frac{\pi at}{l}.$$

Подставив эти коэффициенты в ряд для $v(x, t)$, получим искомое решение

$$u(x, t) = \frac{l-x}{l} \sin \frac{\pi at}{l} + v(x, t). \quad \triangleright$$

16.96. В области $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ найти решение уравнения $u'_t = a^2 u''_{xx}$ при начальном условии $u(x, 0) = x/l$ и граничных условиях $u(0, t) = 0$ и $u(l, t) = e^{-t}$.

Указание. Для приведения неоднородных граничных условий к однородным произвести замену $u(x, t) = v(x, t) + xe^{-t/l}$.

16.97. В области $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ найти решение уравнения $u'_t = u''_{xx}$ при начальном условии $u(x, 0) = 1$ и граничных условиях $u(0, t) = e^{-\frac{t}{4l^2}}$ и $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$.

Указание. Для приведения неоднородных граничных условий к однородным произвести замену $u(x, t) = v(x, t) + e^{-\frac{t}{4l^2}}$.

16.98. Найти закон свободных колебаний горизонтальной струны, левый конец которой при $x = 0$ закреплен, а правый движется по закону $u(l, t) = \sin \frac{\pi at}{2l}$. Начальные уклонения и скорости равны нулю.

Указание. Для приведения неоднородных граничных условий к однородным произвести замену $u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} \sin \frac{\pi at}{2l}$.

16.99. В области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ найти решение уравнения $u'_t = a^2 u''_{xx}$ при начальном условии $u(x, 0) = \frac{x}{l}$ и граничных условиях $u(0, t) = e^{-t}$, $u(l, t) = 0$.

16.100. В области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ найти решение $u'_t = u''_{xx}$ при начальном условии $u(x, 0) = 1$ и граничных $u'_x(0, t) = 0$, $u(l, t) = e^{-t/l^2}$.

При решении задачи Коши (в этом случае краевые условия заменены ограниченностью решения на бесконечности) метод Фурье приводит к использованию интеграла Фурье.

Пример 6. Найти закон распределения температуры $u(x, t)$ в длинном однородном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована и известно начальное распределение температуры $u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2}$.

◀ Пренебрегая влиянием температурных условий на концах длинного стержня, будем считать его бесконечным. Поэтому мы имеем следующую задачу Коши: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (25)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2}. \quad . \quad (26)$$

Предполагаем, что $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на оси $(-\infty, \infty)$. Ищем решение в виде произведения $u(x, t) = X(x)T(t)$, поэтому уравнение (25) преобразуется к виду

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\omega^2, \quad (27)$$

причем отношение отрицательно в силу того, что при $t \rightarrow \infty$ функция $T(t) = e^{-a^2 \omega^2 t}$ не должна возрастать до бесконечности. Правое из отношений (27) приводит к уравнению $X'' + \omega^2 X = 0$, решениями которого являются функции

$$X_\omega(x) = A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x,$$

а потому решениями уравнения (25) являются функции

$$u_\omega(x, t) = e^{-a^2 \omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x).$$

Если $A(\omega)$ и $B(\omega)$ абсолютно интегрируемы для $\omega \in [0, +\infty)$, то интеграл

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} u_\omega(x, t) d\omega = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega \quad (28)$$

можно дифференцировать по параметрам t и x и мы имеем

$$u'_t(x, t) = -a^2 \int_0^{+\infty} \omega^2 e^{-a^2 \omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega,$$

$$u''_{xx}(x, t) = - \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega.$$

Следовательно, определяемая интегралом (28) функция $u(x, t)$ является решением уравнения (25), поэтому, если мы выберем

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

и

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \sin \omega \tau d\tau,$$

то определяемая интегралом (28) функция $u(x, t)$ будет удовлетворять и условию (26). Таким образом, искомым решением является функция

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) [\cos \omega x \cos \omega \tau + \sin \omega x \sin \omega \tau] d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(x - \tau) d\omega. \end{aligned}$$

Используя формулу (см. задача 9.192)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma \omega^2} \cos \delta \omega d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}},$$

вычисляем внутренний интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \omega^2 t} \cos \omega(x - \tau) d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{(x - \tau)^2}{4a^2 t}},$$

а потому

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau.$$

В нашем случае $\varphi(\tau) = e^{-\tau^2}$, поэтому

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\tau^2 + \frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}\right)} d\tau. \triangleright$$

В задачах 16.101–16.104 найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

при указанном начальном условии $u(x, 0)$:

$$16.101. \quad u(x, 0) = \begin{cases} A, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

$$16.102. \quad u(x, 0) = e^{-|x|}.$$

$$16.103. \quad u(x, 0) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

$$16.104. \quad u(x, 0) = \begin{cases} x, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

§ 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

1. Основные понятия метода сеток. В большинстве случаев получить решение дифференциального уравнения в частных производных с помощью элементарных или специальных функций невозможно. В связи с этим важное значение приобретают приближенные методы его решения. Ниже мы ограничимся рассмотрением краевых задач для уравнений математической физики с двумя независимыми переменными в области D с границей γ , т. е.

$$Lu \equiv a(x, y)u''_{xx} + 2b(x, y)u''_{xy} + c(x, y)u''_{yy} + d(x, y)u'_x + e(x, y)u'_y + g(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$\Gamma u = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \quad (2)$$

где $a(x, y), b(x, y), c(x, y), d(x, y), e(x, y), g(x, y), f(x, y)$ — известные функции переменных x и y , определенные в области D , Γ — некоторый линейный (в общем случае дифференциальный) оператор граничных условий и $\varphi(x, y)$ — известная функция, заданная на границе γ .

Наиболее часто используемым методом численного решения краевой задачи (1), (2) является *метод сеток* (*метод конечных разностей*). В методе сеток замкнутая область $\bar{D} = D \cup \gamma$ заменяется конечным множеством точек — *сеткой* $\bar{D}_h = D_h \cup \gamma_h$. Точки этого множества называются *узлами* сетки. Параметр $\mathbf{h} = (h, \tau)$, шаг сетки, характеризует ее плотность в области D . Обычно при $|\mathbf{h}| = \sqrt{h^2 + \tau^2} \rightarrow 0$ последовательность сеток \bar{D}_h стремится заполнить всю область \bar{D} . Производные, входящие в левые части соотношений (1) и (2), заменяются на сетке \bar{D}_h соответствующими разностными отношениями. В результате получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} L_h u_h &= f_h(x_m, y_n), \quad (x_m, y_n) \in D_h, \\ \Gamma_h u_h &= \varphi_h(x_m, y_n), \quad (x_m, y_n) \in \gamma_h, \end{aligned} \tag{3}$$

где $u_h(x_m, y_n), (x_m, y_n) \in \bar{D}_h$ — искомая *сеточная функция*, $f_h(x_m, y_n)$, $\varphi_h(x_m, y_n)$ — сеточные функции, заданные на множествах D_h и γ_h соответственно, и L_h , Γ_h — разностные операторы. Сеточная функция \tilde{u}_h , являющаяся решением системы уравнений (3), называется приближенным решением краевой задачи (1), (2) на сетке \bar{D}_h . Ее значения $\tilde{u}_{m,n} = \tilde{u}_h(x_m, y_n)$ приближенно заменяют в узлах сетки \bar{D}_h соответствующие значения точного решения $\tilde{u}(x_m, y_n)$ исходной краевой задачи с некоторой погрешностью $\delta_{m,n} = \tilde{u}_{m,n} - \tilde{u}(x_m, y_n)$.

Семейство систем уравнений (3), зависящее от параметра $\mathbf{h} = (h, \tau)$, называется *разностной схемой*. Разностную схему (3) иногда удобно записывать в виде

$$\bar{L}_h u_h = \bar{f}_h(x_m, y_n), \quad (x_m, y_n) \in \bar{D}_h, \tag{4}$$

где

$$\bar{L}_h = \begin{cases} L_h, & (x_m, y_n) \in D_h, \\ \Gamma_h, & (x_m, y_n) \in \gamma_h; \end{cases} \quad \bar{f}_h = \begin{cases} f_h, & (x_m, y_n) \in D_h, \\ \varphi_h, & (x_m, y_n) \in \gamma_h. \end{cases}$$

Построение разностной схемы (3) или (4) для краевой задачи (1), (2) начинается с выбора сетки, т. е. указывается правило замены области D и границы γ сеточной областью \bar{D}_h . Чаще всего сетка выбирается прямоугольной и равномерной. Для этого проводятся два семейства параллельных прямых: $x = x_0 + mh$ и $y = y_0 + n\tau$ и рассматриваются все возможные точки попарных пересечений прямых из этих семейств, т. е. точки вида $(x_m, y_n) = (x_0 + mh, y_0 + n\tau)$. Точки (x_m, y_n) , которые принадлежат замкнутой области \bar{D} , образуют сетку \bar{D}_h , являясь ее узлами. У каждого узла (x_m, y_n) имеется четыре соседних точки: (x_{m-1}, y_n) , (x_{m+1}, y_n) , (x_m, y_{n-1}) , (x_m, y_{n+1}) . Если все эти соседние точки также принадлежат сетке \bar{D}_h , то узел (x_m, y_n) называется *внутренним*, в противном случае узел (x_m, y_n) называется *граничным*. Совокупность внутренних узлов образует множество D_h , а граничных — множество γ_h .

(так что $\bar{D}_h = D_h \cup \gamma_h$). Следует отметить, что множество граничных узлов γ_h не обязательно является подмножеством точек границы γ , что приводит к погрешностям при построении сеточной функции φ_h из (3). На рис. 13 приведен пример прямоугольной и равномерной сетки \bar{D}_h ,

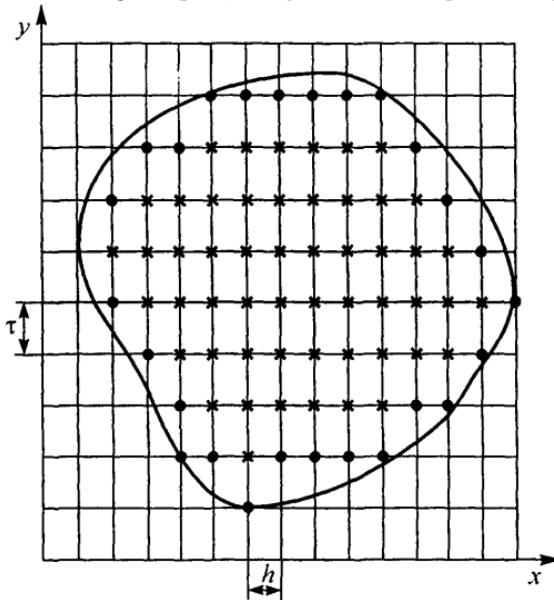


Рис. 13

построенной для заданной области D (внутренние узлы сетки здесь отмечены символом $*$, а граничные — символом \bullet).

После выбора сетки \bar{D}_h проводится построение сеточной функции $\bar{f}_h = (f_h, \varphi_h)$ и разностного оператора $\bar{L}_h = (L_h, \Gamma_h)$ из (4). Для определения f_h в узлах сетки \bar{D}_h полагают $\bar{f}_h(x_m, y_n) = f(x_m, y_n)$, если $(x_m, y_n) \in D_h$, $\bar{f}_h(x_m, y_n) = \varphi(x_m, y_n)$, если $(x_m, y_n) \in \gamma_h$ и $(x_m, y_n) \in \gamma$, если же граничный узел $(x_m, y_n) \notin \gamma$, то в качестве $\bar{f}(x_m, y_n)$ выбирается значение функции $\varphi(x, y)$ в произвольной точке $(x, y) \in \gamma$, отстоящей от узла (x_m, y_n) на величину, меньшую $|h|$. Для построения разностного оператора \bar{L}_h все известные функции, участвующие в явной записи операторов L и Γ (например, $a(x, y)$, $b(x, y)$ и т. д.), заменяются своими значениями в узлах сетки \bar{D}_h и обозначаются соответственно через $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ и т. д., а частные производные 1-го и 2-го порядков неизвестной функции $u(x, y)$ приближенно заменяются соответствующими разностными отношениями. В результате получаем разностную схему (4), соответствующую красвой задаче (1), (2).

Пример 1. Построить разностную схему для краевой задачи распространения тепла в конечном стержне ($0 \leq x \leq l$)

$$\begin{aligned} u'_t - a^2 u''_{xx} &= f(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(0, t) &= \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t). \end{aligned}$$

≤ Заметим, что область определения $\{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t < +\infty\}$ данной краевой задачи является неограниченной. Поэтому для построения равномерной прямоугольной сетки \bar{D}_h (которая всегда является конечным множеством точек) поступим следующим образом. Проведем два семейства прямых $x = mh$ и $t = n\tau$ для некоторых заданных h и τ . Очевидно, что точка (x_m, t_n) принадлежит области определения исходной задачи, если $m = 0, 1, \dots, r$, где $r = [l/h]$, и $n = 0, 1, \dots$. Положим

$$\bar{D}_h = \{(x_m, t_n) | m = 0, 1, \dots, r, n = 0, 1, \dots, s\}, \quad (5)$$

где целое s выбирается так, чтобы интервал $0 \leq t \leq \tau s$ перекрывал тот временной диапазон, в котором изучается распространение тепла в стержне. Множество внутренних узлов имеет вид $D_h = \{(x_m, t_n) | m = 1, 2, \dots, r-1; n = 1, 2, \dots, s\}$. В это множество входят и узлы вида (x_m, t_s) , $m = 1, 2, \dots, r-1$, которые мы считаем внутренними, так как наше ограничение $t \leq \tau s$ является искусственным! Соответственно $\gamma_h = \bar{D}_h \setminus D_h$ или в явном виде $\gamma_h = \{(x_m, 0) | m = 0, 1, \dots, r\} \cup \{(0, t_n) | n = 1, 2, \dots, s\} \cup \{(x_r, t_n) | n = 1, 2, \dots, s\}$.

Далее полагаем $u_h = \{u_{m,n}\}$,

$$\bar{f}_h(x_m, t_n) = \begin{cases} f(x_m, t_n), & (x_m, t_n) \in D_h, \\ \varphi(x_m), & n = 0; m = 0, 1, \dots, r, \\ \psi_1(t_n), & m = 0; n = 1, 2, \dots, s, \\ \psi_2(t_n), & m = r; n = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что в случае, когда l/h не является целым числом, т. е. $r = [l/h] < l/h$, узлы (x_r, t_n) , $n = 1, 2, \dots, s$, не принадлежат граничной полупрямой $x = l$, $y \geq 0$. Вместе с тем эти узлы являются граничными, поэтому значения сеточной функции \bar{f}_h в них перенесены с границы.

Для получения разностного уравнения заменим производные разностными отношениями (см. задачи 16.105 и 16.108):

$$u'_t(x_m, t_n) \approx \frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}),$$

$$u''_{xx}(x_m, t_n) \approx \frac{1}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}),$$

где $(x_m, t_n) \in D_h$. Следовательно,

$$\bar{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{a^2}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}), \\ \quad m = 1, \dots, r-1; n = 0, 1, \dots, s-1, \\ u_{m,0}, \quad m = 0, \dots, r, \\ u_{0,n}, \quad n = 1, \dots, s, \\ u_{r,n}, \quad n = 1, \dots, s. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя выражение (6) и (7) в (4), получаем искомую разностную схему, которая представляет собой следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{a^2}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) &= f(x_m, t_n), \\ m = 1, \dots, r-1; \quad n = 0, \dots, s-1, \\ u_{m,0} &= \varphi(x_m), \quad m = 0, \dots, r, \\ u_{0,n} &= \psi_1(t_n), \quad n = 1, \dots, s, \\ u_{r,n} &= \psi_2(t_n), \quad n = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Эта система состоит из $(s+1)(r+1)$ уравнений. Решив ее относительно неизвестных $u_{m,n}$, $m = 0, \dots, r$; $n = 0, \dots, s$, найдем сеточную функцию $\tilde{u}_h = \{\tilde{u}_{m,n}\}$, значения которой в узлах сетки приближенно заменяют значения искомого решения исходной краевой задачи для уравнения теплопроводности. ▷

Естественно, наибольшие трудности в построении разностной схемы (4) вызывает замена дифференциального оператора L исходного дифференциального уравнения в частных производных (1) разностным оператором L_h из (3).

Пусть U_h — конечномерное нормированное пространство сеточных функций u_h , заданных на сетке D_h , с нормой $\|u_h\| = \max_\nu |u_\nu|$, где u_ν — координаты вектора u_h (индекс ν последовательно пробегает все пары индексов (m, n) , нумерующих узлы сетки). Будем говорить, что разностный оператор L_h приближает дифференциальный оператор L , если для любой функции $u(x, y)$, дифференцируемой достаточное число раз, норма сеточной функции $(Lu)_h - L_h u_h$ стремится к нулю при $|h| \rightarrow 0$, т. е.

$$\|(Lu)_h - L_h u_h\| \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0.$$

Если, кроме того, выполняется неравенство

$$\|(Lu)_h - L_h u_h\| \leq C(|h|^p + |\tau|^q),$$

где C — константа, не зависящая от h , то порядок приближения разностным оператором равен p по переменной x и q по переменной y .

В частном случае, когда шаги сетки связаны соотношением $\tau = \theta(h)$ (т. е. не являются независимыми) и

$$\|(Lu)_h - L_h u_h\| \leq C|h|^n,$$

говорят, что разностный оператор L_h приближает оператор L с порядком приближения n .

Для определения порядка приближения обычно используется формула Тейлора.

Пример 2. Определить порядок приближения дифференциального оператора $Lu = u'_t - a^2 u''_{xx}$ разностным оператором из примера 1.

△ В примере 1 был построен разностный оператор

$$(L_h u_h)_{m,n} = \frac{1}{\tau} (u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{a^2}{h^2} (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}).$$

Используя формулу Тейлора, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (u_{m,n+1} - u_{m,n}) &= \frac{1}{\tau} (u(x_m, t_n + \tau) - u(x_m, t_n)) = \\ &= u'_t(x_m, t_n) + \frac{\tau}{2} u''_{tt}(x_m, t'), \end{aligned}$$

где $t_m < t' < t_m + \tau$, и

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} (u(x_n + h, t_n) - \right. \\ &\quad \left. - u(x_m, t_n)) + \frac{1}{h} (u(x_m - h, t_n) - u(x_m, t_n)) \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left((u'_x(x_m, t_n) + \frac{h}{2} u''_{xx}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{6} u'''_{xxx}(x_m, t_n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^3}{24} u''''_{xxxx}(x', t_n)) + \left(-u'_x(x_m, t_n) + \frac{h}{2} u''_{xx}(x_m, t_n) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{h^2}{6} u'''_{xxx}(x_m, t_n) + \frac{h^3}{24} u''''_{xxxx}(x'', t_n) \right) \right), \end{aligned}$$

где $x_m - h < x'' < x_m < x' < x_m + h$. Приводя подобные члены в правой части последнего выражения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) &= u''_{xx}(x_m, t_n) + \\ &\quad + \frac{h^2}{24} (u''''_{xxxx}(x', t_n) + u''''_{xxxx}(x'', t_n)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (L_h u_h)_{m,n} &= u'_t(x_m, t_n) - a^2 u''_{xx}(x_m, t_n) + \frac{\tau}{2} u''_{tt}(x_m, t') - \\ &\quad - \frac{a^2 h^2}{24} (u''''_{xxxx}(x', t_n) + u''''_{xxxx}(x'', t_n)). \quad (8) \end{aligned}$$

Используя выражение (8), разность между исходным дифференциальным оператором L и заменяющим его разностным L_h в узлах сетки можем представить в виде

$$(Lu)_{m,n} - (L_h u_h)_{m,n} = \frac{\tau}{2} u''_{tt}(x_m, t') - \frac{a^2 h^2}{24} (u'''_{xxx}(x', t_n) + u'''_{xxx}(x'', t_n))$$

для некоторых $t' (t_n < t' < t_n + \tau)$ и $x', x'' (x_m - h < x' < x_m < x'' < x_m + h)$. Если теперь $|u''_{tt}(x, t)| < M_1$ и $|u'''_{xxx}(x, t)| < M_2$, то выполняется неравенство

$$\|(Lu)_h - L_h u_h\| = \max_{m,n} |(Lu)_{m,n} - (L_h u_h)_{m,n}| \leq$$

$$\leq \frac{M_1}{2} |\tau| + \frac{a^2 h^2}{12} |h|^2 \leq C(|h|^2 + |\tau|).$$

Следовательно, использованный в примере 1 разностный оператор приближает исходный дифференциальный и порядок приближения по переменной x равен двум, а по t — единице.

Отсюда, в частности, следует, что для того, чтобы порядок приближения был равен двум, необходимо шаги h и τ сетки связать соотношением $\tau = h^2$.

Замечание. Для облегчения запоминания построенного разностного оператора полезно поставить в соответствие ему «шаблон» — геометрическую картинку расположения узлов сетки, значения в которых связывает разностный оператор при некоторых фиксированных значениях m и n . Для разностного оператора из примера 1 шаблон изображен на рис. 14 (проверьте!). ▷

В задачах 16.105–16.107 определить порядок приближения дифференциального оператора частной производной u'_x указанным разностным оператором L_h :

16.105. $(L_h u_h)_{m,n} = \frac{1}{h} (u_{m+1,n} - u_{m,n})$ — оператор правосторонней разности.

16.106. $(L_h u_h)_{m,n} = \frac{1}{h} (u_{m,n} - u_{m-1,n})$ — оператор левосторонней разности.

16.107. $(L_h u_h)_{m,n} = \frac{1}{2h} (u_{m+1,n} - u_{m-1,n})$ — оператор центральной разности.

В задачах 16.108–16.111 определить порядок приближения заданного дифференциального оператора L второй частной производной указанным разностным оператором L_h :

16.108. $Lu = u''_{xx}$, $(L_h u_h)_{m,n} =$

$$= \frac{1}{h^2} (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}).$$

16.109. $Lu = u''_{yy}$, $(L_h u_h)_{m,n} =$

$$= \frac{1}{h^2} (u_{m+1,n+1} - 2u_{m+1,n} + u_{m+1,n-1}).$$

16.110. $Lu = u''_{xy}$, $(L_h u_h)_{m,n} =$

$$= \frac{1}{4h\tau} (u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n-1} - u_{m-1,n+1} + u_{m-1,n-1}).$$

16.111. $Lu = u''_{xy}$, $(L_h u_h)_{m,n} =$

$$= \frac{1}{h\tau} (u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n} + u_{m,n} - u_{m,n+1}).$$

16.112. Построить разностную схему для краевой задачи из примера 1, используя оператор правосторонней разности и оператор, аналогичный приведенному в задаче 16.109. Определить порядок приближения полученного разностного оператора L_h (шаблон приведен на рис. 15):

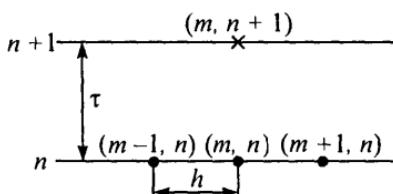


Рис. 14

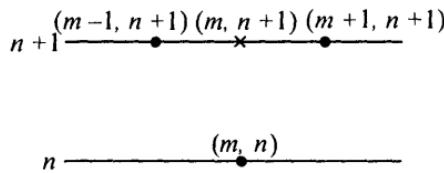


Рис. 15

В задачах 16.113 и 16.114 определить, какой дифференциальный оператор и с каким порядком приближается заданным разностным оператором L_h :

16.113. $(L_h u_h)_{m,n} = \frac{1}{2h} (u_{m+1,n} - u_{m-1,n}) +$

$$+ \frac{1}{2\tau} (2u_{m,n+1} - u_{m+1,n} + u_{m-1,n}).$$

16.114. $(L_h u_h)_{m,n} =$

$$= \frac{1}{h^2} (u_{m-1,n} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1} - 4u_{m,n}).$$

16.115. Определить, при каком α порядок приближения дифференциального оператора L : $Lu = u'_t - u''_{xx}$ разностным L_h

$$(L_h u_h)_{m,n} = \frac{1}{\tau} (u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \\ - \frac{1}{h^2} (\alpha(u_{m+1,n+1} - 2u_{m,n+1} - u_{m-1,n+1}) + \\ + (1-\alpha)(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} - u_{m-1,n}))$$

будет четвертым по h и первым по τ .

Составить разностные схемы для следующих краевых задач:

16.116. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$,
 $u(0, t) = \psi_1(t)$, $u(b, t) = \psi_2(t)$, $D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$.

16.117. $c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$, $c > 0$, $d > 0$, $u|_\gamma = \psi(x, y)$,
 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq Y\}$.

Более общим способом построения разностных операторов, приближающих заданный дифференциальный, является *метод неопределенных коэффициентов*. Этот метод состоит в том, что приближается не каждая производная в отдельности, а сразу весь оператор. Для замены дифференциального оператора разностным в узле (x_m, y_n) рассмотрим N соседних узлов. Узел (x_m, y_n) обозначим индексом 0, а остальные рассматриваемые узлы занумеруем числами 1, 2, ..., N . Составим линейную комбинацию

$$\sum_{k=0}^N c_k u_k$$

с неопределенными коэффициентами c_k ,

где u_k — значение $u(x, y)$ в узле k .

Предполагая функцию $u(x, y)$ дифференцируемой $n+1$ раз, разложим u_k по формуле Тейлора в окрестности узла 0. Считая сетку квадратной ($\tau = h$), имеем

$$\sum_{k=0}^N c_k u_k = \sum_{i+j \leq n} \gamma_{ij} \left(\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \right) h^{i+j} + R. \quad (9)$$

Коэффициенты γ_{ij} линейно выражаются через c_k . Выберем коэффициенты c_k так, чтобы правая часть в равенстве (9) отличалась возможно меньше от значения дифференциального выражения Lu в узле 0, т. е. чтобы коэффициенты при производных в уравнении (1) совпадали с коэффициентами при соответствующих производных в правой части (9), а коэффициенты при старших производных порядка r ($2 < r \leq n$) в (9) приравняем нулю, т. е.

$$\gamma_{ij} = 0 \quad \text{для } 2 < i + j = r \leq n. \quad (10)$$

Учитывая, что γ_{ij} выражаются через c_k , имеем систему уравнений относительно c_k , решив которую, мы получим приближение оператора Lu в узле (m, n) :

$$\sum_{k=0}^N c_k u_k = (Lu)_0 + O(h^{r-1}).$$

Система уравнений (10) относительно c_k может иметь несколько решений, однако достаточно взять одно из них. Используя в случае необходимости достаточно большое число узлов N , можно получить хорошее приближение Lu в узле (m, n) .

В задачах 16.118 и 16.119 построить соответствующие разностные операторы методом неопределенных коэффициентов.

16.118. $Lu = u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy}$. Порядок приближения равен двум (шаблон указан на рис. 16).

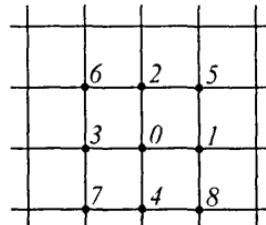


Рис. 16

Построим квадратную сетку D_h , т. е. выбираем шаг как по переменной x , так и по переменной y равным h . В качестве соседних берем 8 узлов (см. рис. 16), т.е. $N = 8$. Имеем линейную комбинацию $\sum_{k=0}^8 c_k u_k = (Lu)_0$.

Разлагая u_k по формуле Тейлора в окрестности узла 0, будем иметь

$$u_1 = u(x_0 + h, y_0) = u_0 + u'_x h + \frac{u''_{xx}}{2!} h^2 + \frac{u'''_{xxx}}{3!} h^3 + O(h^4),$$

$$u_2 = u(x_0, y_0 + h) = u_0 + u'_y h + \frac{u''_{yy}}{2!} h^2 + \frac{u'''_{yyy}}{3!} h^3 + O(h^4),$$

$$u_3 = u(x_0 - h, y_0) = u_0 - u'_x h + \frac{u''_{xx}}{2!} h^2 - \frac{u'''_{xxx}}{3!} h^3 + O(h^4),$$

$$u_4 = u(x_0, y_0 - h) = u_0 - u'_y h + \frac{u''_{yy}}{2!} h^2 - \frac{u'''_{yyy}}{3!} h^3 + O(h^4),$$

$$u_5 = u(x_0 + h, y_0 + h) = u_0 + u'_x h + u'_y h + \frac{h^2}{2!} (u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy}) + \\ + \frac{h^3}{3!} (u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4),$$

$$\begin{aligned} u_6 &= u(x_0 - h, y_0 + h) = u_0 - u'_x h + u'_y h + \frac{h^2}{2!}(u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy}) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}(-u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} - 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_7 &= u(x_0 - h, y_0 - h) = u_0 - u'_x h - u'_y h + \frac{h^2}{2!}(u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy}) - \\ &\quad - \frac{h^3}{3!}(u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_8 &= u(x_0 + h, y_0 - h) = u_0 + u'_x h - u'_y h + \frac{h^2}{2!}(u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy}) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}(u'''_{xxx} - 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} - u'''_{yyy}) + O(h^4). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в $(Lu)_0$:

$$\begin{aligned} (Lu)_0 &\equiv u_0(c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8) + \\ &\quad + u'_x h(c_1 - c_3 + c_5 - c_6 - c_7 + c_8) + u'_y h(c_2 - c_4 + c_5 + c_6 - c_7 - c_8) + \\ &\quad + u''_{xx} \frac{h^2}{2!}(c_1 + c_3 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8) + u''_{yy} \frac{h^2}{2!}(c_2 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8) + \\ &\quad + \frac{2u''_{xy}}{2!}h^2(c_5 - c_6 + c_7 - c_8) + \frac{h^3}{3!}u'''_{xxx}(c_1 - c_3) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}u'''_{yyy}(c_2 - c_4) + \frac{h^3}{3!}c_5(u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}c_6(-u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} - 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) - \\ &\quad - \frac{h^3}{3!}c_7(u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}c_8(u'''_{xxx} - 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} - u'''_{yyy}) + R(c_1, c_2, \dots, c_8)h^4 = \\ &\quad = u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих производных, получим систему линейных уравнений для нахождения c_k , выбирая при этом $i + j = 3$:

$$\begin{aligned}
 c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 &= 0, \\
 c_1 - c_3 + c_5 - c_6 - c_7 + c_8 &= 0, \\
 c_2 - c_4 + c_5 + c_6 - c_7 - c_8 &= 0, \\
 c_1 + c_3 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 &= \frac{2}{h^2}, \\
 c_2 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 &= \frac{10}{h^2}, \\
 c_5 - c_6 - c_7 + c_8 &= \frac{2}{h^2}, \\
 c_1 - c_3 + c_4 + c_5 - c_6 - c_7 + c_8 &= 0, \\
 c_5 + c_6 - c_7 - c_8 &= 0, \\
 c_5 - c_6 - c_7 + c_8 &= 0, \\
 c_2 - c_4 + c_5 + c_6 - c_7 - c_8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Систему уравнений (11) решаем методом исключения. Из последних четырех уравнений получим $c_5 = c_7$, $c_2 = c_4$. Используя эти равенства из второго и третьего уравнения системы установим, что $c_6 = c_8$, $c_1 = c_3$. Можно переписать систему уравнений (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 c_0 + 2c_1 + 2c_2 + 2c_5 + 2c_6 &= 0, \\
 2c_1 + 2c_5 + 2c_6 &= 2/h^2, \\
 2c_2 + 2c_5 + 2c_6 &= 10/h^2, \\
 2c_5 - 2c_6 &= 2/h^2, \\
 c_4 &= 0, \\
 c_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Решая систему (12), получим следующие значения для искомых постоянных:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= -2/h^2, & c_1 &= -4/h^2, & c_2 &= 0, & c_3 &= -4/h^2, \\
 c_4 &= 0, & c_5 &= 3/h^2, & c_6 &= 2/h^2, & c_7 &= 3/h^2, & c_8 &= 2/h^2.
 \end{aligned}$$

Окончательно для узла 0 получим

$$(LU)_0 \approx (-2u_0 - 4u_1 - 4u_3 + 3u_5 + 2u_6 + 3u_7 + 2u_8),$$

т. е. для всех внутренних узлов сетки D_h имеет место формула

$$\begin{aligned}
 (L_h u_h)_{m,n} &= 2u_{m,n} + 4u_{m+1,n} + 4u_{m-1,n} - \\
 &- 3u_{m+1,n+1} - 2u_{m-1,n+1} - 3u_{m-1,n-1} - 2u_{m,n+1}.
 \end{aligned}$$

Порядок аппроксимации второй: $r - 1 = n - 1 = 2$. \triangleright

16.119. $Lu = u''_{xx} + u''_{yy}$. Порядок приближения равен двум (шаблон указан на рис. 17).

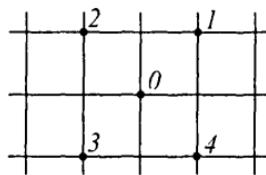


Рис. 17

Пусть, как и выше, $\tilde{u}_h = \{\tilde{u}_h(m, n)\}$ — решение разностной схемы, т. е. системы линейных алгебраических уравнений (4). Применение разностной схемы к решению краевой задачи (1), (2) оправдано, если величины $\tilde{u}_h(m, n)$ являются приближенными значениями сеточной функции $\tilde{u}(x_m, y_n)$, представляющей собой значения неизвестного решения $\tilde{u}(x, y)$ задачи (1), (2) в узлах сетки.

Будем говорить, что разностная схема (4) является сходящейся на решении $\tilde{u}(x, y)$ задачи (1), (2), если при $h \rightarrow 0$ выполняется условие¹⁾

$$\|\tilde{u}(x_m, y_n) - \tilde{u}_h(m, n)\| \rightarrow 0.$$

Если дополнительно выполняется неравенство

$$\|\tilde{u}(x_m, y_n) - \tilde{u}_h(m, n)\| \leq Ah^s, \quad (13)$$

где A — константа, не зависящая от h , то говорят, что скорость сходимости имеет порядок s относительно h .

Сеточная функция $\tilde{u}(x_m, y_n)$, вообще говоря, не является решением разностной схемы. Поэтому при подстановке ее в левую часть (4) получается выражение

$$\bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) = \bar{f}_h + \delta\bar{f}_h,$$

где $\delta\bar{f}_h$ называется *невязкой* или *погрешностью аппроксимации*.

Если $\|\delta\bar{f}_h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то говорят, что разностная схема (4) *аппроксимирует* краевую задачу (1), (2) на решении $\tilde{u}(x, y)$. При выполнении дополнительного условия

$$\|\delta\bar{f}_h\| \leq Ch^\sigma, \quad (14)$$

где C — константа, не зависящая от h , число $\sigma > 0$ называется *порядком аппроксимации*.

Наконец, не менее важным свойством разностных схем является понятие их *устойчивости*. Разностная схема (4) называется *устойчивой*,

¹⁾ Здесь и в дальнейшем будем считать шаги h и τ зависимыми, т. е. $\tau = \theta(h)$.

если существует такое h_0 , что для всех $h < h_0$ и любых \bar{f}_h она имеет единственное решение и

$$\|\tilde{u}_h\| \leq C\|\bar{f}_h\|, \quad (15)$$

где C — константа, не зависящая от h и правой части \bar{f}_h .

Между рассмотренными понятиями сходимости, аппроксимации и устойчивости существует тесная связь.

Теорема 1. Пусть устойчивая разностная схема (4) аппроксимирует краевую задачу (1), (2) на решении $\tilde{u}(x, y)$ с порядком аппроксимации $\sigma > 0$. Тогда эта схема является сходящейся и порядок ее сходимости совпадает с порядком аппроксимации.

Пример 3. Для задачи Коши

$$\begin{aligned} u'_t - u'_x &= f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

построена разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{1}{h}(u_{m+1,n} - u_{m,n}) &= f_{m,n}, \\ m &= 0, \pm 1, \dots, \pm M; \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1, \\ u_{m,0} &= \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \end{aligned}$$

где $\tau = \lambda h$ и постоянная $\lambda \leq 1$. Определить порядок аппроксимации этой схемы и исследовать ее на устойчивость.

Сначала покажем, что построенная разностная схема аппроксимирует исходную краевую задачу и определим порядок аппроксимации. Предполагая, что решение $\tilde{u}(x, y)$ задачи Коши имеет ограниченные вторые производные, по формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(\tilde{u}_{m+1,n} - \tilde{u}_{m,n}) &= \frac{1}{h}(\tilde{u}(x_m + h, t_n) - \tilde{u}(x_m, t_n)) = \\ &= \tilde{u}'_x(x_m, t_n) + \frac{h}{2}u''_{xx}(x_m + \xi, t_n), \\ 0 < \xi < h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(\tilde{u}_{m,n+1} - \tilde{u}_{m,n}) &= \frac{1}{\tau}(\tilde{u}(x_m, t_n + \tau) - \tilde{u}(x_m, t_n)) = \\ &= \tilde{u}'_t(x_m, t_n) + \frac{\tau}{2}u''_{tt}(x_m, t_n + \eta), \\ 0 < \eta < \tau. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение $\tau = \lambda h$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(\tilde{u}_{m,n+1} - \tilde{u}_{m,n}) - \frac{1}{h}(\tilde{u}_{m+1,n} - \tilde{u}_{m,n}) &= \\ = (\tilde{u}'_t(x_m, t_n) - \tilde{u}'_x(x_m, t_n)) + h \left(\frac{\lambda}{2} \tilde{u}''_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{1}{2} \tilde{u}''_{xx}(x_m + \xi, t_n) \right). \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации $\delta \bar{f}_{m,n} = \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) - \bar{f}_{m,n}$, следовательно, принимает вид

$$\delta \bar{f}_{m,n} = \begin{cases} h \left(\frac{\lambda}{2} \tilde{u}''_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{1}{2} \tilde{u}''_{xx}(x_m + \xi, t_n) \right), \\ \tilde{u}_{m,0} - \varphi_m. \end{cases}$$

Но $\tilde{u}_{m,0} - \varphi_m = 0$ для любого m в силу граничных условий. Поэтому норма $\delta \bar{f}_{m,n}$ оценивается следующим образом:

$$\|\delta \bar{f}_{m,n}\| \leq \max_{m,n} \left| \frac{\lambda}{2} \tilde{u}''_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{1}{2} \tilde{u}''_{xx}(x_m + \xi, t_n) \right| \leq hM \frac{\lambda + 1}{2},$$

где M — максимальное значение вторых производных функции $\tilde{u}(x, y)$ в области D . Полагая здесь $B = M \frac{\lambda + 1}{2}$, приходим к неравенству (14).

Следовательно, рассматриваемая разностная схема аппроксимирует исходную задачу Коши и порядок аппроксимации равен единице. (Конечно же, на решении $\tilde{u}(x, y)$, обладающем ограниченными вторыми производными.)

Отметим, что метод проверки свойства аппроксимации разностной схемы во многом повторяет метод определения порядка приближения разностным оператором дифференциального.

Теперь проведем исследование разностной схемы на устойчивость. Снова используя соотношение $\tau = \lambda h$, перепишем исходную разностную схему в виде

$$\begin{aligned} u_{m,n+1} &= (1 - \lambda)u_{m,n} + \lambda u_{m+1,n} + \lambda h f_{m,n}, \\ u_{m,0} &= \varphi_m, \end{aligned} \tag{16}$$

где, как и выше, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm M$; $n = 0, 1, \dots, [T/(\lambda h)] - 1$.

По условию $\lambda \leq 1$, поэтому $1 - \lambda \geq 0$. В этом случае справедлива оценка

$$\begin{aligned} |(1 - \lambda)u_{m,n} + \lambda u_{m+1,n}| &\leq (1 - \lambda)|u_{m,n}| + \lambda|u_{m+1,n}| \leq \\ &\leq (1 - \lambda) \max \{|u_{m,n}|, |u_{m+1,n}|\}, \end{aligned}$$

$$\{|u_{m+1,n}|\} + \lambda \max \{|u_{m,n}| |u_{m+1,n}|\} =$$

$$= \max \{|u_{m,n}|, |u_{m+1,n}|\} \leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n}|.$$

Используя эту оценку, из (16) находим:

$$\begin{aligned} |u_{m,n+1}| &\leq |(1-\lambda)u_{m,n} + \lambda u_{m+1,n}| + \lambda h |f_{m,n}| \leq \\ &\leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n}| + \lambda h \|f_h\|, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\|f_h\| = \max_{m,n} |f_{m,n}|$. Правая часть неравенства (17) от m не зависит, поэтому выполняется неравенство

$$\max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n+1}| \leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n}| + \lambda h \|f_h\| \quad (18)$$

для любого $n = 0, 1, \dots, [T/(\lambda h)] - 1$.

Используя неравенство (18) для оценки первого слагаемого в его правой части, последовательно находим

$$\begin{aligned} \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n+1}| &\leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n-1}| + 2\lambda h \|f_h\| \leq \dots \\ \dots &\leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n-k'}| + (k+1)\lambda h \|f_h\| \leq \dots \\ \dots &\leq \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,0}| + (n+1)\lambda h \|f_h\| = \\ &= \max_{-M \leq m \leq M} |\varphi_m| + (n+1)\lambda h \|f_h\|, \end{aligned} \quad (19)$$

так как $u_{m,0} = \varphi_m$ из (16). Теперь заметим, что $\max_{-M \leq m \leq M} |\varphi_m| \leq \|\bar{f}_h\|$ и $\|f_h\| \leq \|\bar{f}_h\|$. Подставляя эти неравенства в (19), получим

$$\begin{aligned} \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n+1}| &\leq (1 + (n+1)\lambda h) \|\bar{f}_h\| \leq \\ &\leq (1 + [T/(\lambda h)]\lambda h) \|\bar{f}_h\| \leq (1 + T) \|\bar{f}_h\|. \end{aligned}$$

Правая часть полученного соотношения от h не зависит. Следовательно,

$$\max_{0 \leq n \leq [T/(\lambda h)]-2} \max_{-M \leq m \leq M} |u_{m,n+1}| \leq (1 + T) \|\bar{f}_h\|,$$

т. е.

$$\|u_h\| \leq (1 + T) \|\bar{f}_h\|,$$

и мы получили искомое неравенство (15) (с $C = 1 + T$), означающее по определению, что разностная схема устойчива при $\lambda \leq 1$.

Так как заданная разностная схема аппроксимирует на решении исходную краевую задачу и устойчива, то при $\lambda \leq 1$ она является сходящейся и скорость сходимости по теореме 1 имеет первый порядок. \triangleright

16.120. Доказать теорему 1.

16.121. Показать, что рассмотренная в примере 3 разностная схема неустойчива при $\lambda > 1$.

16.122.** В области $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq Y\}$ построить разностную схему первого порядка, аппроксимирующую первую краевую задачу для уравнения гиперболического типа

$$Lu \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \psi(x), \quad u|_{x=0} = \Phi(y), \quad u|_{x=1} = F(y).$$

16.123*. В области D из задачи 16.122 построить разностную схему второго порядка, аппроксимирующую первую краевую задачу.

16.124*. В области D построить разностную схему первого порядка, аппроксимирующую третью краевую задачу

$$Lu = f, \quad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \psi(x),$$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_1(y)u \right) \right|_{x=0} = \Phi(y), \quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(y)u \right) \right|_{x=1} = F(y).$$

16.125.** Построить разностную схему второго порядка, аппроксимирующую третью краевую задачу.

16.126*. Определить порядок аппроксимации разностной схемы задачи 16.117.

В задачах 16.127–16.129 для заданных задач Коши и соответствующих им разностных схем выполнить следующие задания:

1) Выписать разностный оператор \bar{L}_h и правую часть \bar{f}_h , возникающие при записи этой схемы в виде (4).

2) Нарисовать шаблон для разностного оператора L_h .

3) Показать, что разностная схема аппроксимирует соответствующую краевую задачу с первым относительно h порядком на решении $\tilde{u}(x, t)$, имеющем ограниченные вторые производные.

4) Исследовать разностную схему на устойчивость в зависимости от значений параметра λ : $\tau = \lambda h$.

16.127. $u'_t - u'_x = f(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$, $u(x, 0) = \varphi(x)$;

$$\frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{1}{h}(u_{m,n} - u_{m-1,n}) = f_{m,n},$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

$$u_{m,0} = \varphi_m, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1.$$

16.128. $u'_t + u'_x = f(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$, $u(x, 0) = \varphi(x)$;

$$\frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) + \frac{1}{h}(u_{m,n} - u_{m-1,n}) = f_{m,n},$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

$$u_{m,0} = \varphi_m, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1.$$

16.129. $u'_t + u'_x = f(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$, $u(x, 0) = \varphi(x)$;

$$\frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) + \frac{1}{h}(u_{m+1,n} - u_{m,n}) = f_{m,n},$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

$$u_{m,0} = \varphi_m, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1.$$

16.130. Исследовать устойчивость разностной схемы из примера 1.

16.131. Исследовать устойчивость разностной схемы из задачи 16.112.

16.132. Исследовать устойчивость разностной схемы из задачи 16.116.

16.133. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{1}{2\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n-1}) = \frac{1}{h^2}(u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}),$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$u_{m,0} = \varphi_m, \quad u_{m,1} = \psi_m, \quad u_{0,n} = u_{M,n} = 0.$$

2. Численное решение краевых задач методом сеток. Все разностные схемы, применяемые при решении краевых задач математической физики, делятся на два больших класса — явных и неявных схем.

Под *слоем* разностной схемы понимается совокупность точек сетки \bar{D} , лежащих на некоторой горизонтальной (или вертикальной) прямой.

Если значения сеточной функции $u_{m,n+1}$, заданные на $(n+1)$ -м слое, выражаются в явном виде через значения этой же функции на слоях с меньшими номерами, то такая схема называется **явной**. В противном случае схема называется **неявной**.

Например, разностная схема, полученная в примере 1, является явной, так как может быть записана следующим образом (см. выражение (7)):

$$\begin{aligned} u_{m,n+1} &= \tau u_{m,n} + \frac{a^2\tau}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) + f_{m,n}, \\ n &= 0, 1, \dots, s-1; \quad m = 1, \dots, r-1, \\ u_{m,0} &= \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, r, \\ u_{0,n} &= \psi_1(t_n), \quad m = 1, 2, \dots, s, \\ u_{r,n} &= \psi_2(t_n), \quad m = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Решение получающейся системы линейных алгебраических уравнений трудностей не представляет и осуществляется последовательно, переходом от слоя к слою.

Сложнее обстоит дело с неявными схемами (как в задаче 16.112, например). Для решения соответствующих им систем уравнений удобно применять метод прогонки, т. е. модифицированный метод исключения для решения системы линейных уравнений. Суть этого метода разберем на основе неявной разностной схемы для уравнения теплопроводности (см. задачу 16.112). Введем обозначения

$$a_{m,n+1} = -\frac{a^2\tau}{h^2}, \quad b_{m,n+1} = 1 + \frac{2a^2\tau}{h^2}, \quad g_{m,n+1} = u_{m,n} + \tau f_{m,n+1}. \quad (20)$$

Разностную схему из задачи 16.112 перепишем в виде

$$\begin{aligned} u_{0,n} &= \psi_{1,n}, \\ a_{m,n+1}u_{m-1,n+1} + b_{m,n}u_{m,n+1} + a_{m,n+1}u_{m+1,n+1} &= g_{m,n+1}, \\ u_{k,n} &= \psi_{2,n}, \quad n = 0, \dots, s-1, \\ u_{m,0} &= \varphi_m, \quad m = 1, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (21)$$

Система уравнений (21) при каждом фиксированном значении n совпадает с системой

$$\begin{aligned} u_0 &= \varphi, \\ a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} &= g_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ u_N &= \psi, \end{aligned} \quad (22)$$

для которой справедлива следующая

Лемма. Система уравнений (22), коэффициенты которой удовлетворяют неравенствам $|b_n| \geq 1 + |a_n| + |c_n|$, разрешима при любых правых частях, и для ее решения справедлива оценка

$$|u| \leq \max \{|\varphi|, |g_1|, \dots, |g_{n-1}|, |\psi|\}.$$

Для системы (21) условия леммы выполнены. Систему уравнений (21) удобно решать с помощью метода, который называется *методом прогонки*. Будем искать решение системы уравнений (21) при каждом фиксированном n в виде

$$u_{m-1, n+1} = Q_{m, n+1} u_{m, n+1} + H_{m, n+1}, \quad m = k, \dots, 2. \quad (23)$$

Исключая $u_{m-1, n+1}$ из системы (21), получим

$$\begin{aligned} u_{m, n+1} = & -\frac{a_{m, n+1}}{a_{m, n+1} Q_{m, n+1} + b_{m, n+1}} u_{m+1, n+1} + \\ & + \frac{g_{m, n+1} - a_{m, n+1} H_{m, n+1}}{a_{m, n+1} Q_{m, n+1} + b_{m, n+1}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношение (24) связывает значения функций $u_{m, n+1}$, $u_{m+1, n+1}$, поэтому можно записать

$$u_{m, n+1} = Q_{m+1, n+1} u_{m+1, n+1} + H_{m+1, n+1}. \quad (25)$$

Сравнивая соотношения (24) и (25), имеем

$$\begin{aligned} Q_{m+1, n+1} &= -\frac{a_{m, n+1}}{a_{m, n+1} Q_{m, n+1} + b_{m, n+1}}, \\ H_{m+1, n+1} &= \frac{g_{m, n+1} - a_{m, n+1} H_{m, n+1}}{a_{m, n+1} Q_{m, n+1} + b_{m, n+1}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Соотношения (26) определяют значения всех прогоночных коэффициентов $Q_{m, n}$, $H_{m, n}$. С помощью этих соотношений сетка проходится вверх по m от значения 1 до значения $k - 1$ при фиксированном значении n . При этом определяются все значения $Q_{m, n}$, $H_{m, n}$ на сетке (*прямая прогонка*). Определив все прогоночные коэффициенты $Q_{m, n}$, $H_{m, n}$, проходят сетку вниз от значения k до 2, последовательно определяя значения $u_{m, n}$ из уравнения (23) (*обратная прогонка*). Границное условие при $m = 0$ определяет начальные значения $Q_{1, n+1}$, $H_{1, n+1}$, а граничное условие при $m = k$ в общем случае определяет первое значение u_k . Метод прогонки обладает тем свойством, что ошибки округления, получаемые на каждом шаге, не нарастают. Это свойство служит основанием ее широкого применения.

16.134.** Определить начальные значения прогоночных коэффициентов и значение u_k для решения параболического уравнения

в случае граничных условий

$$\left. \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u \right) \right|_{x=0} = \Phi_1, \quad \left. \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \right) \right|_{x=1} = \Phi_2.$$

В задачах 16.135–16.147, используя разобраные выше разностные схемы, найти приближенное численное решение:

16.135. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tx^2 = 0, D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}, u|_{t=0} = x^2, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x, u|_{x=0} = e^t - 1, u|_{x=2} = 4 \cos t.$

16.136. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8xy = 0, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, u(0, x) = x, u(0, y) = y, \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, u(1, y) = 1 - y.$

16.137. $u_{xx} - 4u_{yy} = xy, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{y=0} = x^2 + 1, u'_y|_{y=0} = \frac{x^2}{2} + 6, u|_{x=0} = \sin y + 1, u|_{x=2} = 5 \cos y.$

16.138. $u_{xx} - 4u_{yy} - xy = 0, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{y=0} = x^2, \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 8x - 2, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + yu \right)|_{x=0} = y^2, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + y^2 u \right)|_{x=1} = 5y^3 + 4y.$

16.139. $u_{xx} - 4u_{yy} = e^{xy}, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{y=0} = 4x + 5, \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 1, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sin yu \right)|_{x=0} = 5y, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + y^3 u \right)|_{x=1} = \cos y.$

Задачи 16.140–16.143 решить, используя явную или неявную схемы:

16.140. $\frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x = 0, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{y=0} = 1 - \frac{x}{2}, u|_{x=0} = \cos y, u|_{x=2} = \sin y.$

$$\mathbf{16.141.} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 1 = 0, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$u(x, 0) = x^2, u|_{x=1} = e^{xy}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u \right)|_{x=0} = 0.$$

$$\mathbf{16.142.} 4u_t - 2u_{xx} + xt = 0, D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\},$$

$$u|_{t=0} = x^2, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = t, \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \right)|_{x=2} = 0.$$

$$\mathbf{16.143.} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8x^2t^4, D = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\},$$

$$u|_{t=0} = \sin \pi x, \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 0,5u \right)|_{x=0} = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 0,5u \right)|_{x=1} = 0.$$

Решить следующие задачи Дирихле:

$$\mathbf{16.144.} 2u_{xx} + u_{yy} = x^2 + 2xy, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$u|_{y=0} = 1 + x, u|_{x=2} = 3 - y^2, u|_{x=0} = 1 + 5y, u|_{y=1} = 6 - x^2.$$

$$\mathbf{16.145.} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x^2 - y^2, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$u|_{x=0} = 2y^2, u|_{x=1} = y^2 + 4y, u|_{y=0} = 0, u|_{y=1} = x^2 + 2x + 2.$$

$$\mathbf{16.146.} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin xy, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y+1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$u|_{y=0} = x, u|_{y=x-1} = xy + 1, u|_{y=1} = 5 - x, u|_{x=0} = 5y.$$

$$\mathbf{16.147.} 2u_{xx} + 4u_{yy} + yx = 0, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$u|_{x=0} = 5y, u|_{y=0} = \sqrt{x}, u|_{y=1} = 5 - x^2, u|_{x=2} = \sqrt{\frac{2}{y+1}}.$$

Глава 17

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

§ 1. Численные методы минимизации функций одной переменной

1. Основные понятия. Прямые методы минимизации. Пусть на множестве $U \subset \mathbb{R}$ определена функция $f(x)$. Под *минимизацией функции $f(x)$ на множестве U* будем понимать решения следующей задачи: найти хотя бы одну точку минимума x^* и минимум $f^x = f(x^*)$ этой функции на множестве U .

Задача нахождения точки максимума и максимального значения функции $f(x)$ сводится к задаче минимизации заменой $f(x)$ на $-f(x)$, поэтому ниже будут рассматриваться только задачи на минимизацию.

Напомним, что число $x^* \in U$ называется *точкой абсолютного (глобального) минимума* или просто *точкой минимума* функции $f(x)$ на множестве U , если $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $x \in U$. Значение $f^* = \min_U f(x)$ называется *абсолютным (глобальным) минимумом* или просто *минимумом $f(x)$ на U* . Множество всех точек минимума функции $f(x)$ на множестве U будем обозначать U^* .

Число $x \in U$ называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ для всех $x \in U_\delta = \{x | x \in U, |x - \tilde{x}| < \delta\}$. Значение $f(\tilde{x})$ называется *локальным минимумом $f(x)$* . Всякая точка глобального минимума $f(x)$ является и точкой локального минимума этой функции. Обратное, вообще говоря, неверно.

В задачах 17.1–17.4 найти множество точек минимума U^* функции $f(x)$ на множестве U :

$$17.1. f(x) = \sin^2 \pi x, U = \mathbb{R}.$$

$$17.2. f(x) = |x - x^2|, U = [-1; 2].$$

$$17.3. f(x) = \cos \frac{\pi}{2}, U = (0; 1].$$

$$17.4. f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| > 1, \\ 1 & \text{при } |x| \leq 1, \end{cases} U = \mathbb{R}.$$

17.5. Доказать, что линейная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x) = Ax + B$, $A \neq 0$, достигает минимума на этом отрезке только в точке $x = a$ или $x = b$.

Отметим, что минимум функции $f(x)$ на множестве U может и не существовать, т. е. множество U^* может быть пустым. В этом случае используют обобщение понятия минимума — *точную нижнюю грань* функции $f(x)$ на множестве U . Пусть $f(x)$ ограничена снизу на U , т. е. $f(x) \geq A > -\infty$ для всех $x \in U$. Число f_* называется точной нижней гранью функции $f(x)$ на множестве U ($f_* = \inf_U f(x)$), если $f(x) \geq f_*$ при всех $x \in U$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in U$ такая, что $f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$. Для неограниченных снизу функций $f(x)$ полагают $f_* = -\infty$. Если $U^* \neq \emptyset$, то $f_* = \inf_U f(x) = f^* = \min_U f(x)$.

Пример 1. Пусть $f(x) = 1/x$, $U = [1; +\infty)$. Показать, что множество U^* точек минимума функции $f(x)$ на множестве U пусто и $f_* = \inf_U f(x) = 0$.

◀ Предположим, что $U^* \neq \emptyset$, т. е. существует хотя бы одна точка минимума $x^* \in U$ функции $f(x)$ на U . Возьмем произвольное число $x > x^*$. Тогда $x \in U$ и $f(x^*) = 1/x^* > 1/x = f(x)$, т. е. x^* не является точкой минимума $f(x)$ на U . Полученное противоречие и доказывает, что множество U^* точек минимума пусто.

Покажем, что $f_* = \inf_U f(x) = 0$. Очевидно, для произвольного $x \in [1; +\infty)$ справедливо неравенство $f(x) = 1/x > 0$. Далее, пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольное $x_\varepsilon > \max(1/\varepsilon, 1)$. Тогда $x_\varepsilon \in U$ и $f(x_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon$. Поэтому $f_* = 0$. ▷

Пример 2. Пусть $f(x) = \ln x$, $U = (0; 1]$. Найти $f_* = \inf_U f(x)$.

◀ Функция $f(x)$ не ограничена снизу на множестве U , поэтому по определению точной нижней грани полагаем $f_* = -\infty$. ▷

В случае $U^* = \emptyset$ под задачей минимизации $f(x)$ на множестве U понимают определение $f_* = \inf_U f(x)$, полагая $f^* = f_*$. При этом точка минимума x^* не ищется.

В задачах 17.6–17.11 убедиться, что множество точек минимума функции $f(x)$, заданной на множестве U , пусто, и найти $f_* = \inf_U f(x)$:

$$\mathbf{17.6.} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad U = \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{17.7.} \quad f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5, \quad U = (-\infty; 5).$$

$$\mathbf{17.8.} \quad f(x) = x \sin x, \quad U = \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{17.9.} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad U = (-\infty; -1].$$

$$\mathbf{17.10.} \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad U = [-2; 2].$$

$$\mathbf{17.11.} \quad f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad \text{а)} \quad U = (0; 1); \quad \text{б)} \quad U = (1; +\infty).$$

17.12. Показать, что если $\min_U f(x)$ существует, то $\inf_U f(x) = \min_U f(x)$.

Существование локальных минимумов функции $x^* \in U^*$, отличных от абсолютного, почти всегда затрудняет поиск точек $f(x)$, поэтому многие приближенные методы минимизации применимы только тогда, когда любой локальный минимум $f(x)$ является одновременно и глобальным. Один из классов функций, удовлетворяющих этому условию, составляют **унимодальные функции**.

Функция $f(x)$ называется *унимодальной* на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна на $[a; b]$ и существуют числа α и β , $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, такие, что:

- 1) если $a < \alpha$, то на отрезке $[a; \alpha]$ $f(x)$ монотонно убывает;
- 2) если $\beta < b$, то на отрезке $[\beta; b]$ $f(x)$ монотонно возрастает;
- 3) при $x \in [\alpha; \beta]$ $f(x) = f^* = \min_{[a; b]} f(x)$.

Отметим, что возможно вырождение в точку одного или двух из отрезков $[a; \alpha]$, $[\alpha; \beta]$ и $[\beta; b]$. Некоторые варианты расположения и вырождения в точку отрезков монотонности и постоянства унимодальной функции показаны на рис. 18–21.

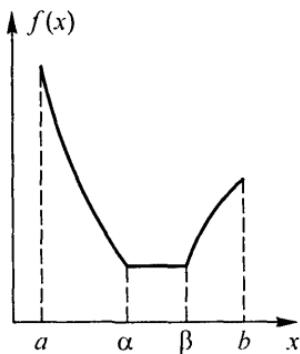


Рис. 18

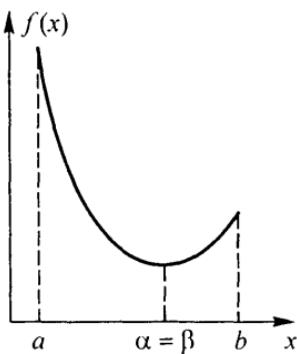


Рис. 19

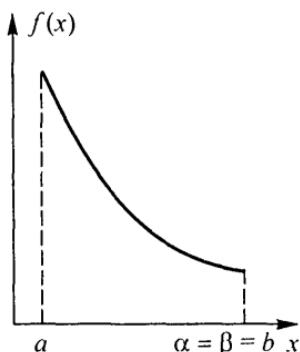


Рис. 20

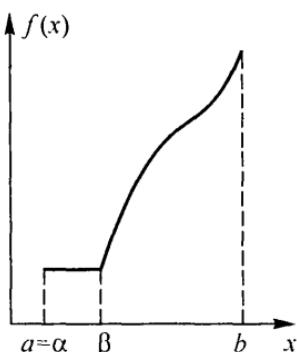


Рис. 21

Множество функций, унимодальных на отрезке $[a; b]$, будем обозначать $Q[a; b]$.

Для проверки унимодальности функции $f(x)$ на практике обычно используют следующие критерии:

1) если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и производная $f'(x)$ не убывает на этом отрезке, то $f(x) \in Q[a; b]$;

2) если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, то $f(x) \in Q[a; b]$.

Пример 3. Показать, что функция $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$ унимодальна на отрезке $[3; 5]$.

Вторая производная функции $f(x)$ равна $f''(x) = 12x^2 - 60x + 72$. Корни полученного квадратного трехчлена $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, $f''(x) \geq 0$, если $x \geq 3$ и, в частности, при $x \in [3; 5]$. Используя второй критерий унимодальности, получаем, что $f(x) \in Q[3; 5]$. \triangleright

В задачах 17.13–17.16 убедиться в унимодальности функций $f(x)$ на указанных отрезках $[a; b]$:

17.13. $f(x) = x^2 - 3x + x \ln x$, $[1; 2]$.

17.14. $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x$, $[0; \pi/4]$.

17.15. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$, $[0; 2]$.

17.16. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$, $[0; 1]$.

17.17. Показать, что любая из точек локального минимума функции $f(x) \in Q[a; b]$ является и точкой ее глобального минимума.

16.18. Показать, что если $f(x) \in Q[a; b]$ и $a \leq c < d \leq b$, то $f(x) \in Q[c; d]$.

17.19. Пусть $f(x) \in Q[a; b]$ и $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Показать, что

а) если $f(x_1) > f(x_2)$, то $U^* \subset [x_1; b]$, а если $f(x_1) < f(x_2)$, то $U^* \subset [a; x_2]$;

б) если $f(x_1) = f(x_2)$, то отрезок $[x_1; x_2]$ содержит хотя бы одну точку $x^* \in U^*$;

в) если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x^* \in [a; x_2]$, а при $f(x_1) > f(x_2)$ имеем $x^* \in [x_1; b]$, где x^* — одна из точек минимума $f(x)$ на $[a; b]$.

17.20. На какие 3 части следует разбить отрезок $[-1; 2]$, чтобы на каждой из них функция $f(x) = |x(x-1)| - 1|$ была унимодальной?

17.21. Найти максимальное значение b , при котором функция $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ унимодальна на отрезке $[-5; b]$.

17.22. Будет ли функция $f(x) = ax^3 - 3x^2 - 10$ унимодальной на отрезке $[1; 2]$ при $a > 3$?

Большую группу приближенных методов минимизации функций составляют *прямые методы минимизации*, основанные на вычислении

только значений минимизируемой функции в некоторых точках и не использующие значений ее производных.

Метод перебора является простейшим из прямых методов минимизации. Пусть $f(x) \in Q[a; b]$ и требуется найти какую-либо из точек минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$. Разобьем $[a; b]$ на n равных частей точками деления $x_i = a + i(b - a)/n$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, где $n \geq (b - a)/\varepsilon$. Вычислив значения $f(x)$ в этих точках, путем сравнения найдем точку x_m , для которой

$$f(x_m) = \min_{0 \leq i \leq n} f(x_i). \quad (1)$$

Далее полагаем $x^* \approx x_m$, $f^* \approx f(x_m)$. При этом максимальная погрешность ε_n определения точки x^* равна $\varepsilon_n = (b - a)/n$.

Пример 4. Найти минимальное значение f^* и точку минимума x^* функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1, 5; 2]$. Точку x^* найти с погрешностью $\varepsilon = 0,05$.

« $f(x) \in Q[1, 5; 2]$, так как $f''(x) = 12x^2 + 48x - 12 > 0$ при $x \in [1, 5; 2]$ (проверьте!).

Выбрав $n = \frac{2 - 1,5}{0,05} = 10$, вычислим значения $f(x_i) = 1,5 + i \cdot 0,05$, $i = 0, 1, \dots, 10$, поместив их в таблице 1.1.

Таблица 1.1

x_i	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75
$f(x_i)$	-89,4	-90,2	-91,2	-91,8	-92,08	-92,12
x_i	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	
$f(x_i)$	-91,9	-91,4	-90,5	-89,4	-88,0	

Из таблицы 1.1 находим $x^* \approx 1,75$, $f^* \approx -92,12$. ▷

17.23. Пусть $f(x) \in Q[a; b]$, x_m — точка, найденная из условия (1), x^* — одна из точек минимума $f(x)$ на $[a; b]$. Показать, что если $1 \leq m \leq n - 1$, то $x^* \in [x_{m-1}; x_{m+1}]$; если $m = 0$, то $x^* \in [x_0; x_1]$; если $m = n$, то $x^* \in [x_{n-1}; x_n]$.

17.24. Пусть отрезок $[a; b]$ разбит на n частей точками $x_i = a + (b - a)i/n = a + \Delta i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Рассмотрев функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta - \delta}(x - x_{m+1} + \delta) & \text{при } x \in [a; x_{m+1} - \delta], \\ \frac{2}{\delta}(x - x_{m+1} + \delta) & \text{при } x \in [x_{m+1} - \delta; b], \end{cases}$$

где $1 \leq m \leq n - 1$, $0 < \delta < \Delta$, показать, что абсолютная погрешность определения точки минимума унимодальной функции методом перебора может быть как угодно близкой к $\Delta = \frac{b - a}{n} = \varepsilon_n$.

В задачах 17.25–17.33 методом перебора найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε и минимум f^* :

$$17.25. f(x) = x + \frac{2}{x}, [1; 2], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.26. f(x) = x^2 - 2x + e^{-x}, [1; 1,5], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.27. f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \sin x, [0; \pi/4], \varepsilon = 0,03.$$

$$17.28. f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x}, [0; 1], \varepsilon = 0,1.$$

$$17.29. f(x) = x^4 + 4x^2 - 32x + 1, [1,5; 2], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.30. f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x, [1; 1,5], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.31. f(x) = x^3 - 3 \sin x, [0,5; 1], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.32. f(x) = 5x^2 - 8x^{5/4} - 20x, [3; 3,5], \varepsilon = 0,02.$$

$$17.33. f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x \ln x, [1,5; 2], \varepsilon = 0,02.$$

17.34. Пусть $f(x)$ — унимодальная дифференцируемая на $[a; b]$ функция, причем $|f'(x)| \leq M$ при $x \in [a; b]$. Оценить погрешность δ_n нахождения минимума f^* , методом перебора при разбиении отрезка $[a; b]$ на n частей.

Метод перебора, предполагающий предварительный выбор точек x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, называется также *пассивной стратегией* поиска точки минимума x^* . На практике точки x_i выбираются заранее, когда удобно провести $n+1$ независимых экспериментов по измерению значений $f(x)$, а последовательное измерение этих значений трудоемко или невозможно, например ввиду нехватки времени. Однако использование уже полученной в предыдущих экспериментах информации о функции $f(x)$ для выбора очередной точки x_i измерения (вычисления) $f(x)$ приводит к более эффективному поиску точки x^* . Методы минимизации, в которых точки x_i определяются в процессе поиска точки минимума с помощью найденных ранее значений функции $f(x)$, называются *последовательными методами*.

Метод деления отрезка пополам является простейшим последовательным методом минимизации. Он позволяет для любой функции $f(x) \in Q[a; b]$ построить последовательность вложенных отрезков $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_{n-1}; b_{n-1}] \supset [a_n; b_n]$, каждый из которых содержит хотя бы одну из точек минимума x^* функции $f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$ — требуемая точность определения точки x^* . Выбрав $\delta \in (0; 2\varepsilon)$, построим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_1^{(n)}\}$ и $\{x_2^{(n)}\}$, $n = 0, 1, \dots$, используя рекуррентные формулы $a_0 = a$, $b_0 = b$,

$$x_1^{(n-1)} = (a_{n-1} + b_{n-1} - \delta)/2, \quad x_2^{(n-1)} = (a_{n-1} + b_{n-1} + \delta)/2; \quad (2)$$

$$a_n = a_{n-1}, \quad b_n = x_2^{(n-1)}, \quad \text{если } f(x_1^{(n-1)}) \leq f(x_2^{(n-1)}),$$

$$a_n = x_1^{(n-1)}, \quad b_n = b_{n-1}, \quad \text{если } f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)}).$$

Переход от отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ к отрезку $[a_n; b_n]$ методом деления отрезка пополам иллюстрируется на рис. 22, если $f(x_1^{(n-1)}) < f(x_2^{(n-1)})$, и на рис. 23, если $f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)})$.

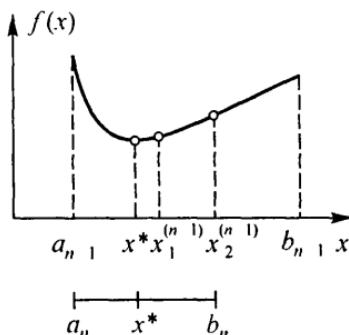


Рис. 22

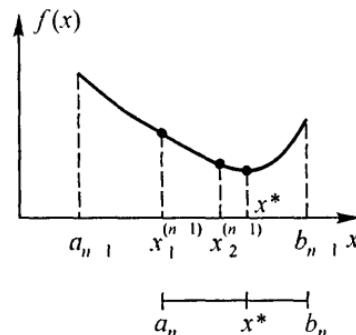


Рис. 23

Полагая $x^* \approx (a_n + b_n)/2$, находим x^* с абсолютной погрешностью, не превосходящей величины

$$\varepsilon_n = (b_n - a_n)/2 = (b - a - \delta)/2^{n+1} + \delta/2. \quad (3)$$

Используя условие $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, из последнего выражения можно найти необходимое число шагов n для обеспечения требуемой точки ε . Однако на практике часто поступают иначе: определив границы отрезка $[a_n; b_n]$, вычисляют ε_n по формуле (3) и сравнивают с заданной точностью ε .

Пример 5. Решить пример 4 методом деления отрезка пополам.
 \triangleleft Положим $\delta = 0,02 < 2\varepsilon = 0,1$. Построим последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$ по формулам (2), записывая результаты вычислений в таблицу 1.2:

Таблица 1.2

n	a_n	b_n	$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2}$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Примечание
0	1,5	2	0,25	1,74	1,76	-92,135	-92,096	$f(x_1^{(0)}) < f(x_2^{(0)})$, $b_1 = x_2^{(0)}$
1	1,5	1,76	0,13	1,62	1,64	-91,486	-91,696	$f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$, $a_2 = x_1^{(1)}$
2	1,62	1,76	0,07	1,68	1,70	-91,995	-92,084	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)})$, $a_3 = x_1^{(2)}$
3	1,68	1,76	0,04					$\varepsilon_3 < \varepsilon$, точность достигнута

Следовательно, $x^* \approx 1,72$, и $f^* \approx f(1,72) = 92,13$. \triangleright

Для увеличения скорости сходимости метода величину $\delta \in (0; 2\varepsilon)$ целесообразно выбирать как можно меньшей, однако этот выбор ограничен снизу используемым количеством верных десятичных знаков при задании аргумента x . В любом случае δ должно быть больше машинного нуля применяемого вычислительного средства.

17.35. Показать, что каждый из отрезков $[a_n; b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, полученных методом деления отрезка пополам, содержит хотя бы одну из точек минимума функции $f(x) \in Q[a; b]$.

17.36. Показать, что для $f(x) \in Q(a; b)$ n шагов метода деления отрезка пополам обеспечивает вычисление точки минимума x^* на отрезке $[a; b]$ с абсолютной погрешностью, не превосходящей

$$\varepsilon_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

17.37. Найти число шагов n метода деления отрезка пополам, необходимое для определения точки минимума функции $f(x) \in Q[a; b]$ на отрезке $[a; b]$ с точностью $\varepsilon > 0$.

17.38. Достаточно ли вычисления 10 значений функции $f(x) \in Q[0; 1]$ для определения ее точки минимума на отрезке $[0; 1]$ с точностью $\varepsilon = 0,02$ методом деления отрезка пополам?

17.39*. Сравнить необходимые количества вычисленных значений N_d и N_p функции $f(x)$ при поиске ее точки минимума на отрезке длины 1 с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методами деления отрезка пополам и перебора соответственно.

В задачах 17.40–17.48 методом деления отрезка пополам найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε и минимум f^* :

17.40. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $[1; 2]$, $\varepsilon = 0,02$.

17.41. $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$, $[-5; -4]$, $\varepsilon = 0,02$.

17.42. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$, $[1,5; 2]$, $\varepsilon = 0,05$.

17.43. $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, $[-1; 0]$, $\varepsilon = 0,1$.

17.44. $f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}$, $[0,5; 1]$, $\varepsilon = 0,05$.

17.45. $f(x) = x^2 + 2 \left(x \lg \frac{x}{e} - 2 \right)$, $[1,5; 2]$, $\varepsilon = 0,01$.

17.46. $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 12x$, $[0; 0,5]$, $\varepsilon = 0,01$.

17.47. $f(x) = \frac{2x}{\ln 2} - 2x^2$, $[-3,5; 4,5]$, $\varepsilon = 0,02$.

17.48. $f(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3 + 2x$, $[-1,5; -1]$, $\varepsilon = 0,01$.

Метод золотого сечения также является последовательным методом минимизации. Опираясь на свойства золотого сечения отрезка, этот метод использует найденные значения $f(x)$ более рационально, чем метод деления отрезка пополам (см. задачу 17.53), что позволяет переходить к очередному отрезку, содержащему точку x^* после вычисления одного, а не двух значений $f(x)$. Деление отрезка на две неравные части так, что отношение длины всего отрезка к длине большей его части равно отношению длины большей части к длине меньшей части, называется *золотым сечением этого отрезка*.

Золотое сечение отрезка $[a; b]$ осуществляется двумя точками

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a), \quad x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a), \quad (4)$$

причем x_1 есть вторая точка золотого сечения отрезка $[a; x_2]$, а x_2 — первая точка золотого сечения отрезка $[x_1; b]$.

Зная одну из точек золотого сечения отрезка $[a; b]$, другую можно найти по одной из формул

$$x_1 = a + b - x_2, \quad x_2 = a + b - x_1. \quad (5)$$

Пусть $f(x) \in Q[a; b]$ и требуется найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на $[a; b]$. Построим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{\bar{x}_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}, \quad b_n = x_2^{(n-1)}, \quad \bar{x}_n = x_1^{(n-1)}, \quad \text{если } f(x_1^{(n-1)}) \leq f(x_2^{(n-1)}); \\ a_n &= x_1^{(n-1)}, \quad b_n = b_{n-1}, \quad \bar{x}_n = x_2^{(n-1)}, \quad \text{если } f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (6)$$

$n = 2, 3, \dots$, где $a_1 = a$, $b_1 = b$, $x_2^{(n-1)}$ и $x_1^{(n-1)}$ — первая и вторая точки золотого сечения (4) отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$.

Для определения чисел a_n , b_n , \bar{x}_n по найденным a_{n-1} , b_{n-1} , \bar{x}_{n-1} необходимо выполнить следующие операции:

1) найти одну из точек золотого сечения отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ по известной другой точке \bar{x}_{n-1} , используя формулы (5)¹;

2) вычислить значение $f(x)$ во вновь найденной точке золотого сечения (значение в другой точке \bar{x}_{n-1} уже вычислено на одном из предыдущих шагов);

3) сравнить значения $f(x_1^{(n-1)})$ и $f(x_2^{(n-1)})$ и найти a_n , b_n , x_n по формулам (6).

Таким образом, на каждом шаге определения a_n , b_n и \bar{x}_n $n = 2, 3, \dots$, требуется вычисление одного значения $f(x)$. Положив $x^* \approx \bar{x}_n$, найдем

¹) При определении x^* с большой точностью, чтобы избежать накопления ошибок округления, обычно точки золотого сечения отрезка $[a_n; b_n]$ находят по формулам (4) и в качестве $x_1^{(n-1)}$ и $x_2^{(n-1)}$ используют \bar{x}_{n-1} и ту из найденных точек, которая больше отличается от \bar{x}_{n-1} .

точку минимума x^* с точностью ε_n :

$$|x^* - \bar{x}_n| \leq \varepsilon_n = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n (b - a),$$

откуда следует, что число шагов n метода золотого сечения, обеспечивающее заданную точность ε нахождения точки x^* , должно удовлетворять неравенству

$$n \geq \ln \left(\frac{\varepsilon}{b - a} \right) : \ln \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \approx -2,1 \ln \left(\frac{\varepsilon}{b - a} \right). \quad (7)$$

Пример 6. Решить пример 4 методом золотого сечения.

Вычисления проведем по формулам (6), представив результаты в таблице 1.3, где стрелками отмечены сохраняющиеся при переходе к следующему шагу значения.

Таблица 1.3

n	ε_n	a_n	b_n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Примечание
1	0,309	1,5	2	1,691	1,809	-92,049	-91,814	$f(x_1^{(1)}) < f(x_2^{(1)}),$ $b_2 = x_2^{(1)}$
2	0,191	1,5	1,809	1,618	1,691	-91,464	-92,049	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)}),$ $a_3 = x_1^{(2)}$
3	0,118	1,618	1,809	1,691	1,736	-92,049	-92,138	$f(x_1^{(3)}) > f(x_2^{(3)}),$ $a_4 = x_1^{(3)}$
4	0,073	1,691	1,809	1,736	1,764	-92,138	-92,083	$f(x_1^{(4)}) < f(x_2^{(4)}),$ $b_5 = x_2^{(4)}$
5	0,045				1,736		-92,138	$\varepsilon_n < \varepsilon$, точность достигнута

Из таблицы 1.3 получаем $x^* \approx \bar{x}_5 = 1,736$, $f^* \approx f(\bar{x}_5) = -92,138$. Заметим, что если воспользоваться формулой (7), то необходимое число шагов n можно определить заранее. В нашем случае $n \geq 4,79$, т. е. $n = 5$, и отпадает необходимость во втором столбце таблицы 1.3

17.49. Показать, что каждая из точек $x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a)$ и $x_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a)$ осуществляет золотое сечение отрезка $[a; b]$.

17.50. Пусть x_1 и x_2 — точки золотого сечения отрезка $[a; b]$. Показать, что x_1 является второй точкой золотого сечения отрезка $[a; x_2]$, а x_2 — первой точкой золотого сечения отрезка $[x_1; b]$.

17.51. Пусть x_1 и x_2 — точки золотого сечения отрезка $[a; b]$.

а) Доказать, что справедливы равенства $x_1 = a + b - x_2$, $x_2 = a + b - x_1$.

б) Найти длины отрезков $[a; x_2]$ и $[x_1; b]$.

17.52. Найти длину Δ_n отрезка $[a_n; b_n]$, полученного методом золотого сечения при поиске точки минимума x^* функции на отрезке $[a; b]$, и показать, что $|x^* - \bar{x}_n| \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b-a)$, где \bar{x}_n — одна из точек золотого сечения отрезка $[a_n; b_n]$.

17.53. Сравнить необходимые количества вычислений значений N_d и N_c функции $f(x)$ при ее минимизации на отрезке длины 1 с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методами деления отрезка пополам и золотого сечения соответственно.

В задачах 17.54–17.62 методом золотого сечения найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε и минимум f^* :

$$17.54. f(x) = 2x + \frac{1}{x}, [0; 1], \varepsilon = 0,1.$$

$$17.55. f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1, [-1; 0], \varepsilon = 0,1.$$

$$17.56. f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 5x, [-3; -2], \varepsilon = 0,1.$$

$$17.57. f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1), [0,5; 1], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.58. f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x, [0,5; 1], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.59. f(x) = (x+1)^4 - 2x^2, [-3; -2], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.60. f(x) = 3(5-x)^{4/3} + 2x^2, [1,5; 2], \varepsilon = 0,025.$$

$$17.61. f(x) = -x^3 + 3(1+x)[\ln(1+x) - 1], [-0,5; 0,5], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.62. f(x) = 2 + x^2 + x^{2/3} - \ln(1+x^{2/3}) - 2x \operatorname{arctg} x^{1/3}, [0,5; 1], \varepsilon = 0,025.$$

В прямых методах минимизации, рассмотренных выше, требуется, чтобы функция $f(x)$ была унимодальной. Если $f(x)$ этим свойством не обладает, то применение указанных методов приводит, вообще говоря, к неверному результату. Кроме того, во многих случаях доказательство унимодальности функции $f(x)$ бывает затруднительно.

Метод ломаных является последовательным методом, рассчитанным на минимизацию произвольных (не обязательно унимодальных) функций, удовлетворяющих условию Липшица. Говорят, что функ-

ция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ условию Липшица, если существует такое число $L > 0$ (константа Липшица), что

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''| \quad (8)$$

для всех $x', x'' \in [a; b]$.

Для проверки условия Липшица на практике используют следующий факт: если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ ограниченную производную, то она удовлетворяет условию (8), где $L \geq \max_{[a; b]} |f'(x)|$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на $[a; b]$ условию Липшица с константой L . Опишем метод ломаных для минимизации $f(x)$.

Положим

$$x_1^* = \frac{1}{2L}[f(a) - f(b) + L(a + b)], \quad p_1^* = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) + L(a - b)]$$

и реализуем следующую схему вычислений:

Шаг 1. Вместо пары чисел (x_1^*, p_1^*) образуем две новые пары (x'_1, p_1) и (x''_1, p_1) следующим образом:

$$x'_1 = x_1^* - \Delta_1, \quad x''_1 = x_1^* + \Delta_1, \quad p_1 = \frac{1}{2}[f(x_1^*) + p_1^*],$$

$$\text{где } \Delta_1 = \frac{1}{2L}[f(x_1^*) - p_1^*].$$

Шаг 2. Из полученных двух пар (x'_1, p_1) и (x''_1, p_1) выберем ту, у которой вторая компонента минимальна. Обозначим ее (x_2^*, p_2^*) и исключим из рассматриваемого множества (очевидно, на данном шаге в качестве (x_2^*, p_2^*) можно взять любую из пар (x'_1, p_1) , (x''_1, p_1)). Вместо пары (x_2^*, p_2^*) добавляем две новые пары (x'_2, p_2) и (x''_2, p_2) , компоненты которых находятся по формулам

$$x'_2 = x_2^* - \Delta_2, \quad x''_2 = x_2^* + \Delta_2, \quad p_2 = \frac{1}{2}[f(x_2^*) - p_2^*],$$

$$\text{где } \Delta_2 = \frac{1}{2L}[f(x_2^*) - p_2^*].$$

В результате получим множество, состоящее из трех пар чисел (x, p) .

Шаг n . Из n полученных на предыдущих шагах пар (x, p) выбираем ту, у которой вторая компонента p минимальна. Обозначим ее (x_n^*, p_n^*) . Исключаем эту пару из рассматриваемого множества и добавляем вместо нее две новые пары чисел (x'_n, p_n) и (x''_n, p_n) по формулам

$$x'_n = x_n^* - \Delta_n, \quad x''_n = x_n^* + \Delta_n, \quad p_n = \frac{1}{2}[f(x_n^*) - p_n^*], \quad (9)$$

$$\text{где } \Delta_n = \frac{1}{2L}[f(x_n^*) - p_n^*].$$

Полагая $x^* \approx x_n^*$, $f^* \approx f(x_n^*)$, получаем приближенное решение задачи минимизации. Точность определения f^* характеризуется неравенствами $0 \leq f(x_n^*) - f^* \leq 2L\Delta_n$.

Геометрически метод ломаных состоит в построении последовательности ломаных, приближающихся к графику функции $f(x)$ снизу и имеющих угловые коэффициенты всех звеньев, равные $\pm L$ (рис. 24).

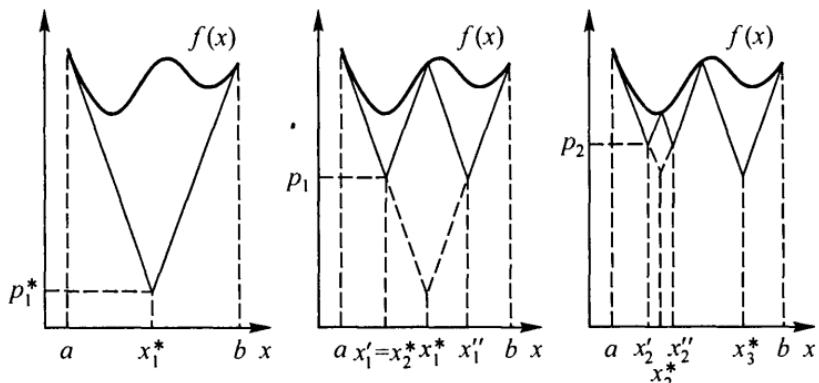


Рис. 24

Пример 7. Методом ломаных найти минимум f^* функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на отрезке $[10; 15]$ с точностью 0,01 и точку минимума x^* .

Функция $f(x)$ дифференцируема на указанном отрезке. Так как $|f'(x)| = \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| < \frac{|x \cos x| + |\sin x|}{x^2} < \frac{x+1}{x^2} \leq 0,11$ при $x \in [10; 15]$, то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 0,11$.

Найдя $x_1^* = 12,056$, $p_1^* = -0,281$, продолжим вычисления, используя соотношения (9). Результаты вычислений представим в таблице 1.4.

Таблица 1.4

n	Исключаемая пара (x, p)		$2L\Delta_n$	Включенные пары (x, p)		
	x_n^*	p_n^*		x'_n	x''_n	p_n
1	12,056	-0,281	0,240	10,963	13,149	-0,161
2	10,963	-0,161	0,070	10,646	11,280	-0,126
3	13,149	-0,161	0,203	12,227	14,071	-0,096
4	10,646	-0,126	0,038	10,474	10,818	-0,107
5	11,280	-0,126	0,041	11,094	11,466	-0,106
6	10,474	-0,107	0,024	10,364	10,584	-0,095
7	10,818	-0,107	0,160	10,745	10,891	-0,099
8	11,094	-0,106	0,016	11,020	11,168	-0,098
9	11,466	-0,106	0,028	11,338	11,594	-0,092
10	10,891	-0,099	<u>$0,008 < \varepsilon$</u>	—	—	—

Из таблицы 1.4 находим $x^* \approx 10,89$, $f^* \approx f(10,89) = 0,091$. Отметим, что $f(x) \notin Q [10; 15]$, поэтому из методов минимизации, рассмотренных выше, в данном случае применим только метод ломаных. \triangleright

17.63. Показать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица (8), то модуль углового коэффициента любой хорды или касательной к графику $f(x)$ не превосходит константы Липшица L .

17.64. Показать, что если функция удовлетворяет условию Липшица (8), то она непрерывна на $[a; b]$.

17.65. Найти наименьшую из констант Липшица функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ на отрезке: а) $[0; 1]$; б) $[0; 10]$.

17.66. Показать, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[0; 1]$ не удовлетворяет условию Липшица.

В задачах 17.67–17.71 методом ломаных найти минимум f^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε :

$$17.67. f(x) = \frac{\cos x}{x^2}, [7; 11], \varepsilon = 0,01.$$

$$17.68. f(x) = -\sqrt{20x - x^2} + 0,01 \sin x, [9; 11], \varepsilon = 0,05.$$

$$17.69. f(x) = (0,1x - 5)^8 + \cos(0,02x), [49; 51], \varepsilon = 0,02.$$

$$17.70. f(x) = \ln x + 0,1 \sin(0,1x), [10; 12], \varepsilon = 0,01.$$

$$17.71. f(x) = (x - 0,9)^2 + (x - 1,1)^4, [0,8; 1,2], \varepsilon = 0,05.$$

2. Методы минимизации, основанные на использовании производных функций. Если вычисление или измерение производных функции $f(x)$ не представляет больших затруднений, то при решении задачи минимизации можно применять непрямые методы, основанные на использовании производных $f'(x)$. Во многих случаях эти методы обеспечивают более быструю сходимость, чем прямые методы минимизации.

Метод касательных применяется для минимизации выпуклых дифференцируемых функций. Функция $f(x)$ называется выпуклой на отрезке $[a; b]$, если

$$f[\alpha x' + (1 - \alpha)x''] \leq f(x') + (1 - \alpha)f(x'') \quad (10)$$

для произвольных $x', x'' \in [a; b]$ и $\alpha \in [0; 1]$.

Проверка условия (10) почти всегда вызывает затруднения, поэтому на практике используют следующий критерий выпуклости:

Для того чтобы дважды дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ была выпуклой на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in [a; b]$.

Опишем метод касательных. Пусть $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция, причем $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Построим с

рекуррентными соотношениями

$$a_0 = a, \quad b_0 = b,$$

$$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}f'(b_{n-1}) - a_{n-1}f'(a_{n-1}) + f(a_{n-1}) - f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1}) - f'(a_{n-1})}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}, \quad b_n = c_{n-1} \quad \text{при} \quad f'(c_{n-1}) \geq 0, \\ a_n &= c_{n-1}, \quad b_n = b_{n-1} \quad \text{при} \quad f'(c_{n-1}) < 0. \end{aligned} \quad (12)$$

После n шагов полагаем $x^* \approx c_n$, $f^* \approx f(c_n)$. Требуемая точность минимизации $f(x)$ считается достигнутой, если производная $f'(c_n)$ достаточно близка к нулю, т. е. $|f'(c_n)| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданное число, характеризующее точность.

Метод касательных имеет простой геометрический смысл: величина c_{n-1} из (11) — это абсцисса точки пересечения касательных к графику $f(x)$, проведенных в граничных точках отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ (рис. 25). Рис. 26 и 27 поясняют формулы (11) для случаев $f'(c_{n-1}) > 0$

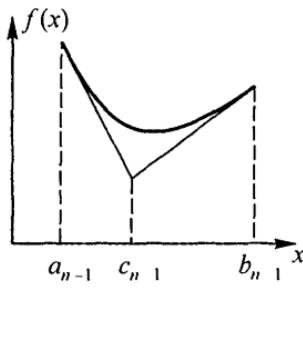


Рис. 25

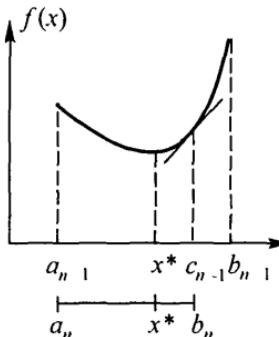


Рис. 26

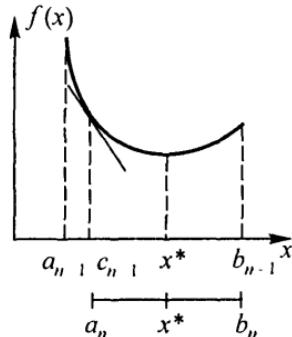


Рис. 27

и $f'(c_{n-1}) < 0$ соответственно. Отрезок $[a_n; b_n]$ выбирается так, чтобы $x^* \in [a_n; b_n]$.

Если условие $f'(a)f'(b) < 0$ не выполняется, то

- $x^* = a$ при $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$;
- $x^* = b$ при $f'(a) < 0$, $f'(b) < 0$;
- $x^* = a$, если $f'(a) = 0$, и $x^* = b$, если $f'(b) = 0$.

Пример 8. Убедиться, что функция $f(x) = x^2 + e^x$ выпукла на $[-1; 1]$ и минимизировать ее метод касательных с точностью $|f'(c_n)| \leq 0,05$.

Так как $f''(x) = 2 + e^x > 0$, то $f(x)$ — выпуклая функция; кроме того, $f'(a)f'(b) < 0$. Проведем вычисления по формулам (11), (12), поместив результаты вычислений в таблицу 1.5.

Таблица 1.5

n	a_n	b_n	c_n	$f'(c_n)$	Примечание
0	-1	1	0,11586	1,35	$f'(c_0) > 0, b_1 = c_0$
1	-1	0,11586	-0,41637	-0,173	$f'(c_1) < 0, a_2 = c_1$
2	-0,41637	0,11586	-0,14313	0,58	$f'(c_2) > 0, b_3 = c_2$
3	-0,41637	-0,14313	-0,27806	0,02	$ f'(c_3) < 0,05,$ точность достигнута

Из таблицы 1.5 находим $x^* \approx c_3 = 0,278$; $f^* \approx f(c_3) = 0,835$. \triangleright

17.72. Показать, что если функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a; b]$, то на любом отрезке $[x'; x''] \subset [a; b]$ график $f(x)$ лежит не выше хорды, проходящей через точки графика с абсциссами x' и x'' .

17.73.** Показать, что если $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция, то любая касательная к графику $f(x)$ лежит не выше этого графика.

17.74. Показать, что выпуклая дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция унимодальна на этом отрезке.

17.75. Показать, что если функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке любая точка локального минимума является и точкой глобального минимума $f(x)$.

В задачах 17.76–17.83, убедившись в выпуклости функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, найти ее точку минимума x^* и минимальное значение f^* методом касательных, используя в качестве условия достижения требуемой точности неравенство $|f'(c_n)| \leq 0,01$:

17.76. $f(x) = x - \ln x$, $[0; 1; 2]$.

17.77. $f(x) = x^2 - \sin x$, $[0; \pi/2]$.

17.78. $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1$, $[-1; 2]$.

17.79. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$, $[0; 3]$.

17.80. $f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x}$, $[0; 1]$.

17.81. $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$, $[0, 1; 2]$.

17.82. $f(x) = (x-4)^2 + \ln x$, $[3; 5]$.

17.83. $f(x) = x^4 + e^{-x}$, $[0; 1]$.

Метод Ньютона, использующий не только первую, но и вторую производные функции $f(x)$, при определенных условиях обеспечивает значительно более высокую, чем рассмотренные выше методы минимизации, скорость сходимости к точке минимума x^* .

Пусть $f(x)$ --- выпуклая дважды дифференцируемая на \mathbb{R} функция. Выбрав начальное приближение x_0 , построим последовательность

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f'(x_{n-1})}{f''(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Считая неравенство $|f'(x_n)| \leq \varepsilon$ (ε --- достаточно малое число) условием достижения требуемой точности вычислений, положим $x^* \approx x_n$, $f^* \approx f(x_n)$.

При неудачном выборе x_0 последовательность (13) может расходиться. Если же точка x_0 достаточно близка к x^* , то эта последовательность сходится к x^* достаточно быстро.

Оценка скорости сходимости может быть сформулирована следующим образом. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая на \mathbb{R} функция, причем $f''(x) \geq \mu > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $f''(x)$ удовлетворяет условию Липшица на \mathbb{R} с константой L . Тогда, если начальное приближение x_0 удовлетворяет условию $q = \frac{L}{2\mu^2}|f'(x_0)| < 1$, то последовательность (13) сходится к единственной точке минимума x^* функции $f(x)$ на \mathbb{R} , причем $|x^* - x_n| \leq \frac{2\mu}{L}q^{2^n}$, $n = 0, 1, \dots$

Пример 9. Методом Ньютона найти точку минимума x^* и минимальное значение f^* функции $f(x) = (x - 2)^4 - \ln x$ с точностью $|f'(x_n)| \leq 10^{-7}$.

◀ Выберем $x_0 = 3$ и проведем вычисления по формуле (13), записывая результаты в таблице 1.6.

Таблица 1.6

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	3	$-9,86 \cdot 10^{-2}$	3,67
1	2,6972477	-0,7558859	0,985
2	2,5322701	-0,8488508	0,208
3	2,4736906	-0,8553636	$2,1 \cdot 10^{-2}$
4	2,4663735	-0,8554408	$3 \cdot 10^{-4}$
5	2,4662656	-0,8554408	$5 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}$

Окончательно $x^* \approx 2,4662656$, $f^* \approx -0,8554408$. ▷

Метод Ньютона часто используется на завершающем этапе минимизации, когда точка минимума x^* грубо найдена другим, менее трудоемким методом и требуется найти x^* с большой точностью.

В задачах 17.84–17.89 минимизировать функцию $f(x)$ на всей числовой оси методом Ньютона. Критерием достижения требуемой точности считать выполнение неравенства $|f'(x_n)| \leq 10^{-4}$:

17.84. $f(x) = x^2 + e^{-x}$.

17.85. $f(x) = 2x + e^{-x}$.

17.86. $f(x) = x^2 + x + \sin x$.

17.87. $f(x) = x^2 - x + e^{-x}$.

17.88. $f(x) = e^x + e^{-2x} + 2x$.

17.89. $f(x) = 2x^2 + x + \cos^2 x$.

17.90. Найти точку минимума x^* функции $f(x)$ одной из задач 17.76–17.83 методом Ньютона, используя в качестве начального приближения решение, найденное методом касательных. Вычисления закончить при $|f'(x_n)| \leq 10^{-6}$.

§ 2. Безусловная минимизация функций многих переменных

1. Выпуклые множества и выпуклые функции. Пусть \mathcal{E}_n — n -мерное евклидово пространство арифметических векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Множество $U \subset \mathcal{E}_n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in U$ оно содержит и отрезок, соединяющий эти точки, т. е.

$$\alpha \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbf{x}^{(2)} \in U \text{ для всех } \alpha \in [0; 1]. \quad (1)$$

Пример 1. Показать, что множество точек $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$ плоскости $U = \{(x_1; x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ выпукло.

▫ Пусть $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ и $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \in U$, а $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = \alpha \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbf{x}^{(2)}$ — точка отрезка, соединяющего точки $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$.

Покажем, что $\mathbf{x} \in U$. Имеем

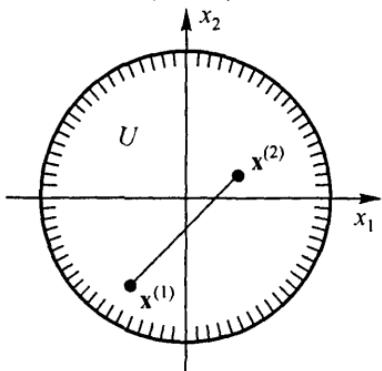


Рис. 28

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= [\alpha x_1^{(1)} + (1 - \alpha) x_1^{(2)}]^2 + \\ &\quad + [\alpha x_2^{(1)} + (1 - \alpha) x_2^{(2)}]^2 = \\ &= \alpha^2 [(x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(1)})^2] + \\ &\quad + (1 - \alpha)^2 [(x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(2)})^2] + \\ &\quad + 2\alpha(1 - \alpha)[x_1^{(1)}x_1^{(2)} + x_2^{(1)}x_2^{(2)}]. \end{aligned}$$

Используя неравенства $(x_1^{(i)})^2 + (x_2^{(i)})^2 \leq 1$, $i = 1, 2$ (так как $x^{(i)} \in U$) и $2x_i^{(1)}x_i^{(2)} \leq (x_i^{(1)})^2 + (x_i^{(2)})^2$, получим $x_1^2 + x_2^2 \leq \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha) = 1$, т. е. $\mathbf{x} \in U$.

Выпуклость множества U ясна из рис. 28. Так как U — круг, то отрезок, соединяющий любые две точки $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in U$, целиком лежит в U . ▷

Проверка условия (1) в большинстве случаев требует громоздких выкладок, поэтому на практике при исследовании выпуклости множеств в пространствах \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_3 часто используют геометрические иллюстрации, подобные рис. 28.

В задачах 17.91–17.100 установить, являются ли выпуклыми множества U :

$$17.91. U = \{(x_1, x_2) | 2x_1 + x_2 \leq 2, 2x_1 - x_2 \geq -2, x_2 \geq 0\}.$$

$$17.92. U = \{(x_1, x_2) | x_1 x_2 > 1, x_1 > 0\}.$$

$$17.93. U = \{(x_1, x_2) | x_2 \geq x_1^2\}.$$

$$17.94. U = \{(x_1, x_2) | x_1 x_2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

$$17.95. U = \{(x_1, x_2) | x_1 - x_2 \leq 2, x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}.$$

$$17.96. U = \{(x_1, x_2, x_3) | x_3 \geq x_1^2 + x_2^2\}.$$

$$17.97. U = \{(x_1, x_2, x_3) | x_3^2 \leq x_1^2 + x_2^2\}.$$

$$17.98. U = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

$$17.99. U = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

$$17.100. U = \left\{ (x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} \geq 1 \right\}.$$

Функция $f(\mathbf{x})$, заданная на выпуклом множестве $U \subset \mathcal{E}_n$, называется *выпуклой* на этом множестве, если для любых точек $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in U$ и произвольного числа $\alpha \in [0; 1]$ справедливо неравенство

$$f[\alpha \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbf{x}^{(2)}] \leq \alpha f(\mathbf{x}^{(1)}) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}^{(2)}). \quad (2)$$

На практике обычно используют следующий критерий выпуклости функции:

Если $f(\mathbf{x})$ — дважды дифференцируемая на выпуклом множестве $U \subset \mathcal{E}_n$ функция и матрица ее вторых производных $f''(\mathbf{x}) = (\partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j)$ (гессиан) положительно определена при всех $x \in U$, то функция $f(\mathbf{x})$ является выпуклой на множестве U .

Применяя критерий Сильвестра к матрице вторых производных, можно сформулировать это утверждение в более удобном для проверки виде:

Если все угловые миноры матрицы $f''(\mathbf{x})$ положительны при $\mathbf{x} \in U$, то функция $f(\mathbf{x})$ выпукла на множестве U .

Пример 2. Выяснить, является ли функция $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2)$ выпуклой в пространстве \mathcal{E}_2 .

△ Запишем матрицу вторых производных

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Найдя угловые миноры этой матрицы $\Delta_1 = 4 - \sin(x_1 + x_2)$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 - \sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{vmatrix} = 8 - 6 \sin(x_1 + x_2),$$

убеждаемся, что $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2$, при всех $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_2$, т. е. функция $f(\mathbf{x})$ выпукла. ▷

Выпуклые функции играют большую роль во многих вопросах оптимизации в связи с тем, что всякий локальный минимум выпуклой функции является одновременно и глобальным.

В задачах 17.101–17.106 убедиться в выпуклости функции $f(\mathbf{x})$ во всем пространстве \mathcal{E}_n :

17.101. $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 - x_2 - 2$.

17.102. $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$.

17.103. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \cos \frac{x_1 - x_2}{2}$.

17.104. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2$.

17.105. $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

17.106. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$.

В задачах 17.107–17.110 указать множества U , на которых функции $f(\mathbf{x})$ являются выпуклыми:

17.107. $f(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{x_2}$.

17.108. $f(\mathbf{x}) = \sin(x_1 + x_2)$.

17.109. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - \sin(x_1 - x_2)$.

17.110. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1 + x_2}$.

Во многих задачах оптимизации рассматриваются *квадратичные функции*, т. е. функции вида $f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \mathbf{x}_j$. Если поло-

жить $q_{ij} = c_{ij} + c_{ji}$, то получим симметрическую матрицу $Q = (q_{ij})$, с помощью которой можно представить квадратичную функцию в виде

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{r}, \mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^\top$ — векторы-столбцы, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) — скалярное произведение векторов \mathbf{x} и $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_n$.

Градиент и матрица вторых производных функции (3) равны $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{r}$, $f''(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} = (q_{ij})$.

Таким образом, для того чтобы функция (3) была выпуклой в \mathcal{E}_n , достаточно, чтобы матрица Q была положительно определена.

Пример 3. Пусть $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

а) Найти матрицу Q и вектор \mathbf{r} в представлении (3) функции $f(\mathbf{x})$.

б) Найти градиент $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$.

в) Выяснить, является ли функция $f(\mathbf{x})$ выпуклой.

а) В данном случае $c_{11} = 2$, $c_{12} = -2$, $c_{13} = 3$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = -2$, $c_{33} = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, поэтому $Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

б) Используя найденные матрицу Q и вектор \mathbf{r} , запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

в) Найдем угловые миноры Δ_i матрицы $f''(\mathbf{x}) = Q$:

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 22.$$

Так как $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, то функция $f(\mathbf{x})$ выпукла в \mathcal{E}_3 . \triangleright

17.111. При каких a , b и c функция $f(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ является выпуклой в \mathcal{E}_2 ?

17.112. При каких значениях a функция $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_2$ выпукла в \mathcal{E}_3 ?

В задачах 17.113–17.116 выписать матрицу Q квадратичной функции $f(\mathbf{x})$, найти ее градиент $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)})$ в точке $\mathbf{x}^{(0)}$ и убедиться в выпуклости $f(\mathbf{x})$ в \mathcal{E}_n :

$$17.113. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - x_2, \mathbf{x}^{(0)} = (1, 1).$$

$$17.114. f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 10x_2^2 + 5x_1 - 3x_2, \mathbf{x}^{(0)} = (2, 1).$$

$$17.115. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1 + x_3, \mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, -1).$$

$$17.116. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_1 - x_2 - 3x_3, \mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 3).$$

2. Методы безусловной минимизации, основанные на вычислении первых производных функции. Постановка задачи минимизации функции n переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве $U \subset \mathcal{E}_n$ не отличается от постановки в одномерном случае. Если $U = \mathcal{E}_n$, то говорят о *безусловной минимизации* функции $f(\mathbf{x})$.

Для решения задачи безусловной минимизации функции $f(\mathbf{x})$ наиболее часто применяют приближенные методы, в основе которых лежит вычисление производных $f(\mathbf{x})$ первого порядка. Такие методы обычно называют *градиентными*. В ряде других методов требуется вычисление не только первых, но и вторых производных функции $f(\mathbf{x})$.

Метод градиентного спуска. Пусть $f(\mathbf{x})$ — выпуклая дифференцируемая во всем пространстве \mathcal{E}_n функция и требуется найти ее точку минимума \mathbf{x}^* . Выбрав произвольное начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_n$, построим последовательность

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где величины $\alpha_k > 0$ (параметрические шаги) выбираются достаточно малыми для того, чтобы выполнялось условие

$$f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

В качестве условия окончания вычислений обычно используется близость к нулю градиента $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$, т. е. выполнение неравенства

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{или } \|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right]^2} \leq \varepsilon \quad (6)$$

(ε — заданное достаточно малое число), после чего полагают $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$, $\mathbf{f}^* \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$.

Если при некотором k условие (5) нарушается, то шаг α_k в (4) уменьшают (дробят) в заданное число раз до выполнения неравенства (5) и продолжают вычисления.

Пример 4. Минимизировать в E_2 функцию $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$ методом градиентного спуска, завершив вычисления при $|\partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i| \leq 0,05$, $i = 1, 2$.

« Выбрав начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$ и $\alpha_0 = 1$, построим последовательность (4), записывая результаты вычислений в таблице 2.1.

Таблица 2.1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(\mathbf{x}^{(k)})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}$	α_k	Примечание
0	0	0	1	1	1	1	
	-1	-1	3,145	-	-		Условие (5) нарушено. Уменьшаем α_0 в 2 раза
	0	0	1	1	1	0,5	
	-0,5	-0,5	1,118	-	-		Условие (5) нарушено. Уменьшаем α_0 в 2 раза
	0	0	1	1	1	0,25	
1	-0,25	-0,25	0,794	0,106	-0,393	0,25	Условие (5) выполнено
2	-0,2766326	-0,1516326	0,774	0,0983	0,0451	0,25	То же
3	-0,3012259	-0,1629096	0,772	0,0262	-0,023	-	Точность достигнута

Итак, $\mathbf{x}^* \approx (-0,301, -0,163)$, $f^* \approx 0,772$. ▷

Для квадратичной функции (3) формула (4) принимает вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k(Q\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{r}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

В задачах 17.117–17.120 совершил один шаг градиентного спуска (4) из точки $\mathbf{x}^{(0)}$ с шагом α_0 и сравнить значения $f(\mathbf{x}^{(0)})$ и $f(\mathbf{x}^{(1)})$:

17.117. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$, $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$, а) $\alpha_0 = 0,1$;
б) $\alpha_0 = 0,265$; в) $\alpha_0 = 0,5$.

17.118. $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$, а) $\alpha_0 = 0,1$;
б) $\alpha_0 = 0,5$; в) $\alpha_0 = 1$.

17.119. $f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)$,
а) $\alpha_0 = 0,1$; б) $\alpha_0 = 0,638$; в) $\alpha_0 = 10$.

17.120. $f(\mathbf{x}) = e^{x_1^2} + (x_1 + x_2 + x_3)^2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)$, а) $\alpha_0 = 0,1$;
б) $\alpha_0 = 0,21268$; в) $\alpha_0 = 1$.

17.121. Показать, что если функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ и $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}) \neq 0$, то при достаточно малом шаге α_k из (4) будет выполнено условие (5).

Метод наискорейшего спуска отличается от метода градиентного спуска способом определения величины α_k , которая находится из условия

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \quad \text{где } \Phi_k(\alpha) = f[\mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})]. \quad (8)$$

Такой выбор α_k обеспечивает максимально возможное уменьшение функции $f(\mathbf{x})$ вдоль направления ее антиградиента $-\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$ в точке $\mathbf{x}^{(k)}$.

Таким образом, для определения α_k на каждом шаге метода наискорейшего спуска решается одномерная задача минимизации (8), для чего можно использовать методы, рассмотренные в § 1.

Пример 5. Решить пример 4 методом наискорейшего спуска.

Шаг 1. Положим $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$, тогда $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = (1; 1)$, $\Phi_0(\alpha) = f(0 - \alpha \cdot 1, 0 - \alpha \cdot 1) = 3\alpha^2 + e^{-2\alpha}$. Для нахождения точки минимума функции $\Phi_0(\alpha)$ используем метод перебора:

α	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26
$\Phi_0(\alpha)$	0,7949	0,7903	0,7892	0,7916	0,7973

т. е. $\alpha = \alpha_0 = 0,22$, откуда $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0) - 0,22 \cdot (1, 1) = (-0,22, -0,22)$.

Шаг 2. $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(1)}) = (0,204, -0,236)$, $\Phi_1(\alpha) = (-0,22 - 0,204\alpha)^2 + (-0,22 + 0,236\alpha)^2 + e^{-0,44+0,032\alpha}$. Минимизируем $\Phi_1(\alpha)$:

α	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
$\Phi_1(\alpha)$	0,77401	0,77384	0,77380	0,77387	0,77401

т. е. $\alpha = \alpha_1 = 0,32$, откуда $\mathbf{x}^{(2)} = (-0,22, -0,22) - 0,32 \cdot (0,204, -0,236) = = (-0,2853, -0,1445)$.

Шаг 3. $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(2)}) = (8,007, 7,268) \cdot 10^{-2}$, $\Phi_2(\alpha) = (-0,2853 - 8,007 \times 10^{-2})^2 + (-0,1445 - 7,268 \cdot 10^{-2} \cdot \alpha)^2 + e^{-0,429 - 15,275 \cdot 10^{-2}}$. Минимизируем $\Phi_2(\alpha)$:

α	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
$\Phi_2(\alpha)$	0,77273	0,77241	0,77240	0,77241	0,77244

т. е. $\alpha = \alpha_2 = 0,24$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-0,3045, -0,1619)$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(3)}) = (1,821, -2,051) \cdot 10^{-2}$, поэтому требуемая точность достигнута и $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(3)} = = (-0,305, -0,162)$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(3)}) = 0,772$. \triangleright

Если $f(\mathbf{x})$ — квадратичная функция (3), то величина α_k может быть найдена в явном виде

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{f}'^{(k)}, \mathbf{f}'^{(k)})}{(Q\mathbf{f}'^{(k)}, \mathbf{f}'^{(k)})}, \quad \text{где} \quad \mathbf{f}'^{(k)} = Q\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{r}. \quad (9)$$

Таким образом, для квадратичной функции метод наискорейшего спуска состоит в построении последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ по формулам (7), (9).

17.122*. Показать, что градиенты $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$ и $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k+1)})$ в последовательных точках итерационного процесса метода наискорейшего спуска ортогональны, т. е. $(\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k+1)})) = 0$, $k = 0, 1, \dots$

17.123. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$.

17.124. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$.

17.125. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$, $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$.

17.126. $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$.

17.127. $f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)$.

17.128. $f(\mathbf{x}) = e^{x_1^2} + (x_1 + x_2 + x_3)^2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)$.

В задачах 17.129–17.144 минимизировать квадратичные функции методом наискорейшего спуска, заканчивая вычисления при

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right| \leq 0,01, \quad i = 1, 2, \dots, n:$$

17.129. $f(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$.

17.130. $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$.

17.131. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$.

17.132. $f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$.

17.133. $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$.

17.134. $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2$.

17.135. $f(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2$.

17.136. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1^2 + x_1 - x_2$.

17.137. $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 - x_2 + x_3$.

17.138. $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1 - 3x_3$.

17.139. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 5x_1 - 3x_2 + x_3$.

17.140. $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_1 - 7x_3$.

- 17.141.** $f(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 3x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + x_1 - x_2 + x_3$.
- 17.142.** $f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_1 + x_3$.
- 17.143.** $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 7x_1 + x_3$.
- 17.144.** $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 + x_2 - x_3$.

Метод сопряженных градиентов состоит в построении последовательных приближений $\mathbf{x}^{(k)}$ к точке минимума функции $f(\mathbf{x})$ следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_n, \quad (10)$$

где $\mathbf{x}^{(0)}$ — заранее выбранное начальное приближение, шаг α_k выбирается аналогично (8):

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \quad \text{где } \Phi_k(\alpha) = f(\mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{p}^{(k)}), \quad (11)$$

а направление спуска $-\mathbf{p}^{(k)}$ определяется по формуле

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}) + \beta_k \mathbf{p}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}),$$

где

$$\beta_k = \frac{\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\|^2}{\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k-1)})\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} \right)^2}. \quad (12)$$

Таким образом, метод сопряженных градиентов отличается от метода наискорейшего спуска только выбором направления уменьшения функции на каждом шаге ($-\mathbf{p}^{(k)}$ вместо $-\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$). Отметим, что $\mathbf{p}^{(k)}$ из (12) определяется не только антиградиентом $-\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$, но и направлением спуска $-\mathbf{p}^{(k-1)}$ на предыдущем шаге. Это позволяет более полно, чем в градиентных методах, рассмотренных выше, учитывать особенности функции $f(\mathbf{x})$ при построении последовательных приближений (10) к ее точке минимума.

Критерием достижения заданной точности вычислений в методе сопряженных градиентов обычно служат неравенства (6). Часто для уменьшения влияния накапливающихся погрешностей вычислений через каждые N итераций (10) полагают $\beta_{mN} = 0$, $m = 0, 1, \dots$, т. е. производят обновление метода (N — параметр алгоритма).

Для минимизации выпуклой квадратичной функции в \mathcal{E}_n требуется не более n итераций метода сопряженных направлений.

Пример 6. Методом сопряженных градиентов найти точку минимума \mathbf{x}^* функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$.

$\Delta f(\mathbf{x})$ — квадратичная функция, заданная в \mathcal{E}_2 . Поэтому точка \mathbf{x}^* будет найдена после двух шагов метода сопряженных градиентов.

Шаг 1. Выбрав начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$, по формулам (9)–(11) находим

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = (2x_1 + x_2 - 7, x_1 + 4x_2 - 7)|_{(0)} = (-7, -7),$$

$\Phi_0(\alpha) = 98(2\alpha^2 - \alpha)$. Из условия $\Phi'_0(\alpha_0) = 0$ минимума $\Phi_0(\alpha)$ получим $\alpha_0 = \frac{1}{4}$. Отсюда $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0) - \frac{1}{4}(-7, -7) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

Шаг 2. $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(1)}) = \left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$, откуда с учетом (12) имеем $\beta_1 = \frac{1}{16}$, $\mathbf{p}^{(1)} = \left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{16}(-7, -7) = \left(-\frac{35}{16}, \frac{21}{16}\right)$. Поэтому $\Phi_1(\alpha) = \frac{49}{32} \left(\frac{7}{2}\alpha^2 - 4\alpha - 392\right)$ и $\alpha_1 = \frac{4}{7}$. Окончательно $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right) - \frac{4}{7} \left(-\frac{35}{16}, \frac{21}{16}\right) = (3, 1) = \mathbf{x}^*$. \triangleright

17.145. Показать, что при обновлении метода сопряженных градиентов на каждом шаге (т. е. если $\beta_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$) он переходит в метод наискорейшего спуска.

17.146. Минимизировать одну из квадратичных функций задач 17.129–17.136, совершив две итерации метода сопряженных градиентов из произвольного начального приближения $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_2$.

17.147. Минимизировать одну из квадратичных функций задач 17.137–17.144 с помощью трех итераций метода сопряженных градиентов, используя произвольное начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_3$.

17.148. Минимизировать функцию $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4$ с помощью четырех итераций метода сопряженных градиентов, используя произвольное начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_4$.

В задачах 17.149–17.174 минимизировать функцию $f(\mathbf{x})$ методом градиентов, заканчивая вычисления при $\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right| \leq 10^{-3}$,

$i = 1, 2, \dots, n$:

$$17.149. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2+x_2^2} - x_1 + 2x_2.$$

$$17.150. f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2.$$

$$17.151. f(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2.$$

$$17.152. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2).$$

$$17.153. f(\mathbf{x}) = \sqrt{1 + 2x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2 + 2x_2^2} - x_1 - x_2.$$

$$17.154. f(\mathbf{x}) = x_1 + 5x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2}.$$

$$17.155. f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^4 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2} - 2x_1 + 3x_2.$$

$$17.156. f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2 \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + x_2.$$

$$17.157. f(\mathbf{x}) = \ln[1 + 3x_1^2 + 5x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)].$$

$$17.158. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} + 4x_1 + 3x_2.$$

$$17.159. f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

$$17.160. f(\mathbf{x}) = 2x_1 - 5x_2 + e^{x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2}.$$

$$17.161. f(\mathbf{x}) = 2\sqrt{3 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2} - x_1 - x_3.$$

$$17.162. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + x_3 + e^{x_2^2 + x_3^2} - x_2 + x_3.$$

$$17.163. f(\mathbf{x}) = 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2} + x_1 - 2x_2.$$

$$17.164. f(\mathbf{x}) = 2x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + x_3^4 + x_1^2 x_3^2 + x_1 + x_2.$$

$$17.165. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + \cos(x_1 - x_2 + x_3).$$

$$17.166. f(\mathbf{x}) = e^{x_1^2 + x_2^2} + \ln(4 + x_2^2 + 2x_3^2).$$

$$17.167. f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 5x_3 + e^{x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2}.$$

$$17.168. f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + \sqrt{5 + x_2^2 + 2x_3^2} + x_1 + x_3.$$

$$17.169. f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}\right).$$

$$17.170. f(\mathbf{x}) = 2\sqrt{x_1^2 + 3x_2^2 + 3} + x_2^2 x_3^2 - x_1 - x_2.$$

$$17.171. f(\mathbf{x}) = x_2^2 + x_3^2 + e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + x_1 - x_2.$$

$$17.172. f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + 3\sqrt{x_1^2 + x_3^2 + 1} + e^{x_1^2 + x_2^2}.$$

$$17.173. f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2) + \sqrt{3 + x_2^2 + x_3^2}.$$

$$17.174. f(\mathbf{x}) = x_1 + 10x_2 - 3x_3 + e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

3. Методы безусловной минимизации, использующие вторые производные функции. Если при построении последовательности приближений к точке минимума функции $f(\mathbf{x})$ использовать информацию, содержащуюся в значениях не только первых, но и вторых производных $f(\mathbf{x})$, то при определенных условиях можно обеспечить более быструю, чем в градиентных методах, сходимость этой последовательности.

Метод Ньютона применяется для безусловной минимизации выпуклых дважды дифференцируемых функций. В этом методе последовательные приближения $\mathbf{x}^{(k)}$ к точке минимума функции $f(\mathbf{x})$ строятся с использованием первых и вторых производных следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [f''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_n$ — начальное приближение, $[f''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}$ — матрица, обратная матрице вторых производных функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(k)}$. Критерием достижения требуемой точности вычислений обычно служат неравенства (6).

Если начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ достаточно близко к точке минимума \mathbf{x}^* , то метод Ньютона сходится, как правило, гораздо быстрее методов минимизации, использующих первые производные $f(\mathbf{x})$, поэтому его часто используют на завершающем этапе минимизации при уточнении приближения к точке \mathbf{x}^* , найденного другим, более простым методом.

Пример 7. Используя решение примера 4 в качестве начального приближения метода Ньютона, найти точку минимума функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1+x_2}$ с точностью $|\partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i| \leq 10^{-5}$, $i = 1, 2$.

Используя результаты решения примера 4, запишем

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -0,3012259 \\ -0,1629096 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2,622655 \\ -2,296005 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2},$$

$$f''(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,39319151 & 0,62867835 \\ 0,62867835 & 0,22329787 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$[f''(\mathbf{x}^{(0)})]^{-1} = \begin{pmatrix} -0,39319151 & -5,3404226 \cdot 10^{-2} \\ -5,3404226 \cdot 10^{-2} & 0,22329787 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} -0,3012259 \\ -0,1629096 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,39319151 & -5,3404226 \cdot 10^{-2} \\ -5,3404226 \cdot 10^{-2} & 0,22329787 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 2,622655 \\ -2,296005 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{pmatrix} -0,3127641 \\ -0,1563821 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вычислив $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(1)}) = (7,9 \cdot 10^{-6}, 7,9 \cdot 10^{-6})$, убеждаемся, что условие точности выполнено, т. е. $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(1)} = (-0,3127641, -0,1563821)$. ▷

Модифицированный метод Ньютона обеспечивает более устойчивую сходимость последовательности приближений к точке минимума, чем метод Ньютона.

Если начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ выбрано недостаточно близким к точке минимума \mathbf{x}^* , то даже для выпуклой функции $f(\mathbf{x})$ последовательность (13) может не сходиться к \mathbf{x}^* . Этот недостаток метода Ньютона

будет устранен, если последовательность приближений $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ строить по модифицированной формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k [f''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

где α_k находится подобно (8) и (11):

$$\begin{aligned}\Phi_k(\alpha_k) &= \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \\ \Phi_k(\alpha) &= f\{\mathbf{x}^{(k)} - \alpha [f''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\}.\end{aligned}$$

Кроме того, для последовательности (14) всегда выполняется неравенство $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leq f(\mathbf{x}^{(k)}), k = 0, 1, \dots$, которое может нарушаться в случае (13).

17.175. Показать, что точка минимума выпуклой квадратичной функции с помощью одной итерации метода Ньютона из произвольного начального приближения $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_n$.

17.176. Используя результат задачи 17.175, показать, что для нахождения точки минимума выпуклой квадратичной функции достаточно одной итерации модифицированного метода Ньютона при произвольном $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_n$.

17.177. Минимизировать одну из квадратичных функций задач 17.129–17.144 с помощью одной итерации метода Ньютона.

17.178. Минимизировать функцию $f(\mathbf{x})$ из задачи 17.148 методом Ньютона, используя произвольное начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}_4$.

17.179. Используя в качестве начального приближения решение одной из задач 17.149–17.174, полученное методом сопряженных градиентов, уточнить это решение с помощью метода Ньютона, заканчивая вычисления при $|\partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i| \leq 10^{-6}, i = 1, 2, \dots, n$.

17.180. Показать, что если матрица $f''(\mathbf{x}^{(k)})$ положительно определена и $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}) \neq 0$, то направление $p^k = -[f''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$ является направлением убывания $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(k)}$.

17.181. Выбрав произвольное начальное приближение, минимизировать одну из функций задач 17.149–17.174 модифицированным методом Ньютона, используя критерий точности решения $|\partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i| \leq 10^{-5}, i = 1, 2, \dots, n$.

§ 3. Линейное программирование

1. Постановки задач линейного программирования. Графический метод решения. Задача минимизации функции n переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ на некотором множестве $U \subset \mathcal{E}_n$, не совпадающем со всем пространством \mathcal{E}_n и заданном с помощью ограничений (равенств и неравенств) на координаты x_j точки $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$, называется *задачей математического программирования*. При этом функцию $f(\mathbf{x})$ называют *целевой функцией*, а множество U — *допустимым множеством*.

Решение задач математического программирования, как правило, связано со значительно большими трудностями, чем решение задач безусловной минимизации, рассмотренных в § 2.

Простейшим частным случаем задачи математического программирования является *задача линейного программирования*, состоящая в минимизации линейной целевой функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ на множестве $U \subset \mathcal{E}_n$, заданном системой линейных ограничений (равенств и (или) неравенств) на координаты x_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Среди точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}_n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = l + 1, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_j \geq 0,$$

найти те, в которых функция $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ принимает минимальное значение, и определить это значение.

Отметим, что в условии задачи линейного программирования могут содержаться неравенства и противоположного, чем в (2), знака, однако такие неравенства легко сводятся к виду (2) умножением на -1 .

Если в условии задачи линейного программирования не содержатся ограничения-неравенства (2), т. е. в (1) $l = m$, то она называется *задачей линейного программирования в каноническом виде*.

Вводя дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = l + 1, \dots, m$, ограничения-неравенства (2) можно записать в виде равенств

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = l + 1, \dots, m.$$

Таким образом, любая задача линейного программирования может быть записана в каноническом виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min^2, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \quad (5)$$

Часто используется *векторная запись* задачи (3)–(5):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \rightarrow \min, \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geqslant \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор неизвестных, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ — вектор коэффициентов целевой функции из (3), $A = (a_{ij})$ — прямоугольная матрица размера $m \times n$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ — вектор правых частей системы (4), а $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ — краткая запись условий неотрицательности (5).

Математические модели многих важных для практики задач оптимизации представляют собой задачи линейного программирования.

Пример 1. Составить математическое описание следующей задачи об оптимальном составе сплава и представить полученную задачу линейного программирования в каноническом виде.

Для приготовления b_0 кг сплава с заданными свойствами используют вещества A_j , $j = 1, \dots, n$. В x кг вещества A_j содержится $a_{ij}x$ кг химического элемента B_i , $i = 1, \dots, m$. Содержание элемента B_i в сплаве должно заключаться в пределах от β_i до b_i кг. Стоимость 1 кг вещества A_j составляет c_j руб.

Требуется определить такой состав для приготовления сплава, при котором общая стоимость израсходованных веществ минимальна.

«Обозначим x_j количество кг вещества A_j , используемое для приготовления сплава (очевидно $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \dots, n$). Тогда содержание

элемента B_i в сплаве составит $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ кг, а стоимость израсходованных

веществ будет равна $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ руб.

²) Символ $f(x) \rightarrow \min$ в записи условия задачи математического программирования используется вместо слов «минимизировать функцию $f(x)$ ». Далее указываются ограничения, определяющие допустимое множество.

Поэтому, с учетом ограничений на содержание элементов B_i в сплаве, для величин x_j получим следующие неравенства:

$$\beta_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Кроме того, количество сплава должно составлять b_0 кг, поэтому

$$\sum_{j=1}^n x_j = b_0.$$

Таким образом, математическое описание задачи об оптимальном составе сплава принимает вид

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq \beta_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = b_0, \quad (9)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Запишем эту задачу линейного программирования в каноническом виде.

Среди ограничений (7)–(9) на переменные x_j содержится $2m$ неравенств (7), (8). Для преобразования их в ограничения-равенства введем $2m$ дополнительных неотрицательных переменных x_{n+i} и x_{n+m+i} , $i = 1, \dots, m$.

Прибавив переменные x_{n+i} к левым частям соответствующих неравенств (7) и вычтя переменные x_{n+m+i} из левых частей неравенств (8), получим задачу линейного программирования в каноническом виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+m+i} = \beta_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = b_0,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n + 2m. \quad \triangleright$$

Составить математическое описание задач оптимизации 17.182–17.187, представив полученные задачи линейного программирования в каноническом виде:

17.182. Для изготовления сплава из меди, олова и цинка в качестве сырья используют два сплава тех же металлов, отличающиеся составом и стоимостью. Данные от этих сплавах приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Компоненты сплава	Содержание компонентов в %	
	сплав № 1	сплав № 2
Медь	10	10
Олово	10	30
Цинк	80	60
Стоимость 1 кг	4	6

Получаемый сплав должен содержать не более 2 кг меди, не менее 3 кг олова, а содержание цинка может составлять от 7,2 до 12,8 кг.

Определить количества x_j , $j = 1, 2$, сплавов каждого вида, обеспечивающие получение нового сплава с минимальными затратами на сырье.

17.183*. Для изготовления двух видов изделий A_1 и A_2 завод использует в качестве сырья алюминий и медь. На изготовлении изделий заняты токарные и фрезерные станки. Исходные данные задачи приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на 1 изделие	
		изделие A_1	изделие A_2
Алюминий (кг)	570	10	70
Медь (кг)	420	20	50
Токарные станки (станко-час)	5600	300	400
Фрезерные станки (станко-час)	3400	200	100
Прибыль на 1 изделие (тыс. руб.)		3	8

Определить количества x_j , $j = 1, 2$, изделий A_j , которые необходимо изготовить для достижения максимальной прибыли.

17.184. Из одного города в другой ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице 3.3 указаны: состав поезда

каждого типа, количество имеющихся в парке вагонов различных видов для формирования поездов и максимальное число пассажиров, на которое рассчитан вагон каждого вида.

Таблица 3.3

Поезда	Вагоны				
	багажный	почтовый	плацкартный	купеый	мягкий
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	—	8	4	1
Число пассажиров	—	—	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Определить число скорых x_1 и пассажирских x_2 поездов, которые необходимо формировать ежедневно из имеющегося парка вагонов, чтобы число перевозимых пассажиров было максимальным.

17.185. Завод производит продукцию двух видов A_1 и A_2 , используя сырье, запас которого составляет b т. Согласно плану выпуск продукции A_1 должен составлять не менее 60% общего объема выпуска. Расход сырья на изготовление 1 т продукции A_1 и A_2 составляет соответственно a_1 и a_2 т. Стоимость 1 т продукции A_1 и A_2 составляет соответственно c_1 руб. и c_2 руб. Определить план выпуска продукции A_1 и A_2 , при котором стоимость выпущенной продукции будет максимальной.

17.186. В начале рабочего дня автобусного парка на линию выходит x_1 автобусов, через час к ним добавляется x_2 автобусов, еще через час — дополнительно x_3 машин.

Каждый автобус работает на маршруте непрерывно в течение 8 часов. Минимально необходимое число машин на линии в i -й час рабочего дня ($i = 1, 2, \dots, 10$) равно b_i . Превышение этого числа приводит к дополнительным издержкам в течение i -го часа в размере c_i руб. на каждый дополнительный автобус.

Определить количества машин x_1, x_2, x_3 , выходящих на маршрут в первые часы рабочего дня, с таким расчетом, чтобы дополнительные издержки в течение всего рабочего дня были минимальными.

17.187. Процесс изготовления изделий двух видов состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования i -го станка составляет b_i часов в сутки, $i = 1, 2, 3$. Время обработки каждого изделия j -го вида, $j = 1, 2$, на i -м станке равно a_{ij} часам. Прибыль от реализации одного изделия j -го вида составляет c_j руб. Составить план суточного впуска изделий так, чтобы прибыль от их производства была максимальной.

Если задача линейного программирования содержит только две переменные, и в ее условии нет ограничений-равенств (1), то такую задачу можно исследовать и решить графически.

Рассмотрим задачу

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (12)$$

На плоскости (x_1, x_2) любое из неравенств (11) определяет полуплоскость, лежащую по одну из сторон от прямой $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$. Для того чтобы определить расположение этой полуплоскости относительно граничной прямой, можно подставить координаты какой-либо точки (при $b_i \neq 0$ проще всего взять начало координат) в соответствующее неравенство (11) и проверить его выполнение.

Таким образом, допустимое множество U задачи (10)–(12) является пересечением первого квадранта $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ и полуплоскостей, со-

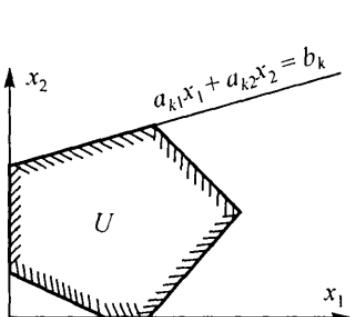


Рис. 29

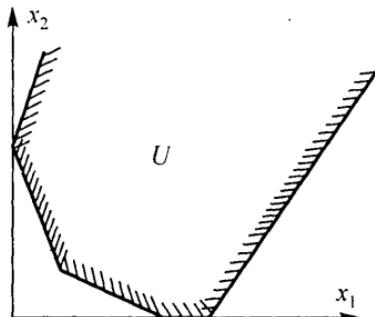


Рис. 30

ответствующих неравенствам (11). Поэтому множество U представляет собой либо:

- а) пустое множество, тогда задача (10)–(12) не имеет решений из-за несовместности ограничений (11), (12);
- б) многоугольник (рис. 29);
- в) неограниченное многоугольное множество (рис. 30).

Для решения задачи (10)–(12) в случае $U \neq \emptyset$ рассмотрим семейство линий уровня функции $f(\mathbf{x})$ из (10)

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = C, \quad C = \text{const}, \quad (13)$$

которые являются параллельными прямыми. Антиградиент $-\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = (-c_1, -c_2) = \mathbf{e}$ перпендикулярен прямым (13) и указывает направление убывания $f(\mathbf{x})$. Если перемещать параллельно самой себе произвольную прямую (13), проходящую через допустимое множество U , в направлении \mathbf{e} убывания $f(\mathbf{x})$ до тех пор, пока эта прямая будет иметь

хотя бы одну общую точку с множеством U , то в своем крайнем положении указанная прямая пройдет через точку множества U , в которой целевая функция $f(\mathbf{x})$ принимает минимальное на U значение.

Пример 2. Используя графический метод, найти решение следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 7, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 8, \\ x_2 &\leqslant 3. \end{aligned}$$

▷ Изобразим на плоскости (x_1, x_2) допустимое множество U данной задачи (многоугольник $ABCDE$) и одну из линий уровня $-3x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции (рис. 31). Направление убывания $f(\mathbf{x})$ указывает вектор $\mathbf{e} = (3, 2)$. Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль направления \mathbf{e} , находим ее крайнее положение. В этом положении прямая $-3x_1 - 2x_2 = C$ проходит через вершину $D(3, 2)$ многоугольника $ABCDE$. Поэтому целевая функция $f(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение f^* в точке $\mathbf{x}^* = (3, 2)$, причем $f^* = f(3, 2) = -13$. ▷

Задача линейного программирования (10)–(12) может иметь и бесконечное множество решений.

Пример 3. Решить задачу линейного программирования с целевой функцией $f(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2$ и ограничениями на допустимое множество U , взятыми из примера 2.

▷ Множество U построено при решении примера 2. На рис. 32 изображена линия уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции $f(\mathbf{x})$. В своем крайнем положении при параллельном переносе вдоль направления $\mathbf{e} = (1, 2)$ она содержит сторону CD многоугольника $ABCDE$. Таким образом, все точки отрезка CD являются точками минимума функции $f(\mathbf{x})$ на множестве U . Так как концы C и D этого отрезка имеют координаты $(1, 3)$ и $(3, 2)$ соответственно, то любая точка минимума $f(\mathbf{x})$ представима в виде $\mathbf{x}^* = \alpha(1, 3) + (1 - \alpha)(3, 2) = (3 - 2\alpha, 2 + \alpha)$, где $\alpha \in [0; 1]$. Минимальное значение целевой функции $f^* = f(\mathbf{x}^*) = -7$. ▷

В случае неограниченного допустимого множества U задача линейного программирования (10)–(12) может не иметь решения, так как целевая функция на таком множестве может быть не ограниченной снизу.

Пример 4. Решить графическим методом задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ 2x_1 - x_2 &\geqslant -1, \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 0, \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

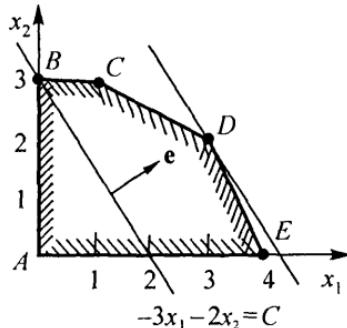


Рис. 31

▷ Допустимое множество U данной задачи представляет собой неограниченное многоугольное множество (рис. 33). Функция $f(\mathbf{x})$ убывает

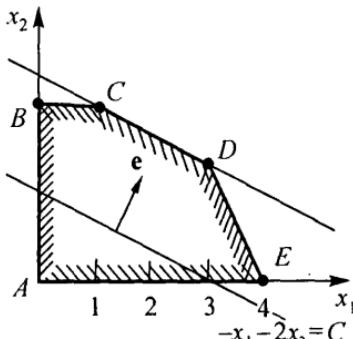


Рис. 32

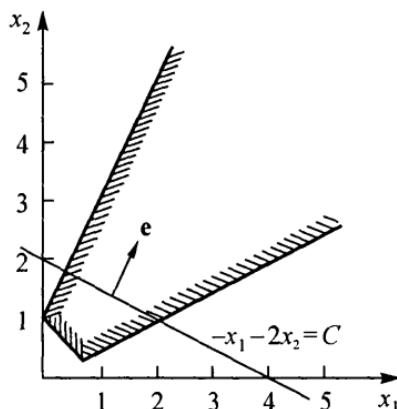


Рис. 33

в направлении $\mathbf{e} = (1, 2)$. При параллельном переносе линии уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ вдоль направления \mathbf{e} она всегда пересекает множество U , а целевая функция $f(\mathbf{x})$ неограниченно убывает. Поэтому рассмотренная задача не имеет решений. ▷

Решить задачи линейного программирования 17.188–17.200 графическим методом:

$$\begin{aligned} \text{17.188. } f(\mathbf{x}) &= x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ &-x_1 + x_2 \leq 0, \\ &2x_1 + x_2 \leq 3, \\ &x_1 - x_2 \leq 1, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{17.189. } f(\mathbf{x}) &= -x_1 - 3x_2 \rightarrow \min, \\ &2x_1 + x_2 \leq 2, \\ &x_1 - x_2 \geq 0, \\ &x_1 - x_2 \leq 1, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{17.190. } f(\mathbf{x}) &= -2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ &2x_1 + x_2 \geq 1, \\ &3x_1 - x_2 \geq -1, \\ &x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{17.191. } f(\mathbf{x}) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ &x_1 \leq 3, \\ &x_2 \leq 2, \\ &x_1 + x_2 \leq 1, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

17.192. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 \leqslant 2,$
 $x_1 + 2x_2 \geqslant 2,$
 $x_2 \leqslant 2,$
 $x_1 + x_2 \leqslant 3,$
 $x_1, x_2 \geqslant 0.$

17.193. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 \geqslant 1,$
 $x_1 - x_2 \geqslant -1,$
 $x_1 - x_2 \leqslant 1,$
 $x_1 \leqslant 2,$
 $x_2 \leqslant 2,$
 $x_1, x_2 \geqslant 0.$

17.194. $f(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2 \geqslant 2,$
 $2x_1 - x_2 \geqslant 0,$
 $x_1 - 2x_2 \leqslant 0,$
 $x_1 - x_2 \geqslant -1,$
 $x_1, x_2 \geqslant 0.$

17.195. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_2 \geqslant 1,$
 $x_1 + x_2 \leqslant 3,$
 $x_1 \leqslant 2,$
 $x_2 \leqslant 2,$
 $2x_1 + x_2 \geqslant 2,$
 $x_1, x_2 \geqslant 0.$

17.196. Решить задачу 17.182 об оптимальном составе сплава.

17.197. Найти оптимальный план выпуска продукции в задаче 17.183.

17.198. Определить число формируемых пассажирских и скорых поездов в задаче 17.184.

17.199. Найти оптимальный план выпуска товаров в задаче 17.185, полагая $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b = 390$, $c_1 = 200$, $c_2 = 300$.

17.200. Решить задачу 17.187 со следующими исходными данными:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix},$$

а) $c_1 = 65$, $c_2 = 80$; б) $c_1 = 85$, $c_2 = 60$.

Графический метод используется также для решения задачи линейного программирования в каноническом виде (3)–(5) с произвольным числом переменных x_j , если число *свободных* переменных системы уравнений (4) не превосходит двух.

Пусть ранг r матрицы системы ограничений (4) (т.е. матрицы A из (6)) равен рангу расширенной матрицы $(A|\mathbf{b})$ этой системы. В противном случае система (4) несовместна и задача линейного программирования (3)–(5) не имеет решения, так как ее допустимое множество U пусто.

Выберем произвольный базисный минор матрицы A . Для определенности будем считать, что этот минор порядка r соответствует первым r столбцам и строкам матрицы A . Если $r < m$, то уравнения (4) с номерами $i = r+1, \dots, m$ являются следствиями остальных уравнений и их следует опустить. Поэтому будем считать, что $r = m$.

Предположим, что $n - m = 2$ или $n - m = 1$. Считая переменные x_j , $j = 1, \dots, m$ базисными, а остальные — свободными, решим систему (4), т. е. выразим базисные переменные через свободные, после чего исключим базисные переменные из условия задачи (3)–(5). Для этого полученные соотношения для базисных переменных подставим в выражение (3) целевой функции и запишем условие неотрицательности (5) для всех переменных.

В результате получим задачу линейного программирования вида (10)–(12), эквивалентную исходной задаче и содержащую только свободные переменные исходной задачи, а их число не превосходит двух. Для решения полученной задачи можно использовать графический метод.

Пример 5. Используя графический метод, найти решение следующей задачи линейного программирования в каноническом виде:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 &\rightarrow \min, \\ x_1 + x_4 &= 20, \\ x_2 + x_5 &= 50, \\ x_3 + x_6 &= 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 60, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

В данном случае матрица системы ограничений-равенств имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг $r = 4 = m$, причем минор, образованный первыми четырьмя столбцами, может быть выбран в качестве базисного (проверьте!). Число свободных переменных $n - m = 2$, поэтому для решения задачи можно использовать графический метод.

Решив систему ограничений-равенств относительно базисных переменных x_j , $j = 1, \dots, 4$, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= -40 + x_5 + x_6, \\ x_2 &= 50 - x_5, \\ x_3 &= 30 - x_6, \\ x_4 &= 60 - x_5 - x_6. \end{aligned} \tag{14}$$

Исключая с помощью (14) переменные x_1, \dots, x_4 из выражения для целевой функции, находим

$$f(\mathbf{x}) = 740 - 7x_5 + 7x_6. \quad (15)$$

С учетом условия неотрицательности $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$, и равенств (14), (15) получаем следующую задачу:

$$f(\mathbf{x}) = 740 - 7x_5 + 7x_6 \rightarrow \min,$$

$$x_5 + x_6 \geq 40,$$

$$x_5 \leq 50,$$

$$x_6 \leq 30,$$

$$x_5 + x_6 \leq 60,$$

$$x_5, x_6 \geq 0.$$

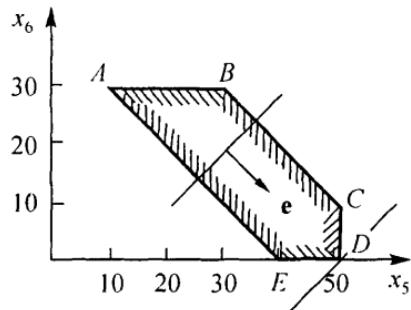


Рис. 34

Допустимое множество U последней задачи изображено на рис. 34. Это многоугольник $ABCDE$. Перемещая линию уровня $-7x_5 + 7x_6 = C$ функции (15) по направлению вектора $\mathbf{e} = (7, -7)$, находим точку минимума $f(\mathbf{x})$ — вершину $D(50, 0)$ многоугольника $ABCDE$. Подставив значения $x_5 = 50, x_6 = 0$ в равенства (14), окончательно находим $\mathbf{x}^* = (10, 0, 30, 10, 50, 0), f^* = 390$. \triangleright

Решить задачи линейного программирования в каноническом виде 17.201–17.206 графическим методом:

17.201. $f(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$

$$2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3,$$

$$4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

17.202. $f(\mathbf{x}) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \rightarrow \min,$

$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 13,$$

$$4x_1 + x_2 + x_5 = 26,$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 - 3x_2 + x_6 = 0,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

17.203. $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min,$

$$10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25,$$

$$-x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

17.204. $f(\mathbf{x}) = +4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min,$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3,$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$$

17.205. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10,$
 $2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25,$
 $-2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 9,$
 $6x_2 + x_3 + x_4 = 36,$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$

17.206. $f(\mathbf{x}) = -2x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 \rightarrow \min,$
 $3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2,$
 $x_1 + x_2 - x_6 = 3,$
 $4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 19,$
 $4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13,$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$

2. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.

Общим методом решения произвольной задачи линейного программирования является *симплекс-метод*, рассматриваемый ниже.

Пусть ранг r матрицы $A = (a_{ij})$ системы ограничений-равенств (4) задачи линейного программирования в каноническом виде совпадает с рангом расширенной матрицы $(A|\mathbf{b})$.

Выберем какой-нибудь базисный минор матрицы A . Для определенности будем считать, что он соответствует первым r столбцам и строкам этой матрицы. Если $r < m$, то уравнения с номерами $i = r+1, \dots, m$, являющиеся следствиями остальных уравнений системы, отбросим, полагая в дальнейшем $r = m$.

Для решения системы уравнений (4) относительно базисных переменных $x_j, j = 1, \dots, m$, с помощью эквивалентных преобразований приведем ее к виду

$$\begin{aligned} x_1 + \alpha_{1,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \cdots + \alpha_{1,n}^{(0)} x_n &= \beta_1^{(0)}, \\ x_2 + \alpha_{2,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \cdots + \alpha_{2,n}^{(0)} x_n &= \beta_2^{(0)}, \\ \dots & \\ x_m + \alpha_{m,m+1}^{(0)} x_{m+1} + \cdots + \alpha_{m,n}^{(0)} x_n &= \beta_m^{(0)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда общее решение системы (4) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1^{(0)} - \alpha_{1,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \cdots - \alpha_{1,n}^{(0)} x_n, \\ x_2 &= \beta_2^{(0)} - \alpha_{2,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \cdots - \alpha_{2,n}^{(0)} x_n, \\ \dots & \\ x_m &= \beta_m^{(0)} - \alpha_{m,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \cdots - \alpha_{m,n}^{(0)} x_n, \end{aligned} \quad (17)$$

где свободные переменные x_{m+1}, \dots, x_n могут принимать произвольные значения.

Положив их равными нулю, получим частное решение

$$x_1 = \beta_1^{(0)}, \quad x_2 = \beta_2^{(0)}, \dots, \quad x_m = \beta_m^{(0)}, \quad x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$$

или

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \dots, \beta_m^{(0)}, 0, 0, \dots, 0), \quad (18)$$

которое назовем *базисным решением* системы (4). Каждому выбору базисных переменных соответствует свое базисное решение системы (4).

Если все компоненты базисного решения (18) удовлетворяют условию неотрицательности, т. е. если $\beta_i^{(0)} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, то такое решение называют *допустимым базисным решением* системы (4) или *угловой точкой* допустимого множества U задачи линейного программирования (3)–(5). Если среди неотрицательных чисел $\beta_i^{(0)}$ в (18) есть равные нулю, то допустимое базисное решение называется *вырожденным* (вырожденной угловой точкой), а соответствующая задача линейного программирования также называется *вырожденной*.

В основе симплекс-метода лежит следующий факт:

Если задача линейного программирования (3)–(5) разрешима, то минимум целевой функции $f(\mathbf{x})$ из (3) достигается хотя бы в одной из угловых точек допустимого множества U этой задачи.

Так как различные базисные решения системы (4) соответствуют различным вариантам выбора m базисных из общего числа n переменных x_j , то число допустимых базисных решений (угловых точек) не превышает C_n^m . Поэтому задачу линейного программирования можно решать посредством перебора конечного числа угловых точек допустимого множества U , сравнивая значения целевой функции в этих точках. Однако при большой размерности n задачи линейного программирования этот подход затруднителен. Идея симплекс-метода состоит в направленном переборе угловых точек допустимого множества U с последовательным уменьшением целевой функции $f(\mathbf{x})$.

Описание симплекс-метода. Предположим, что задача линейного программирования (3)–(5) является невырожденной, а базисное решение (18) — допустимым. Используя соотношение (17), выразим целевую функцию из (3) через свободные переменные x_j , $j = m+1, \dots, n$:

$$f(\mathbf{x}) = p_0^{(0)} + \sum_{j=m+1}^n p_j^{(0)} x_j, \quad (19)$$

где

$$p_0^{(0)} = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i^{(0)}; \quad p_j^{(0)} = c_j - \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij}^{(0)}, \quad j = m+1, \dots, n.$$

Справедливы следующие утверждения:

а) *Если в выражении (19) все коэффициенты $p_j^{(0)}$, $j = m+1, \dots, n$, неотрицательны, то в угловой точке (18) достигается минимум целевой функции $f(\mathbf{x})$ из (3) на допустимом множестве U задачи (3)–(5) и этот минимум равен $p_0^{(0)}$.*

б) Если среди отрицательных коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$, из (19) есть такой (например, $p_l^{(0)}$), что в (16) все коэффициенты $\alpha_{il}^{(0)} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, то целевая функция $f(\mathbf{x})$ не ограничена снизу на допустимом множестве U и задача (3)–(5) не имеет решений.

в) Если хотя бы один из коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$, в (19) отрицателен (например, $p_l^{(0)} < 0$) и при этом среди коэффициентов $\alpha_{il}^{(0)}$ в (16) есть хотя бы один положительный, то существует угловая точка $x^{(1)}$ множества U такая, что $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$.

В случаях а) и б) процесс решения задачи линейного программирования на этом заканчивается. Рассмотрим подробнее случай в). Пусть в (19) коэффициент $p_l^{(0)} < 0$ и в (16) имеются положительные коэффициенты $\alpha_{il}^{(0)}$. Найдем номер k базисной переменной из условия

$$\frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} = \min_{i: \alpha_{il}^{(0)} > 0} \left\{ \frac{\beta_i^{(0)}}{\alpha_{il}^{(0)}} \right\}, \quad (20)$$

где минимум берется по всем номерам $i = 1, \dots, m$, для которых $\alpha_{il}^{(0)} > 0$.

Найдем решение системы (4), считая свободными переменные $x_{m+1}, \dots, x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, \dots, x_n$, т. е. поменяв местами свободную переменную x_l с базисной переменной x_k . Система уравнений вида (16) в этом случае запишется следующим образом:

$$x_i + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n \left(\alpha_{ij}^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \frac{\alpha_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} \right) x_j - \frac{\alpha_{il}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k = \beta_i^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}},$$

$$i = 1, \dots, m, \quad i \neq k, \quad (21)$$

$$x_l + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_j + \frac{1}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k = \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}},$$

а зависимость целевой функции от новых свободных переменных примет вид

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq l}}^n \left(p_j^{(0)} - p_l^{(0)} \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} \right) x_j - \frac{p_l^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k + p_0^{(0)} + p_l^{(0)} \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}}. \quad (22)$$

Компоненты нового базисного решения $\mathbf{x}^{(1)}$ можно найти, приравняв нулю свободные переменные x_j , $j = m+1, \dots, n$, $j \neq l$ и x_k и найдя

при этом условии значения базисных переменных из (21). Базисное решение $\mathbf{x}^{(1)}$ является допустимым, т. с. угловой точкой множества U , причем $f(\mathbf{x}^{(1)}) < f(\mathbf{x}^{(0)})$.

По знакам коэффициентов в системе (21) и выражении для целевой функции (22) можно сделать одно из трех приведенных выше заключений, как это было сделано для угловой точки $\mathbf{x}^{(0)}$. В случае в) следует совершить переход к очередной угловой точке $\mathbf{x}^{(2)}$, аналогичный переходу от $\mathbf{x}^{(0)}$ к $\mathbf{x}^{(1)}$, и т. д.

Так как число угловых точек допустимого множества U не превышает C_n^m , то случай в) может повторяться конечное число раз, т. е. в результате конечного числа шагов перехода к новой угловой точке будет либо найдено решение задачи, либо сделано заключение о том, что она не имеет решений.

Реализация описанного выше симплекс-метода значительно упрощается при использовании *симплекс-таблиц*. Записав коэффициенты уравнений (16) и целевой функции (19) соответствующим образом (см. таблицу 3.4), получим симплекс-таблицу задачи (3)–(5) для угловой точки $\mathbf{x}^{(0)}$ из (18).

Таблица 3.4

	x_{m+1}	...	x_l	...	x_n	
x_1	$\alpha_{1, m+1}^{(0)}$...	$\alpha_{1, l}^{(0)}$...	$\alpha_{1, n}^{(0)}$	$\beta_1^{(0)}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_k	$\alpha_{k, m+1}^{(0)}$...	$\alpha_{k, l}^{(0)}$...	$\alpha_{k, n}^{(0)}$	$\beta_k^{(0)}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_m	$\alpha_{m, m+1}^{(0)}$...	$\alpha_{m, l}^{(0)}$...	$\alpha_{m, n}^{(0)}$	$\beta_m^{(0)}$
	$p_{m+1}^{(0)}$...	$p_l^{(0)}$...	$p_n^{(0)}$	$-p_0^{(0)}$

Рассмотрим переход от симплекс-таблицы, соответствующей угловой точке $\mathbf{x}^{(0)}$, к симплекс-таблице для угловой точки $\mathbf{x}^{(1)}$.

Пусть номера k и l определены так, как это сделано выше. Элемент $\alpha_{kl}^{(0)}$, а также строка и столбец таблицы 3.4, на пересечении которых он стоит, называются *разрешающими* или *опорными*. Из формул (21) и (22) следует, что преобразование исходной симплекс-таблицы с опорным элементом $\alpha_{kl}^{(0)}$ (см. таблицу 3.4) приводит к новой симплекс-таблице (таблица 3.5), для определения элементов которой необходимо выполнить следующие операции:

1. Поменять местами переменные x_k и x_l , остальные переменные оставить на прежних местах, см. таблицу 3.5.

Таблица 3.5

	x_{m+1}	...	x_k	...	x_n	
x_1	$\alpha_{1, m+1}^{(1)}$...	$\alpha_{1, k}^{(1)}$...	$\alpha_{1, n}^{(1)}$	$\beta_1^{(1)}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_l	$\alpha_{l, m+1}^{(1)}$...	$\alpha_{l, k}^{(1)}$...	$\alpha_{l, n}^{(1)}$	$\beta_l^{(1)}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_m	$\alpha_{m, m+1}^{(1)}$...	$\alpha_{m, k}^{(1)}$...	$\alpha_{m, n}^{(1)}$	$\beta_m^{(1)}$
	$p_{m+1}^{(1)}$...	$p_k^{(1)}$...	$p_n^{(1)}$	$-p_0^{(1)}$

2. На место опорного элемента поставить 1.

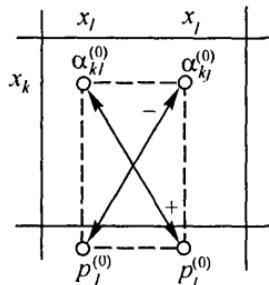
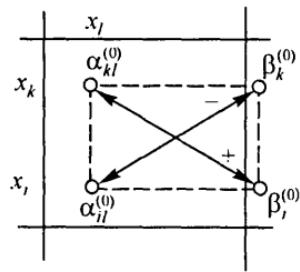
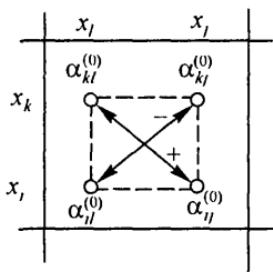
3. На остальных местах разрешающей строки записать соответствующие элементы исходной таблицы.

4. На свободные места разрешающего столбца поставить соответствующие элементы исходной таблицы, взятые со знаком минус.

5. На оставшиеся свободные места элементов $\alpha_{ij}^{(1)}$, $\beta_i^{(1)}$, $p_j^{(1)}$ в новой симплекс-таблице записать числа $\bar{\alpha}_{ij}$, $\bar{\beta}_i$, \bar{p}_j , найденные следующим образом:

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{kl}^{(0)} \cdot \alpha_{ij}^{(0)} - \alpha_{kj}^{(0)} \cdot \alpha_{il}^{(0)}, \quad \bar{\beta}_i = \alpha_{kl}^{(0)} \cdot \beta_i^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \cdot \beta_k^{(0)}, \\ \bar{p}_j = \alpha_{kl}^{(0)} \cdot p_j^{(0)} - \alpha_{kj}^{(0)} \cdot p_l^{(0)}.$$

Для упрощения вычислений по этим формулам их можно сформулировать в виде «правила прямоугольника»: $\alpha_{kl}^{(0)}$, $\alpha_{kj}^{(0)}$, $\alpha_{ij}^{(0)}$, $\alpha_{il}^{(0)}$ (или $\alpha_{kl}^{(0)}$, $\beta_k^{(0)}$, $\beta_i^{(0)}$, $\alpha_{il}^{(0)}$, или $\alpha_{kl}^{(0)}$, $\alpha_{kj}^{(0)}$, $p_j^{(0)}$, $p_l^{(0)}$) перемножаются (причем



произведение, не содержащее опорного элемента $\alpha_{kl}^{(0)}$, берется со знаком минус) и полученные произведения складываются.

6. Все полученные элементы новой таблицы разделить на опорный элемент $\alpha_{kl}^{(0)}$ (это можно делать и непосредственно после выполнения операций каждого из п. 2–5).

Пример 6. Решить задачу линейного программирования из примера 5 симплекс-методом, используя в качестве начальной угловой точки $\mathbf{x}^{(0)}$ базисное решение, соответствующее свободным переменным x_1 и x_3 . Столбцы с номерами 2, 4, 5 и 6 матрицы A системы ограничений-равенств данной задачи образуют базисный минор (проверьте!). С помощью эквивалентных преобразований приводим эту систему к виду (16), где базисными являются переменные x_2 , x_4 , x_5 и x_6 :

$$\begin{array}{rcl} x_2 & + x_1 + x_3 = 40 \\ x_4 & + x_1 & = 20 \\ x_5 & - x_1 - x_3 & = 10 \\ x_6 & + x_3 & = 30. \end{array} \quad (23)$$

Полагая в равенствах (23) свободные переменные x_1 и x_2 равными нулю, находим $x_2 = 40$, $x_4 = 20$, $x_6 = 30$, т. е. базисное решение $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 40, 0, 20, 10, 30)$. Так как все базисные переменные в $\mathbf{x}^{(0)}$ положительны, данное базисное решение является допустимым (т. е. угловой точкой) и невырожденным.

Исключив с помощью (23) базисные переменные в выражении для целевой функции, получим

$$f(\mathbf{x}) = 880 - 7x_1 - 14x_3. \quad (24)$$

С помощью равенств (23) и (24) составляем симплекс-таблицу, соответствующую угловой точке $\mathbf{x}^{(0)}$:

	x_1	x_3	
x_2	1	1	40
x_4	1	0	20
x_5	-1	-1	10
x_6	0	1	30
	-7	-14	-880

Среди коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$, из (19) есть отрицательные — это элементы -7 и -14 последней строки симплекс-таблицы. Следовательно, угловая точка $\mathbf{x}^{(0)}$ не является решением задачи.

Для каждого из отрицательных элементов $p_j^{(0)}$ среди соответствующих коэффициентов $\alpha_{ij}^{(0)}$ из (16) (т. е. элементов симплекс-таблицы, стоящих в том же столбце, что и $p_j^{(0)}$) есть положительные, значит, возможен переход к новой угловой точке $\mathbf{x}^{(1)}$ с меньшим значением $f(\mathbf{x})$.

Найдем разрешающий элемент. В качестве опорного можно взять любой из столбцов таблицы, соответствующих свободным переменным x_1 и x_3 . Выберем, например, столбец при свободной переменной x_3 .

Разрешающую строку находим в соответствии с (20): так как $\min(40/1, 30/1) = 30/1$, то разрешающей является строка, соответствующая базисной переменной x_6 . Итак, опорный элемент найден, в симплекс-таблице он обведен рамкой.

Заполнив новую симплекс-таблицу по правилам, описанным выше, получим

	x_1	x_6	
x_2	1	-1	10
x_4	1	0	20
x_5	-1	1	40
x_3	0	1	30
	-7	14	-460

Отметим, что значение $f(\mathbf{x})$ в новой угловой точке уменьшилось по сравнению со значением в исходной: 460 вместо 880 (см. элементы в правых нижних углах симплекс-таблиц).

В нижней строке последней таблицы есть отрицательный элемент -7 , стоящий в столбце при свободной переменной x_1 . Кроме того, в этом столбце имеются положительные элементы, поэтому возможно дальнейшее уменьшение $f(\mathbf{x})$ с помощью очередного шага симплекс-метода.

На данном шаге выбор опорного столбца однозначен и определяется отрицательным элементом -7 последней строки. Разрешающая строка находится из условия (20): так как $\min(10/1, 20/1) = 10/1$, то это строка при базисной переменной x_2 . Опорный элемент в последней таблице обведен рамкой.

Как и на предыдущем шаге, находим очередную симплекс-таблицу по общим правилам:

	x_2	x_6	
x_1	1	-1	10
x_4	-1	1	10
x_5	1	0	50
x_3	0	1	30
	7	7	-390

В этой симплекс-таблице оба коэффициента $p_j^{(2)}$, $j \neq 0$, в последней строке положительны. Поэтому угловая точка $\mathbf{x}^{(2)}$, соответствующая свободным переменным x_2 и x_6 , является точкой минимума целевой функции $f(\mathbf{x})$: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(2)} = (10; 0; 30; 10; 50; 0)$. Минимальное значение $f(\mathbf{x})$ со знаком минус записано в правом нижнем углу симплекс-таблицы, поэтому $f^* = 390$. Сравните эти результаты с решением той же задачи, полученным графическим методом, см. пример 5. ▷

Замечание. Если задача линейного программирования (3)–(5) вырождена, то возможны *холостые шаги* симплекс-метода, т. е. шаги, в результате которых значение целевой функции не изменяется. При этом теоретически возможно и *зацикливание*, т. е. бесконечное повторение холостых шагов. Для того чтобы избежать зацикливания, разработаны специальные алгоритмы (*антициклины*). Однако на практике зацикливание происходит крайне редко, поэтому антициклины мы здесь не рассматриваем.

Решить задачи линейного программирования 17.207–17.212 симплекс-методом, используя $\mathbf{x}^{(0)}$ в качестве начальной угловой точки:

$$17.207. f(\mathbf{x}) = -5x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 - 5x_5 \rightarrow \min,$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5,$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6,$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 1, 2, 1).$$

$$17.208. f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \rightarrow \min,$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 7,$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10,$$

$$-3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 2, 0, 0).$$

$$17.209. f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (2; 1; 2; 0; 0).$$

$$17.210. f(\mathbf{x}) = x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 \rightarrow \min,$$

$$-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1,$$

$$-8x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 1,$$

$$-x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (0; 1; 1; 0; 1).$$

$$17.211. f(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_2 + 2x_4 - x_5 = 1,$$

$$x_1 - x_4 - x_5 = 1,$$

$$2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5; \mathbf{x}^{(0)} = (1; 1; 2; 0; 0).$$

$$\begin{aligned}
 17.212. \quad & f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 \rightarrow \min, \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3, \\
 & 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 1, \\
 & -3x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5; \quad \mathbf{x}^{(0)} = (0; 1; 1; 1; 0).
 \end{aligned}$$

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом начинается с поиска какой-либо угловой точки $\mathbf{x}^{(0)}$ допустимого множества U этой задачи.

Метод искусственного базиса нахождения начальной угловой точки $\mathbf{x}^{(0)}$ состоит в следующем. Пусть в ограничениях задачи линейного программирования (3)–(5) все $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. Если это не так, то умножим соответствующие уравнения (4) на -1 . Введем m дополнительных переменных x_{n+i} , $i = 1, \dots, m$, и рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min, \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (26)$$

$$x_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n+m. \quad (27)$$

Одной из угловых точек допустимого множества \hat{U} этой задачи, очевидно, является точка $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = (0; \dots; 0; b_1; \dots; b_m)$. Поэтому для решения задачи (25)–(27) можно использовать симплекс-метод со следующей начальной симплекс-таблицей:

	x_1	x_2	\dots	x_n	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}	b_2
\vdots					\vdots
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	b_m
	p_1	p_2	\dots	p_n	$-p_0$

$$\text{где } p_j = -\sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n; \quad -p_0 = -\sum_{i=1}^m b_i.$$

Отметим, что решение задачи (25)–(27) всегда существует, так как ее допустимое множество \hat{U} непусто ($\hat{\mathbf{x}}^{(0)} \in \hat{U}$), а целевая функция (25) ограничена снизу на \hat{U} ($\hat{f}(\mathbf{x}) \geq 0$).

Пусть $\hat{f}^* = \min_{\hat{U}} \hat{f}(\mathbf{x})$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $\hat{f}^* > 0$. Тогда допустимое множество U исходной задачи линейного программирования (3)–(5) пусто, т. е. эта задача не имеет решений.

2. $\hat{f}^* = 0$ и минимум целевой функции $\hat{f}(\mathbf{x})$ достигается в угловой точке

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1; \dots; \hat{x}_n; \hat{x}_{n+1}; \dots; \hat{x}_{n+m}) \quad (28)$$

допустимого множества \hat{U} вспомогательной задачи. Тогда

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\hat{x}_1; \hat{x}_2; \dots; \hat{x}_n) \quad (29)$$

есть угловая точка допустимого множества U исходной задачи (3)–(5) и ее можно использовать в качестве начальной угловой точки при решении этой задачи симплекс-методом.

Из (25) видно, что равенство $\hat{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{f}^* = 0$ возможно только тогда, когда все координаты x_{n+i} , $i = 1, \dots, m$, в (28) равны нулю.

Если задача (25)–(27) невырождена, то это означает, что все переменные x_{n+i} для угловой точки (28) являются свободными. Опустим столбцы, соответствующие этим переменным в окончательной симплекс-таблице, составленной при решении задачи (25)–(27). Полученная в результате этого таблица будет соответствовать системе уравнений (4), разрешенной относительно m переменных x_i , являющихся базисными для угловой точки (28). Поэтому остается заменить в этой таблице последнюю строку на строку коэффициентов целевой функции (3) исходной задачи и продолжить ее решение симплекс-методом из начальной угловой точки (29).

Если вспомогательная задача (25)–(27) вырождена, то в угловой точке (28) некоторые из переменных x_{n+i} , $i = 1, \dots, m$, могут оказаться базисными. Тогда эти переменные следует перевести в свободные с помощью холостых шагов симплекс-метода, выбирая в качестве разрешающих произвольные элементы симплекс-таблиц, отличные от нуля. После этого исходная задача (3)–(5) решается симплекс-методом так, как описано выше.

Пример 7. Методом искусственного базиса найти какую-либо угловую точку допустимого множества задачи линейного программирования, рассмотренной в примере 5, и записать соответствующий этой угловой точке симплекс-таблицу.

« Введем дополнительные переменные x_7, \dots, x_{10} и запишем условие вспомогательной задачи линейного программирования (25)–(27) для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{x}) &= x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \rightarrow \min, \\ x_1 + x_4 + x_7 &= 20, \\ x_2 + x_5 + x_8 &= 50, \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_{10} &= 60, \\ x_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, 10. \end{aligned}$$

Считая дополнительные переменные x_7, \dots, x_{10} базисными, запишем симплекс-таблицу этой задачи, соответствующую угловой точке $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = (0; 0; 0; 0; 0; 20; 50; 30; 60)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_7	1	0	0	1	0	0	20
x_8	0	1	0	0	1	0	50
x_9	0	0	1	0	0	1	30
x_{10}	0	0	0	1	1	1	60
	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-160

Любой столбец этой симплекс-таблицы может быть выбран в качестве разрешающего, так как элементы ее последней строки отрицательны. Выберем, например, столбец, соответствующий свободной переменной x_4 . Тогда разрешающим будет элемент этого столбца, стоящий в первой строке, так как $\min(20/1, 60/1) = 20/1$.

Производя преобразования симплекс-метода, получим такую последовательность симплекс-таблиц (рамками обведены разрешающие элементы)³⁾:

	x_1	x_2	x_3	x_7	x_5	x_6	
x_4	1	0	0	1	0	0	20
x_8	0	1	0	0	1	0	50
x_9	0	0	1	0	0	1	30
x_{10}	-1	0	0	-1	1	1	40
	1	-1	-1	2	-2	-2	-120

	x_1	x_2	x_3	x_{10}	x_6	
x_4	1	0	0	0	0	20
x_8	1	1	0	-1	-1	10
x_9	0	0	1	0	1	30
x_5	-1	0	0	1	1	40
	-1	-1	-1	2	0	-40

	x_1	x_8	x_3	x_6	
x_4	1	0	0	0	20
x_2	1	1	0	-1	10
x_9	0	0	1	1	30
x_5	-1	0	0	1	40
	0	1	-1	-1	-30

	x_1	x_3	x_9	
x_4	1	0	0	20
x_2	1	1	1	40
x_6	0	1	1	30
x_5	-1	-1	-1	10
	0	0	0	0

В нижней строке последней симплекс-таблицы нет отрицательных элементов, а в правом нижнем углу стоит нуль. Следовательно, минимум

³⁾ Столбец симплекс-таблицы, соответствующий вспомогательной переменной x_{n+i} , вводимой в свободные на каждом шаге метода искусственного базиса, удобнее вычеркивать на данном шаге вместо того, чтобы исключить такие столбцы одновременно в окончательной симплекс-таблице.

$\hat{f}^* = 0$ вспомогательной целевой функции достигнут и

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0; 40; 0; 20; 10; 30) \quad (30)$$

есть угловая точка допустимого множества U исходной задачи линейного программирования из примера 5.

Заменив нижнюю строку последней симплекс-таблицы на строку коэффициентов целевой функции исходной задачи, получим симплекс-таблицу этой задачи, соответствующую угловой точке $\mathbf{x}^{(0)}$ из (30):

	x_1	x_3	
x_4	1	0	20
x_2	1	1	40
x_6	0	1	30
x_5	-1	-1	10
	-7	-14	-880

Отметим, что другие варианты выбора разрешающих элементов в ходе реализации метода искусственного базиса могли привести к другим угловым точкам допустимого множества U исходной задачи.

Использование $\mathbf{x}^{(0)}$ из (30) в качестве начальной угловой точки симплекс-метода в рассматриваемой задаче иллюстрирует решение примера 6.

Решить задачи линейного программирования 17.213–17.225 симплекс-методом, находя начальную угловую точку методом искусственного базиса:

$$17.213. f(\mathbf{x}) = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$

$$-x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_2 + x_3 + x_5 = 2,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

$$17.214. f(\mathbf{x}) = -6x_1 - 8x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 20,$$

$$12x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 72,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$$

$$17.215. f(\mathbf{x}) = -x_1 - 4x_4 \rightarrow \min,$$

$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 13,$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 = 5,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

17.216. $f(\mathbf{x}) = 34x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \min,$
 $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9,$
 $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
 $-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$

17.217. $f(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7,$
 $-3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,$
 $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2,$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$

17.218. $f(\mathbf{x}) = -3x_1 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \min,$
 $15x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + x_5 = 4,$
 $2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3,$
 $x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 7,$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$

17.219. $f(\mathbf{x}) = -x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 \geq 1,$
 $-x_1 + x_2 \geq -1,$
 $2x_1 - x_2 \geq 0,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

17.220. $f(\mathbf{x}) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$
 $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2,$
 $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1,$
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

17.221. $f(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \rightarrow \min,$
 $-2x_2 + x_4 + x_5 = -3,$
 $x_3 - 2x_4 = 2,$
 $x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 5,$
 $x_1 + x_2 \geq -3,$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$

17.222. $f(\mathbf{x}) = -8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 15x_4 \rightarrow \min,$
 $-x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 \leq 25,$
 $2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 10,$
 $10x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \leq 26,$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$

17.223. Предприятие, располагающее ресурсами сырья трех видов $B_i, i = 1, 2, 3$, может производить продукцию четырех видов $A_j, j = 1, \dots, 4$. В таблице 3.6 указаны затраты ресурсов B_i на изготовление 1 т продукции A_j , объем ресурсов и прибыль, получаемая от изготовления 1 т продукции A_j .

Таблица 3.6

Вид сырья	Вид продукции					Объем ресурсов, т
	A_1	A_2	A_3	A_4		
B_1	4	5	2	3		60
B_2	30	14	18	22		400
B_3	16	14	8	10		128
Прибыль, руб.	48	25	56	30		

Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором полученная прибыль будет максимальной, при условиях:

а) продукции A_2 необходимо выпустить не менее 8 т, продукции A_4 — не более 5 т, а продукции A_1 и A_3 — в отношении 2:1;

б) производственные издержки на 1 т продукции A_j , $j = 1, \dots, 4$, составляют соответственно 3, 9, 12 и 6 руб., а суммарные издержки не должны превышать 87 руб.

17.224. Завод получает 4 вида полуфабрикатов B_i в количествах: $B_1 = 400$ т, $B_2 = 250$ т, $B_3 = 350$ т и $B_4 = 100$ т.

В результате смешения этих компонентов получают 3 вида продукции A_j . Пропорции смешиваемых полуфабрикатов следующие: для $A_1 = 2:3:5:2$, для $A_2 = 3:1:2:1$, для $A_3 = 2:2:1:3$. Стоимость 1 т продукции A_j составляет: $A_1 = 12$ руб., $A_2 = 10$ руб., $A_3 = 15$ руб.

Составить оптимальный план выпуска продукции по критерию:

а) максимальной стоимости выпущенной продукции;

б) максимального использования полуфабрикатов.

17.225. Решить задачу 17.186 об оптимальном графике работы автобусного парка при следующих исходных данных:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_i	10	20	22	23	25	22	20	15	10	5
c_i	5	5	6	6	6	8	10	15	15	20

3. Целочисленное линейное программирование. Во многих случаях на допустимое множество задачи линейного программирования (3)–(5) накладывается дополнительное требование целочисленности переменных x_j . Если этому требованию должны удовлетворять все переменные, то

получаем полностью целочисленную задачу линейного программирования, которая в каноническом виде записывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, \\ x_j &\in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{31}$$

где \mathbb{Z} — множество целых чисел.

Полностью целочисленную задачу с двумя переменными можно решить графически, учитывая, что допустимое множество \tilde{U} этой задачи состоит из точек целочисленной координатной сетки, принадлежащих допустимому множеству U задачи линейного программирования без дополнительного требования (31).

Решить полностью целочисленные задачи линейного программирования 17.226–17.234 графическим методом:

$$\begin{aligned} 17.226. \quad f(\mathbf{x}) &= x_1 - 20x_2 \rightarrow \min, \\ &-x_1 + 10x_2 \leq 40, \\ &4x_1 + 2x_2 \leq 29, \\ &x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

На плоскости (x_1, x_2) построим допустимое множество U рассматриваемой задачи линейного программирования без требования целочисленности (многоугольник $ABCD$ на рис. 35) и отметим точки множества U с целочисленными координатами. Совокупность этих точек представляет собой допустимое множество \tilde{U} полностью целочисленной задачи.

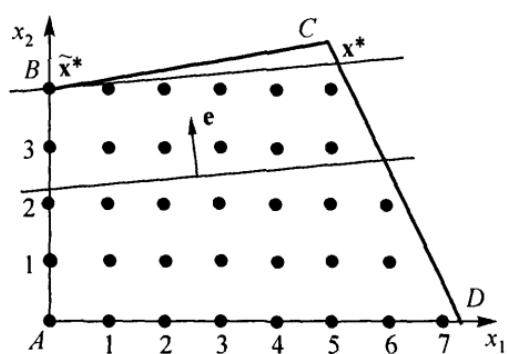


Рис. 35

в положении линия уровня проходит через точку $B(0, 4)$, поэтому решение задачи имеет вид $\tilde{\mathbf{x}}^* = (0, 4)$, $\tilde{f}^* = \min_{\tilde{U}} f(\mathbf{x}) = -80$.

Отметим, что, как видно из рис. 35, точкой минимума $f(\mathbf{x})$ в данной задаче без требования целочисленности является точка $C(5; 4,5)$,

Перемещая линию уровня целевой функции $f(\mathbf{x})$ в направлении $\mathbf{e} = (-1, 20)$ убывания $f(\mathbf{x})$, находим крайнее положение этой линии, в котором она еще имеет непустое пересечение с множеством \tilde{U} . В этом положении линия уровня проходит через точку $B(0, 4)$, поэтому решение

т. е. $\mathbf{x}^* = (5; 4,5)$, $f^* = \min_U f(\mathbf{x}) = -85$. Отсюда следует, что точкой минимума целевой функции на допустимом множестве \tilde{U} целочисленной задачи не обязательно является ближайшая к решению \mathbf{x}^* обычной (нечелочисленной) задачи точка множества U с целочисленными координатами. \triangleright

17.227. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 36,$
 $x_1 \leq 13,$
 $3x_1 + x_2 \geq 6,$
 $x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$

17.228. $f(\mathbf{x}) = -9x_1 - 11x_2 \rightarrow \min,$
 $4x_1 + 3x_2 \leq 10,$
 $x_1 \leq 5,$
 $x_1 + 2x_2 \leq 8,$
 $x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$

17.229. $f(\mathbf{x}) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$
 $4x_1 + x_2 \leq 10,$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 8,$
 $x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$

17.230. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 5,$
 $x_1 \leq 2,$
 $x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$

17.231. $f(\mathbf{x}) = x_2 - x_3 \rightarrow \min,$
 $3x_2 + x_3 + x_4 = 3,$
 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$
 $x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$

17.232. $f(\mathbf{x}) = -x_2 \rightarrow \min,$
 $3x_1 + x_2 + x_3 = 12,$
 $-8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24,$
 $x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$

17.233. В цехе площадью 74 м^2 необходимо установить станки, на приобретение которых отпущено 42 тыс. руб.

Существует два типа станков. Станок первого типа стоимостью 6 тыс. руб., требующий 12 м^2 производственных площадей, обеспечивает изготовление 70 изделий в смену. Аналогичные характеристики станка второго типа составляют соответственно 4 тыс. руб., 6 м^2 , 40 изделий в смену.

Найти оптимальный вариант приобретения станков, обеспечивающий максимальное производство изделий в цехе.

17.234. Решить задачу 17.182 об оптимальном составе сплава, предполагая, что сырье каждого вида приобретается в количествах, кратных 1 кг.

Для решения полностью целочисленных задач линейного программирования с произвольным числом переменных используется *метод Гомори*. Он состоит в последовательном отсечении от допустимого множества U нецелочисленной задачи частей, не содержащих точек с целыми координатами. Эти отсечения производятся включением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j .

Опишем алгоритм метода Гомори, использующий симплекс-метод.

1. С помощью симплекс-метода находится решение \mathbf{x}^* задачи линейного программирования без учета требования целочисленности (31). Если для \mathbf{x}^* условие (31) выполняется, то задача решена. В противном случае среди чисел β_i последнего столбца симплекс-таблицы, определяющей решение \mathbf{x}^* , есть такие, что $\{\beta_i\} > 0$ ⁴⁾.

2. Среди нецелых элементов β_i выбирается произвольный элемент β_r (например, с максимальной дробной частью $\{\beta_r\}$). По r -й строке симплекс-таблицы составляется дополнительное ограничение вида ---

$$\sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{rj}x_j\} \leq -\{\beta_r\} \quad (\text{здесь, как и выше, для определенности мы полагаем, что свободные переменные } x_j \text{ имеют номера } m+1, \dots, n).$$

С помощью вспомогательной переменной $x_{n+1} \geq 0$ это ограничение представляется в виде равенства $x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^n \{\alpha_{rj}\} = -\{\beta_r\}$ и вводится в симплекс-таблицу дополнительной строкой

$$x_{n+1} | \alpha_{n+1, m+1} \dots \alpha_{n+1, n} | \beta_{n+1}, \quad (32)$$

где $\alpha_{n+1, j} = -\{\alpha_{rj}\}$, $j = m+1, \dots, n$; $\beta_{n+1} = -\{\beta_r\}$.

Так как $\beta_{n+1} = -\{\beta_r\} < 0$, то после дополнения строкой (32) симплекс-таблица перестает соответствовать допустимому базисному решению задачи линейного программирования, которую она описывает.

3. Для перехода к допустимому базисному решению производятся следующие операции:

а) строка с отрицательным свободным членом β_k считается разрешающей (на первом шаге, очевидно, $k = n+1$);

б) если все коэффициенты $\alpha_{kj} \geq 0$, то задача не имеет решения, в противном случае номер l разрешающего столбца находится из условия

$$\frac{p_l}{|\alpha_{kl}|} = \min_{j: \alpha_{kj} < 0} \frac{p_j}{|\alpha_{kj}|};$$

в) совершается преобразование симплекс-таблицы с опорным элементом α_{kl} . Если в новой таблице по-прежнему есть хотя бы один отрицательный свободный член, то описанная процедура повторяется, начиная с операции а), необходимое число раз.

⁴⁾ Напомним, что всякое действительное число a можно представить в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$ — целая часть числа a , а $\{a\} = a - [a]$ — его дробная часть.

Если все элементы β_i вновь полученной симплекс-таблицы неотрицательны, то допустимое базисное решение найдено. Отметим, что выбор опорного элемента α_{kl} гарантирует неотрицательность коэффициентов p_j новой симплекс-таблицы. Поэтому найденное допустимое базисное решение является и оптимальным.

4. Если найденное в разделе 3 решение задачи линейного программирования удовлетворяет условию целочисленности, то вычисления завершаются, а если нет, то продолжаются переходом к разделу 2 описания алгоритма.

Описанный алгоритм позволяет найти решение полностью целочисленной задачи линейного программирования, или установить отсутствие решений за конечное число итераций.

Пример 8. Решить задачу 17.226 методом Гомори.

Введя дополнительные переменные $x_3, x_4 \geq 0$, запишем эту задачу в каноническом виде:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1 - 20x_2 \rightarrow \min, \\ -x_1 + 10x_2 + x_3 &= 40, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 &= 29, \\ x_j &\geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Отметим, что так как все коэффициенты ограничений-равенств данной задачи целые, то целочисленность исходных переменных x_1, x_2 влечет целочисленность и дополнительных переменных x_3, x_4 . Поэтому и после перехода к каноническому виду можно рассматривать данную задачу как полностью целочисленную и применить для ее решения метод Гомори.

Одна из угловых точек допустимого множества нецелочисленной задачи очевидна: $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 40, 29)$. Запишем симплекс-таблицу для этой угловой точки:

	x_1	x_2	
x_3	-1	10	40
x_4	4	2	29
	1	-20	0

Решение нецелочисленной задачи находится за две итерации симплекс-метода:

	x_1	x_3			x_4	x_3		
x_2	-1/10	1/10	4	\rightarrow	x_2	1/42	4/42	9/2
x_4	42/10	-2/10	21		x_1	10/42	-2/42	5
	-1	2	80			10/42	82/42	85

Это решение $\mathbf{x}^* = (5, 9/2, 0, 0)$, $f^* = -85$ не удовлетворяет условию целочисленности, поэтому дополняем последнюю симплекс-таблицу строкой (32):

	x_4	x_3	
x_2	1/42	4/42	9/2
x_1	10/42	-2/42	5
x_5	-1/42	-4/42	-1/2
	10/42	82/42	85

Для перехода к допустимому базисному решению находим разрешающий элемент по описанному правилу и преобразуем симплекс-таблицу:

	x_5	x_3	
x_2	1	0	4
x_1	10	-1	4
x_4	-42	4	21
	10	1	80

Последняя симплекс-таблица не только соответствует допустимому базисному решению, но и дает решение рассматриваемой задачи: $\tilde{\mathbf{x}}^* = (0, 4)$, $\tilde{f}^* = -80$.

Отметим, что дополнительное ограничение, введенное в симплекс-таблицу, имеет вид $-\frac{2}{42} \cdot x_4 - \frac{4}{42} \cdot x_3 \leq \frac{1}{2}$. С помощью уравнений $x_3 = 40 + x_1 - 10x_2$, $x_4 = 29 - 4x_1 - 2x_2$ перепишем его для переменных x_1 и x_2 : $x_2 \leq 4$. Отсюда видно, что дополнительное ограничение соответствует отсечению от допустимого множества U (многоугольника $ABCD$ на рис. 35) части, содержащей точку $\mathbf{x}^* = (5, 9/2)$ (вершину C этого многоугольника). \triangleright

Решить полностью целочисленные задачи линейного программирования 17.235–17.250 методом Гомори:

17.235. $f(\mathbf{x}) = -x_1 + x_4 \rightarrow \min,$

$$-2x_1 + x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_1 + x_2 - 2x_4 = 2,$$

$$x_1 + x_3 + 3x_4 = 3,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 5.$$

17.236. $f(\mathbf{x}) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \min,$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 3,$$

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = 5,$$

$$3x_2 + x_4 + x_5 = 4,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 5.$$

17.237. $f(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 8,$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 4,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

17.238. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

17.239. $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + x_5 \rightarrow \min,$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2,$$

$$x_3 - x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 5.$$

17.240. $f(\mathbf{x}) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8,$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 10,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

17.241. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 4.$$

17.242. $f(\mathbf{x}) = -x_3 \rightarrow \min,$

$$-6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6,$$

$$7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, 5.$$

Отметим, что переход к каноническому виду в полностью целочисленной задаче линейного программирования, содержащей ограничения-неравенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (33)$$

не приводит, вообще говоря, к полностью целочисленной задаче в каноническом виде, так как в преобразованных ограничениях (33)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

вспомогательные переменные x_{n+i} не подчинены требованию целочисленности.

Однако если все коэффициенты a_{ij}, b_i в (33) — целые числа, то условие целочисленности можно распространить и на x_{n+i} , как это сделано при решении примера 8.

Полностью целочисленную задачу в каноническом виде можно получить также, если в (33) a_{ij} , b_i — рациональные числа. Для этого следует умножить (33) на общее кратное знаменателей коэффициентов a_{ij} , b_i (т. е. перейти к целым коэффициентам в (33)) и лишь после этого ввести вспомогательные переменные x_{n+i} .

17.243. $f(\mathbf{x}) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10,$$

$$2x_1 + 4x_3 \geq 14,$$

$$2x_2 + x_3 \geq 7,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3.$$

17.244. $f(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,$$

$$3x_1 + 2x_3 \geq 18,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3.$$

17.245. $f(\mathbf{x}) = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$

$$4x_1 + x_2 \leq 44,$$

$$x_1 \leq 22,$$

$$x_2 \leq 18,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2.$$

17.246. $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \geq 1,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \geq 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3.$$

17.247. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min,$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq \frac{25}{6},$$

$$x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 \leq 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3.$$

17.248. В цехе размещены 100 станков 1-го типа и 200 станков 2-го типа, на каждом из которых можно производить детали A_1 и A_2 . Производительность станков в сутки, стоимость 1 детали каждого вида и минимальный суточный план их выпуска представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.7

Детали	Производительность, дет./сут		Стоимость 1 детали, руб.	Минимальный суточный план
	Тип 1	Тип 2		
A_1	20	15	6	1510
A_2	35	30	4	4500

Найти количества x_{ij} станков i -го типа, $i = 1, 2$, которые необходимо выделить для производства деталей A_j , $j = 1, 2$, с таким расчетом, чтобы стоимость продукции, производимой в сутки, была максимальной.

17.249. Решить задачу 17.183, считая, что в результате усовершенствования технологического процесса расход меди на изготовление одного изделия A_2 снизился с 50 до 40 кг.

17.250. Решить задачу 17.199 в предположении, что товары A_1 и A_2 выпускаются в количествах:

- а) кратных 1 кг;
- б) кратных 2 кг.

Если требованию целочисленности подчинены не все переменные задачи линейного программирования, то такая задача называется *частично целочисленной*.

Для решения частично целочисленных задач также используется метод Гомори, но его алгоритм в этом случае отличается видом коэффициентов $\alpha_{n+1,j}$ в дополнительной строке (32), а именно

$$\alpha_{n+1,j} = \begin{cases} -\alpha_{rj}, & \text{если } \alpha_{rj} \geq 0, \\ \frac{\{\beta_r\}}{1 - \{\beta_r\}} \alpha_{rj}, & \text{если } \alpha_{rj} < 0, \end{cases}$$

если переменная x_j подчинена требованию целочисленности, и

$$\alpha_{n+1,j} = \begin{cases} -\{\alpha_{rj}\}, & \text{если } \{\alpha_{rj}\} \leq \{\beta_r\}, \\ \frac{\{\beta_r\}}{1 - \{\beta_r\}} (\{\alpha_{rj}\} - 1), & \text{если } \{\alpha_{rj}\} > \{\beta_r\}, \end{cases}$$

для x_j , свободных от этого требования.

Разумеется, вычисления заканчиваются, когда целыми являются не обязательно все коэффициенты β_i симплекс-таблицы, а только те, которым соответствуют переменные x_i , подчиненные требованию целочисленности.

Решить частично целочисленные задачи линейного программирования 17.251–17.256 методом Гомори:

17.251. $f(\mathbf{x}) = x_1 - 10x_2 \rightarrow \min,$
 $3x_1 + x_2 \leq 12,$
 $-8x_1 + 3x_2 \leq 24,$
 $x_j \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z}.$

17.252. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2 \leq 4,$
 $2x_1 + x_2 \leq 4,$
 $x_j \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}.$

17.253. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$
 $x_2 + x_3 = 7/2,$
 $x_1 + x_2 + x_4 = 7,$
 $-x_1 + x_2 + x_5 = 2,$
 $x_j \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}.$

17.254. $f(\mathbf{x}) = -10x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 3x_4 \rightarrow \min,$
 $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3/2,$
 $x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 7/2,$
 $2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4,$
 $x_j \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$

17.255. Решить задачу 17.182 об оптимальном составе сплава, предполагая, что сырье второго вида приобретается в количествах, кратных 1 кг, а сырье первого вида — в произвольных количествах.

17.256. Решить задачу 17.199 в предположении, что:

- а) товар A_1 выпускается в количествах, кратных 1 кг, а товар A_2 — в произвольных количествах;
- б) товар A_1 выпускается в произвольных количествах, а товар A_2 — в количествах, кратных 1 кг.

§ 4. Нелинейное программирование

1. **Задачи, сводящиеся к линейному программированию.** В наиболее общей постановке задача нелинейного программирования формулируется следующим образом:

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (2)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = l + 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$, — заданные (не обязательно линейные) функции n переменных. Отметим, что условие неотрицательности переменных $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$, входящее в постановки многих задач нелинейного программирования, можно записать в виде неравенств (3), положив $g_j(\mathbf{x}) = -x_j, b_j = 0$.

Некоторые задачи нелинейного программирования сводятся к задачам линейного программирования, методы решения которых описаны в § 3.

Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0} \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = l+1, \dots, m, \quad (6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Будем считать, что во внутренних точках допустимого множества U задачи (4)–(7) знаменатель целевой функции из (4) не обращается в нуль и, следовательно, сохраняет знак. Если этот знаменатель отрицателен, то умножим числитель и знаменатель дроби из (4) на -1 и будем в дальнейшем считать, что $\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 > 0$ для всех $x \in U$.

Обозначим $y_0 = 1 / \left(\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 \right)$ (очевидно, $y_0 > 0$ при $\mathbf{x} \in U$) и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j$, $j = 1, \dots, n$.

В новых переменных y_j , $j = 0, 1, \dots, n$, задача (4)–(7) принимает следующий вид:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{j=0}^n c_j y_j \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 &= 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 &\leq 0, \quad i = l+1, \dots, m, \\ \sum_{j=0}^n d_j y_j &= 1, \\ y_j &\geq 0, \quad j = 0, \dots, n, \end{aligned} \quad (8)$$

т. е. превращается в задачу линейного программирования (см. § 3). Отметим, что требование $y_0 \geq 0$, включенное в условие задачи (8), не ограничивает возможного изменения переменной y_0 , так как $y_0 > 0$ при $\mathbf{x} \in U$.

Найдем решение $\mathbf{y}^* = (y_0^*, \dots, y_n^*)$, \tilde{f}^* задачи линейного программирования (8) и, используя равенства

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}, \quad j = 1, \dots, n, \quad f^* = \min_U f(\mathbf{x}) = \tilde{f}^*, \quad (9)$$

получим решение исходной задачи дробно-линейного программирования (4)–(7).

Если $y_0^* = 0$, то допустимое множество U задачи (4)–(7) не ограничено и минимум целевой функции $f(\mathbf{x})$ на нем не достигается.

Решить задачи дробно-линейного программирования 17.257–17.266:

$$\begin{aligned} 17.257. \quad f(\mathbf{x}) &= \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \min, \\ &x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ &2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

↔ Знаменатель $x_1 + 2x_2 + 1$ целевой функции положителен при всех \mathbf{x} из допустимого множества U , так как $x_1, x_2 \geq 0$.

Вводя переменные $y_0 = 1/(x_1 + 2x_2 + 1)$, $y_j = y_0 x_j$, $j = 1, 2, 3$, получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= -2y_1 + y_2 \rightarrow \min, \\ &y_1 - 2y_2 - 2y_0 \leq 0, \\ &2y_1 - y_2 + y_3 - 6y_0 = 0, \\ &y_1 + 2y_2 + y_0 = 1, \\ &y_j \geq 0, \quad j = 0, \dots, 3. \end{aligned}$$

Приведя эту задачу к каноническому виду и решив ее симплекс-методом, находим $y_0^* = 1/3$, $y_1^* = 2/3$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 2/3$, $\tilde{f}^* = -4/3$, откуда, используя формулы (9), получаем решение исходной задачи: $\mathbf{x}^* = (2; 0; 2)$, $f^* = -4/3$. ▷

$$\begin{aligned} 17.258. \quad f(\mathbf{x}) &= \frac{4x_1 + 3x_2}{2x_1 + x_2} \rightarrow \min, \\ &x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ &x_1 + x_2 \leq 10, \\ &x_1 \leq 6, \\ &x_2 \leq 7, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$17.259. f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 - x_2 - x_3}{2x_2 + x_3 + 1} \rightarrow \min,$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 8,$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

$$17.260. f(\mathbf{x}) = \frac{3x_2 - 2x_3}{x_2 + 3x_3} \rightarrow \min,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$$

$$17.261. f(\mathbf{x}) = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 3,$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 4,$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 6,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

$$17.262. f(\mathbf{x}) = \frac{-2x_1 - x_2 + x_3}{x_1 + 3x_2 + 5x_3} \rightarrow \min,$$

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 12,$$

$$7x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12,$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

$$17.263. f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 - x_2 - 3}{3x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 9,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 10,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

$$17.264. f(\mathbf{x}) = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 3x_2 + 2} \rightarrow \min,$$

$$4x_1 - x_2 \leq 5,$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7,$$

$$-3x_1 + 4x_2 + x_4 = 17,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$$

$$17.265. f(\mathbf{x}) = \frac{-3x_1 + 2x_2 + 1}{x_1 + 2x_2 + 3} \rightarrow \min,$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_4 = 10,$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 20,$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_5 = 35,$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_6 = 11,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

$$17.266. f(\mathbf{x}) = \frac{x_1 - 2x_2 + 3}{x_2 + 2} \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ & -3x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ & -3x_1 + 2x_2 + x_6 = 11, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Другой важный класс задач нелинейного программирования, решение которых можно найти методами линейного программирования, образуют *задачи квадратичного программирования*, в которых требуется минимизировать выпуклую функцию (см. § 2) на допустимом множестве, заданном линейными ограничениями, т. е.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{r}, \mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ — симметричная матрица размера $n \times n$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ — заданный вектор. Напомним, что если матрица \mathbf{Q} положительно определена, то квадратичная функция $f(\mathbf{x})$ из (10) является выпуклой в \mathcal{E}_n .

На основании известной теоремы Куна–Таккера [1] точка минимума $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ целевой функции $f(\mathbf{x})$ из (10) на допустимом множестве U (11), (12) может быть найдена как решение следующей системы уравнений с дополнительными переменными $\lambda_i, x_{n+i}, i = 1, \dots, m; \mu_j, j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^n q_{ij}x_i + r_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \mu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (14)$$

$$\lambda_i x_{n+i} = 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad \mu_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

удовлетворяющее условию неотрицательности

$$x_j \geq 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Для решения системы (13)–(16) можно использовать метод искусственного базиса (см. § 3), позволяющий найти одну из угловых точек множества, заданного ограничениями (13), (14), (16). Так как эта точка

принадлежит указанному множеству, то она удовлетворяет перечисленным ограничениям.

При реализации метода искусственного базиса следует учитывать и условия (15), т. е. не включать в базисные одновременно переменные λ_i и x_{n+i} с одним и тем же индексом i и переменные x_j, μ_j с одинаковым номером j .

Пример 1. Решить задачу квадратичного программирования

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \rightarrow \min, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Л Матрица $Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ квадратичной функции $f(\mathbf{x})$ положительно определена (проверьте самостоятельно!). Система (13)–(16) в данном случае принимает вид

$$2x_1 - 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 = 2, \quad (17)$$

$$-2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_2 = 6, \quad (18)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad (19)$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \quad (20)$$

$$\mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \lambda_1 x_3 = \lambda_2 x_4 = 0, \quad (21)$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0; \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0; \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

Будем искать угловую точку множества, определяемого этой системой, методом искусственного базиса. При этом, так как уравнения (19) и (20) легко разрешаются относительно переменных x_3 и x_4 , для уменьшения размера симплекс-таблиц дополнительные переменные (x_5 и x_6) вводим только в уравнения (17) и (18), считая базисными переменными начальной угловой точки x_3, x_4, x_5 и x_6 .

Вспомогательную целевую функцию $\tilde{f}(\mathbf{x}) = x_5 + x_6$ выразим через свободные переменные $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ и μ_2 с помощью уравнений (17) и (18): $\tilde{f}(\mathbf{x}) = -2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + 8$.

Последовательность симплекс-таблиц, приводящих к решению задачи, приведена ниже. Рамками обведены опорные элементы, а те свободные переменные, которые на данном шаге нельзя переводить в базисные из-за условий (21), обведены кружками.

В последней таблице элементы нижней строки неотрицательны, следовательно, минимум вспомогательной целевой функции $\tilde{f}^* = 0$ достигается в угловой точке, соответствующей этой таблице.

Поэтому искомое решение задачи квадратичного программирования имеет вид $\mathbf{x}^* = (4/5, 6/5), f^* = f(\mathbf{x}^*) = 36/5$. ▷

	x_1	x_2	(λ_1)	(λ_2)	μ_1	μ_2	
x_5	2	-2	1	-1	-1	0	2
x_6	-2	4	1	2	0	-1	6
x_3	1	1	0	0	0	0	2
x_4	-1	2	0	0	0	0	2
	0	-2	-2	-1	1	1	-8

	x_1	x_4	(λ_1)	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	1	1	1	-1	-1	0	4
x_6	0	-2	1	2	0	-1	2
x_3	3/2	-1/2	0	0	0	0	1
x_2	-1/2	1/2	0	0	0	0	1
	-1	1	-2	-1	1	1	-6

	x_3	x_4	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	-2/3	4/3	1	-1	-1	0	10/3
x_6	0	-2	1	2	0	-1	2
x_1	2/3	-1/3	0	0	0	0	2/3
x_2	1/3	1/3	0	0	0	0	4/3
	2/3	2/3	-2	-1	1	1	-16/3

	x_3	x_4	x_6	λ_2	μ_1	(μ_2)	
x_5	-2/3	10/3	-1	-3	-1	1	4/3
λ_1	0	-2	1	2	0	-1	2
x_1	2/3	-1/3	0	0	0	0	2/3
x_2	1/3	1/3	0	0	0	0	4/3
	2/3	-10/3	2	3	1	-1	-4/3

	x_3	x_5	x_6	λ_2	μ_1	μ_2	
x_4					4/10		
λ_1					28/10		
x_1					4/5		
x_2					6/5		
	0	1	1	0	0	0	0

Замечание. Если задача квадратичного программирования наряду с ограничениями-неравенствами (11) содержит и равенства $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, то для преобразования их к виду (11) следует выразить из этих равенств какие-либо базисные переменные через остальные и записать условие неотрицательности для базисных переменных.

Например, преобразуем ограничения-равенства

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 16, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

к виду (11). Разрешив их относительно x_3 и x_4 , находим $x_3 = 6 - 2x_1 + x_2$, $x_4 = 10 - x_1 - 2x_2$. Учитывая условие неотрицательности $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, получим ограничения-неравенства (11): $2x_1 - x_2 \leq 6$, $x_1 + 2x_2 \leq 10$.

Решить задачи квадратичного программирования 17.267–17.276:

17.267. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 13,$
 $2x_1 + x_2 \leq 10,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

17.268. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \rightarrow \min,$
 $5x_1 + 13x_2 \leq 51,$
 $15x_1 + 7x_2 \leq 107,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

17.269. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 6,$
 $2x_1 + x_2 \leq 4,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

17.270. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 \rightarrow \min,$
 $9x_1 + 8x_2 \leq 72,$
 $x_1 + 2x_2 \leq 10,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

17.271. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

17.272. $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 16,$
 $3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4,$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$

17.273. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6,$
 $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12,$
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

17.274. $f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6,$
 $x_1 + x_2 \leq 1,$
 $x_2 + x_3 \leq 1,$
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

17.275. $f(\mathbf{x}) = x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 = 4,$
 $x_2 + x_3 = 8,$
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

17.276. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 6,$
 $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

Минимизировать в многоугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(5, 8)$, $(10, 4)$, $(6, 0)$ следующие функции:

$$17.277. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2.$$

$$17.278. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 16x_2.$$

$$17.279. f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1 - 32x_2.$$

$$17.280. f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 40x_1 - 48x_2.$$

2. Методы возможных направлений. Основная идея этой группы методов решения задач нелинейного программирования заключается в построении последовательных приближений к точке минимума \mathbf{x}^* целевой функции $f(\mathbf{x})$ на допустимом множестве U :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{e}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{x}^{(0)} \in U, \quad \alpha_k > 0. \quad (22)$$

Эти методы напоминают безусловную минимизацию $f(\mathbf{x})$ градиентными методами (см. § 2).

Вектор $\mathbf{e}^{(k)}$, определяющий направление перемещения (22) из точки $\mathbf{x}^{(k)}$ в точку $\mathbf{x}^{(k+1)}$, должен удовлетворять следующим двум требованиям:

1. Для достаточно малых $\alpha_k > 0$ точка $\mathbf{x}^{(k+1)}$ из (22) принадлежит множеству U (т. е. $\mathbf{e}^{(k)}$ задает *возможное направление*).

2. Для достаточно малых $\alpha_k > 0$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$ (т. е. $\mathbf{e}^{(k)}$ определяет *направление убывания* $f(\mathbf{x})$).

Первое условие означает, в частности, что для граничных точек $\mathbf{x}^{(k)}$ допустимого множества U вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ направлен внутрь U .

Величина $\alpha_k > 0$ в (22) выбирается из условия наибольшего убывания целевой функции в направлении $\mathbf{e}^{(k)}$ с учетом требования $\mathbf{x}^{(k+1)} \in U$.

Рассмотрим сначала метод возможных направлений решения задачи минимизации выпуклой дифференцируемой нелинейной функции $f(\mathbf{x})$ на допустимом множестве U , заданном линейными ограничениями

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i^5), \quad i = 1, \dots, m, \quad (24)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Опишем выбор вектора $\mathbf{e}^{(k)} = (e_1^{(k)}; \dots; e_n^{(k)})$ из (22), определяющего возможное направление убывания функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(k)}$. Рассмотрим возможные случаи.

⁵) Если среди этих ограничений есть равенства, то преобразовать их к виду (24) можно описанным выше способом (см. замечание на с. 392).

1. Пусть в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ все неравенства (24) и (25) выполняются как строгие. Это означает, что $\mathbf{x}^{(k)}$ — внутренняя точка допустимого множества U . Тогда

$$\mathbf{e}^{(k)} = -\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (26)$$

т. е. определение очередного приближения $\mathbf{x}^{(k+1)}$ из (22) совпадает с итерацией градиентного метода (см. § 2).

2. Пусть хотя бы одно из неравенств (24), (25) в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ обращается в равенство, т. е. $\mathbf{x}^{(k)}$ является граничной точкой допустимого множества U . Тогда выбор $\mathbf{e}^{(k)}$ в соответствии с (26), вообще говоря, невозможен, так как может оказаться, что точка $\mathbf{x}^{(k+1)}$ из (22) при любом $\alpha_k > 0$ не принадлежит множеству U ($\mathbf{e}^{(k)}$ из (26) не является возможным в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ направлением).

Опишем, как определять возможное направление убывания $\mathbf{e}^{(k)}$ в этом случае.

Обозначим через I_k и J_k множества индексов, соответствующих ограничениям (24) и (25), которые в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ обращаются в равенства, т. е.

$$I_k = \left\{ i \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} = b_i \right\}, \quad J_k = \{ j \mid x_j^{(k)} = 0 \}. \quad (27)$$

Представим компоненты $e_j^{(k)}$ вектора $\mathbf{e}^{(k)}$ для $j \notin J_k$ в виде

$$e_j^{(k)} = e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-} \quad (6), \quad (28)$$

где

$$e_j^{(k)+} = \begin{cases} e_j^{(k)}, & \text{если } e_j^{(k)} \geq 0, \\ 0, & \text{если } e_j^{(k)} < 0; \end{cases}$$

$$e_j^{(k)-} = \begin{cases} 0, & \text{если } e_j^{(k)} \geq 0, \\ -e_j^{(k)}, & \text{если } e_j^{(k)} < 0. \end{cases}$$

Очевидно, $e_j^{(k)+} \geq 0$, $e_j^{(k)-} \geq 0$, и $e_j^{(k)+} \cdot e_j^{(k)-} = 0$ для всех $j \notin J_k$.

⁶⁾ Такое представление для $e_j^{(k)}$, $j \notin J_k$, позволяет находить вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ как решение задачи линейного программирования, содержащей условие неотрицательности переменных, несмотря на то, что его компоненты могут быть отрицательными.

Для $j \in J_k$ представление (28) не используется, так как у вектора $\mathbf{e}^{(k)}$, определяющего возможное направление, компоненты $e_j^{(k)}$ с номерами $j \in J_k$ не могут быть отрицательными.

Вектор $\mathbf{e}^{(k)} = (e_1^{(k)}, \dots, e_n^{(k)})$ из (22) ищется как решение следующей задачи линейного программирования:

$$\tilde{f}_k(\mathbf{e}^{(k)}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{e}^{(k)}) =$$

$$= \sum_{j \in J_k} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} e_j^{(k)} + \sum_{j \notin J_k} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j} (e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}) \rightarrow \min, \quad (29)$$

$$(\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{e}^{(k)}) = \sum_{j \in J_k} a_{ij} e_j^{(k)} + \sum_{j \notin J_k} a_{ij} (e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}) \leq 0, \quad i \in I_k, \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^n |e_j^{(k)}| = \sum_{j \in J_k} e_j^{(k)} + \sum_{j \notin J_k} (e_j^{(k)+} + e_j^{(k)-}) \leq 1, \quad (31)$$

$$e_j^{(k)} \geq 0, \quad j \in J_k, \quad (32)$$

$$e_j^{(k)+}, e_j^{(k)-} \geq 0, \quad j \notin J_k, \quad (33)$$

$$e_j^{(k)+} \cdot e_j^{(k)-} = 0, \quad j \notin J_k \quad ^7), \quad (34)$$

где $\mathbf{a}^{(i)} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$.

Поясним смысл соотношений (29)–(33).

1. Минимуму целевой функции $\tilde{f}_k(\mathbf{e}^{(k)})$ из (29) соответствует минимально возможный с учетом ограничений (30)–(34) угол между искомым вектором $\mathbf{e}^{(k)}$ и антиградиентом $-\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$, определяющим направление скорейшего убывания $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(k)}$.

2. Ограничение (30) для каждого $i \in I_k$ означает, что вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ составляет угол $\varphi_i \geq \frac{\pi}{2}$ с вектором $\mathbf{a}^{(i)}$, нормальным к граничной гиперплоскости $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ допустимого множества U и направленным вне U .

⁷⁾ Для учета дополнительного условия (34) при решении задачи (29)–(33) симплекс-методом следует не включать переменные $e_j^{(k)+}$ и $e_j^{(k)-}$ с одинаковым номером j в число базисных одновременно.

Так как точка $\mathbf{x}^{(k)}$ принадлежит этой гиперплоскости, то условие (30) для любого $i \in I_k$ гарантирует, что направление $\mathbf{e}^{(k)}$ является возможным по отношению к i -му ограничению (24) исходной задачи. Рис. 36 поясняет смысл ограничений (30) в двумерном случае.

3. Условие (31) является ограничением на длину вектора $\mathbf{e}^{(k)}$ и обеспечивает ограниченность снизу целевой функции $\tilde{f}_k(\mathbf{e}^{(k)})$ из (29).

4. Неравенство (32) для каждого $j \in J_k$ гарантирует, что направление исходного вектора $\mathbf{e}^{(k)}$ является возможным по отношению к j -му ограничению (25) исходной задачи.

5. Соотношения (33) и (34) следуют из представления (28) компонент $e_j^{(k)}$, $j \notin J_k$, вектора $\mathbf{e}^{(k)}$.

Опишем теперь, как определить величину перемещения α_k вдоль направления $\mathbf{e}^{(k)}$ из (22). Для найденного вектора $\mathbf{e}^{(k)}$ она находится из условия

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{e}^{(k)}) = \min_{\alpha > 0, \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{e}^{(k)} \in U} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{e}^{(k)}),$$

т. е.

$$\alpha_k = \min (\bar{\alpha}_{k1}, \dots, \bar{\alpha}_{km}, \bar{\alpha}_{k1}, \dots, \bar{\alpha}_{kn}, \alpha_k^*), \quad (35)$$

где $\bar{\alpha}_{ki}$ и $\tilde{\alpha}_{kj}$ — максимальные перемещения, при которых для точки $\mathbf{x}^{(k+1)}$ из (22) выполняются соответственно i -е ограничение (24) и j -е ограничение (25), т. е.

$$\bar{\alpha}_{ki} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } (\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{e}^{(k)}) \leq 0, \\ [b_i - (\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{x}^{(k)})]/(\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{e}^{(k)}), & \text{если } (\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{e}^{(k)}) > 0; \end{cases} \quad (36)$$

$$\tilde{\alpha}_{kj} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } e_j^{(k)} \geq 0, \\ -x_j^{(k)}/e_j^{(k)}, & \text{если } e_j^{(k)} < 0, \end{cases} \quad (37)$$

а α_k^* находится из условия наискорейшего спуска вдоль направления вектора $\mathbf{e}^{(k)}$ без учета ограничений (24), (25), т. е.

$$\Phi_k(\alpha_k^*) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha), \quad \text{где } \Phi_k(\alpha) = f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{e}^{(k)}). \quad (38)$$

Приведем описание k -го шага решения задачи (23)–(25) методом возможных направлений.

1. Подставить $\mathbf{x}^{(k)}$ в неравенства (24) и (25) и определить множества индексов I_k , J_k по формулам (27).

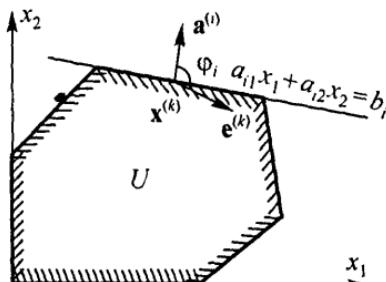


Рис. 36

2. Если $I_k = J_k = \emptyset$, найти вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ из (26), в противном случае определить $\mathbf{e}^{(k)}$ из решения задачи линейного программирования (29)–(33) с помощью формулы (28).

3. Для найденного вектора $\mathbf{e}^{(k)}$ определить α_k из формул (34)–(37).

4. Найти очередное приближение $\mathbf{x}^{(k+1)}$ по формуле (22).

При выполнении хотя бы одного из условий $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \varepsilon$ или $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — число, определяющее точность решения задачи, вычисления завершают, полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Любое из равенств $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\| = 0$, $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| = 0$ означает, что точка минимума \mathbf{x}^* функции $f(\mathbf{x})$ на множестве U найдена точно: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k)}$.

Пример 2. Решить следующую задачу нелинейного программирования с линейными ограничениями методом возможных направлений, завершая вычисления при $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq 0,01$ или $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq 0,01$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения выберем, например, точку $\mathbf{x}^{(0)} = (0,4; 1,4)$ (убедитесь, что $\mathbf{x}^{(0)} \in U$).

Шаг 1.

1. Ограничения (24) и (25) в точке $\mathbf{x}^{(0)}$ выполняются как строгие неравенства (проверьте!), т. е. $\mathbf{x}^{(0)}$ — внутренняя точка множества U , т. е. $I_0 = J_0 = \emptyset$.

2. В соответствии с (26) находим

$$\mathbf{e}^{(0)} = -\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = (7,2; 1,2). \quad (39)$$

3. Из формул (36), (37) получаем $\bar{\alpha}_{01} = 1/7$, $\bar{\alpha}_{02} = 1/12$, $\tilde{\alpha}_{01} = \tilde{\alpha}_{02} = +\infty$.

Определим α_0^* в соответствии с (38), используя условие минимума $\Phi'_0(\alpha) = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\alpha) &= f(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{e}^{(0)}) = (0,4 + \alpha \cdot 7,2 - 4)^2 + (1,4 + \alpha \cdot 1,2 - 2)^2, \\ \Phi'_0(\alpha) &= 107,04\alpha - 53,52 = 0, \quad \text{откуда } \alpha_0^* = 1/2. \end{aligned}$$

Из (35) окончательно находим

$$\alpha_0 = \min(1/7, 1/12, 1/2, +\infty) = 1/12. \quad (40)$$

4. Используя равенства (22), (39) и (40), получим

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0,4; 1,4) + \frac{1}{12}(7,2; 1,2) = (1; 1,5). \quad (41)$$

Шаг 2.

1. В точке $\mathbf{x}^{(1)}$ из (41) второе из ограничений задачи выполняется как равенство, поэтому $\mathbf{x}^{(1)}$ — граничная точка множества U , причем $I_1 = \{2\}$, $J_1 = \emptyset$.

2. Задача (29)–(33) для определения $\mathbf{e}^{(1)}$ принимает вид

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(\mathbf{e}^{(1)}) &= -6e_1^{(1)+} + 6e_1^{(1)-} - e_2^{(1)+} + e_2^{(1)-} \rightarrow \min, \\ e_1^{(1)+} - e_1^{(1)-} + 2e_2^{(1)+} - 2e_2^{(1)-} &\leqslant 0, \\ e_1^{(1)+} + e_1^{(1)-} + e_2^{(1)+} + e_2^{(1)-} &\leqslant 1, \\ e_j^{(1)+}, e_j^{(1)-} &\geqslant 0; \quad e_j^{(1)+} \cdot e_j^{(1)-} = 0, \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Записав эту задачу в каноническом виде с помощью дополнительных переменных и выбрав эти переменные в качестве базисных, в результате двух шагов симплекс-метода получим $e_1^{(1)+} = 2/3$, $e_2^{(1)-} = 1/3$, $e_1^{(1)-} = e_2^{(1)+} = 0$, т. е.

$$\mathbf{e}^{(1)} = (e_1^{(1)+} - e_1^{(1)-}, e_2^{(1)+} - e_2^{(1)-}) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right). \quad (42)$$

3. По формулам (36), (37) находим $\bar{\alpha}_{11} = 3/2$, $\bar{\alpha}_{12} = 9/2$, $\bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{11} = +\infty$, $\alpha_1^* = 156/85$, поэтому в соответствии с (38)

$$\alpha_1 = \min \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{156}{85}, +\infty \right) = \frac{3}{2}. \quad (43)$$

4. Очередное приближение $\mathbf{x}^{(2)}$ находим по формуле (22) с учетом (41), (42) и (43):

$$\mathbf{x}^{(2)} = \left(1; \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right) = (2; 1). \quad (44)$$

Шаг 3.

Как и на втором шаге, для определения $\mathbf{e}^{(2)}$ получаем задачу линейного программирования

$$\begin{aligned}f_2(\mathbf{e}^{(2)}) &= -4e_1^{(2)+} + 4e_1^{(2)-} - 2e_2^{(2)+} + 2e_2^{(2)-} \rightarrow \min, \\ e_1^{(2)+} - e_1^{(2)-} + e_2^{(2)+} - e_2^{(2)-} &\leqslant 0, \\ e_1^{(2)+} - e_1^{(2)-} + 2e_2^{(2)+} - 2e_2^{(2)-} &\leqslant 0, \\ e_1^{(2)+} + e_1^{(2)-} + e_2^{(2)+} + e_2^{(2)-} &\leqslant 1, \\ e_j^{(2)+}, e_j^{(2)-} &\geqslant 0; \quad e_j^{(2)+} \cdot e_j^{(2)-} = 0, \quad j = 1, 2,\end{aligned}$$

решив которую, получим

$$\mathbf{e}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right). \quad (45)$$

Как и на предыдущем шаге, находим $\bar{\alpha}_{21} = \bar{\alpha}_{22} = \tilde{\alpha}_{21} = +\infty$, $\tilde{\alpha}_{22} = \alpha_2^* = 1$, т. е.

$$\alpha_2 = \min(1, +\infty) = 1. \quad (46)$$

Из формул (22), (44)–(46) получаем

$$\mathbf{x}^{(3)} = (2, 1) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Шаг 4.

Найдя $\mathbf{e}^{(3)}$ по общему правилу, получим $\mathbf{e}^{(3)} = 0$, т. е. $\mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{x}^{(3)}$, и $\|\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(3)}\| = 0$. Это означает, что точка минимума \mathbf{x}^* найдена точно: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(4)} = (5/2; 1/2)$, $f^* = f(\mathbf{x}^{(4)}) = 9/2$.

Рис. 37 дает геометрическую иллюстрацию хода решения задачи. На нем штриховыми линиями показаны линии уровня $f(\mathbf{x})$ (окружности с центром в точке $(4, 2)$).

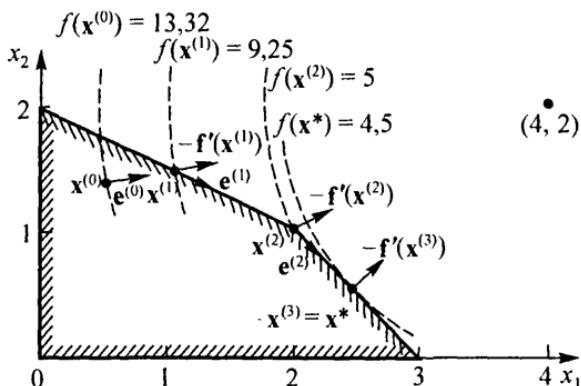


Рис. 37

Решить задачи нелинейного программирования с линейными ограничениями 17.281–17.290 методом возможных направлений, завершая вычисления при $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq 0,01$ или $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq 0,01$:

- 17.281.** $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + 5x_2 \leq 40,$
 $2x_1 + x_2 \leq 16,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

17.282. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 18x_1 - 20x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 \leqslant 15,$
 $2x_1 + 5x_2 \leqslant 60,$
 $3x_1 + x_2 \leqslant 30,$
 $x_1, x_2 \geqslant 0.$

17.283. $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 9)^2 \rightarrow \min,$
 $5x_1 + 2x_2 \leqslant 60,$
 $x_1 + x_2 \leqslant 15,$
 $x_1 + 4x_2 \leqslant 40,$
 $x_1, x_2 \geqslant 0.$

17.284. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 \leqslant 4,$
 $x_1, x_2 \geqslant 0.$

17.285. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 \rightarrow \min,$
 $6x_1 + 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 96,$
 $-2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8,$
 $x_j \geqslant 0, j = 1, \dots, 4.$

17.286. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 \leqslant 15,$
 $x_1 + 3x_2 + x_3 = 30,$
 $5x_1 + 3x_2 + x_4 = 60,$
 $x_j \geqslant 0, j = 1, \dots, 4.$

17.287. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 32x_2 \rightarrow \min,$
 $3x_1 + x_2 + x_3 = 30,$
 $x_1 + x_2 + x_4 = 15,$
 $2x_1 + 5x_2 + x_5 = 60,$
 $x_j \geqslant 0, j = 1, \dots, 5.$

17.288. $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 15,$
 $3x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 20,$
 $x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3.$

17.289. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 18,$
 $2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 20,$
 $x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3.$

17.290. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 7,$
 $3x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3,$
 $x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3.$

Метод возможных направлений используется также для решения задачи нелинейного программирования более общего, чем (23)–(25), вида, а именно

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (47)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (48)$$

где $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x})$ — выпуклые дифференцируемые в \mathcal{E}_n функции.

Опишем один из вариантов определения необходимого для решения этой задачи вектора $\mathbf{e}^{(k)}$ из (22) методом возможных направлений, а также укажем критерий окончания вычислений.

1. Выбор вектора $\mathbf{e}^{(k)}$. Если $\mathbf{x}^{(k)}$ — внутренняя точка допустимого множества U , т. е. $g_i(\mathbf{x}^{(k)}) < 0, i = 1, \dots, m$, то вектор $\mathbf{e}^{(k)}$ определяется так же, как в рассмотренном выше случае линейных ограничений (24), (25), т. е. $\mathbf{e}^{(k)} = -f'(\mathbf{x}^{(k)})$.

Если же $\mathbf{x}^{(k)}$ — граничная точка множества U , т. е. множество индексов

$$I_k = \{i | g_i(\mathbf{x}^{(k)}) = 0\} \quad (49)$$

непусто, то компоненты $e_j^{(k)}$ вектора $\mathbf{e}^{(k)}$ представляются в виде $e_j^{(k)} = e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}$ и находятся из решения следующей задачи линейного программирования с переменными $\sigma_k, e_j^{(k)+}, e_j^{(k)-}, j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= -\sigma_k \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} (e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}) + \sigma_k &\leq 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} (e_j^{(k)+} - e_j^{(k)-}) + \sigma_k &\leq 0, \quad i \in I_k, \\ \sum_{j=1}^n (e_j^{(k)+} + e_j^{(k)-}) &\leq 1, \\ \sigma_k, e_j^{(k)+}, e_j^{(k)-} &\geq 0, \quad e_j^{(k)+} \cdot e_j^{(k)-} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (50)$$

З а м е ч а н и е. Для ускорения сходимости метода возможных направлений множество индексов (49) иногда определяют не по точному, а приближенному равенству $g_i(\mathbf{x}^{(k)}) = 0$ со все возрастающей точностью ε_k , т. е. вместо I_k используют множество $I_k(\varepsilon_k) = \{i | -\varepsilon_k \leq g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0\}$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

2. Выбор величины перемещения α_k . Величина α_k находится по аналогии со случаем линейных ограничений (24), (25) на допустимое множество U , т. е.

$$\alpha_k = \min(\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}, \alpha_k^*),$$

где α_k^* определяется из (37), а α_{ki} , $i = 1, \dots, m$, — максимально возможное перемещение вдоль направления $e^{(k)}$ с учетом i -го ограничения (48), найденное из условия $g_i(x^{(k)} + \alpha_{ki}e^{(k)}) = 0$.

3. Критерий окончания вычислений. Условием достижения заданной точности решения $\varepsilon > 0$ задачи (47), (48) методом возможных направлений служит выполнение хотя бы одного из неравенств $\|f'(x^{(k)})\| \leq \varepsilon$, $\sigma_k \leq \varepsilon$. При выполнении этого условия полагают $x^* \approx x^{(k)}$, $f^* \approx f(x^{(k)})$.

Любое из равенств $f'(x^{(k)}) = 0$, $\sigma_k = 0$ означает, что точка минимума x^* функции $f(x)$ на множестве U найдена точно: $x^* = x^{(k)}$.

Пример 3. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом возможных направлений, завершая вычисления при $\|f'(x^{(k)})\| \leq 0,1$ или $\sigma_k \leq 0,1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ g_i(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 25 \leq 0. \end{aligned}$$

Функции $f(x)$ и $g_1(x)$ являются выпуклыми (проверьте!) и дифференцируемы в E_n , поэтому можно использовать метод возможных направлений.

Выберем начальное приближение $x^{(0)} = (0; 1)$. Очевидно, $x^{(0)} \in U$.
Шаг 1.

1. Так как $g_1(x^{(0)}) = -24 < 0$, то $x^{(0)}$ является внутренней точкой множества U и $I_k = \emptyset$.

2. Вектор $e^{(0)}$ находим по формуле $e^{(0)} = -f'(x^{(0)}) = (1, 1)$.

3. Найдем максимально возможное перемещение α_{01} из условия $g_1(x^{(0)} + \alpha_{01}e^{(0)}) = 0$: $(0 + \alpha_{01} \cdot 1)^2 + (1 + \alpha_{01} \cdot 1)^2 - 25 = 2\alpha_{01}^2 + 2\alpha_{01} - 24 = 0$, откуда $\alpha_{01} = 3$.

Определяя α_0^* из (38), получим $\alpha_0^* = +\infty$, так как функция $\Phi_0(\alpha) = f(x^{(0)} + \alpha e^{(0)}) = -2\alpha - 1$ неограниченно убывает при $\alpha \rightarrow +\infty$.

Отсюда находим величину перемещения на первом шаге: $\alpha_0 = \min(3, +\infty) = 3$.

4. Найдем следующее приближение (22):

$$x^{(1)} = (0, 1) + 3(1, 1) = (3, 4).$$

Шаг 2.

1. Поскольку $g_1(x^{(1)}) = 0$, то $x^{(1)}$ — граничная точка множества U и $I_1 = \{1\}$.

2. Вектор $\mathbf{e}^{(1)}$ находим из решения задачи линейного программирования (50):

$$\tilde{f}_1 = -\sigma_1 \rightarrow \min,$$

$$-e_1^{(1)+} + e_1^{(1)-} - e_2^{(1)+} + e_2^{(1)-} + \sigma_1 \leq 0,$$

$$6e_1^{(1)+} - 6e_1^{(1)-} + 8e_2^{(1)+} - 8e_2^{(1)-} + \sigma_1 \leq 0,$$

$$e_1^{(1)+} + e_1^{(1)-} + e_2^{(1)+} + e_2^{(1)-} \leq 1,$$

$$\sigma_1, e_j^{(1)+}, e_j^{(1)-} \geq 0, \quad e_j^{(1)+} e_j^{(1)-} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Решив ее симплекс-методом, получим $\sigma_1 = 1/8$, $e_1^{(1)+} = 9/16$, $e_2^{(1)-} = 7/16$, $e_1^{(1)-} = e_2^{(1)+} = 0$, т. е. $\mathbf{e}^{(1)} = (e_1^{(1)+} - e_1^{(1)-}, e_2^{(1)+} - e_2^{(1)-}) = (9/16, -7/16)$.

3. Величину перемещения α_1 находим, как и на предыдущем шаге: $\alpha_{11} = 16/65$, $\alpha_1^* = +\infty$, т. е. $\alpha_1 = 16/65$.

4. Очередное приближение $\mathbf{x}^{(2)}$ находим из (22):

$$\mathbf{x}^{(2)} = (3; 4) + \frac{16}{65} \left(\frac{9}{16}; -\frac{7}{16} \right) = (3,188; 3,892).$$

Шаг 3.

Так как $g_1(\mathbf{x}^{(2)}) = 0$, то точка $\mathbf{x}^{(2)}$ является граничной. Находя $\mathbf{e}^{(2)}$ и α_2 по общему правилу, получим: $\sigma_2 = 0,125$, $\mathbf{e}^{(2)} = (0,547; -0,453)$, $\alpha_2 = 0,186$. Отсюда $\mathbf{x}^{(3)} = (3,240; 3,809)$.

Переходя к следующему шагу, найдем $\sigma_3 = 0,094 < 0,1$, т. е. требуемая точность достигнута и $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(3)} = (3,240; 3,809)$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(3)}) = -7,049$. ▷

Решить задачи нелинейного программирования 17.291–17.298 методом возможных направлений, завершая вычисления при $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq 0,01$ или $\sigma_k \leq 0,01$.

17.291. $f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0.$$

17.292. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 6x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0.$$

17.293. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \leq 0.$$

17.294. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 6 \leq 0.$$

17.295. $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \leq 0,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 - 2 \leq 0.$$

17.296. $f(\mathbf{x}) = 10x_1 - x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 + 3 \leq 0,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_2^2 - 4 \leq 0.$$

17.297. $f(\mathbf{x}) = 4x_1 + x_2 \rightarrow \min,$

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2 - 1 \leq 0,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \leq 0.$$

17.298. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 \rightarrow \min,$

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2 \leq 0,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 \leq 0.$$

3. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования. Один из подходов к решению задач нелинейного программирования состоит в такой модификации градиентных методов безусловной минимизации (см. § 2), чтобы в процессе построения последовательных приближений к точке минимума учитывались ограничения на допустимое множество.

Ниже рассматриваются два метода минимизации, основанных на этом подходе применительно к решению гладкой задачи выпуклого программирования

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in U, \quad (51)$$

где $U \subset \mathcal{E}_n$ — выпуклое замкнутое множество, $f(\mathbf{x})$ — выпуклая дифференцируемая на U функция.

Первый метод (*метод проекции градиента*). На каждой итерации этого метода предусмотрена процедура возврата очередного приближения градиентного спуска $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})$ на допустимое множество U , если $\mathbf{x}^{(k+1)} \notin U$. Такой возврат производится посредством *проектирования* $\mathbf{x}^{(k+1)}$ на U , т. е. замены $\mathbf{x}^{(k+1)}$ на ближайшую точку множества U .

Определение. Пусть заданы замкнутое множество $U \subset \mathcal{E}_n$ и точка $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_n$. Точка $\mathbf{z}_U = P_U(\mathbf{z})$ называется *проекцией* точки z на множество U , если

$$\rho(\mathbf{z}_U, \mathbf{z}) = \min_{\mathbf{x} \in U} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

где $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ — расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{y} в пространстве \mathcal{E}_n .

Очевидно, для точки $\mathbf{z} \in U$ проекция $P_U(\mathbf{z})$ совпадает с \mathbf{z} .

Таким образом, в методе проекции градиента последовательные приближения $\mathbf{x}^{(k)}$ к точке минимума \mathbf{x}^* целевой функции $f(\mathbf{x})$ на множестве U вычисляются по формулам

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = P_U[\mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})], \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{x}^{(0)} \in U. \quad (52)$$

В зависимости от способа вычисления α_k из (52) различают несколько вариантов метода проекции градиента, самыми распространеными из которых являются следующие.

1. α_k находится, как в методе наискорейшего спуска безусловной минимизации (см. § 2), т. е. $\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha)$, где $\Phi_k(\alpha) = f[\mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})]$.

2. В предположении, что градиент $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ целевой функции удовлетворяет на множестве U условию Липшица, т. е.

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}') - \mathbf{f}'(\mathbf{x}'')\| \leq L \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| \quad (53)$$

для всех $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in U$, полагают $\alpha_k \equiv \alpha$, $k = 0, 1, \dots$, где α — произвольное число из интервала $(0; 2/L)$. Если известна минимальная константа Липшица L из (53), то выбирают, как правило, $\alpha = 1/L$.

Вычисления по формуле (52) завершаются при выполнении одного из неравенств $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq \varepsilon$ или $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$, где величина $\varepsilon > 0$ определяет точность решения задачи. Окончательно полагают $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Отметим, что определение проекции $P_U(\mathbf{z})$ для точки $\mathbf{z} \notin U$ является самостоятельной задачей нелинейного программирования

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in U, \quad (54)$$

решение которой может вызвать затруднения.

В частном случае, когда множество U определяется лишь линейными ограничениями, задача (54) представляет собой задачу квадратичного программирования. Ее решение может быть найдено за конечное число шагов, как описано выше.

Особый интерес при использовании метода проекции градиента представляют такие множества U , для которых задача проектирования решается в явном виде.

Пример 4. Найдите проекцию $P_U(\mathbf{z})$ точки $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_n$ на множество $U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n \mid \|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq R_0^2 \right\}$ (замкнутой шар радиуса R_0 с центром в точке 0 в пространстве \mathcal{E}_n).

▫ Запишем условие задачи (54) для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j^2 &\leq R_0^2. \end{aligned} \quad (55)$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. $\mathbf{z} \in U$, т. е. $\sum_{j=1}^n z_j^2 \leq R_0^2$. Тогда $P_U(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$.

2. $\mathbf{z} \notin U$, т. е. $\sum_{j=1}^n z_j^2 = R^2 > R_0^2$. Запишем ограничение-неравенство

(55) в виде равенства, добавив в его левую часть дополнительную переменную $x_{n+1} = y^2 \geq 0$. В результате получим задачу на условный минимум (см. Часть 2, с. 214):

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 \rightarrow \min,$$

$$\varphi(\mathbf{x}, y) = \sum_{j=1}^n x_j^2 + y^2 - R_0^2 = 0.$$

Для ее решения запишем необходимые условия экстремума функции

$$\text{Лагранжа } L(\mathbf{x}, y, \lambda) = \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2 + \lambda \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 + y^2 - R_0^2 \right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 2(x_j - z_j) + 2\lambda x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 + y^2 - R_0^2 = 0.$$

Решив эту систему $n+2$ уравнений с учетом предположения $\sum_{j=1}^n z_j^2 =$

$= R^2 > R_0^2$, находим $x_j = \frac{R_0}{R} z_j$, $j = 1, \dots, n$, $\lambda = \frac{R}{R_0} - 1$, $y = 0$, т. е.

$$\mathbf{x} = \frac{R_0}{R} \mathbf{z} = R_0 z \sqrt{\sum_{j=1}^n z_j^2}.$$

Проверим выполнение достаточного условия минимума $L(\mathbf{x}, y, \lambda)$ в найденной точке. Для этого найдем все частные производные второго порядка в точке $(\mathbf{x}; y; \lambda) = \left(\frac{R_0}{R} \mathbf{z}; 0; \frac{R}{R_0} - 1 \right)$: $\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2 \frac{R}{R_0}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y} = 0$, $j = 1, \dots, n$; $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, $i \neq j$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2 \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right)$.

Поэтому $d^2 L = 2 \frac{R}{R_0} \sum_{j=1}^n dx_j^2 + 2 \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) dy^2 > 0$ при $\sum_{j=1}^n dx_j^2 + dy^2 > 0$, т. е. достаточное условие минимума выполняется.

Окончательно

$$P_U(\mathbf{z}) = \begin{cases} \mathbf{z}, & \text{если } \sum_{j=1}^n z_j^2 \leq R_0^2, \\ R_0 z / \sqrt{\sum_{j=1}^n z_j^2}, & \text{если } \sum_{j=1}^n z_j^2 > R_0^2. \end{cases} \quad (56)$$

Если проекция точки $z \in \mathcal{E}_n$ на допустимое множество задачи нелинейного программирования находится в явном виде, то использование метода проекции градиента для ее решения значительно упрощается.

Пример 5. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом проекции градиента, завершая вычисления при выполнении одного из условий $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\| \leq 0,01$, $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq 0,01$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -x_1 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 1. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения возьмем, например, точку $\mathbf{x}^{(0)} = (0; 0,05) \in U$.

Градиент $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = (-1, 2x_2)$ удовлетворяет условию Липшица (53) с константой $L = 2$, так как

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}'(\mathbf{x}') - \mathbf{f}'(\mathbf{x}'')\| &= \sqrt{(-1+1)^2 + (2x'_2 - 2x''_2)^2} = \\ &= 2|x'_2 - x''_2| \leq 2\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|. \end{aligned}$$

Поэтому в (52) можно положить $\alpha_k \equiv \alpha \in (0; 1)$, $k = 0, 1, \dots$, например, $\alpha_k = 0,75$.

Шаг 1. Так как $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = (-1, 1)$, по формуле (52) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= P_U[\mathbf{x}^{(0)} - \alpha \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)})] = P_U[(0; 0,5) - 0,75(-1, 1)] = \\ &= P_U[(0,75; -0,25)]. \end{aligned}$$

Точка $(0,75; -0,25)$ принадлежит множеству U , так как $0,75^2 + 0,25^2 = 0,625 < 1$, поэтому $\mathbf{x}^{(1)} = (0,75; -0,25)$.

Требуемая точность не достигнута, так как $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\| = 1,06 > 0,01$.

Шаг 2. Как и на предыдущем шаге, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(1)}) &= (-1; -0,5), \quad \mathbf{x}^{(2)} = P_U[(0,75; -0,25) - 0,75(-1; -0,5)] = \\ &= P_U[(1,5; 0,125)]. \end{aligned}$$

Точка $(1,5; 0,125)$ допустимому множеству не принадлежит, потому что $1,5^2 + 0,125^2 = 2,266 > 1$. Так как множество U представляет собой замкнутый шар радиуса $R_0 = 1$ с центром в точке 0 в пространстве \mathcal{E}_2 , то, используя результат примера 4, по формуле (56) находим

$$\mathbf{x}^2 = P_U[(1,5; 0,125)] = \frac{(1,5; 0,125)}{\sqrt{1,5^2 + 0,125^2}} = (0,9965; 0,08304).$$

Требуемая точность не достигнута, так как $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| = 0,298 > 0,01$.

Результаты остальных шагов метода проекции градиента приведены в следующей таблице:

k	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\ \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\ $	$f'(\mathbf{x}^{(k)})$	$\mathbf{x}^{(k)} - \alpha f'(\mathbf{x}^{(k)})$
2	(0,9965; 0,0830)	0,298	(-1; 0,1661)	(1,7465; -0,0415)
3	(0,9997; -0,0238)	0,107	(-1; -0,0476)	(1,7497; 0,0119)
4	(0,99998; 0,00679)	0,031	(-1; 0,0136)	(1,74998; -0,00339)
5	(0,99998; -0,00194)	0,0087		Точность достигнута

Из таблицы следует, что $x^* \approx x^{(5)} = (0,99998; -0,00194)$, $f^* \approx f(x^{(5)}) = -1$. Отметим, что точное решение рассматриваемой задачи $\mathbf{x}^* = (1, 0)$, $f^* = -1$. \triangleright

В задачах 17.299–17.303 найти проекцию $\mathbf{z}_U = P_U(z)$ точки $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_n$ на указанные множества $U \subset \mathcal{E}_n$:

17.299. $U = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n | x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ (неотрицательный октант пространства \mathcal{E}_n).

17.300. $U = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n | a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\}$ (n -мерный параллелепипед).

17.301. $U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n | \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)})^2 \leq R_0 \right\}$ (замкнутый шар радиуса R_0 с центром в точке $\mathbf{x}^{(0)}$).

17.302. $U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n | \sum_{j=1}^n a_j x_j = b, \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\}$ (гиперплоскость с нормальным вектором \mathbf{a}).

17.303. $U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n | \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b, \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\}$ (полупространство в \mathcal{E}_n).

Используя результаты решения подходящих задач 17.299–17.303, решить задачи нелинейного программирования 17.304–17.313 методом проекции градиента. Вычисления завершить при $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq 0,01$:

17.304. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 16x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

17.305. $f(\mathbf{x}) = 9x_1^2 + x_2^2 - 54x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

17.306. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1 - 36x_2 \rightarrow \min,$
 $-1 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 \leq 2.$

17.307. $f(\mathbf{x}) = 2\sqrt{1 + x_1^2 + 2x_2^2} + x_1 + x_2 \rightarrow \min,$
 $5 \leq x_1 \leq 8, 1 \leq x_2 \leq 10.$

17.308. $f(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$
 $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1.$

17.309. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 \rightarrow \min,$
 $x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 9.$

17.310. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 + x_3 = 3.$

17.311. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + x_3 = 2.$

17.312. $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^4 + (x_2 - 1)^4 \rightarrow \min,$
 $2x_1 + x_2 \leq 2.$

17.313. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2 \rightarrow \min,$
 $2x_1 - 2x_2 \leq 1.$

Второй метод (метод условного градиента). Пусть $\mathbf{x}^{(k)} \in U$ — очередное приближение к решению гладкой задачи выпуклого программирования (51), причем $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}) \neq 0$. Тогда в окрестности точки $\mathbf{x}^{(k)}$ функция $f(\mathbf{x})$ представима в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + (\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|),$$

и линейная функция

$$f_k(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})$$

является приближением разности $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^{(k)})$ с точностью до величины $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|)$ в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^{(k)}$.

Поставим вспомогательную задачу минимизации на множестве U линейной функции $f_k(\mathbf{x})$, т. е.

$$f_k(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in U. \quad (57)$$

Пусть $\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$ — решение этой задачи. Следующее приближение $\mathbf{x}^{(k+1)}$ к точке минимума \mathbf{x}^* функции $f(\mathbf{x})$ на множестве U найдем по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k (\bar{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}), \quad \alpha_k \in (0; 1). \quad (58)$$

В силу выпуклости допустимого множества $\mathbf{x}^{(k+1)} \in U$.

Величина α_k из (58) в различных вариантах метода условного градиента вычисляется по-разному. Опишем два способа определения α_k .

1. $\alpha_k = \min(1, \alpha_k^*)$, где α_k^* найдено из условия наискорейшего спуска по направлению $\bar{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}$: $\Phi_k(\alpha_k^*) = \min_{\alpha > 0} \Phi_k(\alpha)$, где $\Phi_k(\alpha) = f[\mathbf{x}^{(k)} + \alpha(\bar{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)})]$.

2. В начале выполнения итерации (58) полагают $\alpha_k = 1$, после чего проверяют условие

$$f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (59)$$

Если оно нарушается, то α_k уменьшают (дробят) в 2 раза и повторно проверяют (50). Дробление α_k производят до выполнения неравенства (50), после чего переходят к следующей итерации (68).

Условие окончания вычислений по методу условного градиента совпадает с аналогичным условием метода проекции градиента.

Отметим, что вспомогательная задача (57) является, вообще говоря, задачей нелинейного программирования. Укажем случаи, когда поиск ее решения $\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$ не представляет затруднений.

1. Допустимое множество U задано линейными ограничениями и условием неотрицательности переменных. Тогда (57) — это задача линейного программирования и ее решение можно найти с помощью симплекс-метода (см. § 3).

2. Допустимое множество $U = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n | a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\}$ — n -мерный параллелепипед. Тогда

$$\bar{x}_j^{(k)} = \begin{cases} a_j, & \text{если } \partial f(x^{(k)}) / \partial x_j > 0, \\ b_j, & \text{если } \partial f(x^{(k)}) / \partial x_j < 0, \\ \frac{a_j + b_j}{2}, & \text{если } \partial f(x^{(k)}) / \partial x_j = 0. \end{cases} \quad (60)$$

3. Допустимое множество $U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n | \sum_{j=1}^n (x_j - y_j^{(0)})^2 \leq R_0^2 \right\}$ — шар радиуса R_0 с центром в точке $y^{(0)}$. Тогда

$$\bar{x}^{(k)} = y^{(0)} - R_0 \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})}{\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\|}.$$

Пример 6. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом условного градиента, завершая вычисления при

$\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leqslant 0,1$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ 0 &\leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 2. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения выберем, например, точку $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0) \in U$.

Шаг 1. Найдем градиент $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = (2x_1 - 4, 2x_2 - 2)$ в точке $\mathbf{x}^{(0)}$: $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = (-4, -2)$. Запишем вспомогательную задачу (57):

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{x}) &= (\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) = -4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ 0 &\leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 2. \end{aligned}$$

Это задача линейного программирования, ее можно решить симплекс-методом. Однако проще воспользоваться соотношениями (60), откуда следует $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} = (1, 2)$.

Найдем α_0 первым способом. В данном случае

$$\Phi_0(\alpha) = f[\mathbf{x}^{(0)} + \alpha(\bar{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)})] = f(\alpha, 2\alpha) = 5\alpha^2 - 8\alpha.$$

Из условия $\Phi'_0(\alpha) = 0$ находим $\alpha = \alpha_0^* = 0,8$. Поэтому $\alpha_0 = \min(1, 0,8) = 0,8$.

Вычислим очередное приближение $\mathbf{x}^{(1)}$ по формуле (58): $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0) + 0,8(1, 2) = (0,8; 1,6)$.

Так как $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\| = 1,79 > 0,1$, то требуемая точность не достигнута.

Результаты вычислений на следующих шагах метода условного градиента приведены в следующей таблице:

k	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\ \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\ $	$\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$	α_k
1	(0,8; 1,6)	1,789	(1, 0)	0,462
2	(0,892; 0,861)	0,745	(1, 2)	0,212
3	(0,915; 1,103)	0,243	(1, 0)	0,168
4	(0,929; 0,917)	0,187	(1, 2)	0,140
5	(0,939; 1,069)	0,152	(1, 0)	0,121
6	(0,947; 0,940)	0,129	(1, 2)	0,106
7	(0,952; 0,153)	0,113	(1, 0)	0,095
8	(0,957; 0,953)	0,1		Точность достигнута

Окончательно $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(8)} = (0,957; 0,953)$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(8)}) = -3,91$. \triangleright

Решить задачи нелинейного программирования 17.314–17.322 методом условного градиента, завершая вычисления при $\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leqslant 0,1$:

17.314. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 \leq 2,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

17.315. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 \rightarrow \min,$
 $-2 \leq x_1 \leq 2,$
 $0 \leq x_2 \leq 3.$

17.316. $f(\mathbf{x}) = e^{(2x_1-x_2)^2} + x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$
 $0 \leq x_1 \leq 1,$
 $-2 \leq x_2 \leq 3.$

17.317. $f(\mathbf{x}) = \ln(2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) + e^{(x_1-3x_2)^2} \rightarrow \min,$
 $x_1 \geq 3,$
 $x_2 \geq 0.$

17.318. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1^2 + x_2^2 \geq 1.$

17.319. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$
 $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1.$

17.320. $f(\mathbf{x}) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13) - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $(x_1 + 2)^2 + x_2^2 \leq 4.$

17.321. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 + 5 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 \leq 3,$
 $2x_1 + x_2 \leq 4,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

17.322. $f(\mathbf{x}) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2 + 26) - x_1 - x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2 \leq 4,$
 $0 \leq x_1 \leq 3,$
 $0 \leq x_2 \leq 2.$

4. Методы штрафных и барьерных функций. Один из подходов к решению задачи нелинейного программирования $f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \mathbf{x} \in U$ основан на замене этой задачи последовательностью задач безусловной минимизации

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \varphi_k(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (61)$$

где $\varphi_k(\mathbf{x})$ — функции, которые с ростом k во все большей степени учитывают ограничения, определяющие допустимое множество U исходной задачи.

В методе штрафных функций функции $\varphi_k(\mathbf{x})$ подбираются так, чтобы при больших k функция $f_k(\mathbf{x})$ из (61) мало отличалась от $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in U$ и быстро возрастала при удалении точки $\mathbf{x} \notin U$ от допустимого множества U .

Определение. Пусть $U \subset \mathcal{E}_n$ — заданное множество. Последовательность функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$, определенных в \mathcal{E}_n и обладающих свойством

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{x} \in U, \\ +\infty, & \text{если } \mathbf{x} \notin U, \end{cases}$$

называется *последовательностью штрафных функций* множества U .

Рассмотрим один из вариантов метода штрафных функций приближенного решения задачи нелинейного программирования

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &\rightarrow \min, \\ g_i(\mathbf{x}) &= 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad i = l+1, \dots, m, \end{aligned} \tag{62}$$

считая, что функции $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$, заданы во всем пространстве \mathcal{E}_n .

Положим

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = k\varphi(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{63}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^l g_i^2(\mathbf{x}) + \sum_{i=l+1}^m [g_i^+(\mathbf{x})]^2, \\ g_i^+(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0, & \text{если } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \\ g_i(\mathbf{x}), & \text{если } g_i(\mathbf{x}) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Равенства (63) определяет последовательность штрафных функций допустимого множества задачи (62) (проверьте!).

При определенных условиях последовательность решений задач безусловной минимизации (61), (63) сходится к решению \mathbf{x}^* задачи (62), поэтому для достаточно больших k полагают $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^* \approx f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Критерием достижения требуемой точности решения задачи (62) может служить неравенство

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k/2)}\| \leq \varepsilon, \tag{64}$$

где $\varepsilon > 0$ — число, характеризующее точность, k — четное число.

Для решения задач (61) можно использовать методы безусловной минимизации, рассмотренные в § 2.

Если в задаче (62) $f(\mathbf{x})$ — выпуклая квадратичная функция, а $g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$, — линейные функции, то точное решение вспомогательной задачи (61) можно найти из системы линейных уравнений $\partial f_k(\mathbf{x}) / \partial x_j = 0, j = 1, \dots, n$, определяющих стационарную точку функции $f_k(\mathbf{x})$.

Пример 7. Методом штрафных функций решить следующую задачу нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 2x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ g_1(\mathbf{x}) &= -x_1 - x_2 + 2 \leq 0, \\ g_2(\mathbf{x}) &= x_1 - 2x_2 + 1 \leq 0, \\ g_3(\mathbf{x}) &= -2x_1 + x_2 \leq 0. \end{aligned} \quad (65)$$

▷ Целевая функция $f(\mathbf{x})$ является выпуклой (проверьте!) квадратичной функцией, а ограничения, определяющие допустимое множество задачи, линейны. Поэтому решение $\mathbf{x}^{(k)}$ вспомогательной задачи (61) для любого $k = 1, 2, \dots$ может быть найдено точно из условия $f'_k(\mathbf{x}^{(k)}) = 0$.

Так как функция $\varphi_k(\mathbf{x})$ из (63) в различных областях пространства E_n задана по-разному, то при составлении вспомогательной функции $f_k(\mathbf{x})$ следует сделать определенное предположение о расположении ее точки минимума $\mathbf{x}^{(k)}$.

1. Предположим, что в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ безусловного минимума функции $f_k(\mathbf{x})$ все ограничения задачи (65) нарушаются, т. е. $g_i(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Тогда $g_l^+(\mathbf{x}^{(k)}) = g_i(\mathbf{x}^{(k)})$, $i = 1, 2, 3$, поэтому считаем, что

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + k[g_1^2(\mathbf{x}) + g_2^2(\mathbf{x}) + g_3^2(\mathbf{x})] = \\ &= (2 + 6k)x_1^2 + (1 + 6k)x_2^2 - 6kx_1x_2 - 2kx_1 - 8kx_2 + 5k. \end{aligned}$$

Решив систему уравнений

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} = (4 + 12k)x_1 - 6kx_2 - 2k = 0,$$

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} = -6kx_1 + (2 + 12k)x_2 - 8k = 0,$$

находим

$$x_1^{(k)} = \frac{18k^2 + k}{27k^2 + 18k + 2}, \quad x_2^{(k)} = \frac{27k^2 + 8k}{27k^2 + 18k + 2}.$$

Так как $g_3(\mathbf{x}^{(k)}) = -2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} = \frac{-9k^2 + 6k}{27k^2 + 18k + 2} < 0$ при всех $k = 1, 2, \dots$, то предположение $g_3(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$ не подтвердилось.

2. Предположим, что $g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0$, $i = 2, 3$, $g_1(\mathbf{x}^{(k)}) > 0$. Тогда $g_i^+(\mathbf{x}^{(k)}) = 0$, $i = 2, 3$; $g_1^+(\mathbf{x}^{(k)}) = g_1(\mathbf{x}^{(k)})$, поэтому считаем, что $f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + kg_1^2(\mathbf{x}) = (2 + k)x_1^2 + (1 + k)x_2^2 + 2kx_1x_2 - 4kx_1 - 4kx_2 + 4k$, откуда находим

$$x_1^{(k)} = \frac{2k}{3k + 2}, \quad x_2^{(k)} = \frac{4k}{3k + 2}. \quad (66)$$

Легко проверить, что сделанное предположение подтверждается, т. е. равенства (66) определяют точку безусловного минимума $\mathbf{x}^{(k)}$ вспомогательной функции $f_k(\mathbf{x})$ из (61) (убедитесь!).

$$\text{Окончательно находим } \mathbf{x}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right), f^* = f(\mathbf{x}^*) = \frac{8}{3}.$$

Отметим, что для решения вспомогательных задач (61) можно было использовать и приближенные (например, градиентные) методы безусловной минимизации (см. § 2). Тогда, если требуемая точность решения задачи нелинейного программирования (65) задана числом ε из (64), равным, например, 0,01, то получим $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(120)} = (0,6630; 1,3260)$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(120)}) = 2,6373$, так как $\|\mathbf{x}^{(120)} - \mathbf{x}^{(60)}\| = 0,01$. ▷

Решить задачи нелинейного программирования 17.323–17.332 методом штрафных функций, полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$ при $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k/2)}\| \leqslant 0,05$:

$$\begin{aligned} 17.323. \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \rightarrow \min, \\ & 2x_1 + 3x_2 - 13 \leqslant 0, \\ & 2x_1 + x_2 - 10 \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17.324. \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \rightarrow \min, \\ & 5x_1 + 13x_2 - 51 \leqslant 0, \\ & 15x_1 + 7x_2 - 107 \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17.325. \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17.326. \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 10x_2 \rightarrow \min, \\ & 9x_1 + 8x_2 - 72 \leqslant 0, \\ & x_1 + 2x_2 - 10 \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17.327. \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ & 2x_1 + 3x_2 - 6 \leqslant 0, \\ & 2x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17.328. \quad & f(\mathbf{x}) = x_2^2 - 2x_2 + 2x_1 + x_3 \rightarrow \min, \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 \leqslant 0, \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 - 2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17.329. \quad & f(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ & 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17.330. \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \rightarrow \min, \\ & x_1^2 + x_2^2 - 9 \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{17.331. } f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 3x_2 \rightarrow \min, \\ &- 2x_1 + x_2^2 \leq 0, \\ &x_1 - 2x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{17.332. } f(\mathbf{x}) &= -x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ &x_1 + x_2^2 - 1 \leq 0, \\ &-x_1 + x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

В *методе барьерных функций* исходная задача нелинейного программирования также сводится к последовательности задач безусловной минимизации (61), но функции $\varphi_k(\mathbf{x})$ выбираются таким образом, чтобы при больших k функции $f_k(\mathbf{x})$ из (61) мало отличались от $f(\mathbf{x})$ во внутренних точках \mathbf{x} допустимого множества U и в то же время приближении точки $\mathbf{x} \in U$ к границе множества U эти функции неограниченно возрастили.

Определение. Пусть множество $U \subset \mathcal{E}_n$ задано. Последовательность функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$, определенных во всех внутренних точках множества U , называется *последовательностью барьерных функций* этого множества, если выполняются условия:

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = 0$ для любой фиксированной внутренней точки \mathbf{x} множества U :

2. $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}^{(r)}) = +\infty$ для любой последовательности $\{\mathbf{x}^{(r)}\}$ внутренних точек множества U , сходящейся к какой-либо граничной точке этого множества.

Рассмотрим некоторые варианты метода барьерных функций решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\rightarrow \min, \\ g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{67}$$

Положим

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \varphi(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{68}$$

где

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m |g_i(\mathbf{x})|^{-p}, \quad p > 0, \tag{69}$$

или

$$\varphi(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^m \ln [-g_i(\mathbf{x})]. \tag{70}$$

Выражения (68)–(70) определяют последовательность барьерных функций допустимого множества U задачи (67) (проверьте!).

Пусть $\mathbf{x}^{(k)}$ — решение задачи безусловной минимизации (61), где функция $\varphi_k(\mathbf{x})$ определена равенствами (68), (69) или (68), (70). Полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(k)})$ для достаточно большого k , находим приближенное решение задачи нелинейного программирования (67) методом

дом барьерных функций. Для контроля достигнутой точности решения можно использовать критерий (64).

Пример 8. Решить следующую задачу нелинейного программирования методом барьерных функций, полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$ при $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k/2)}\| \leq 0,002$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min, \\ g_1(\mathbf{x}) &= -x_1 + x_2 \leq 0, \\ g_2(\mathbf{x}) &= 1 - x_1 - x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

▷ Используем последовательность барьерных функций (68), (70). Тогда задача (61) принимает вид

$$f_k(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - \frac{1}{k} [\ln(x_1 - x_2) + \ln(x_1 + x_2 - 1)] \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n.$$

Решая ее методом Ньютона (см. § 2) при $k = 500$ и $k = 1000$, получаем $\mathbf{x}^{(500)} = (0,6696; 0,3319)$, $\mathbf{x}^{(1000)} = (0,6682; 0,3326)$. Так как $\|\mathbf{x}^{(1000)} - \mathbf{x}^{(500)}\| = 1,65 \cdot 10^{-3} < 0,002$, полагаем $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(1000)} = (0,6696; 0,3319)$, $f^* \approx f(\mathbf{x}^{(1000)}) = 0,6687$. ▷

Решить задачи нелинейного программирования 17.333–17.339 методом барьерных функций, полагая $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(k)}$ при $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k/2)}\| \leq 0,05$:

17.333. $f(\mathbf{x}) = x_2^2 - 2x_2 - x_1 \rightarrow \min,$
 $x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0.$

17.334. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2^2 - 2 \leq 0,$
 $2x_1 + x_2 - 2 \leq 0.$

17.335. $f(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_1^2 - x_2 + 2 \rightarrow \min,$
 $2x_1^2 + 3x_2^2 - 6 \leq 0.$

17.336. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 3 \rightarrow \min,$
 $x_1^2 + x_2^2 - 8 \leq 0.$

17.337. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 + 1 \rightarrow \min,$
 $x_1^2 - 2x_2 \leq 0,$
 $-2x_1 + x_2 \leq 0.$

17.338. $f(\mathbf{x}) = -x_1 - 5x_2 \rightarrow \min,$
 $x_1 + x_2^2 - 1 \leq 0,$
 $-x_1 + 2x_2 \leq 0.$

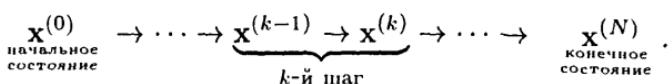
$$\begin{aligned} 17.339. \quad f(\mathbf{x}) &= 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 5)^2 \rightarrow \min, \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 &\leq 0, \\ -x_1 + x_2 - 1 &\leq 0, \\ x_1 - x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

§ 5. Дискретное динамическое программирование

В этом параграфе рассматриваются *многошаговые задачи оптимизации*, т. е. задачи, оптимизацию в которых можно представить в виде ряда последовательных этапов (шагов).

Предположим, что состояние некоторого процесса или объекта описывается n -мерным вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, или, что то же самое, точкой \mathbf{x} пространства \mathcal{E}_n , которое называют *фазовым пространством*.

Будем считать, что процесс является N -шаговым, т. е. его эволюция происходит в N этапов (шагов) в соответствии со следующей схемой:



Переход между состояниями на k -м шаге происходит в соответствии с *уравнением состояний*

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}), \quad (1)$$

где $\mathbf{u}^{(k)} \in \mathcal{E}_m$ — m -мерный *вектор управления*, выбираемый на k -м шаге, $\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — заданная n -мерная вектор-функция аргументов $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n, \mathbf{u} \in \mathcal{E}_m$.

Таким образом, предполагается, что в результате k -го шага процесс переходит в состояние $\mathbf{x}^{(k)}$, которое определяется только начальным состоянием $\mathbf{x}^{(k-1)}$ этого шага и выбранным на нем вектором управления $\mathbf{u}^{(k)}$ и не зависит от «предыстории» процесса до k -го шага, т. е. от $\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-2)}$ и $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}$.

Показателем эффективности k -го шага является заданная числовая характеристика (целевая функция этого шага) $J_k = J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Предположим, что эффективность всего процесса в целом характеризуется целевой функцией вида

$$J(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) = \sum_{k=1}^N J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}), \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}$ — набор состояний, называемый *фазовой траекторией процесса*, а $\hat{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}\}$ — набор векторов управления, который называется *управлением процессом*.

Таким образом, рассматриваются только *аддитивные* целевые функции J , представимые в виде суммы целевых функций шагов J_k .

Предположим далее, что на фазовую траекторию и выбор управлений наложены ограничения

$$\mathbf{x}^{(k)} \in X_k, \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} \in U_k(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где X_k и $U_k(\mathbf{x}^{(k-1)})$ — заданные множества в пространствах \mathcal{E}_n и \mathcal{E}_m соответственно, причем множество U_k зависит, вообще говоря, от начального состояния $\mathbf{x}^{(k-1)}$ k -го шага.

Ограничения на начальное и конечное состояния процесса

$$\mathbf{x}^{(0)} \in X_0, \quad \mathbf{x}^{(N)} \in X_N$$

называются *начальными и конечными условиями*. При этом множества X_0 и $X_N \subset \mathcal{E}_n$ во многих случаях содержат по одной точке (начало и конец фазовой траектории).

Пусть $\hat{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}\}$ — управление процессом, удовлетворяющее ограничениям (4) и переводящее его из некоторого начального состояния $\mathbf{x}^{(0)} \in X_0$ в некоторое конечное состояние $\mathbf{x}^{(N)} \in X_N$ в соответствии с уравнениями (1) с учетом ограничений (3). Обозначим множество всех таких управлений буквой U .

Многошаговая задача оптимизации формулируется следующим образом: среди всех управлений $\hat{\mathbf{u}} \in U$ выбрать такое $(\hat{\mathbf{u}}^* = \{\mathbf{u}^{(1)*}, \mathbf{u}^{(2)*}, \dots, \mathbf{u}^{(N)*}\})$, для которого целевая функция (2) принимает *минимальное или максимальное* (в зависимости от смысла задачи) значение.

Управление $\hat{\mathbf{u}}^*$ и соответствующая ему фазовая траектория $\hat{\mathbf{x}}^*$ называются *оптимальными*.

Условие многошаговой задачи оптимизации будем записывать следующим образом:

$$J(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) = \sum_{k=1}^N J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}) \rightarrow \text{extr}^8, \quad (5)$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (6)$$

$$\mathbf{x}^{(k)} \in X_k, \quad k = 1, \dots, N - 1, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} \in U_k(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}^{(0)} \in X_0, \quad \mathbf{x}^{(N)} \in X_N. \quad (9)$$

⁸) Символом *extr* мы будем обозначать минимум или максимум соответствующей функции, в зависимости от смысла задачи. Несмотря на то, что задачу на максимум целевой функции J всегда можно свести к задаче минимизации $-J \rightarrow \min$, мы будем рассматривать и задачи на максимум, используя обозначение $J \rightarrow \max$, чтобы математические постановки этих задач соответствовали их прикладному смыслу.

К многошаговым задачам оптимизации сводятся многие прикладные задачи.

Пример 1. Сформулировать следующую задачу в виде многошаговой задачи оптимизации (5)–(9).

С помощью N -ступенчатой ракеты с заданной стартовой массой M в космос запускается межпланетная станция массой m . За время работы каждой ступени ракета получает добавочную скорость $\Delta v = F(y, z)$, где y — масса, разгоняемая этой ступенью, z — масса самой ступени. Найти такое распределение общей массы M ракеты между ее ступенями, при котором конечная скорость станции будет максимальной.

Обозначим $u^{(k)}$, $k = 1, \dots, N$, массу k -й ступени, считая от межпланетной станции (т. е. на старте работает ступень массой $u^{(N)}$, а в конце разгона — ступень массой $u^{(1)}$).

Массу станции вместе с примыкающими к ней k ступенями ракеты обозначим $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k)} &= x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N; \\ \mathbf{x}^{(0)} &= m, \quad \mathbf{x}^{(N)} = M + m. \end{aligned}$$

Из условия задачи вытекают следующие ограничения на массы $x^{(k)}$ и $u^{(k)}$: $m \leq x^{(k)} \leq M + m$, $0 \leq u^{(k)} \leq M$, т. е.

$$\begin{aligned} x^{(k)} &\in X_k = [m; M + m], \quad k = 1, \dots, N - 1, \\ u^{(k)} &\in U_k = [0; M], \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

В результате работы k -й ступени ракеты приращение скорости станции составит $F(x^{(k-1)}, u^{(k)})$, поэтому ее конечная скорость будет равна

$$\sum_{k=1}^N F(x^{(k-1)}, u^{(k)}).$$

Таким образом, рассматриваемую задачу можно сформулировать как многошаговую задачу оптимизации следующего вида:

$$\begin{aligned} J(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) &= \sum_{k=1}^N F(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \max, \\ \mathbf{x}^{(k)} &= x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N, \\ \mathbf{x}^{(k)} &\in [m; M + m], \quad k = 1, \dots, N - 1, \\ \mathbf{u}^{(k)} &\in [0; M], \quad k = 1, \dots, N, \\ \mathbf{x}^{(0)} &= m, \quad x^{(N)} = M + m. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Сформулировать задачи 17.340–17.349 в виде многошаговых задач оптимизации вида (5)–(9):

17.340. Сумма средств S распределяется между N предприятиями. Выделение k -му предприятию средств в размере u приносит доход $J_k(u)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Определить, какое количество средств необходимо выделить каждому предприятию, чтобы суммарный доход всех предприятий был максимальным.

17.341. Сумма средств S выделяется предприятию в течение N лет. Прибыль, получаемая предприятием в результате выделения ему средств u в течение k -го года, составляет $J_k(u)$, $k = 1, \dots, N$. Распределить выделяемые средства по годам таким образом, чтобы суммарная прибыль предприятия за N лет была максимальной.

17.342. Найти N неотрицательных чисел $u^{(k)}$, $k = 1, \dots, N$, сумма которых равна S , а произведение максимально.

17.343. Совхоз производит посевной материал. Ежегодно часть семян продается потребителям, а оставшаяся их часть используется для воспроизводства. Доход от продажи u т семян составляет $F(u)$ руб. Количество посевного материала, оставленное в совхозе, в следующем году увеличивается в A раз ($A > 1$). В начале первого года имеется a т семян. В конце N -го года их производство прекращается. Сколько семенного материала следует продавать каждый год, чтобы доход совхоза за N лет был максимальным?

17.344. Рассмотреть задачу 17.343 в предположении, что в конце N -го года производство семян не прекращается, и минимальное планируемое их количество к началу $(N + 1)$ -го года составляет b т.

17.345. Планируется производство на двух предприятиях в течение N лет. Начальные средства, предназначенные для выделения предприятиям, составляют S руб. Средства в размере u руб., вложенные в производство на i -м предприятии в начале каждого года, приносят к концу этого года доход $J_i(u)$ руб., а также сумму $f_i(u)$, оставляемую для финансирования дальнейшего производства, $i = 1, 2$. По истечении каждого года все предназначенные для дальнейшего производства средства перераспределяются между предприятиями.

Найти такой способ распределения средств предприятиям, при котором суммарный доход двух предприятий за N лет будет максимальным.

17.346. Оптовая база вмещает P т продукции. Запасы продукции могут пополняться и продаваться в начале каждого из N месяцев, причем пополнение предшествует продаже. Хранение 1 т продукции в течение k -го месяца обходится в α_k руб., а продажа того же ее количества в начале k -го месяца приносит доход β_k руб. Начальное количество продукции на базе составляет a т.

Определить количества продукции, которые в начале каждого месяца следует принимать на хранение и продавать, чтобы суммарная прибыль базы за N месяцев была максимальной.

17.347. Рассмотреть задачу 17.346 в предположении, что в начале каждого месяца продажа продукции предшествует ее пополнению.

$$17.348. F(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N F_k(u^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{k=1}^N a_k u^{(k)} \leq b,$$

$$u^{(k)} \geq 0, \quad u^{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $a_k \geq 0, k = 1, \dots, N, b \geq 0$ (сепарабельная⁹⁾ задача целочисленного программирования с одним линейным ограничением).

$$17.349. F(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N F_k(u^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{k=1}^N a_{ik} u^{(k)} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$u^{(k)} \geq 0, \quad u^{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $a_{ik}, b_i \geq 0, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, N$ (сепарабельная задача целочисленного программирования с m линейными ограничениями).

Для решения многошаговой задачи оптимизации (5)–(9) используется *метод динамического программирования*, основанный на *принципе оптимальности Беллмана*:

Оптимальная траектория в задаче (5)–(9) обладает тем свойством, что любая ее завершающая часть, начинающаяся с k -го шага, $k = 1, \dots, N - 1$, является оптимальной для оставшихся шагов процесса.

Опишем метод динамического программирования.

Заметим прежде всего, что в формулировке многошаговой задачи оптимизации (5)–(9) ограничения на фазовую траекторию (7) и на конечное состояние (9) можно включить в ограничения на выбор управлений, заменив соотношения (7) и (8) следующим эквивалентным ограничением:

$$\mathbf{u}^{(k)} \in \tilde{U}_k(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \{\mathbf{u}^{(k)} \in U_k | \mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}) \in X_k\}, \quad (10)$$

$$k = 1, \dots, N.$$

⁹⁾ Функция n переменных вида $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ называется *сепарабельной*.

Если все функции, входящие в условие задачи математического программирования, сепарабельны, то такую задачу называют сепарабельной.

С учетом этого перепишем формулировку задачи (5)–(9) в следующем виде:

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \text{extr}, \quad (11)$$

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (12)$$

$$u^{(k)} \in \tilde{U}_k(x^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$x^{(0)} \in X_0. \quad (14)$$

Предположим, что в результате начальных $k - 1$ шагов процесс перешел в состояние $x^{(k-1)}$. Рассмотрим задачу оптимизации оставшихся $N - k + 1$ шагов, аналогичную задаче (11)–(14). Пусть оптимальное управление $\hat{u}^*(k) = \{u^{(k)*}, \dots, u^{(N)*}\}$ последних $N - k + 1$ шагов и оптимальная траектория этих шагов $\hat{x}^*(k) = \{x^{(k-1)}, x^{(k)*}, \dots, x^{(N)*}\}$, начатая из состояния $x^{(k-1)}$, найдены.

Целевая функция $J^{(k)}(\hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \sum_{i=k}^N J_i(x^{(i-1)}, u^{(i)})$ последних $N - k + 1$ шагов при $\hat{x}(k) = \hat{x}^*(k)$, $\hat{u}(k) = \hat{u}^*(k)$ принимает оптимальное (т. е. минимальное или максимальное) значение, зависящее от начального состояния $x^{(k-1)}$ фазовой траектории этих шагов, т. е.

$$\text{extr } J^{(k)}(\hat{x}(k), \hat{u}(k)) = J^{(k)}(\hat{x}^*(k), \hat{u}^*(k)) = B_k(x^{(k-1)}). \quad (15)$$

Функция $B_k(x^{(k-1)})$ из (15) называется *функцией Беллмана* последних $N - k + 1$ шагов.

Очевидно,

$$B_N(x^{(N-1)}) = \underset{u^{(N)} \in \tilde{U}_N(x^{(N-1)})}{\text{extr}} J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}). \quad (16)$$

Кроме того, функции Беллмана связаны между собой следующими рекуррентными соотношениями, вытекающими из принципа оптимальности:

$$B_k(x^{(k-1)}) = \underset{u^{(k)} \in \tilde{U}_k(x^{(k-1)})}{\text{extr}} \{B_{k+1}[f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})] + J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)})\}, \\ k = 1, \dots, N - 1. \quad (17)$$

Соотношения (16) и (17), позволяющие последовательно найти функции Беллмана $B_N(x^{(N-1)}), B_{N-1}(x^{(N-2)}), \dots, B_1(x^{(0)})$, называются *уравнениями Беллмана*.

Найдя функции $B_k(x^{(k-1)})$, $k = N, N - 1, \dots, 1$, из (16) и (17), мы одновременно определяем и управления $u^{(k)*}(x^{(k-1)})$, которым отвечают оптимальные значения соответствующих величин $Z_N = J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)})$.

и $Z_k = B_{k+1}[\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)})] + J_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)})$, $k = N-1, N-2, \dots, 1$, из правых частей равенств (16) и (17):

$$\begin{aligned} Z_N[\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)*}(\mathbf{x}^{(N-1)})] &= \\ &= \underset{\mathbf{u}^{(N)} \in \bar{U}_N(\mathbf{x}^{(N-1)})}{\text{extr}} Z_N(\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)}) = B_N(\mathbf{x}^{(N-1)}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Z_k[\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})] &= \\ &= \underset{\mathbf{u}^{(k)} \in \bar{U}_k(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\text{extr}} Z_k(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{u}^{(k)}) = B_k(\mathbf{x}^{(k-1)}), \end{aligned} \quad (19)$$

$k = N-1, \dots, 1$.

Управления $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, N$, называются *условными оптимальными управлениями*, а процесс их нахождения — *условной оптимизацией*. Отметим, что управление $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, найденные в соответствии с (19), удовлетворяют принципу оптимальности, т. е. в зависимости от начального состояния $\mathbf{x}^{(k-1)}$ управление $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, N-1$, учитывает оптимизацию не только k -го шага, но и следующих за ним $N-k$ шагов.

Итак, в результате условной оптимизации находятся функции Беллмана $B_k(\mathbf{x}^{(k-1)})$ и условные оптимальные управление $\mathbf{u}^{(k)*}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, N$.

После этого можно осуществить безусловную оптимизацию в задаче (11)–(14), т. е. определить искомые оптимальное управление процессом $\hat{u}^* = \{\mathbf{u}^{(1)*}, \dots, \mathbf{u}^{(N)*}\}$ и оптимальную фазовую траекторию $\hat{x}^* = \{\mathbf{x}^{(0)*}, \dots, \mathbf{x}^{(N)*}\}$ следующим образом.

Так как функция Беллмана $B_1(\mathbf{x}^{(0)})$ для каждого начального состояния $\mathbf{x}^{(0)} \in X_0$ равна оптимальному значению целевой функции N шагов, т. е. всего процесса, начатого из состояния $\mathbf{x}^{(0)}$, то оптимальное начальное условие $\mathbf{x}^{(0)*} \in X_0$ находим из соотношения

$$B_1(\mathbf{x}^{(0)*}) = \underset{\mathbf{x}^{(0)} \in X_0}{\text{extr}} B_1(\mathbf{x}^{(0)}) \quad (20)$$

(если множество X_0 из (14) состоит из единственной точки $\mathbf{x}^{(0)}$, то полагаем $\mathbf{x}^{(0)*} = \mathbf{x}^{(0)}$).

Далее, используя найденные условные оптимальные управление, а также уравнения состояний (12), последовательно находим $\mathbf{u}^{(1)*}, \mathbf{x}^{(1)*}, \mathbf{u}^{(2)*}, \mathbf{x}^{(2)*}, \dots, \mathbf{u}^{(N)*}, \mathbf{x}^{(N)*}$ из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)*} &= \mathbf{u}^{(1)*}(\mathbf{x}^{(0)*}), \quad \mathbf{x}^{(1)*} = f^{(1)}(\mathbf{x}^{(0)*}, \mathbf{u}^{(1)*}), \\ \mathbf{u}^{(2)*} &= \mathbf{u}^{(2)*}(\mathbf{x}^{(1)*}), \quad \mathbf{x}^{(2)*} = f^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)*}, \mathbf{u}^{(2)*}), \\ &\dots \\ \mathbf{u}^{(N)*} &= \mathbf{u}^{(N)*}(\mathbf{x}^{(N-1)*}), \quad \mathbf{x}^{(N)*} = f^{(N)}(\mathbf{x}^{(N-1)*}, \mathbf{u}^{(N)*}). \end{aligned} \quad (21)$$

Алгоритм метода динамического программирования.

Этап I (условная оптимизация).

Шаг 1. Находим условное оптимальное управление $u^{(N)*}(x^{(N-1)})$ и функцию Беллмана $B_N(x^{(N-1)})$ в соответствии с (16), (18).

Шаг 2. Используя результат первого шага, находим $u^{(N-1)*}(x^{(N-2)})$ и $B_{N-1}(x^{(N-2)})$ с помощью равенств (17) и (19) при $k = N - 1$.

Шаг N . Используя результаты $(N - 1)$ -го шага, определяем $u^{(1)*}(x^{(0)})$ и $B_1(x^{(0)})$ в соответствии с (17) и (19) при $k = 1$.

Этап II (безусловная оптимизация).

Шаг 0. Находим оптимальное начальное состояние $x^{(0)*}$ в соответствии с (20).

Шаг 1. Определяем оптимальные управление $u^{(1)*}$ и конечное состояние $x^{(1)*}$ первого шага процесса по формулам (21).

Шаг 2. Используя результаты предыдущего шага, находим $u^{(2)*}$ и $x^{(2)*}$ в соответствии с (21).

Шаг N . С помощью результатов $(N - 1)$ -го шага определяем $u^{(N)*}$ и $x^{(N)*}$ по формулам (21).

Окончательно имеем $\hat{u}^* = \{u^{(1)*}, \dots, u^{(N)*}\}$, $\hat{x}^* = \{x^{(0)*}, \dots, x^{(N)*}\}$.

Пример 2. Методом динамического программирования решить задачу из примера 1 со следующими исходными данными: $N = 3$, $M = 63$, $m = 1$, $F(y, z) = z/y$.

Для указанных исходных данных многошаговая задача оптимизации примера 1 формулируется следующим образом:

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^3 \frac{u^{(k)}}{x^{(k-1)}} \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= x^{(k-1)} + u^{(k)}, & k &= 1, 2, 3, \\ x^{(k)} &\in [1; 64], & k &= 1, 2, \\ u^{(k)} &\in [0; 63], & k &= 1, 2, 3, \\ x^{(0)} &= 1, & x^{(N)} &= 64. \end{aligned} \tag{22}$$

Определим множества $\tilde{U}_k(x^{(k-1)})$ из (10):

$$\tilde{U}_k(x^{(k-1)}) = \{u^{(k)} \in [0; 63] | x^{(k-1)} + u^{(k)} \in [1; 64]\} = [0; 64 - x^{(k-1)}],$$

$k = 1, 2, 3$, так как $x^{(k-1)} \geq 1$.

Проведем вычисления по методу динамического программирования в соответствии с описанным выше алгоритмом.

Этап I (условная оптимизация).

Шаг 1. Из (16) находим $B_3(x^{(2)}) = \max_{u^{(3)} \in [0; 64-x^{(2)}]} \frac{u^{(3)}}{x^{(2)}}$. Так как $Z_3(x^{(2)}, u^{(3)}) = u^{(3)}/x^{(2)}$ при всех $x^{(2)} \in [1; 64]$ является возрастающей функцией аргумента $u^{(3)}$, то ее максимум достигается при максимально возможном значении $u^{(3)}$, т. е.

$$u^{(3)*}(x^{(2)}) = 64 - x^{(2)}. \quad (23)$$

Тогда

$$B_3(x^{(2)}) = Z_3(x^{(2)}, u^{(3)*}(x^{(2)})) = \frac{64 - x^{(2)}}{x^{(2)}}. \quad (24)$$

Шаг 2. В соответствии с (17) при $k = 2$ с учетом (24) и (22) получаем

$$B_2(x^{(1)}) = \max_{u^{(2)} \in [0; 64-x^{(1)}]} \left(\frac{64 - x^{(1)} - u^{(2)}}{x^{(1)} + u^{(2)}} + \frac{u^{(2)}}{x^{(1)}} \right).$$

Найдем точку максимума $u^{(2)*}(x^{(1)})$ функции

$$Z_2(x^{(1)}, u^{(2)}) = \frac{64 - x^{(1)} - u^{(2)}}{x^{(1)} + u^{(2)}} + \frac{u^{(2)}}{x^{(1)}}$$

на отрезке $[0; 64 - x^{(1)}]$ в зависимости от $x^{(1)}$.

Для определения стационарных точек функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)})$ решим уравнение

$$\frac{\partial Z_2}{\partial u^{(2)}} = \frac{(u^{(2)})^2 + 2u^{(2)}x^{(1)} - (x^{(1)})^2 - 64x^{(1)}}{x^{(1)}(x^{(1)} + u^{(2)})^2} = 0, \quad u^{(2)} \in [0; 64 - x^{(1)}],$$

откуда получим

$$u^{(2)}(x^{(1)})_0 = 8\sqrt{x^{(1)}} - x^{(1)} \quad (25)$$

(очевидно, $u^{(2)}(x^{(1)})_0 \in [0; 64 - x^{(1)}]$, так как $x^{(1)} \leq 64$).

Сравним значения функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)})$ в точке $u^{(2)}(x^{(1)})_0$ из (25) и на концах отрезка $[0; 64 - x^{(1)}]$:

а) $Z_2(x^{(1)}, 0) = \frac{64}{x^{(1)}} - 1; \text{ б) } Z_2(x^{(1)}, 64 - x^{(1)}) = 0;$

в) $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)}(x^{(1)})_0) = 2 \left(\frac{8}{\sqrt{x^{(1)}}} - 1 \right).$

Отсюда следует, что

$$Z_2(x^{(1)}, 64 - x^{(1)}) \leq Z_2(x^{(1)}, 0) \leq Z_2(x^{(1)}, u^{(2)}(x^{(1)})_0)$$

при $x^{(1)} \in [1; 64]$ (проверьте!). Поэтому

$$u^{(2)*}(x^{(1)}) = u^{(2)}(x^{(1)})_0 = 8\sqrt{x^{(1)}} - x^{(1)} \quad (26)$$

и

$$B_2(x^{(1)}) = Z_2[x^{(1)}, u^{(2)*}(x^{(1)})] = 2 \left(\frac{8}{\sqrt{x^{(1)}}} - 1 \right). \quad (27)$$

Шаг 3. Учитывая равенства (27) и (22), из (17) при $k = 1$ получаем

$$B_1(x^{(0)}) = \max_{u^{(1)} \in [0; 64 - x^{(0)}]} \left[2 \left(\frac{8}{\sqrt{x^{(0)} + u^{(1)}}} - 1 \right) + \frac{u^{(1)}}{x^{(0)}} \right].$$

Как и на втором шаге, исследуя функцию

$$Z_1(x^{(0)}, u^{(1)}) = 2 \left(\frac{8}{\sqrt{x^{(0)} + u^{(1)}}} - 1 \right) + \frac{u^{(1)}}{x^{(0)}}$$

на максимум по $u^{(1)}$ на отрезке $[0; 64 - x^{(0)}]$ (проведите исследование самостоятельно!), получим

$$u^{(1)*}(x^{(0)}) = 4(x^{(0)})^{2/3} - x^{(0)}, \quad (28)$$

$$B_1(x^{(0)}) = 12(x^{(0)})^{-1/3} - 3. \quad (29)$$

Этап II (безусловная оптимизация).

Шаг 0. Так как множество X_0 состоит из единственной точки $x^{(0)} = 1$, то полагаем

$$x^{(0)*} = 1. \quad (30)$$

Шаг 1. Из формул (21) с учетом (28), (30) и (22) находим

$$u^{(1)*} = u^{(1)*}(1) = 3, \quad x^{(1)*} = x^{(0)*} + u^{(1)*} = 4.$$

Шаг 2. Аналогичным образом из формул (21), (26) и (22) получаем

$$u^{(2)*} = u^{(2)*}(4) = 12, \quad x^{(2)*} = x^{(1)*} + u^{(2)*} = 16.$$

Шаг 3. Используя равенства (21), (23) и (22), находим

$$u^{(3)*} = u^{(3)*}(16) = 48, \quad x^{(3)*} = x^{(2)*} + u^{(3)*} = 64.$$

Окончательно получаем $\hat{u}^* = \{3, 12, 48\}$, $\hat{x}^* = \{1, 4, 16, 64\}$. Таким образом, массы верхней, средней и нижней ступеней ракеты должны равняться соответственно 3, 12 и 48 единицам. При этом межпланетная станция достигнет максимально возможной в данных условиях скорости, равной $B_1(x^{(0)*}) = 9$ единицам (см. формулы (29), (30)). \triangleright

Задача, рассмотренная в примере 2, свелась к *непрерывной модели* многошагового процесса оптимизации. В этой модели управления $u^{(k)}$, векторы состояний $x^{(k)}$ и другие величины могут непрерывно изменяться на соответствующих множествах.

Для многих экономических и производственных задач характерной является *дискретная модель*, предполагающая, что величины, описывающие процесс, могут принимать только дискретный ряд значений. Функциональные зависимости в таких задачах задаются, как правило, в виде таблиц, а не аналитически. Однако общая схема их решения методом динамического программирования остается без изменений.

Пример 3. Общая сумма в 4 млн руб. распределяется между тремя предприятиями в количествах, кратных 1 млн руб. В результате выделения средств k -му предприятию в размере u оно дает доход $J_k(u)$, $k = 1, 2, 3$, величина которого может быть найдена из таблицы 5.1:

Таблица 5.1

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	5	9	11	12
$J_2(u)$	0	4	8	12	14
$J_3(u)$	0	7	9	10	11

Распределить средства между предприятиями так, чтобы их суммарный доход был максимальным.

« Обозначив средства, выделенные k -му предприятию ($k = 1, 2, 3$), символом $u^{(k)}$, а сумму средств, выделенных предприятиям с номерами от 1 до k , символом $x^{(k)}$, сформулируем рассматриваемую задачу как многошаговую задачу оптимизации (11)–(14):

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^3 J_k(u^{(k)}) \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= x^{(k-1)} + u^{(k)}, & k &= 1, 2, 3, \\ u^{(k)} &\in [0; 4 - x^{(k-1)}] \cap \mathbb{Z}, & k &= 1, 2, 3, \\ x^{(0)} &= 0, \quad x^{(3)} = 4. \end{aligned}$$

Для решения этой задачи применим метод динамического программирования.

Этап I (условная оптимизация).

Шаг 1. Найдем $B_3(x^{(2)}) = \max_{u^{(3)} \in [0; 4 - x^{(2)}] \cap \mathbb{Z}} J_3(u^{(3)})$. Так как функция $Z_3(x^{(2)}, u^{(3)}) = J_3(u^{(3)})$ является возрастающей функцией аргумента $u^{(3)}$ (см. таблицу 5.1), то ее максимум достигается при макси-

мальном допустимом значении $u^{(3)}$, т. е.

$$u^{(3)*}(x^{(2)}) = [4 - x^{(2)}]^{10}. \quad (31)$$

Отсюда $B_3(x^{(2)}) = Z_3(x^{(2)}, u^{(3)*}(x^{(2)})) = J_3([4 - x^{(2)}])$. Значения $B_3(x^{(2)})$, найденные с помощью таблицы 5.1, представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

$x^{(2)}$	0	1	2	3	4
$B_3(x^{(2)})$	11	10	9	7	0

Шаг 2. Вычислим

$$B_2(x^{(1)}) = \max_{u^{(2)} \in [0; 4-x^{(1)}] \cap \mathbb{Z}} \{B_3(x^{(1)} + u^{(2)}) + J_2(u^{(2)})\}.$$

Для нахождения максимума функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)}) = B_3(x^{(1)} + u^{(2)}) + J_2(u^{(2)})$ составляем таблицу 5.3 значений этой функции, используя данные таблиц 5.1 и 5.2.

Таблица 5.3

$x^{(1)}$	$u^{(2)}$				
	0	1	2	3	4
0	11	14	17	19	14
1	10	13	15	12	-
2	9	11	8	-	-
3	7	4	-	-	-
4	0	-	-	-	-

В таблице 5.3 рамками обведены максимальные по $u^{(2)}$ значения функции $Z_2(x^{(1)}, u^{(2)})$, соответствующие различным значениям $x^{(1)}$.

Используя таблицу 5.3, находим функции $B_2(x^{(1)})$ и $u^{(2)*}(x^{(1)})$, представив их значения в таблицах 5.4 и 5.3.

Таблица 5.4

$x^{(1)}$	0	1	2	3	4
$B_2(x^{(1)})$	19	15	11	7	0

Таблица 5.5

$x^{(1)}$	0	1	2	3	4
$u^{(2)*}(x^{(1)})$	3	2	1	0	0

Шаг 3. Так как множество X_0 состоит из единственной точки $x^{(0)} = 0$, то найдем только $B_1(0)$ и $u^{(1)*}(0)$:

$$B_1(0) = \max_{u^{(1)} \in [0; 4] \cap \mathbb{Z}} \{B_2(0 + u^{(1)}) + J_1(u^{(1)})\}.$$

¹⁰) Напомним, что символом $[a]$ обозначается целая часть числа a .

Для определения максимума в правой части последнего равенства составим таблицу 5.6 значений функции $Z_2(0, u^{(1)}) = B_2(u^{(1)}) + J_1(u^{(1)})$, которые найдем с помощью таблиц 5.1 и 5.4.

Таблица 5.6

$u^{(1)}$	0	1	2	3	4
$Z_2(0, u^{(1)})$	19	20	20	19	12

Из таблицы 5.6 видно, что $B_1(0) = 20$, причем $u^{(1)*}(0) = 1$ или $u^{(1)*}(0) = 2$, т. е. в данной задаче существует два оптимальных управления и две оптимальные траектории.

Этап II (безусловная оптимизация).

Шаг 1. а) Пусть $u^{(1)*} = 1$. Тогда $x^{(1)*} = x^{(0)*} + u^{(1)*} = 1$.

б) Пусть $u^{(1)*} = 2$. Тогда $x^{(1)*} = x^{(0)*} + u^{(1)*} = 2$.

Шаг 2. а) Для $x^{(1)*} = 1$ имеем $u^{(2)*} = u^{(2)*}(1) = 2$ (см. таблицу 5.5), $x^{(2)*} = x^{(1)*} + u^{(2)*} = 3$.

б) Для $x^{(1)*} = 2$ получаем $u^{(2)*}(2) = 1$ (см. таблицу 5.5), $x^{(2)*} = x^{(1)*} + u^{(2)*} = 3$.

Шаг 3. Так как для обеих оптимальных фазовых траекторий $x^{(2)*} = 3$, то из (31) находим $u^{(3)*} = u^{(3)*}(3) = 1$, $x^{(3)*} = x^{(2)*} + u^{(3)*} = 4$.

Окончательно получаем $\hat{u}^* = \{1, 2, 1\}$ или $\hat{u}^* = \{2, 1, 1\}$ и соответственно $\hat{x}^* = \{0, 1, 3, 4\}$ или $\hat{x}^* = \{0, 2, 3, 4\}$.

Таким образом, существуют два оптимальных варианта распределения средств предприятиям.

Первый вариант: первому предприятию выделяется 1 млн руб., второму — 2 млн руб. и третьему — 1 млн руб.

Второй вариант: первому — 2, второму — 1 и третьему — 1 млн руб.

В обоих случаях суммарный доход предприятий составит $B_1(0) = 20$ млн руб. ▷

В условиях задачи 17.340 решить задачи 17.350–17.352 об оптимальном распределении средств предприятиям со следующими исходными данными:

17.350. $S = 5$ млн руб., $N = 4$. Средства предприятиям распределяются в количествах, кратных 1 млн руб. Функции $J_k(u)$, $k = 1, \dots, 4$, заданы следующей таблицей:

u (млн руб.)	0	1	2	3	4	5
$J_1(u)$	0	1,5	2	3,5	5,5	9
$J_2(u)$	0	3	4,5	5,5	6,5	7,5
$J_3(u)$	0	4	5	5,5	6	9
$J_4(u)$	0	2	3	4	6,5	8

17.351. $S = 5$ млн руб., $N = 5$. Средства распределяются в количествах, кратных 1 млн руб. Функции $J_k(u)$, $k = 1, \dots, 4$, заданы таблицей из условия задачи 17.350, а функция $J_5(u)$ — следующей таблицей:

u (млн руб.)	0	1	2	3	4	5
$J_5(u)$	0	3	4,5	6	7,5	3,5

17.352. $S = 100$ тыс. руб., $N = 4$. Средства каждому предприятию выделяются в количествах, кратных 25 тыс. руб., но не могут превосходить 50 тыс. руб. Функции $J_k(u)$, $k = 1, \dots, 4$, заданы следующей таблицей:

u (тыс. руб.)	0	25	50	75	75
$J_1(u)$	0	12	14	20	28
$J_2(u)$	0	12	18	24	30
$J_3(u)$	0	12	16	24	30
$J_4(u)$	0	8	12	16	24

В условиях задачи 17.341 решить задачи 17.353–17.357 об оптимальном выделении средств предприятию в течение N лет со следующими исходными данными:

17.353. $S = 500$ тыс. руб., $N = 4$. Средства, выделяемые в течение каждого года, кратны 100 тыс. руб. Функции $J_k(u)$ представлены в таблице.

u (тыс. руб.)	0	100	200	300	400	500
$J_1(u)$	0	40	70	104	120	136
$J_2(u)$	0	50	80	96	112	124
$J_3(u)$	0	34	76	100	110	120
$J_4(u)$	0	60	90	100	110	136

17.354*. Найти решение задачи 17.353, если начальная сумма S

а) уменьшена на 100 тыс. руб.;

б) увеличена на 100 тыс. руб. при следующих дополнительных данных о прибыли предприятия при выделении ему в течение k -го года средств в размере 600 тыс. руб.:

k	1	2	3	4
$J_k(600)$	146	132	130	144

17.355. $S = 400$ тыс. руб., $N = 4$. Выделяемые в течение k -го года средства кратны 20 тыс. руб. и не могут превосходить 200 тыс. руб. Функции $J_k(u)$ заданы таблицей

u (тыс. руб.)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$J_1(u)$	0	10	20	40	100	160	180	190	200	210	215
$J_2(u)$	0	20	40	60	80	95	101	102	103	104	105
$J_3(u)$	0	5	10	15	25	37	69	140	225	280	300
$J_4(u)$	0	30	68	95	140	160	170	175	176	177	178

17.356. $S = 300$ тыс. руб., $N = 3$, функции $J_k(u)$, $k = 1, 2, 3$, определяются следующим образом:

$$\text{а) } J_1(u) = J_2(u) = J_3(u) = 10 - 10^{-3} \cdot (u - 100)^2;$$

$$\text{б) } J_1(u) = J_2(u) = 24 - 6 \cdot 10^{-4}(u - 200)^2, J_3(u) = 16 - 4 \times 10^{-4}(u - 200)^2.$$

17.357. $S = 150$ тыс. руб., $N = 3$, $J_1(u) = 0,12u$, $J_2(u) = 0,0012u^2$, $J_3(u) = 0,36u - 0,0024u^2$.

17.358. Найти решение задачи 17.342, если $N = 3$, $S = 9$.

17.359. Найти решение задачи 17.342 с произвольными исходными данными.

17.360. Найти решение задачи 17.343, если $F(u) = cu$, $c > 0$.

17.361. Найти решение задачи 16.343 при следующих исходных данных: $F(u) = 0,1u^2$, $A = 5$, $a = 4$, $N = 3$.

17.362. Найти решение задачи 17.344, если $F(u) = cu$, $c > 0$, $A^3a > b$.

17.363. Найти решение задачи 17.344 при следующих исходных данных: $F(u) = 0,1u^2$, $A = 5$, $a = 4$, $b = 5$, $N = 3$.

17.364. Найти решение задачи 17.345 со следующими исходными данными: $N = 4$, $S = 200$ тыс. руб., $J_1(u) = 0,3u$, $J_2(u) = 0,4u$, $f_1(u) = 0,8u$, $f_2(u) = 0,5u$.

17.365. Найти решение задачи 17.345 при следующих исходных данных: $N = 3$, $S = 120$ тыс. руб., $f_1(u) = 0,4u$, $f_2(u) = 0,6u$. Выделение средств предприятиям происходит в количествах, кратных 20 тыс. руб., а функции $J_1(u)$ и $J_2(u)$ заданы следующей таблицей:

u (тыс. руб.)	0	20	40	60	80	100	120
$J_1(u)$	0	5	8	12	14	15	16
$J_2(u)$	0	3	5	8	12	14	15

17.366. Найти решение задачи 17.346 со следующими исходными данными: $P = 10$, $N = 4$, $a = 0$. Коэффициенты α_k и β_k , $k = 1, \dots, 4$, представлены в таблице:

k	1	2	3	4
α_k	10	15	10	6
β_k	7	12	9	8

Считать, что к концу рассматриваемого периода база должна быть освобождена от продукции.

17.367. Найти решение задачи 17.346 при следующих исходных данных: $P = 12$, $N = 4$, $a = 5$. Значения коэффициентов α_k , β_k , $k = 1, \dots, 4$, приведены в условии задачи 17.366. Считать, что к концу рассматриваемого периода на базе должно остаться 4 т продукции.

Используя результат решения задачи 17.349, решить задачи целочисленного линейного программирования 17.368–17.371 методом динамического программирования:

17.368. $F(\mathbf{u}) = -4u^{(1)} - 3u^{(2)} \rightarrow \min,$

$$4u^{(1)} + u^{(2)} \leq 10,$$

$$2u^{(1)} + 3u^{(2)} \leq 8,$$

$$u^{(1)}, u^{(2)} \geq 0; u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{Z}.$$

17.369. $F(\mathbf{u}) = -u^{(1)} - u^{(2)} \rightarrow \min,$

$$u^{(1)} \leq 2,$$

$$2u^{(1)} + 3u^{(2)} \leq 5,$$

$$u^{(1)}, u^{(2)} \geq 0; u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{Z}.$$

17.370. $F(\mathbf{u}) = -9u^{(1)} - 11u^{(2)} \rightarrow \min,$

$$u^{(1)} \leq 5,$$

$$4u^{(1)} + 3u^{(2)} \leq 10,$$

$$u^{(1)} + 2u^{(2)} \leq 8,$$

$$u^{(1)}, u^{(2)} \geq 0; u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{Z}.$$

17.371. $F(\mathbf{u}) = -u^{(1)} - 2u^{(2)} - 3u^{(3)} \rightarrow \min,$

$$6u^{(1)} + 4u^{(2)} + 3u^{(3)} \leq 25,$$

$$5u^{(1)} + 3u^{(2)} + 2u^{(3)} \leq 15,$$

$$u^{(k)} \geq 0; u^{(k)} \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, 3.$$

17.372. Имеется 7 т сырья, пригодного для производства изделий трех видов. Для изготовления одного изделия каждого вида требуется соответственно 1, 2 и 3 т сырья.

Расходы $J_k(u)$ на производство u изделий k -го вида, $k = 1, 2, 3$, приведены в таблице (значения $J_k(0)$ характеризуют штраф выплачиваемый в случае, если изделие k -го вида не производится):

u	0	1	2	3	4	5	6	7
$J_1(u)$	40	30	25	21	17	14	11	2
$J_2(u)$	55	40	29	29	—	—	—	—
$J_3(u)$	70	50	35	—	—	—	—	—

Спланировать выпуск изделий так, чтобы затраты на их производство были минимальны.

17.373. Судно грузоподъемностью 10 т загружается контейнерами трех типов. Массы контейнеров различных типов и стоимости грузов в них составляют соответственно 860 кг, 720 кг, 600 кг и 516 руб., 360 руб., 240 руб. Найти количества контейнеров каждого типа, которые необходимо загрузить, чтобы стоимость грузов на судне была максимальной.

17.374. Имеется 9 однотипных станков, каждый из которых можно наладить на производство изделий одного из трех видов. Зависимость количества изделий каждого вида, изготовленных за смену, от количества станков, занятых для их производства, приведена в таблице:

Вид изделия	Число станков								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	14	18	22	26	32	38	42	48	50
II	10	18	24	28	30	36	40	44	54
III	12	20	26	30	32	36	42	44	50

Найти количество станков, которые необходимо использовать для изготовления изделий каждого вида, чтобы общее число произведенных изделий было максимальным.

§ 6. Вариационное исчисление

1. Предварительные сведения. Простейшая задача вариационного исчисления. Существует ряд прикладных задач оптимизации, в которых качество выбранного решения не удается охарактеризовать с помощью целевой функции. Числовой показатель качества в этих задачах зависит

от функции (а не от одной или нескольких переменных), определить которую необходимо так, чтобы этот показатель принял минимальное или максимальное значение. Числовыми показателями в указанных задачах являются *функционалы*.

Определение. Если каждому элементу $y = y(x)$ множества G из некоторого функционального пространства X поставлено в соответствие определенное число J , то говорят, что на множестве $G \subset X$ задан функционал $J(y) \equiv J[y(x)]$.

В качестве функциональных пространств X в вариационном исчислении используются пространства $C_n[a; b]$, которые определяются следующим образом.

Линейное нормированное пространство $C_n[a; b]$, $n = 0, 1, \dots$, состоит из функций $y(x)$, имеющих на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные $y^{(k)}(x)$ до n -го порядка включительно¹¹⁾, с нормой

$$\|y\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a; b]} |y^{(k)}(x)|.$$

Расстояние $\rho(y_1, y_2)$ между функциями (кривыми) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в пространстве $C_n[a; b]$ определяется формулой

$$\rho(y_1, y_2)_n = \|y_1 - y_2\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a; b]} |y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x)|, \quad n = 0, 1, \dots$$

Пусть функция $y^*(x) \in C_n[a; b]$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Множество функций (кривых) $y(x) \in C_n[a; b]$, для которых выполняется неравенство

$$\rho(y^*, y)_n < \varepsilon,$$

называется ε -окрестностью n -го порядка кривой $y^*(x)$.

Говорят, что функционал $J[y(x)]$ достигает на кривой $y^*(x)$ локального или относительного минимума (максимума), если для всех $y(x)$ из некоторой ε -окрестности кривой $y^*(x)$ выполняется неравенство

$$J[y^*(x)] \leq J[y(x)] \quad (J[y^*(x)] \geq J[y(x)]). \quad (1)$$

Локальные минимумы и максимумы функционала $J[y(x)]$ называются его локальными экстремумами.

Если (1) выполняется для всех кривых $y(x)$, принадлежащих некоторому множеству $G \subset C_n[a; b]$, то говорят, что на кривой $y^*(x)$ достигается абсолютный экстремум функционала $J[y(x)]$ на множестве G .

Пусть функционал $J[y(x)]$ определен на множестве $G \subset C_1[a; b]$. Функции $y(x) \in G$ можно рассматривать не только как элементы пространства $C_1[a; b]$, но и как элементы $C_0[a; b]$. Локальный экстремум

¹¹⁾ Под производной $y^{(0)}(x)$ нулевого порядка здесь понимается сама функция $y(x)$.

функционала $J[y(x)]$ в пространстве $C_0[a; b]$ называется *сильным*, а в пространстве $C_1[a; b]$ — *слабым локальным экстремумом*. Всякий сильный экстремум функционала является и слабым, а обратное, вообще говоря, неверно.

Отметим, что всякий абсолютный экстремум функционала $J[y(x)]$ является сильным и слабым локальным экстремумом, но не всякий локальный экстремум будет абсолютным.

Сформулируем простейшую задачу вариационного исчисления.

Пусть функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам. Требуется среди всех функций $y(x) \in C_1[a; b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad (2)$$

найти ту функцию, на которой достигается слабый экстремум функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (3)$$

Другими словами, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании на множестве всех гладких кривых, проходящих через точки $M_0(a, y_0)$ и $M_1(b, y_1)$, той кривой, на которой функционал (3) достигает слабого экстремума.

При решении простейшей задачи вариационного исчисления используется следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы функционал (3) достигал на функции $y(x) \in C_1[a; b]$ слабого экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (4)$$

Решения (интегральные кривые) уравнения (4) называют *экстремалиями* функционала (3).

Уравнение (4) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$y''(x)F_{y'y'} + y'(x)F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0.$$

Если $F_{y'y'} \not\equiv 0$, то оно представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, поэтому его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которые находятся с помощью граничных условий (2).

Отметим, что так как всякий сильный экстремум функционала является и слабым, то теорема 1 дает необходимое условие и сильного экстремума функционала (3).

Кроме того, так как абсолютный экстремум функционала (3) на множестве

$$G = \{(x) \in C_1[a; b] | y(a) = y_0, y(b) = y_1\} \quad (5)$$

является и локальным экстремумом (сильным и слабым), то теорема 1 определяет необходимое условие абсолютного экстремума функционала (3) на множестве (5).

Таким образом, решение краевой задачи

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

позволяет найти все кривые возможного экстремума функционала (3) на множестве функций (5).

Пример 1. Найти гладкие экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - 12xy) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 0, y(1) = 1$.

В данном случае $F(x, y, y') = y'^2 - 12xy$, поэтому уравнение Эйлера(4) имеет вид $y'' + 6x = 0$. Его общее решение $y(x) = -x^3 + C_1x + C_2$. Из условий $y(0) = 0, y(1) = 1$ получаем систему уравнений для определения C_1 и C_2 :

$$y(0) = C_2 = 0,$$

$$y(1) = -1 + C_1 + C_2 = 1,$$

откуда находим $C_1 = 2, C_2 = 0$. Следовательно, в рассматриваемой задаче существует единственная экстремаль $y(x) = -x^3 + 2x$. \triangleright

Решение задачи (6) существует не всегда, а если оно существует, то может быть не единственным.

Пример 2. Найти гладкие экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_1^2 (2x - y)y dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = 1, y(2) = 3$.

Уравнение Эйлера имеет вид $x - y = 0$. Так как функция $y(x) = x$ условию $y(2) = 3$ не удовлетворяет, данная задача не имеет решений.

Пример 3. Найти гладкие экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^\pi (y'^2 - y^2) dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = 1, y(\pi) = -1$.

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$, а его общес решение $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Используя условия $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$, находим $y(x) = \cos x + C \sin x$, где C — произвольная постоянная.

Таким образом, данная задача имеет бесконечное множество решений. ▷

В задачах 17.375–17.384 найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

$$17.375. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx; y(0) = y(1) = 0.$$

$$17.376. J(y) = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx; y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$17.377. J(y) = \int_1^e (2y - x^2 y'^2) dx; y(1) = e, y(e) = 0.$$

$$17.378. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + yy' + 12xy) dx; y(0) = y(1) = 0.$$

$$17.379. J(y) = \int_0^1 (e^y + xy') dx; y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$17.380. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx; y(0) = y(1) = 0.$$

$$17.381. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 6y \operatorname{sh} 2x) dx; y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$17.382. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^x) dx; y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{2e}.$$

$$17.383. J(y) = \int_0^{\ln 2} (y'^2 + 3y^2)e^{2x} dx; y(0) = 0, y(\ln 2) = \frac{15}{8}.$$

17.384. $J(y) = \int_0^b (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx; y(0) = 0, y(b) = y_1.$

17.385. Показать, что функционал $\int_a^b [p(x)y' + q(x)y + rx] dx$, где $p(x) \in C_1[a; b]$, $q(x), r(x) \in C_0[a; b]$, не имеет экстремумов.

Уравнение Эйлера (4) не всегда интегрируется в квадратурах, а в ряде случаев его решение может вызвать затруднения. Перечислим частные случаи, в которых решение уравнения Эйлера упрощается по сравнению с общим случаем.

1. Функция F из (3) не зависит от y' , т. е. $F = F(x, y)$. Уравнение (4) в этом случае принимает вид $F_y(x, y) = 0$. Это конечно (не дифференциальное) уравнение, его решение не содержит произвольных постоянных и, следовательно, удовлетворяет условиям (2) только в исключительных случаях.

2. Функция F зависит только от y' : $F = F(y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_{y'y'} \cdot y'' = 0$, а его общее решение $y(x) = C_1x + C_2$. Таким образом, в данном случае экстремалами функционала $J[y(x)]$ являются всевозможные прямые.

3. Функция F не зависит от y , т. е. $F = F(x, y')$. Тогда уравнение (4) записывается в виде $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F_{y'}(x, y') = C_1$, т. е. дифференциальное уравнение первого порядка, решив которое, найдем экстремали функционала.

4. Функция F не зависит явно от x , т. е. $F = F(y, y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$ или (после умножения обеих частей этого равенства на y') $\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F - y'F_{y'} = C_1$. Это дифференциальное уравнение первого порядка можно проинтегрировать, разрешив его относительно y' и разделив переменные, или путем введения параметра.

Найти экстремали следующих функционалов $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

17.386. $J(y) = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx; y(0) = 1, y(1) = e.$

17.387. $J(y) = \int_0^1 (e^{x+y} - y - \sin x) dx; y(0) = 0, y(1) = -1.$

$$17.388. J(y) = \int_0^1 y'^2 dx; y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$17.389. J(y) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} dx; y(-1) = 0, y(1) = 1.$$

$$17.390. J(y) = \int_0^{3/2} (y'^3 + 2x) dx; y(0) = 0, y\left(\frac{3}{2}\right) = 1.$$

$$17.391. J(y) = \int_{-1}^1 (xy' + y'^2) dx; y(-1) = 1, y(1) = 0.$$

$$17.392. J(y) = \int_1^2 x^n y'^2 dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 1; \quad y(1) = \frac{1}{1-n},$$

$$y(2) = \frac{2^{1-n}}{1-n}.$$

$$17.393. J(y) = \int_0^1 (y - y'^2) dx; y(0) = y(1) = 0.$$

$$17.394. J(y) = \int_0^1 yy' dx; y(0) = 1, y(1) = \sqrt[3]{4}.$$

$$17.395. J(y) = \int_0^{\pi/2} (2y + y^2 - y'^2) dx; y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

В ряде случаев существование абсолютного экстремума функционала (3) на множестве функций (5) и его характер (минимум или максимум) бывают очевидны из физических или геометрических соображений. В таких случаях необходимое условие экстремума, сформулированное в теореме 1, позволяет найти функцию $y(x)$, дающую абсолютный минимум или максимум функционалу (3) на множестве (5).

Пример 4. Найти гладкую кривую на плоскости, соединяющую две данные точки $M_0(a, A)$ и $M_1(b, B)$ и имеющую минимальную длину.

Длина дуги гладкой кривой, описываемой уравнением $y = y(x)$ и проходящей через точки с абсциссами a и b , равна $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

Поэтому данную задачу можно сформулировать следующим образом: найти функцию $y(x)$, минимизирующую функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (6)$$

в удовлетворяющую условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Уравнение Эйлера для этой задачи имеет вид $y''(x) = 0$, откуда $y = C_1x + C_2$. Найдя C_1 и C_2 из условий на функцию $y(x)$ при $x = a$ и $x = b$, получим $y(x) = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A$, т. е. необходимое условие экстремума функционала (6) выполняется на прямой, соединяющей точки M_0 и M_1 .

Из геометрических соображений ясно, что среди гладких кривых, соединяющих данные точки, кривая минимальной длины должна существовать, а кривая максимальной длины — нет. Поэтому упомянутая прямая и является искомой кривой. ▷

17.396. Материальная точка перемещается вдоль плоской кривой $y = y(x)$, соединяющей точки $M_0(a, A)$ и $M_1(b, B)$ со скоростью $v = ky'$. Найти гладкую кривую, время движения вдоль которой из точки M_0 в точку M_1 будет минимальным.

17.397. Решить задачу 17.396, если $M_0 = (0, 0)$, $M_1 = (1, 1)$, $v = x$.

17.398. Среди гладких кривых, соединяющих точки $M_0(0, 1)$ и $M_1(1, 1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

17.399.** Задача о брахистохроне. Найти гладкую кривую, соединяющую точки $M_0(0, 0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, при скатывании вдоль которой под действием силы тяжести материальная точка, зафиксированная первоначально в точке M_0 , переместится в точку M_1 за минимальное время (трением и сопротивлением воздуха пренебречь).

2. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Ниже рассмотрены два обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Первым из них является задача на экстремум функционала $J[y(x)]$, зависящего от производных высших порядков функции $y(x)$:

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) dx, \quad (7)$$

где функция $F(x, y, \dots, y^{(n)})$ имеет непрерывные частные производные вплоть до $(n+1)$ -го порядка по всем аргументам, а $y(x) \in C_n[a; b]$.

Границные условия в этой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0, & y^{(1)}(a) &= y_0^{(1)}, \dots, & y^{(n)}(a) &= y_0^{(n)}, \\ y(b) &= y_1, & y^{(1)}(b) &= y_1^{(1)}, \dots, & y^{(n)}(b) &= y_1^{(n)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Приведем обобщение теоремы 1 применительно к рассматриваемой задаче.

Теорема 2. Для того чтобы функционал (7) достигал на функции $y(x) \in C_n[a; b]$ локального экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y^{(1)}} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y^{(2)}} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (9)$$

Подобно случаю простейшей задачи вариационного исчисления, решения уравнения (9) (экстремали функционала (7)), удовлетворяющие граничным условиям (8), являются кривыми возможного абсолютного экстремума этого функционала на множестве

$$G = \{y(x) \in C_n[a; b] | y(a) = y_0, \dots, y^{(n)}(a) = y_0^{(n)}, y(b) = y_1, \dots, y^{(n)}(b) = y_1^{(n)}\}.$$

Пример 5. Найти экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 (120xy - y'') dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 6.$$

◀ Запишем уравнение Эйлера-Пуассона: $y^{(4)} = 120x$. Его общее решение $y(x) = x^5 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. Отсюда с помощью граничных условий получаем систему уравнений для определения постоянных C_1, \dots, C_4 :

$$\begin{aligned} C_4 &= 0, \\ C_3 &= 0, \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 0, \\ 3C_1 + 2C_2 + C_3 &= 1, \end{aligned}$$

из которой находим $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = C_4 = 0$. Поэтому экстремум функционала может достигаться на кривой $y(x) = x^5 + x^3 - x^2$. ▷

В задачах 17.400–17.411 найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям:

$$\mathbf{17.400.} \ J(y) = \int_0^1 y'' dx; \ y(0) = y(1) = y'(1) = 0, \ y'(0) = 1.$$

$$\mathbf{17.401.} \ J(y) = \int_0^1 (48y - y'^2) dx; \ y(0) = y'(0) = 0, \ y(1) = 1,$$

$$y'(1) = 4.$$

$$\mathbf{17.402.} \ J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 24xy) dx; \ y(0) = y'(0) = 0, \ y(1) = \frac{1}{5},$$

$$y'(1) = 1.$$

$$\mathbf{17.403.} \ J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y'^2) dx; \ y(0) = y'(0) = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\mathbf{17.404.} \ J(y) = \int_0^b (y'^2 + y'^2) dx; \ y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0.$$

$$\mathbf{17.405.} \ J(y) = \int_0^1 e^{-x} y'^2 dx; \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y(1) = e,$$

$$y'(1) = 2e.$$

$$\mathbf{17.406.} \ J(y) = \int_0^1 (x+1)^3 y'^2 dx; \ y(0) = 1, \ y'(0) = -1, \ y(1) = \frac{1}{2}, \ y'(1) = -\frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{17.407.} \ J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + x^2) dx; \ y(0) = 1, \ y'(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

17.408. $J(y) = \int_0^1 y'''^2 dx; y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y(1) = 1,$
 $y'(1) = 4, y''(1) = 12.$

17.409. $J(y) = \int_0^1 (y'''^2 - y''^2) dx; y(0) = y''(0) = 0, y'(0) = 1,$
 $y(1) = y''(1) = \operatorname{sh} 1, y'(1) = \operatorname{ch} 1.$

17.410. $J(y) = \int_0^\pi (y'''^2 - y''^2) dx; y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$
 $y(\pi) = \pi, y'(\pi) = 2, y''(\pi) = 0.$

17.411. $J(y) = \int_0^\pi (y'''^2 - y'^2) dx; y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$
 $y(\pi) = y''(\pi) = \operatorname{sh} \pi, y'(\pi) = \operatorname{ch} \pi + 1.$

Другим обобщением простейшей задачи вариационного исчисления является задача об экстремуме функционала, зависящего от нескольких функций:

$$J[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x)) dx, \quad (10)$$

где функция $F(\dots)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам и $y_k(x) \in C_1[a; b]$, $k = 1, \dots, n$.

Границные условия в этой задаче имеют вид

$$y_k(a) = y_k^{(0)}, \quad y_k(b) = y_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Теорема 1 для данного случая обобщается следующим образом.

Теорема 3. Для того чтобы набор функций $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C_1[a; b]$ доставлял слабый экстремум функционалу (10), необходимо, чтобы эти функции удовлетворяли системе дифференциальных уравнений Эйлера

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Пример 6. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C_1[a; b]$, на которых может достигаться экстремум функционала

$$J[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2 - 2y_1 y_2) dx$$

при граничных условиях $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1$.
 ▷ Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} y_1'' + y_2 &= 0, \\ y_2'' + y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из второго уравнения функцию $y_2 = -y_1''$, получим $y_1^{(4)} - y_1 = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. Отсюда находим

$$y_2(x) = -y_1''(x) = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Из граничных условий следует, что $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$, поэтому $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \sin x$. ▷

В задачах 17.412–17.419 найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C_1[a; b]$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ при указанных граничных условиях:

$$\begin{aligned} \textbf{17.412. } J(y_1, y_2) &= \int_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \\ &y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{17.413. } J(y_1, y_2) &= \int_0^1 (y_1^2 + y_2'^2 - 2y_1 y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \\ &y_1(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y_2(1) = -\operatorname{sh} 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{17.414. } J(y_1, y_2) &= \int_0^{\pi/2} (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \\ &y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{17.415. } J(y_1, y_2) &= \int_0^1 (y_1' y_2' + y_1 y_2) dx; \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \\ &y_1(1) = e, \quad y_2(1) = 1/e. \end{aligned}$$

17.416. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y'_1 y'_2 + 6xy_1 + 12x^2 y_2) dx; y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = y_2(1) = 1.$

17.417. $J(y_1, y_2) = \int_0^3 (x{y'_1}^2 + {y'_2}^2 + xy_1 y_2) dx; y_1(1) = 1, y_2(1) = y_2(3) = 0, y_1(3) = \ln 3 + 1.$

17.418. $J(y_1, y_2) = \int_0^\pi ({y'_1}^2 - {y'_2}^2 + 2y'_1 y'_2 + 2y_1 \cos x + 2y_2^2) dx, y_1(0) = -1, y_2(0) = y_2(\pi) = 0, y_1(\pi) = 1 + \pi.$

17.419. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 ({y'_1}^2 + {y'_2}^2 + 2y_1) dx, y_1(0) = y_2(0) = 1, y_1(1) = 3/2, y_2(1) = 1.$

3. Задачи с подвижными границами. В задачах вариационного исчисления с подвижными границами в отличие от ранее рассмотренных задач граничные условия на функцию $y(x), x \in [a; b]$ на концах отрезка $[a; b]$ не зафиксированы.

Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами состоит в определении функции $y(x) \in C_1[a; b]$ и точек $x_0, x_1 \in [a; b], x_0 < x_1$, для которых функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (13)$$

достигает слабого ¹²⁾ экстремума при условиях

$$y(x_0) = \varphi_0(x_0), \quad y(x_1) = \varphi_1(x_1). \quad (14)$$

(Здесь $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in C_1[a; b]$, $F(x, y, z)$ — заданные функции и $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам.)

¹²⁾ Напомним, что слабым называется локальный экстремум в пространстве $C_1[a; b]$. В задаче с подвижными границами на кривой $y^*(x)$ с абсциссами концов x_0^* и x_1^* функционал (13) достигает локального экстремума в $C_1[a; b]$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех кривых $y(x) \in C_1[a; b]$ и точек x_0 и x_1 , удовлетворяющих неравенствам $\|y^* - y\|_1 < \varepsilon, |x_0^* - x_0| < \varepsilon, |x_1^* - x_1| < \varepsilon$, справедливо $J[y^*(x)] \leq J[y(x)]$ (локальный минимум) или $J[y^*(x)] \geq J[y(x)]$ (локальный максимум).

Эту задачу можно сформулировать и следующим образом. Пусть на плоскости заданы гладкие кривые γ_1 : $y = \varphi_0(x)$ и γ_2 : $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a; b]$. Требуется найти такую гладкую кривую $y = y(x)$, которая соединяет какую-либо точку кривой γ_1 с какой-либо точкой кривой γ_2 и доставляет слабый экстремум функционалу (13).

Приведем обобщение теоремы 1 для простейшей задачи вариационного исчисления с подвижными границами.

Теорема 4. Для того чтобы функционал (13) достигал на функции $y(x) \in C_1[a; b]$ слабого экстремума при условиях (14), необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

и условиям трансверсальности

$$\begin{aligned} [F + (\varphi'_0 - y')F_{y'}]_{x=x_0} &= 0, \\ [F + (\varphi'_1 - y')F_{y'}]_{x=x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, для определения экстремалей в простейшей задаче с подвижными границами необходимо найти общее решение $y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, после чего из условий (15) и уравнений

$$y(x_0, C_1, C_2) = \varphi_0(x_0), \quad y(x_1, C_1, C_2) = \varphi_1(x_1) \quad (16)$$

определить постоянные C_1 и C_2 и концы отрезка $[x_0; x_1]$.

Если на одном из концов искомой кривой $y(x)$ задано обычное граничное условие ($y(a) = y_0$ или $y(b) = y_1$), то условие трансверсальности (15) следует записать только для другого конца кривой.

Частным случаем задачи с подвижными границами является задача, в которой задана абсцисса одного из концов кривой $y(x)$, например $x_2 = b$, но граничное условие для $x = b$ отсутствует. Это означает, что граничная точка $(b, y(b))$ кривой $y(x)$ может перемещаться по вертикальной прямой $x = b$, и вместо второго условия трансверсальности (15) следует записать *естественное граничное условие*

$$[F_{y'}]_{x=b} = 0. \quad (17)$$

Пример 7. Найти экстремали функционала в следующей задаче с подвижными границами:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx; \quad y(x_0) = x_0^2 + 2, \quad y(x_1) = x_1.$$

Так как функция $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ зависит только от y' , то общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2. \quad (18)$$

Запишем условия трансверсальности (15):

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{1+y'^2} + (2x-y') \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right]_{x=x_0} &= 0, \\ \left[\sqrt{1+y'^2} + (1-y') \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right]_{x=x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Из (18) находим $y'(x_0) = y'(x_1) = C_1$. Отсюда с учетом равенств (16) получаем систему четырех уравнений для определения C_1, C_2, x_0 и x_1

$$\begin{aligned} \sqrt{1+C_1^2} + (2x_0 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} &= 0, \\ \sqrt{1+C_1^2} + (1 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 x_0 + C_2 &= x_0^2 + 2, \\ C_1 x_1 + C_2 &= x_1, \end{aligned}$$

решив которую, находим $C_1 = -1, C_2 = 11/4, x_0 = 1/2, x_1 = 11/8$.

Следовательно, уравнение экстремали имеет вид $y(x) = -x + \frac{11}{4}$,
 $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{11}{8}$.

Отметим, что функционал $J[y(x)]$ в данной задаче с подвижными границами представляет собой длину дуги кривой между точками $(x_0, y(x_0))$ и $(x_1, y(x_1))$. Поэтому геометрический смысл этой задачи состоит в определении гладкой кривой минимальной длины, соединяющей параболу $y = x^2 + 2$ и прямую $y = x$. Найденное решение позволяет определить расстояние S между указанными параболой и прямой:

$$S = \int_{1/2}^{11/8} \sqrt{1+(-1)^2} dx = \frac{7}{8} = \sqrt{2}. \quad \triangleright$$

Пример 8. Найти экстремали функционала в следующей задаче:

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 1.$$

В этой задаче отсутствует граничное условие при $x = \pi/4$, следовательно, правый конец кривой $y(x)$ может перемещаться по прямой $x = \pi/4$, и необходимо использовать естественное граничное условие (17).

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$, а его общее решение $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Из условия $y(0) = C_1 = 1$ находится постоянная C_1 , а из условия (17) $2y' \left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} + C_2 \cos \frac{\pi}{4} = 0$ — постоянная $C_2 = 1$, откуда $y(x) = \cos x + \sin x$. \triangleright

Найти экстремали функционала в следующих задачах с подвижными границами:

$$17.420. J(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx; y(0) = 0, y(x_1) = -x_1 - 1.$$

$$17.421. J(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx; y(0) = 0, y(x_1) = \frac{2}{1 - x_1}.$$

$$17.422. J(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx; y(0) = 0, y(x_1) = \frac{1}{x_1^2}.$$

$$17.423. J(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx; y(x_0) = x_0^2, y(x_1) = x_1 - 5.$$

$$17.424. J(y) = \int_0^{1/2} (y - y'^2) dx; y(0) = 0.$$

$$17.425. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y) dx; y(1) = 0.$$

$$17.426. J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx; y(0) = 0.$$

$$17.427. J(y) = \int_0^{x_1} (y'^2 + y^2) dx; y(0) = 0, y(x_1) = 1.$$

$$17.428. J(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx; y(0) = 1, y(x_1) = x_1 - 1.$$

$$17.429. J(y) = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2 + 4y \cos x) dx; y(0) = 0.$$

К задачам вариационного исчисления с подвижными границами относится и *задача Больца*, состоящая в определении функции $y(x) \in C_1[a; b]$, доставляющей слабый экстремум функционалу

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx + f(y(a), y(b)), \quad (19)$$

где $f(u, v)$ — заданная функция, имеющая непрерывные производные по u и v .

Необходимое условие экстремума функционала (19) формулируется следующим образом.

Теорема 5. Для того чтобы функционал (19) достигал на функции $y(x) \in C_1[a; b]$ слабого экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

и условиям трансверсальности для задачи Больца

$$\left[F_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(a)} \right]_{x=a} = 0, \quad \left[F_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y(b)} \right]_{x=b} = 0. \quad (20)$$

Условия (20) используются для определения постоянных C_1 и C_2 из общего решения $y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера.

Пример 9. Найти экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx - y^2(0) + 2y\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Уравнение Эйлера $y'' + y = 0$ имеет общее решение

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (21)$$

Записав условия трансверсальности (20)

$$\begin{aligned} [2y' + 2y]_{x=0} &= 2[-C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x]_{x=0} = \\ &= 2C_1 + 2C_2 = 0, \end{aligned}$$

$$[2y' + 2]_{x=\pi/2} = 2[-C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1]_{x=\pi/2} = -2C_1 + 2 = 0,$$

находим $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Таким образом, функция $y(x) = \cos x - \sin x$ является единственной кривой возможного экстремума функционала $J[y(x)]$. \triangleright

Найти экстремали следующих функционалов:

$$17.430. J(y) = \int_0^1 y'^2 dx + y^2(0) - 2y^2(1).$$

$$17.431. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx - 2 \operatorname{sh} 1 y(1).$$

$$17.432. J(y) = \int_0^\pi (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi).$$

$$17.433. J(y) = \int_0^3 4y'^2 y^2 dx + y^4(0) - 8y(3).$$

$$17.434. J(y) = \int_1^e 2y'(xy' + y) dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e).$$

$$17.435. J(y) = \int_0^1 e^{x+1} (y'^2 + 2y^2) dx + 2y(1)(y(0) + 1).$$

$$17.436. J(y) = \int_0^1 e^y y'^2 dx + 4e^{y(0)} + 32e^{-y(1)}.$$

$$17.437. J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx + y^2(0) - y^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4y\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

4. Задачи на условный экстремум. Задачи вариационного исчисления, в которых на искомые функции налагаются, помимо граничных условий, дополнительные ограничения, называются задачами на условный экстремум.

Рассмотрим следующую задачу об экстремуме функционала, зависящего от нескольких функций,

$$J[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x)) dx \quad (22)$$

с граничными условиями

$$y_k(a) = y_k^{(0)}, \quad y_k(b) = y_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (23)$$

при дополнительных ограничениях, заданных уравнениями связи

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad m < n. \quad (24)$$

Эта задача вариационного исчисления называется задачей Лагранжа. Введем функцию Лагранжа рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \\ = F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) + \\ + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n), \quad (25) \end{aligned}$$

где $\lambda_i(x) \in C_1[a; b]$ — произвольные функции (множители Лагранжа).

При решении задачи Лагранжа используется следующее необходимое условие экстремума функционала (22).

Теорема 6¹³⁾. Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ доставляют слабый экстремум функционалу (22) при условиях (24), (25), то существуют множители Лагранжа $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$L_{y_k} - \frac{d}{dx} L_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (26)$$

записанных для функционала $I(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b L dx$.

С помощью теоремы 6 решение задачи об условном экстремуме функционала $J(y_1, \dots, y_n)$ сводится к исследованию экстремума функционала $I(y_1, \dots, y_n)$ без дополнительных условий (24).

При использовании теоремы 6 для решения задачи Лагранжа исковые функции $y_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, и множители Лагранжа $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, определяются из системы $n+m$ уравнений (26) и (24).

Пример 10. Найти функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$\begin{aligned} J(y_1, y_2) &= \int_0^1 (y'_1{}^2 + y'_2{}^2) dx; \\ y_1(0) = y_2(0) &= 0, \quad y_1(1) = 2 \operatorname{ch} 1, \quad y_2(1) = 2 \operatorname{sh} 1; \\ y'_1 - y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Функция Лагранжа данной задачи имеет вид $L = y'_1{}^2 + y'_2{}^2 + \lambda(y'_1 - y_2)$. Для определения функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $\lambda(x)$ запишем систему,

¹³⁾ Эта теорема обобщает соответствующий результат для задачи на условный экстремум функций n переменных (см. Часть 2, стр. 214).

состоящую из уравнений Эйлера (26) и уравнения связи:

$$2y_1'' + \lambda' = 0,$$

$$2y_2'' + \lambda = 0,$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

Исключая из этой системы сначала функцию $\lambda(x)$, а затем $y_1(x)$, получим $y_2''' - y_2' = 0$. Обозначим y_2' буквой z , тогда $z''' - z = 0$. Общее решение этого уравнения $z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Отсюда последовательно находим

$$y_2(x) = \int z(x) dx = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3,$$

$$y_1(x) = \int y_2(x) dx = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x + C_4.$$

Для определения постоянных C_1, \dots, C_4 из граничных условий получаем следующую систему уравнений:

$$y_1(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0,$$

$$y_2(0) = C_1 - C_2 + C_3 = 0,$$

$$y_1(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} + C_3 + C_4 = 2 \operatorname{ch} 1,$$

$$y_2(1) = C_1 e - C_2 e^{-1} + C_3 = 2 \operatorname{sh} 1,$$

откуда находим $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = C_4 = 0$, т.е. в данной задаче функционал $J(y_1, y_2)$ может достигать экстремума при $y_1(x) = e^x + e^{-x} = 2 \operatorname{ch} x$, $y_2 = e^x - e^{-x} = 2 \operatorname{sh} x$. ▷

Найти функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующих задачах Лагранжа.

17.438. $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \cos x) dx;$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, y_2(\pi/2) = -1;$$

$$y_1 - y_2 - \sin x = 0.$$

17.439. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + 2y_2'^2 + y_2^2) dx;$

$$y_1(0) = -2, y_2(0) = 1, y_1(1) = -e^{-1}, y_2(1) = 0;$$

$$y_1 - y_2'^2 = 0.$$

$$17.440. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + x^3) dx;$$

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_2(1) = 2, \quad y_2(0) = y_1(1) = 1; \\ y_1 - 2y_2 + 3x &= 0. \end{aligned}$$

$$17.441. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 1) dx;$$

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_2(0) = y_2(1) = 0, \quad y_1(1) = 2; \\ y_1 + y_2 - 2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

$$17.442. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2^2) dx;$$

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_2(1) = 0, \quad y_2(0) = y_1(1) = 1; \\ y_1' - y_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$17.443. J(y_1, y_2) = \int_0^\pi (y_1'^2 - y_2'^2) dx;$$

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_2(0) = y_1(\pi) = 0, \quad y_2(\pi) = \pi/2; \\ y_1' - y_2 + \cos x &= 0. \end{aligned}$$

$$17.444. J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + y'^2 + 2y_1 y_2) dx;$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1;$$

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1;$$

$$y_1' + y_2' - 4x = 0.$$

$$17.445. J(y_1, y_2) = \int_a^b (y_1 + y_2 + y_2') dx;$$

$$\begin{aligned} y_1(a) &= y_1^{(0)}, \quad y_2(a) = y_2^{(0)}, \quad y_1(b) = y_1^{(1)}, \quad y_2(b) = y_2^{(1)}; \\ y_1' + y_2' - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Задача на условный экстремум функционала (22) с граничными условиями (23) при дополнительных условиях

$$\int_a^b F_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = C_i, \quad i = 1, \dots, m \text{ } ^{14}), \quad (27)$$

называется *изопериметрической задачей*.

Функция Лагранжа данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \\ = F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n), \end{aligned} \quad (28)$$

где множителями Лагранжа $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, являются произвольные вещественные числа.

При решении изопериметрической задачи используется следующее необходимое условие экстремума, подобное условию, сформулированному в теореме 6 для задачи Лагранжа.

Теорема 7. *Если функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ доставляют слабый экстремум функционалу (22) при условиях (23), (27), то существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (множители Лагранжа), при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$\tilde{L}_{y_k} - \frac{d}{dx} \tilde{L}_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (29)$$

где \tilde{L} — функция Лагранжа (28).

При использовании теоремы 7 для решения изопериметрической задачи функции $y_k(x), k = 1, \dots, n$, и множители Лагранжа $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, находятся из системы $n + m$ уравнений (29) и (27).

Пример 11. Найти функцию $y(x)$, на которой может достигаться экстремум функционала $J(y)$ в следующей изопериметрической задаче:

$$J(y) = \int_0^\pi y'^2 dx;$$

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1; \quad \int_0^\pi y \cos x dx = \frac{\pi}{2}.$$

¹⁴⁾ В данном случае, в отличие от задачи Лагранжа, число дополнительных ограничений не ограничивается условием $m < n$.

« Функция Лагранжа данной задачи имеет вид $\tilde{L} = y'^2 + \lambda y \cos x$. Из уравнения Эйлера $\lambda \cos x - 2y'' = 0$ находим $y(x) = -\frac{\lambda}{2} \cos x + C_1 x + C_2$. Для определения множителя Лагранжа λ используем дополнительное условие $\int_0^\pi \left(-\frac{\lambda}{2} \cos x + C_1 x + C_2 \right) \cos x dx = -\frac{\pi}{4} \lambda - 2C_1 = \frac{\pi}{2}$, откуда находим $\lambda = -2 - \frac{8}{\pi} C_1$. Таким образом, общее решение уравнения Эйлера имеет вид $y(x) = \cos x + \frac{4}{\pi} C_1 \cos x + C_1 x + C_2$.

Постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий $y(0) = 1 + \frac{4}{\pi} C_1 + C_2 = 1$, $y(\pi) = -1 + \left(\pi - \frac{4}{\pi} \right) C_1 + C_2 = -1$, откуда $C_1 = C_2 = 0$.

Итак, функционал $J(y)$ может достигать экстремума при $y(x) = \cos x$. \triangleright

Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, \dots, y_n)$ в следующих изопериметрических задачах:

$$\mathbf{17.446. } J(y) = \int_0^1 y'^2 dx;$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1; \int_0^1 xy dx = 0.$$

$$\mathbf{17.447. } J(y) = \int_0^1 y'^2 dx;$$

$$y(0) = y(1) = 0; \int_0^1 y dx = 1, \int_0^1 xy dy = 0.$$

$$\mathbf{17.448. } J(y) = \int_0^\pi y'^2 dx;$$

$$y(0) = 0, y(\pi) = 1; \int_0^\pi y \sin x dx = 0.$$

$$17.449. J(y) = \int_0^\pi y \sin x \, dx;$$

$$y(0) = 0, y(\pi) = \pi; \int_0^\pi y'^2 \, dx = \frac{3}{2}\pi.$$

$$17.450. J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2) \, dx;$$

$$y(0) = 0, y(1) = e^{-1}; \int_0^1 e^{-x} y \, dx = \frac{1}{4}(1 - 3e^{-2}).$$

$$17.451. J(y_1, y_2) = \int_0^1 y'_1 y'_2 \, dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, y_2(1) = 1;$$

$$\int_0^1 y_1 \, dx = 1, \int_0^1 y_2 \, dx = 0.$$

$$17.452. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1 + y_2) \, dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = 1, y_2(1) = -3;$$

$$\int_0^1 y'_1 y'_2 \, dx = 0.$$

$$17.453. J(y_1, y_2) = \int_0^1 y'_1, y'_2 \, dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, y_2(1) = 1;$$

$$\int_0^1 x y_1 \, dx = 0, \int_0^1 x y_2 \, dx = 0.$$

$$17.454. J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0, \int_0^1 y_1 y_2 dx = -2.$$

$$17.455. J(y_1, y_2) = \int_0^1 x(y_1 - y_2) dx;$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, y_1(1) = 2;$$

$$\int_0^1 y_1' y_2' dx = -\frac{4}{5}.$$

5. Прямые методы вариационного исчисления. Обычные методы вариационного исчисления, при использовании которых задача минимизации функционала сводится к интегрированию уравнений Эйлера–Лагранжа, как правило, приводят к трудоемким вычислениям и поэтому являются малоэффективными. Приближенные численные методы, дающие непосредственное решение вариационной задачи, называются *прямыми методами вариационного исчисления*. Основная идея прямых методов заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для некоторой задачи на экстремум функции конечного числа переменных. Наиболее известными среди них являются *методы Ритца, Канторовича и Галёркина*. Следует отметить, что прямые методы вариационного исчисления являются также и приближенными методами решения краевых задач дифференциальных уравнений.

Метод Ритца. Пусть требуется найти минимум функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \quad (30)$$

Идея метода Ритца состоит в том, что значения функционала $J(y)$ рассматриваются не на произвольных допустимых кривых вариационной задачи (30), а лишь на всевозможных линейных комбинациях вида

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x), \quad (31)$$

где $\varphi_0(a) = y_0$, $\varphi_0(b) = y_1$ и $\varphi_i(x)$ — последовательность линейно независимых функций, причем $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Эти функции называются *координатными*.

На функциях вида (31) функционал (30) превращается в функцию, зависящую от n переменных C_1, C_2, \dots, C_n :

$$J(y_n(x)) = \Phi(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Значения C_1, C_2, \dots, C_n выбираются так, чтобы функция $\Phi(C_1, C_2, \dots, C_n)$ достигала экстремума, т. е. C_1, C_2, \dots, C_n определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

При найденных из системы (32) значениях $C_i^*, l = 1, 2, \dots, n$, приближенное решение вариационной задачи (30) запишется в виде

$$y_n^*(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i^* \varphi_i(x). \quad (33)$$

Вопросы сходимости минимизирующей последовательности $\{y_n^*(x), x \in \mathbb{N}\}$ являются сложными. Они изучаются в специальной литературе. Для оценки точности результатов, полученных методом Ритца или другими прямыми методами, обычно пользуются следующим практическим правилом. Вычислив $y_n^*(x)$ и $y_{n+1}^*(x)$, сравнивают их между собой в нескольких точках отрезка $[a, b]$. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считают, что с требуемой точностью решение рассматриваемой вариационной задачи (30) равно $y_n^*(x)$. Если же значения $y_n^*(x)$ и $y_{n+1}^*(x)$ хотя бы в некоторых из выбранных точек отличаются значительно, то вычисляют $y_{n+2}^*(x)$ и сравнивают теперь значения $y_{n+1}^*(x)$ и $y_{n+2}^*(x)$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока значения $y_{n+k}^*(x)$ и $y_{n+k+1}^*(x)$ не совпадут в пределах заданной точности.

Пример 12. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx \quad (34)$$

при граничных условиях $y(0) = 0, y(1) = 0$ методом Ритца.

◀ Полагаем $\varphi_0(x) \equiv 0$. В качестве координатных функций выбираем $\varphi_k(x) = x^{k+1} - x^k$, $k \in \mathbb{N}$. Эти функции удовлетворяют граничным условиям $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0$. Выберем $n = 2$. Тогда в соответствии с (33)

$$y_2(x) = C_1(x^2 - x) + C_2(x^3 - x^2) \quad (35)$$

и

$$y'_2(x) = C_1(2x - 1) + C_2(3x^2 - 2x). \quad (36)$$

После подстановки (35) и (36) в (34) и интегрирования получим

$$\Phi(C_1, C_2) = J(y_2(x)) = \frac{11}{30}C_1^2 + \frac{11}{30}C_1C_2 + \frac{1}{7}C_2^2 - \frac{1}{6}C_1 - \frac{1}{10}C_2.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума функции $\Phi(C_1, C_2)$, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial C_1} &= \frac{11}{15}C_1 + \frac{11}{30}C_2 - \frac{1}{6} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} &= \frac{11}{30}C_1 + \frac{2}{7}C_2 - \frac{1}{10} = 0.\end{aligned}\tag{37}$$

Решая систему (37), получим $C_1^* = 69/473$, $C_2^* = 7/43$. Следовательно, приближенное выражение $y_2^*(x)$ для экстремали $y(x)$ имеет вид

$$y_2^*(x) = \frac{69}{473}(x^2 - x) + \frac{7}{43}(x^3 - x^2) = \frac{1}{473}(77x^3 - 8x^2 - 69x).$$

В данном случае существует точное решение поставленной задачи:

$$y(x) = \frac{e}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x}) - x.$$

Сравним полученное методом Ритца приближенное решение $y_2^*(x)$ и точное при некоторых значениях аргумента:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y(x)$	0,0000	-0,0287	-0,0505	-0,0583	-0,0444	0,0000
$y_2^*(x)$	0,0000	-0,0285	-0,0506	-0,0585	-0,0442	0,0000

Сравнение показывает, что точное и приближенное решения совпадают с точностью до 0,0002. \triangleright

В задачах 17.456–17.460 методом Ритца найти приближенное решение задачи об экстремуме указанных функционалов:

$$17.456^*. J[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx, \quad y(0) = y(2) = 0, \quad n = 2.$$

$$17.457^*. J[y(x)] = \int_1^2 \left(xy'^2 - \frac{x^2 - 1}{x} y^2 - 2x^2 y \right) dx, \quad y(1) = y(2) = 0, \quad n = 2.$$

$$17.458^*. J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

$n = 2$.

$$17.459^*. J[u(x, y)] = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy,$$

$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}, u|_{\Gamma_D} = x^2 + y^2, n = 3.$

$$17.460^*. J[u(x, y)] = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right) dx dy,$$

$D = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}, u|_{\Gamma_D} = 0, n = 2.$

17.461. Найти методом Ритца приближенное решение дифференциального уравнения $y'' + x^2 y = x, y(0) = y(1) = 0$. Определить $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$ и сравнить их значения в точках $x = 0,25$ и $x = 0,5$.

Метод Канторовича. Этот метод применяется для приближенного решения вариационной задачи, когда функционал зависит от функций нескольких переменных. Пусть

$$J[u(x, y)] = \iint_D F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy, \quad (38)$$

$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha_1(x) \leq y \leq \alpha_2(x)\}, u|_{\Gamma_D} = \psi(x, y).$

При применении метода Ритца к функционалу (38) (см. задачи 17.459–17.460) выбирается следующая система координатных функций: $\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)$. Решение ищется в виде

$$u_n(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x, y),$$

где C_k — неизвестные постоянные. В методе Канторовича выражение для экстремали берется в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \varphi_k(x, y), \quad (39)$$

где $u_k(x)$ — неизвестные функции, определяемые таким образом, чтобы функционал (38) достигал экстремального значения. Отыскание решения в виде (39) позволяет расширить класс экстремалей.

После подстановки (39) в (38) и интегрировании полученного выражения по y получается следующий функционал:

$$J[u_n(x, y)] = \int_a^b \Phi(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u'_1(x), \dots, u'_n(x)) dx.$$

Функция $u_k^*(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, должны удовлетворять системе уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\Phi_{u_k^*} - \frac{d}{dx} \Phi_{u_k'^*} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

в приближенное решение $u_n^*(x, y)$ вида (39) — заданным граничным условиям на прямых $x = a$ и $x = b$.

Пример 13. Методом Канторовича найти экстремаль функционала

$$J[u(x, y)] = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right) dx dy, \quad (40)$$

где $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, $u|_{\Gamma_D} = 0$, $n = 1$.

Решение будем искать в виде

$$u_1(x, y) = u_1(x)(b^2 - y^2).$$

Граничные условия на прямых $y \pm b$ выполняются. После подстановки $u_1(x, y)$ в (40) и интегрирования по y получаем

$$J[u_1(x)] = \int_{-a}^a \left(\frac{16}{15} b^2 u_1'^2 + \frac{8}{3} b^3 u_1^2 - \frac{8}{3} b^3 u_1 \right) dx.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид

$$u_1''(x) - \frac{5}{2b^2} u_1(x) = -\frac{5}{4b^2}.$$

Находим общее решение этого уравнения:

$$u_1(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{2,5} \frac{x}{b} + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{2,5} \frac{x}{b} + 0,5.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий, т. е. $u_1(-a) = u_1(a) = 0$, откуда $C_2^* = 0$ и $C_1^* = -\left(2 \operatorname{ch} \sqrt{2,5} \frac{a}{b}\right)^{-1}$.

Окончательно получаем следующее приближенное выражение для экстремали функционала (40):

$$u_1^*(x, y) = u_1^*(x)(b^2 - y^2) = 0,5(b^2 - y^2) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2,5} \frac{x}{b}}{\operatorname{ch} \sqrt{2,5} \frac{a}{b}} \right). \quad \triangleright$$

В задачах 17.462 и 17.463 найти приближенное решение метода Канторовича. Положить $n = 1$:

$$\mathbf{17.462^*.} \quad J[u(x, y)] = \iint_D (u''_{xx}^2 + u''_{yy}^2 - 2u) dx dy, \text{ где } D = \\ = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}, u|_{\Gamma} = 0.$$

$$\mathbf{17.463^*.} \quad J[u(x, y)] = \iint_D (u''_{xx}^2 + u''_{yy}^2 - 2xy) dx dy, \text{ где } D = \\ = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, u|_{\Gamma} = 0.$$

Метод Галёркина. Этот метод применяется для отыскания приближенных решений как вариационных задач, так и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, в частности, уравнений Эйлера–Лагранжа.

Пусть неизвестная функция $u(P)$ удовлетворяет в некоторой области D следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} L(u(P)) &= f(P), \quad P \in G, \\ \Gamma(u(P)) &= 0 \text{ на } \gamma \quad (\gamma \text{ — граница } G). \end{aligned}$$

Здесь L — некоторый линейный дифференциальный оператор, Γ — линейный оператор граничных условий. Приближенное решение краевой задачи (41) ищется в виде суммы

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(P),$$

где c_k — неопределенные коэффициенты, $\varphi_k(P)$ — система линейно независимых непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям. Обозначим δf невязку

$$\delta f = L(u_n(P)) - f(P).$$

Коэффициенты c_k определяются из условия ортогональности в области D невязки δf к функциям $\varphi_k(P)$, $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\int_D [L(u_n(P)) - f(P)] \varphi_k(P) dP = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (42)$$

Так как оператор L линеен, то (42) запишется в каноническом виде, удобном для вычислений c_i :

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_G L(\varphi_i(P)) \varphi_k(P) dP = \int_G f(P) \varphi_k(P) dP,$$

или в виде

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_G f_i(P) \varphi_k(P) dP = \int_G f(P) \varphi_k(P) dP,$$

где $f_i(P) \equiv L(\varphi_i(P))$.

З а м е ч а н и е. Можно использовать ортогональность невязки к другой линейно независимой системе функций $\psi_k(P)$ выбираемой из удобства вычислений получаемых интегралов (см. решение примера 14).

Пример 14. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 2xy) dx$$

при граничных условиях $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

« Составить уравнение Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y_1} = 0$, имеем

$$Ly = f(x), \quad \text{т. е. } y'' = -x. \quad (43)$$

Краевые условия остаются прежними: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Исходная задача сводится к эквивалентной краевой задаче:

$$y'' = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Решение будем искать приближенно методом Галёркина, записывая ис- комую функцию в виде

$$y(x) = x(1-x)(A + Bx) = Ax(1-x) + Bx^2(1-x), \quad (44)$$

где $\varphi_1(x) = x(1-x)$ и $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$. Вычисляя y'' и подставляя в левую часть уравнения (43), запишем выражение для невязки δ :

$$\delta f = -2A + B(2 - 6x) + x.$$

Вместо условий ортогональности невязки δf к функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ коэффициенты A и B определены из условия ортогональности δf к функ-

циям $\psi_1(x) = 1$ и $\psi_2(x) = x$ (функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ линейно независимы на $[0, 1]$ с $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$):

$$\begin{aligned} A \int_0^1 -2 \, dx + B \int_0^1 (2 - 6x) \, dx &= - \int_0^1 x \, dx, \\ A \int_0^1 -2x \, dx + B \int_0^1 (2 - 6x) \, dx &= - \int_0^1 x^2 \, dx. \end{aligned} \tag{45}$$

Вычисляя интегралы в (46), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 2A + B &= 1/2, \\ A + B &= 1/3. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно A и B , получим

$$A = 1/6, \quad B = 1/6.$$

Подставив найденные коэффициенты A , B в формулу (44), найдем искомое приближение для экстремали:

$$y^*(x) = \frac{1}{6}x(1-x) + \frac{1}{6}x^2(1-x) = \frac{x(1-x^2)}{6}.$$

Заметим, что в данной задаче найденное приближение совпадает с точным решением $y_t = x(1-x^2)/6$. \triangleright

Методом Галёркина найти решение следующих вариационных задач. Ограничиться приближениями искомой экстремали в виде

$$y_n(x) = \varphi(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n),$$

где $\varphi(x)$ выбирается из условия выполнения граничных условий, а $n = 1$:

$$17.464. \quad J(y) = \int_0^2 (xy' + y'^2) \, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

$$17.465. \quad J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) \, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

$$17.466. \quad J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x) \, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 11

- 11.1.** Линии уровня — параболы $y^2 = C - x$. **11.2.** Линии уровня — гиперболы $xy = C$ (при $C = 0$ — совокупность координатных осей).
- 11.3.** Линии уровня — прямые $y = Cx$, $x \neq 0$. **11.4.** Поверхности уровня — параллельные плоскости $x + y + z = C$. **11.5.** Поверхности уровня — однополостные и двуполостные гиперболоиды $x^2 + y^2 - z^2 = \pm C^2$ (при $C = 0$ — конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$). **11.6.** Поверхности уровня — параболоиды вращения $x^2 + y^2 = z + C$. **11.7.** Гиперповерхности уровня — четырехмерные параллельные плоскости $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = C$. **11.8.** Гиперповерхности уровня — четырехмерные сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = C^2$. **11.9.** Окружности $x^2 + y^2 = C^2$. **11.10.** Гиперболы $xy = C$ (при $C = 0$ — совокупность координатных осей). **11.11.** Параболы $y^2 = 2(x+C)$. **11.12.** Прямые $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$. **11.14.** Линии пересечения гиперболических цилиндров $y^2 - x^2 = C_1$ с такими же цилиндрами $z^2 - x^2 = C_2$. **11.15.** Окружности, являющиеся линиями пересечения сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ с плоскостями $x + y + z = C_2$. **11.16.** Прямые четырехмерного пространства, перпендикулярные к оси Ox_3 и ее пересекающие: $\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = \frac{x_4}{l_4}$; $x_3 = C$. **11.17.** $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = bt$.
- 11.18.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2} = 4$. **11.19.** а) Конические поверхности с вершинами в начале координат, направляющими которых служат заданные замкнутые кривые; б) тороидальные поверхности, образованные окружностями с центрами на прямой $x = y = z$, лежащими в плоскостях $x + y + z = C$, сечениями которых служат заданные замкнутые кривые.
- 11.24.** $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **11.25.** $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$. **11.26.** а. **11.27.** $a(\mathbf{b}, \mathbf{r}) + b(a, \mathbf{r})$. **11.28.** $2|a|^2\mathbf{r} - 2(a, \mathbf{r})\mathbf{a}$. **11.31.** $13/5$. **11.32.** $4/\sqrt{5}$. **11.33.** $14/3$. **11.34.** $1/|\mathbf{r}|^2$. **11.35.** $6/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **11.36.** $\cos \varphi = -4/\sqrt{41}$. **11.37.** $\frac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{6}$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. **11.38.** $\frac{1}{\sqrt{17}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

- 11.39. $P(3, 3, -3)$. 11.45. $xy = C$. 11.46. $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x^2 - z^2 = C_2. \end{cases}$
- 11.47. $\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2/x. \end{cases}$ 11.48. $\sqrt{2} + 1$. 11.49. $\ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$. 11.50. 0.
- 11.51. $\frac{256}{15}a^3$. 11.52. $\frac{a^2}{3}[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]$. 11.53. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 11.54. $\frac{a^3\sqrt{10}}{9}$.
- 11.55. $\frac{9}{64}k\pi a^3$. 11.56. $2k\pi a\sqrt{2a}$. 11.57. $k\pi a^2$. 11.58. $\frac{ka\sqrt{3}}{2}$.
- 11.59. $-\frac{Mmc}{(a^2 + c^2)^{3/2}}$. 11.60. αr^2 . 11.61. $\frac{4}{3}\beta r^4$. 11.62. $\sqrt{3}/360$.
- 11.63. $2\sqrt{2}\pi/3$. 11.64. 4π . 11.65. $\frac{3}{4}\pi a^3$. 11.66. $\frac{8ka^3}{15}(\sqrt{2} + 1)$.
- 11.67. $\frac{\pi a^4\sqrt{2}}{2}$. 11.68. $\frac{k\pi a^3}{3}(3\sqrt{3} - 1)$. 11.69. $\frac{27}{2}ka^3$. 11.70. $\frac{\pi k}{4}a^2\sqrt{a}(3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$. 11.71. $-\pi ab$. 11.72. а) $2/3$; б) 0,7; в) 0,7; г) 1; д) 1.
- 11.73. $2\pi R^2$. 11.74. $91/60$. 11.75. $2\pi^2 a^2 h$. 11.76. $\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. \triangleleft $z = R - x - y$, $x^2 + y^2 + (R - x - y)^2 = R^2$, или $x^2 + xy + y^2 = R(x + y)$. Положим $y = tx$. Тогда имеем: $x = \frac{R(1+t)}{1+t+t^2}$, $y = \frac{R(t+t^2)}{1+t+t^2} = R - \frac{R}{1+t+t^2}$, $z = -\frac{Rt}{1+t+t^2}$. Значению $t = 0$ соответствует точка $A(R, 0, 0)$, значениям $t = \pm\infty$ — точка $B(0, R, 0)$, значению $t = -1$ — точка $C(0, 0, R)$. Обходу в положительном направлении относительно оси Oz соответствует обход $BCAB$, т. е. изменение t от $-\infty$ через -1 и 0 до $+\infty$. Далее, $dx = -\frac{R(t^2 + 2t)}{(1+t+t^2)^2} dt$, $dy = \frac{R(2t+1)}{(1+t+t^2)^2} dt$, $dz = \frac{R(t^2 - 1)}{(1+t+t^2)^2} dt$. Получаем $z dx + x dy + y dz = \frac{R^2(1+2t+3t^2+2t^3+t^4)}{(1+t+t^2)^3} dt = \frac{R^2 dt}{1+t+t^2}$,
- откуда $\oint_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2} = R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4} + \left(t + \frac{1}{2}\right)^2} =$
- $= \frac{2R^2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. \triangleright
- 11.77. $2\pi a^2$. 11.78. $\left(2\sqrt{2} - \frac{7}{3}\right)a^3$. 11.79. $4r^3/3$. 11.80. -4π .
- 11.81. $-\pi r^4/2$. 11.82. -1 . 11.83. $a^3/6$. 11.84. $4\pi a$. 11.85. $4HR^3/15$.

11.86. $\pi R^4/2$. 11.87. $\pi R^2 H/3$. 11.88. $\pi R^2 H/4$. 11.89. $\pi R^2 H^2/3$.

11.90. $\pi R^4/8$. 11.91. 0. 11.92. πR^4 . 11.93. $-R^2 H/3$. 11.94. 0. 11.95. $x +$

$+y+z$. 11.96. $-2/(x+y+z)^{5/3}$. 11.97. 14. 11.98. 8. 11.99. 0. 11.100. 0.

11.101. 0. 11.103. a^5 . 11.104. $4\pi R^2$. 11.105. $-2\pi R^3$. Указание. Замкнуть поверхность, добавив основание параболического сегмента, и вычесть соответствующую ей часть потока.

11.106. Если $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$, то поток вектора \mathbf{a} через дугу \overrightarrow{AB} определится формулой

$$\int_{\overrightarrow{AB}} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds = \int_{\overrightarrow{AB}} a_x dx - a_y dy. \text{ Теорема Гаусса--Остроградского для плоского поля:}$$

$$\oint_L (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds = \oint_L a_x dy - a_y dx = \iint_Q \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \right) dy dx.$$

11.107. $\oint_L a_x dx + a_y dy = \iint_Q \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy$ (формула Грина). Ука-

зание. Положить в предыдущей формуле (задача 11.106) $a_x = a_y$,

$a_y = -a_x$. 11.108. $\frac{R^5}{3}$. 11.109. $\frac{\pi R^4 H}{2}$. 11.110. $x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} +$

$+z(y^2 - x^2)\mathbf{k}$. 11.111. $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$. 11.113. $-2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - 2(3x + 2y)\mathbf{k}$.

11.114. 0. 11.115. $\operatorname{rot} \nu = 2\omega$. Указание. Скорость ν точки $P(\mathbf{r})$, вра-

щающейся с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через

начало координат, равна $[\omega, \mathbf{r}]$. 11.118. а) a^2 . Указание. Перейти

к параметрической форме, положив $y = tx$; путь соответствует изме-

нение t от 0 до $+\infty$. б) $\frac{3}{8}\pi \frac{a^2 b^2}{c^2}$. 11.119. $\frac{4}{3}\pi R^3$. 11.120. $\frac{3}{2}\pi R^4$.

11.121. $\frac{R^3}{3}$. 11.122. $\operatorname{div}(\mathbf{c}u) = (\mathbf{c}, \operatorname{grad} u)$, $\operatorname{div}(\mathbf{a}u) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u)$.

11.123. $\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = [\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a}$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] +$

$+[\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}] + (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}$. \triangleleft Найдем предварительно $[\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a}]$.

Имеем: $[\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, [\nabla, \mathbf{a}]] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \nabla - (\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a} = \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - (\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a}$.

Отсюда $\nabla(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = [\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{c}, \nabla) \mathbf{a}$, далее, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) +$

$+ \nabla(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ и используем предыдущий результат. \triangleright 11.124. $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] =$

$= (\mathbf{c}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$, $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b})$. 11.125. $\operatorname{rot}(\mathbf{c}u) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{c}]$,

$\operatorname{rot}(\mathbf{a}u) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}]$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} -$

$- \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}$. Указание. См. решение примера 5. 11.126. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u =$

- $= \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\text{grad div } \mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \frac{\partial(\text{div } \mathbf{a})}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(\text{div } \mathbf{a})}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial(\text{div } \mathbf{a})}{\partial z} \mathbf{k}$, $\text{rot rot } \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$, $\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla^2 a_x \mathbf{i} + \nabla^2 a_y \mathbf{j} + \nabla^2 a_z \mathbf{k}$. **11.127.** $6\mathbf{r} = 6(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. **11.128.** 0.
- 11.129.** $4\mathbf{r} = 4(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. **11.130.** $u \text{ div grad } v + 2(\text{grad } u, \text{grad } v) + v \text{ div grad } u$. **11.131.** $\text{grad div}(u\mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \nabla) \text{grad } u$, $\text{grad div}(u\mathbf{a}) = u \text{ grad div } \mathbf{a} + \text{div } \mathbf{a} \text{ grad } u + [\text{grad } u, \text{rot } \mathbf{a}] + (\text{grad } u, \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \text{grad } u$.
- 11.132.** $\text{rot rot}(u\mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \nabla) \text{grad } u - \mathbf{c} \nabla^2 u$. **11.133.** $x^3y - xy^3 + C$.
- 11.134.** $2\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} + C$. **11.135.** $xyz - \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 z^2}{2} + C$.
- 11.136.** $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + C$. Указание. За начальную точку A принять точку $(1, 1, 1)$ или любую другую точку, не лежащую на осях координат. **11.137.** $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} - \frac{xy}{z^2} + C$. Указание. См. указание к предыдущей задаче. **11.138.** \triangleleft Если бы во всюду непрерывном потенциальном поле могли существовать замкнутые векторные линии, то циркуляция по такой линии не могла бы быть равной нулю, так как произведение $(\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ вдоль всей линии сохраняло бы постоянный знак, и поэтому $\oint (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) \neq 0$. \triangleright **11.139.** Особая точка $O(0, 0)$, циклическая постоянная равна 2π . **11.140.** Указание. Взять два произвольных замкнутых контура, обходящих данную особую точку: AMA и BNB . Соединить точки M и N отрезком прямой и к сложному контуру $AMNBNMA$ применить формулу Грина. **11.141.** Указание. Использовать при определении потенциала пути, обходящие по несколько раз и в различных направлениях особые точки. **11.147.** Указание. Применить теорему Гаусса–Остроградского и учесть, что на боковой поверхности трубы $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$. **11.149.** Указание. Применить теорему Гаусса–Остроградского и учесть, что для гармонических функций $\nabla^2 u = 0$. **11.150.** Нет. **11.151.** Нет. **11.152.** Да. **11.153.** Только при $A + C = 0$. **11.154.** Только если $A + C = B + D = 0$. **11.155.** Да. **11.156.** Только при $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$. **11.157.** Только если $a_{111} + a_{122} + a_{133} = a_{112} + a_{222} + a_{233} = a_{113} + a_{223} + a_{333} = 0$. **11.158.** Линии x : $\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}$; линии y : $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - z_0}{0}$; линии z : $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z}{1}$. **11.159.** Линии r : $\varphi = \varphi_0$, $z = z_0$ (лучи,

исходящие из точек оси Oz , лежащие в горизонтальных плоскостях); линии φ : $r = r_0$, $z = z_0$ (окружности с центрами на оси Oz радиуса r_0 , лежащие в плоскостях $z = z_0$); линии z : $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (прямые, параллельные оси Oz). **11.160.** Линии r : $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ (лучи, исходящие из начала координат); линии θ : $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (полуокружности радиуса r_0 с центром в начале координат, лежащие в полуплоскостях $\varphi = \varphi_0$, проходящих через ось Oz , т. е. меридианы). Линии φ : $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ (окружности радиуса $r_0 \sin \theta_0$ с центром на оси Oz , лежащие в горизонтальных плоскостях, т. е. параллели).

11.161. $L_x = L_y = L_z = 1$. **11.162.** $L_r = L_z = 1$, $L_\varphi = r$. **11.163.** $L_r = 1$, $L_\theta = r$, $L_\varphi = r \sin \theta$. **11.164.** $ds_x = dx$, $ds_y = dy$, $ds_z = dz$; $d\sigma_x = dy dz$, $d\sigma_y = dx dz$, $d\sigma_z = dx dy$; $dv = dx dy dz$. **11.165.** $ds_r = dr$, $ds_\varphi = r d\varphi$, $ds_z = dz$; $d\sigma_r = r d\varphi dz$, $d\sigma_\varphi = dr dz$, $d\sigma_z = r dr d\varphi$; $dv = r dr d\varphi dz$. **11.166.** $ds_r = dr$, $ds_\theta = r d\theta$, $ds_\varphi = r \sin \theta d\varphi$; $d\sigma_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, $d\sigma_\theta = r \sin \theta dr d\varphi$, $d\sigma_\varphi = r dr d\theta$; $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

$$\mathbf{11.167.} \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad \mathbf{11.168.} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

$$\mathbf{11.169.} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right). \quad \mathbf{11.170.} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \\ + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (ra_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z. \quad \mathbf{11.171.} \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad \mathbf{11.172.} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \quad \mathbf{11.173.} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

$$\mathbf{11.174.} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (ra_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta + \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (ra_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi. \quad \mathbf{11.176.} \text{a) } \operatorname{div} \mathbf{e}_r = \frac{1}{r}, \operatorname{rot} \mathbf{e}_r = \mathbf{0}; \text{б) } \operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{e}_z}{r}; \text{в) } \operatorname{div} \mathbf{e}_z = 0, \operatorname{rot} \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \quad \mathbf{11.177.} \text{a) } \operatorname{div} \mathbf{e}_r = \frac{2}{r}, \operatorname{rot} \mathbf{e}_r = \mathbf{0}; \\ \text{б) } \operatorname{div} \mathbf{e}_\theta = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r}, \operatorname{rot} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}; \text{в) } \operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi = 0, \operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \mathbf{e}_r - \\ - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta. \quad \mathbf{11.178.} \text{a) } u = C_1 \ln r + C_2; \text{б) } u = C_1 \varphi + C_2; \text{в) } u = C_1 z + C_2.$$

11.179. а) $u = \frac{C_1}{r} + C_2$; б) $u = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2$; в) $u = C_1 \varphi + C_2$.

11.180. $u = r^2 \sin 2\varphi \cos 2\theta$, $\operatorname{grad} u = 2r \left(\sin 2\varphi \cos 2\theta \mathbf{e}_r - \sin 2\varphi \sin 2\theta \mathbf{e}_\theta + \right.$

$$\left. + \frac{\cos 2\varphi \cos 2\theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \right)$$
, $\nabla^2 u = 2 \sin 2\varphi (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \theta)$. **11.181.** $u = rz \sin 2\varphi + r \cos 2\varphi$, $\operatorname{grad} u = (z \sin 2\varphi + \cos 2\varphi) \mathbf{e}_r + 2(z \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \mathbf{e}_\varphi + r \sin 2\varphi \mathbf{e}_z$, $\nabla^2 u = -\frac{3u}{r^2}$. **11.182.** $\mathbf{a} = \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{r} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$. **11.183.** $\mathbf{a} = rz(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z)$, $\operatorname{div} \mathbf{a} = 2z - r$, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = (r + z) \mathbf{e}_\varphi$. **11.184.** $\operatorname{grad} u = f'(r) \mathbf{e}_r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla^2 u = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}$. **11.185.** $\operatorname{grad} u = f'(r) \mathbf{e}_r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla^2 u = f''(r) + \frac{f'(r)}{r}$.

11.186. $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$, $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}$.

11.187. $\operatorname{grad} u = \frac{\partial F}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{e}_z$, $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.

Глава 12

12.1. $\frac{1}{4}$. **12.2.** $\frac{23}{45}$. **12.3.** $\frac{1}{2}$. **12.4.** $\frac{11}{12}$. **12.5.** $\frac{3}{2} \frac{6e - e^2 - 1}{(3e - 1)(3 - e)}$. Ука-

зание. Использовать формулу Эйлера $\cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2}$. **12.6.** $1 + i$.

12.19. Расходится. **12.20.** Сходится. **12.21.** Сходится. **12.22.** Сходится.

12.23. Расходится. **12.24.** Расходится. **12.25.** Сходится. **12.26.** Сходится.

12.27. Расходится. **12.28.** Сходится. **12.29.** Сходится. **12.30.** Сходится.

12.31. Сходится. **12.32.** Расходится. **12.33.** Сходится. **12.34.** Сходится.

12.35. Расходится. **12.36.** Сходится. **12.37.** Сходится. **12.38.** Сходится

абсолютно. **12.39.** Сходится абсолютно. **12.40.** Сходится. **12.41.** Расхо-

дится. **12.42.** Расходится. **12.43.** Сходится. **12.44.** Сходится. **12.45.** Схо-

дится. **12.46.** Сходится. **12.47.** Сходится абсолютно. **12.48.** Сходится

абсолютно. **12.49.** Сходится. **12.50.** Расходится. **12.51.** Расходится.

- 12.52.** Сходится. **12.53.** Сходится. **12.54.** Сходится. **12.55.** Сходится.
12.56. Сходится. **12.57.** Расходитсѧ. **12.58.** Сходится. **12.59.** Сходится.
12.60. Сходится. **12.61.** Сходится. **12.62.** Сходится. **12.63.** Сходится.
12.64. Сходится. **12.65.** Сходится. **12.66.** Расходитсѧ. **12.67.** Сходится.
12.68. Сходится. **12.69.** Сходится. **12.70.** Расходитсѧ. **12.71.** Расходитсѧ.
12.72. Расходитсѧ. Указание. $u_{n+1}/u_n > 1$. **12.73.** Сходится.
12.74. Сходится. **12.75.** Расходитсѧ. **12.76.** Сходится. **12.77.** Расходитсѧ.
12.78. Расходитсѧ. **12.79.** Сходится. **12.80.** Сходится. **12.81.** Сходится.
12.82. Расходитсѧ. **12.83.** Расходитсѧ. **12.84.** Сходится абсолютно.
12.85. Расходитсѧ. **12.86.** Сходится абсолютно. **12.87.** Если $p > 1$, то ряд сходится при всех α , а если $p < 1$, то расходится. Если $p = 1$, то ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. **12.88.** Если $p > 1$, то ряд сходится при любых α и β , а если $p < 1$, то расходится. Если $p = 1$, то ряд сходится при $\alpha > 1$ и любых β и расходится при $\alpha < 1$. Если же $p = \alpha = 1$, то ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leq 1$. **12.90.** Сходится условно. **12.91.** Сходится абсолютно. **12.92.** Расходитсѧ. **12.93.** Сходится абсолютно. **12.94.** Расходитсѧ. **12.95.** Сходится условно. **12.96.** Сходится абсолютно. **12.97.** Сходится абсолютно. **12.98.** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно — при $0 < \alpha \leq 1$ и расходится при $\alpha \leq 0$. **12.99.** Абсолютно сходится.
12.100. Условно сходится. **12.101.** Абсолютно сходится при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.
12.102. Расходитсѧ. **12.103.** Сходится условно. **12.104.** Сходится абсолютно. **12.105.** Сходится условно. Указание. Рассмотреть частичные суммы с номерами $8n$, в которых сгруппировать члены с номерами $8k+1$ и $8k+5$, $8k+2$ и $8k+6$, $8k+3$ и $8k+7$. Убедиться в существовании предела $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{8n}$. Далее, как и при доказательстве признака Лейбница, воспользоваться соотношением $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{4} = 0$. **12.106.** Сходится условно. **12.107.** Расходитсѧ. **12.108.** Абсолютно сходится. **12.109.** Расходитсѧ. **12.110.** Расходитсѧ. Указание. Рассмотреть частичные суммы с четными номерами. **12.111.** Сходится условно. **12.112.** Сходится абсолютно. **12.113.** Расходитсѧ. **12.114.** Указание. Воспользоваться неравенством $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$. **12.115.** Сходится. \triangleleft Оценим c_n .

Имеем

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{2^{n-k+1}} + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n \frac{1}{k^2 \cdot 2^{n-k+1}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \left(2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n 2^k \right) = \frac{A_1}{2^{\frac{n}{2}}} + \frac{A_2}{n^2}. \end{aligned}$$

Полученные слагаемые являются членами сходящихся рядов $A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}}$

и $A_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. \triangleright

12.116. Сходится. Указание. Для оценки $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k+1}}{k^2(n-k+1)}$ воспользоваться разложением дроби на простейшие $\frac{1}{k^2(n-k+1)} =$

$$= \frac{1}{(n+1)k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right)$$

и показать, что числа $b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ монотонно убывают по абсолютной величине.

12.117. Расходится. Указание. Воспользоваться разложением дроби из предыдущей задачи на простейшие и оценить члены $d_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

снизу. **12.118.** Расходится. Указание. $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^k(n-k+1)} > \frac{1}{n}$

при $n \geqslant 2$. **12.124.** $(0, +\infty)$; абсолютно сходится при $x \in (1, +\infty)$.

12.125. \mathbb{R} ; сходимость всюду абсолютная. **12.126.** Расходится во всех точках.

12.127. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$; сходимость всюду абсолютная. **12.128.** $(-\infty, -1)$; сходимость всюду абсолютная. **12.129.** $(-1, -1/2] \cup (1/2, 1)$; сходится абсолютно при $x \in (-1, -1/2) \cup (1/2, 1)$.

12.130. $[0, +\infty) \cup \{k\pi | k = -1, -2, \dots\}$; сходимость всюду абсолютная. **12.131.** $(-2, 2)$; сходимость всюду абсолютная.

12.132. $(0, +\infty)$; сходимость всюду абсолютно.

12.133. $[1/e, e)$; сходится абсолютно при $x \in (1/e, e)$.

12.134. $|z-2| > 1$. **12.135.** $|z+1| > 1$. **12.136.** $|z-3i| > \sqrt{2}$. **12.137.** Полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. **12.138.** $\{z | -\pi/4 < \arg z < \pi/4 \text{ и } 3\pi/4 < \arg z <$

$< 5\pi/4\}$. **12.139.** $\operatorname{Re} z < 0$. **12.140.** $\operatorname{Re} z > 1$. Указание. Сравнить выражение $|(-1)^n n^{-z}|$ с членом n^{-p} ряда Дирихле.

12.141. $\operatorname{Im} z > 0$. Указание. Воспользоваться тем, что дробно-линейная функция $w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ отображает верхнюю полуплоскость во внутренность единичного круга.

12.142. $|z| > 1$. Указание. При $|a| > 1$ функция $w = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ отображает внешность единичного круга ($|z| > 1$) на внутренность ($|w| < 1$).

12.143. $|z/(1-z)| < 1$, т.е. $\operatorname{Re} z < 1/2$.

Указание. См. задачу 11.190.

12.144. Сходится при $x \in (0, +\infty)$, равномерно сходится при $x \in [\alpha, +\infty)$ для любого $\alpha > 0$.

12.145. Сходится при $x \in (-\infty, -3) \cup [-1, +\infty)$, равномерно сходится при $x \in (-\infty, -3 - \delta] \cup [-1, +\infty)$ для любого $\delta > 0$.

12.146. Равномерно сходится на всей оси.

12.147. Сходится на всей оси, кроме точек $x = -1, -2, \dots$

Сходится равномерно на множестве, получающемся из оси после удаления интервалов $(-\delta_k - k, -k + \delta'_k)$, $k \in \mathbb{N}$, где δ_k и δ'_k сколь угодно малы.

12.148. $\operatorname{Re} z \leq 0$; сходимость всюду равномерная.

12.149. $|z - 1| \leq 1$; сходимость всюду равномерная.

12.150. Сходится при $\operatorname{Re} z > 1$, равномерно сходится при $\operatorname{Re} z \geq \alpha > 1$.

12.151. Сходится вне круга $|z + 2| > 1$, равномерно сходится вне любого круга $|z + 2| \geq \alpha > 1$.

12.152. Указание. Вычислить $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$

и показать, что $\lim_{x \rightarrow 0} R_n(x) = 1 \neq R_n(0) = 0$.

12.155. Ряд сходится в области, состоящей из внутренности единичного круга $|z| < 1$, точки

$z = 1$ и внешности единичного круга $|z| > 1$; ряд равномерно сходится в объединении замкнутого круга $|z| \leq 1 - \gamma$ и замкнутой внешности круга $|z| \geq 1 + \delta$ для любых $\gamma, \delta > 0$.

Сумма ряда $S(z) =$

$$= \begin{cases} 1/2 & \text{при } |z| > 1, \\ -1/2 & \text{при } |z| < 1, \\ 0 & \text{при } z = 1. \end{cases}$$

12.159. Указание. Воспользоваться утверждением задачи 12.158.

12.162. Если степенной ряд (1) сходится в точке $z = z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ и равномерно сходится в любом замкнутом круге $|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|$.

Если ряд (1) расходится в точке $z = z_0$, то он расходится и вне круга $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

12.163. Указание. Для доказательства утверждений а) и б) воспользоваться теоремой Абеля и теоремой Вейерштрасса, а для доказа-

тельства утверждения в) — теоремой Абеля, утверждением задачи 12.158 и учесть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. **12.164.** Указание. Воспользоваться утверждением б) задачи 12.163. **12.165.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z - 1| \leq 2$. **12.166.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z + 1| \leq 2$. **12.167.** Абсолютно сходится, если $|z + 2| < 1$; равномерно сходится, если $|z + 2| \leq r < 1$. В точках $x = -3$ и $x = -1$ сходится условно. На отрезке $-3 \leq x \leq -1$ сходится равномерно. **12.168.** Абсолютно сходится в области $|z - 4| < 1/2$; равномерно сходится в области $|z - 4| \leq r < 1/2$. В точке $x = 9/12$ сходится условно, в точке $7/2$ расходится. На любом отрезке $7/2 < r \leq x \leq 9/2$ сходится равномерно. **12.169.** Сходится абсолютно в области $|z - 2| \leq 1/\sqrt{2}$; равномерно сходится в области $|z - 2| \leq r < 1/\sqrt{2}$. В точках $2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ расходится.

12.170. Сходится абсолютно в области $|z - 3| < \sqrt{3}$; равномерно сходится в области $|z - 3| \leq r < \sqrt{3}$. В точках $x = 3 \pm \sqrt{3}$ сходится условно, и на отрезке $3 - \sqrt{3} \leq x \leq 3 + \sqrt{3}$ — равномерно. **12.171.** Сходится абсолютно в области $|z| < 3$, равномерно сходится в области $|z| \leq r < 3$, в точке $x = -3$ сходится условно, а в точке $x = 3$ расходится. **12.172.** Сходится абсолютно в области $|z| < 1$, сходится равномерно в области $|z| \leq r < 1$, в точках $x = \pm 1$ расходится. **12.173.** Сходится абсолютно в области $|z + 1| < \sqrt{2}/3$, сходится равномерно в области $|z + 1| \leq r < \sqrt{2}/3$, сходится условно в точке $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$ и расходится в точке $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$.

12.174. Сходится абсолютно в области $|z| < 4$, сходится равномерно в области $|z| \leq r < 4$, в точках $x = \pm 4$ расходится. **12.175.** Сходится абсолютно в области $|z| < 1$. Сходится равномерно в области $|z| \leq r < 1$; расходится на окружности $|z| = 1$. **12.176.** Сходится абсолютно в области $|z| < 1$; сходится равномерно в области $|z| \leq r < 1$; расходится на окружности $|z| = 1$. **12.177.** Сходится абсолютно во всей плоскости, равномерно — в любой ограниченной области. **12.178.** Сходится абсолютно в области $|z - 1| < 8$; сходится равномерно в области $|z - 1| \leq r < 8$; в точках $x = -7$ и $x = 9$ расходится. **12.179.** Расходится во всех точках, кроме точки $z_0 = i$. **12.180.** Сходится абсолютно в области $|z - 3| < \sqrt{3}$, сходится равномерно в области $|z - 3| \leq r < \sqrt{3}$, в точках $x = 3 \pm \sqrt{3}$ расходится. **12.181.** Сходится абсолютно во всей плоскости, равномерно —

- в любой ограниченной области. **12.182.** Сходится абсолютно в области $|z - 1| < 1$; сходится равномерно в области $|z - 1| \leq r < 1$; на окружности $|z - 1| = 1$ расходится. **12.183.** Сходится абсолютно в области $|z - 3| < 4$; сходится равномерно в области $|z - 3| \leq r < 4$; в точке $x = 7$ сходится условно, в точке $x = -1$ расходится. На любом отрезке $-1 < l \leq x \leq 7$ сходится равномерно. **12.184.** Сходится абсолютно во всей плоскости, равномерно сходится в любой ограниченной области. **12.185.** Сходится абсолютно в области $|z| < 2$; сходится равномерно в области $|z| \leq r < 2$. В точке $x = -2$ расходится, в точке $x = 2$ сходится условно. На любом отрезке $-2 < l \leq x \leq 2$ сходится равномерно. **12.186.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z| \leq 2$. **12.187.** Сходится абсолютно в области $|z - 2i| < 2$, сходится равномерно в области $|z - 2i| \leq r < 2$. **12.188.** Сходится абсолютно во всей плоскости, равномерно — в любой ограниченной области. **12.189.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z + i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. **12.190.** Сходится абсолютно во всей плоскости, равномерно — в любой ограниченной области. **12.191.** Сходится абсолютно в области $|z - 1| < 9/4$; сходится равномерно в области $|z - 1| \leq r < 9/4$; в точках $x = -5/4$ и $x = 13/4$ расходится. **12.192.** Сходится абсолютно в области $|z| < e$; сходится равномерно в области $|z| \leq r < e$; в точках $x = \pm e$ расходится. **12.193.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z - 3| \leq 1/\sqrt{2}$. **12.194.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z + 3| \leq 1$. **12.195.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z - 3| \leq \sqrt{2}$. **12.196.** Сходится абсолютно в области $|z + 3| < 1$, сходится равномерно в области $|z + 3| \leq r < 1$; в точках $x = -2$ и $x = -4$ расходится. **12.197.** Сходится абсолютно в области $|z| < 1$; сходится равномерно в области $|z| \leq r < 1$; расходится на окружности $|z| = 1$. **12.198.** Сходится только в точке $z = 5$. **12.199.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z| \leq 1$. **12.200.** Сходится абсолютно в области $|z| < 1/2$; сходится равномерно в области $|z| \leq r < 1/2$; расходится на окружности $|z| = 1/2$. **12.201.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z - 2| \leq 1$. **12.202.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z + 1| \leq 1$. **12.207.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z \ln 2)^n, |z| < +\infty$. **12.208.** $\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2} + 1} \frac{z^n}{n!}$.

- $|z| < +\infty$. **12.209.** $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < +\infty$. **12.210.** $z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \dots$, $|z| < \frac{\pi}{2}$. Указание. Радиус сходимости этого ряда определяется путем применения следствия из теоремы Тейлора.
- 12.211.** $1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{5}{4!} z^4 + \dots$, $|z| < \frac{\pi}{2}$. **12.212.** $z - \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \dots$, $|z| < \frac{\pi}{2}$. **12.213.** $1 + z - \frac{2}{3!} z^3 - \frac{4}{4!} z^4 + \dots$, $|z| < +\infty$. **12.214.** $1 - z^2 + \frac{z^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!} + \dots$, $|z| < +\infty$. **12.215.** $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < +\infty$. **12.216.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$, $|z| < 2$. **12.217.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n z^{n+1}}{3^{n+1}}$, $|z| < \frac{3}{4}$. **12.218.** $3 - \frac{z}{27} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{n! 3^{4n-1}} z^n$, $|z| < 27$.
- 12.219.** $\frac{1}{3} \left(1 - \frac{z^2}{18} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 18^2} z^4 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{n! 18^n} z^{2n} + \dots \right)$, $|z| < 3$. **12.220.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n+1}{2^{n+2}} z^n$, $|z| < 2$. Указание. $\frac{3z+1}{(z-2)^2} = -(3z+1) \left(\frac{1}{z-2} \right)'.$ **12.221.** $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) z^n$, $|z| < \frac{1}{2}$.
- 12.222.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1}(n+2)}{n!} z^n$, $|z| < +\infty$. **12.223.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < +\infty$. **12.224.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+2) \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < +\infty$. **12.225.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \frac{2^{4n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $|z| < +\infty$. **12.226.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n - 1}{n} z^n$, $|z| < \frac{1}{2}$; при $x = \frac{1}{2}$ сходится условно. **12.227.** $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1 + 2^{-n}) \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$; при $x = 1$ сходится условно. **12.228.** $z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$; при $z = \pm 1$ абсолютно сходится. **12.229.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$; при $x = \pm 1$ сходится условно. **12.230.** $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$,

$|z| < 1$; при $x = \pm 1$ абсолютно сходится. **12.231.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$,

$|z| < +\infty$. **12.232.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+2}}{2(2n+1)!(2n+1)}$, $|z| < +\infty$.

12.233. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n \cdot z^{2n-1}}{(2n+1)!}$, $|z| < +\infty$. Указание. $\frac{z \cos z - \sin z}{z^2} =$

$= \left(\frac{\sin z}{z} \right)'$. **12.234.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)z^{2n-2}}{(2n)!}$, $|z| < +\infty$. Указание. $\frac{z \sin z - 1 + \cos z}{z^2} = \left(\frac{1 - \cos z}{z} \right)'$. **12.235.** $-78 + 59(z+4) - 14(z+4)^2 + (z+4)^3$.

12.236. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n$, $|z-2| < 1$.

12.237. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$, $|z-3i| < |1-3i| = \sqrt{10}$. **12.238.** $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-3)^{2k}}{4^{k+1}}$,

$|z-3| < 2$. **12.239.** $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 3^{-n-1})(z+4)^n$, $|z+4| < 2$. **12.240.** $1 +$

$+ \frac{1}{3}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \dots (3n-4)}{3^n n!} (z-1)^n$, $|z-1| < 1$.

12.241. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}$, $|z-2| < 2$. Указание. $\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)'$.

12.242. $e^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{2n}}{n!}$, $|z| < +\infty$. **12.243.** $e \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} ((z-1)^{2n} +$

$+ (z-1)^{2n+1})$, $|z| < +\infty$. **12.244.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{\sin 4}{(2n)!} (z+2)^{4n} + \right.$

$\left. + \frac{\cos 4}{(2n+1)!} (z+2)^{4n+2} \right)$, $|z| < +\infty$. **12.245.** $3 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n (z-1)^n}{n \cdot 8^n}$,

$|z-1| < \frac{8}{5}$. Указание. $\ln(5z+3) = \ln 8 + \ln \left(1 + \frac{5}{8}(z-1) \right)$.

12.246. $\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z+3)^{2n}}{n \cdot 3^n}$, $|z+3| < 2$. **12.247.** $|z| < 1$; $\frac{2}{(1+z)^3}$.

12.248. $|z+1| < 1$; $\frac{z+1}{z^2}$. **12.249.** $|z-3| < 1$; $-\frac{\ln(4-z)}{z-3}$ при $z \neq 3$,

0 при $z = 3$. **12.250.** $|z| < |a|$; $\frac{1}{a^2 + z^2}$. **12.251.** $|z| < 1$; $\frac{1}{(1+z^2)^2}$.

12.253. Указание. Представив $f(z)$ в виде ряда по степеням $(z-a)$, т. е. в виде $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, из непрерывности $f(z)$ в точке $z=a$ убедиться в том, что $c_0=0$. Это означает, что $f(z) = (z-a) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^{n-1} =$

$= (z-a)f_1(z)$, где $f_1(z)$ — аналитическая в круге $|z-a| < R$ функция и $f_1(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Отсюда вывести заключение, что $c_1 = 0$ и т. д.

12.254. Нет. **12.255.** $f(z) = z/(z+2)$. **12.256.** $f(z) = z^2$.

12.257. $g(z) = f(z) = 1/(2-z)$ в общей части кругов $|z| < 2$ и $|z-i| < \sqrt{5}$. **12.258.** $g(z) = f(z) = \ln(1+z)$ в общей части кругов $|z| < 1$ и $|z-1-2i| < 2\sqrt{2}$. **12.259.** 10 000 при $x = 1$ или 10 при $x = -0,5$.

12.260. Два члена, предельная абсолютная погрешность $\varepsilon < \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{18}\right)^4 = 0,0000386 < 0,0001$. **12.261.** 0,0002. **12.262.** $|x| < 0,9067$. **12.263.** 0,002.

12.264. 1,6487. **12.265.** 0,3679. **12.266.** 0,5878. **12.267.** 0,2094.

12.268. 0,5403. **12.269.** 0,8269. Указание. Учитывая, что $1000 = 318 \cdot 3,1415926 + 1,5707963 - 0,5971963$, приводим аргумент к величине $0,5971963 \in [0, \pi/4]$ и находим $\sin 1000 = \sin(1,5707963 - 0,5971963) = \cos 0,5971963$. **12.270.** 8,0411. Указание. $\sqrt[3]{520} = (512+8)^{1/3} = 8 \left(1 + \frac{1}{64}\right)^{1/3}$. **12.271.** 3,8730. $\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = 4 \left(1 - \frac{1}{16}\right)^{1/2}$.

12.272. 5,1437. Указание. $\sqrt[4]{700} = (625+75)^{1/4} = 5 \left(1 + \frac{3}{25}\right)^{1/4}$.

12.273. 0,6931. Указание. Использовать разложение $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ при $x = \frac{1}{3}$. **12.274.** 0,5236. **12.275.** 0,9385. **12.276.** 1,1752.

12.277. 1,1276. **12.289.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n^2}$.

12.290. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+3)}$. **12.291.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$.

12.292. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!! x^{3n+1}}{2^n \cdot n! (3n+1)}$. **12.293.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+1} (k+1)! k!}$.

12.294. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$. **12.295.** 0,2800. **12.296.** 0,1991.

12.297. 0,4802. **12.298.** 0,6225. **12.299.** 0,7714. **12.300.** 0,9461.

12.308. Указание.

$$\frac{1}{(\alpha + k)(\alpha + k + 1)(\alpha + k + 2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\alpha + k)(\alpha + k + 1)} - \frac{1}{(\alpha + k + 1)(\alpha + k + 2)} \right).$$

12.309. Указание. См. задачу 12.308. **12.310. Указание.** Разложение в степенной ряд функции $\ln(1+x)$ при $x = 1$.

12.311. Указание. Разложение в степенной ряд функции $\operatorname{arctg} x$ при $x = 1$. **12.312.** $\ln 2$.

12.313. $I_0(2)$. **12.314.** $e - 1$. **12.315.** $\frac{1}{2} \ln 2$. **12.316.** $\sin 1$. **12.317.** $\cos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

12.318. e^2 . **12.319.** 1,0767. **Указание.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \zeta(2) - \zeta(4) + \zeta(6) -$

$- \zeta(8) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8(n^2 + 1)}$. **12.320.** 4,3226. **Указание.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{n} = \pi^2 \zeta(2) -$

$- \frac{\pi^4}{3} \zeta(4) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^4}{n^4} \right)$. **12.321.** 0,5071. **Указание.**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2} = \zeta(3) - 2\zeta(6) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6(n^3 + 2)}$. **12.322.** 0,0939. **Указа-**

ниe. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(5n+3)} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \zeta(2) - \frac{3}{25} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \zeta(3) + \frac{9}{125} \times$

$\times \left(1 - \frac{1}{8} \right) \zeta(4) - \frac{27}{125} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4(5n+3)}$. **12.323.** 0,1249. **Указа-**

ниe. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \zeta(2) + \frac{4}{27} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \zeta(3) -$

$- \frac{8}{81} \left(1 - \frac{1}{8} \right) \zeta(4) + \frac{16}{81} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4(3n+2)}$.

12.325. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \dots (4n+1)(4n+2)}{(4n)!} x^{4n} + \right. \\ \left. + \frac{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \dots (4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!} x^{4n+1} \right), x \in \mathbb{R}$.

12.326. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n+1))^2}{(3n+2)!} (3n+4)x^{3n+2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

12.327. $y(x) = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \dots$ **12.328.** $y(x) = 1 + x -$

- $-\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{45} + \dots$ **12.329.** $y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{5x^6}{6!} + \dots$
- 12.330.** $y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2^m \cdot m!} x^{2m} = 1 - e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. **12.331.** $y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{m-1}(m-1)!}{(2m+1)!} x^{2m+1}$, $x \in \mathbb{R}$. **12.332.** $y(x) = x + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!!} \times x^{2m+1}$, $x \in \mathbb{R}$. **12.333.** $y(x) = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$. Указание. Общее решение должно содержать две произвольные постоянные, поэтому из равенств $r(r+1)a_0 = 0$ и $(r+1)(r+2)a_1 = 0$ выбираем $r = -1$, тогда $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$. **12.334.** $y(x) = C_1 \cos \sqrt{x} + C_2 \sin \sqrt{x}$. **12.337.** $I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, $I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$. Указание. Использовать равенство $\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$. **12.338.** $y(x) = C_1 I_\nu(\alpha x) + C_2 I_{-\nu}(\alpha x)$, если ν — не целое число и $y(x) = C_1 I_n(\alpha x) + C_2 N_n(\alpha x)$, если $\nu = n$ — целое число. **12.339.** $y(x) = C_1 I_0(2x) + C_2 N_0(2x)$. **12.340.** $y(x) = C_1 I_{1/3}(2x) + C_2 I_{-1/3}(2x)$. **12.341.** $y(x) = C_1 I_2(x\sqrt{3}) + C_2 I_2(x\sqrt{3})$. **12.342.** $y(x) = C_1 I_{1/5}(3x) + C_2 I_{-1/5}(3x)$. **12.343.** $|z - 2| > 1$; $\frac{z-2}{z-3}$. **12.344.** $|z+i| > 2$; $\frac{2i}{(z-i)^2}$. **12.345.** $0 < |z| < +\infty$; $z^3 e^{1/z}$. **12.346.** $1 < |z-i| < +\infty$; $1/z^2$. **12.347.** $1/3 < |z+i| < \sqrt{2}$. **12.348.** $2 < |z-2i| < 3$. **12.349.** $|z| > 1/e$. **12.350.** $|z+1| > 1/4$. **12.351.** $1/2 < |z| < \sqrt{3}$. **12.352.** $\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$, $0 < |z-1| < 1$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$, $1 < |z-1| < +\infty$. **12.353.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}$, $|z| > 1$. Указание. Произвести замену $z = 1/\eta$ и разложить по степеням η . **12.354.** $\frac{1}{5(z-2)} - \frac{1}{25} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-2}{5}\right)^k$, $0 < |z-2| < 5$; $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{5^k}{(z-2)^{k+2}}$, $|z-2| > 5$. **12.355.** $-\frac{1}{5(z+3)} - \frac{1}{25} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z+3}{5}\right)^k$, $0 < |z+3| < 5$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(z+3)^{k+2}}$, $|z+3| > 5$. **12.356.** $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{z^{2k+2}}$, $|z| > 2$. **12.357.** $-\frac{1}{z-1} -$

$$- 2 \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k, \quad 0 < |z-1| < 1; \quad \frac{1}{z-1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{k+2}}, \quad |z-1| >$$

$$> 1. \quad \mathbf{12.358.} \quad \frac{3}{z-2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} ((z-2)^{2k} + (z-2)^{2k+1}), \quad 0 < |z-2| < 1;$$

$$\frac{1}{z-2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-2)^{2k}} - \frac{1}{(z-2)^{2k+1}} \right), \quad |z-2| > 1. \quad \mathbf{12.359.} \quad z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z^k},$$

$1 < |z| < +\infty$. Указание. После замены $z = 1/\eta$ воспользоваться ра-

$$венством \left(\frac{1}{1-\eta} \right)' = \frac{1}{(1-\eta)^2}. \quad \mathbf{12.360.} \quad \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^3},$$

$$z \neq -1. \quad \mathbf{12.361.} \quad z-1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{z^k}, \quad 1 < |z| < +\infty. \quad \mathbf{12.362.} \quad \frac{1}{2(z-i)} -$$

$$- \frac{i}{4} \sum_{k=0}^{\infty} i^k \left(\frac{z-i}{2} \right)^k, \quad 0 < |z-i| < 2; \quad \frac{1}{z-i} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2i)^k}{(z-i)^{k+2}}, \quad |z-i| > 2.$$

$$\mathbf{12.363.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k+1}}, \quad |z| > 1. \quad \mathbf{12.364.} \quad -\frac{i}{4(z-i)^2} - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ki^k(z-i)^{k-1}}{2^k},$$

$$0 < |z-i| < 2; \quad -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(-i)^k \frac{2^k}{(z-i)^{k+1}}, \quad 2 < |z-i| < +\infty. \quad \text{Указа-}$$

$$\text{ние.} \quad \frac{z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2+1} \right)'. \quad \text{Для второго разложения воспользо-}$$

$$\text{ваться заменой } z-i = 1/\eta. \quad \mathbf{12.365.} \quad \frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{z^{2k}}, \quad 1 < |z| < +\infty.$$

$$\text{Указание.} \quad \frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2z} \left(\frac{1}{z^2+1} \right)'. \quad \mathbf{12.366.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!}, \quad 0 <$$

$$< |z| < +\infty. \quad \mathbf{12.367.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!}, \quad 0 < |z| < +\infty. \quad \mathbf{12.368.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$$

$$\times \frac{1}{(2n+1)!(z-2)^{2n+1}}, \quad 0 < |z-2| < +\infty. \quad \mathbf{12.369.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^{n-2}}, \quad 0 <$$

$$< |z| < +\infty. \quad \mathbf{12.370.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^{n-2}}, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

$$\mathbf{12.371.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\cos 1}{(z-2)^{4n}} + \frac{4 \sin 1}{(2n+1)} \frac{1}{(z-2)^{4n+2}} \right), \quad 0 < |z-2| < +\infty.$$

$$\mathbf{12.372.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right), \quad |z-1| < 1; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^k}{2^{k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(z-1)^k}, \quad 1 < |z-1| < 2; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^{k+1}} (1 + 2^k), \quad |z-1| > 2.$$

$$12.373. \quad \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k (3-2i)}{(4-i)^{k+1}} - \frac{3+2i}{(2+i)^{k+1}} \right) (z-i)^k, \quad |z-i| < \sqrt{5};$$

$$\frac{1}{6} \left((3+2i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-i)^{k-1}}{(z-i)^k} + (3-2i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-i)^k}{(4-i)^{k+1}} \right), \quad \sqrt{5} < |z-i| <$$

$$< \sqrt{17}; \quad \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} ((3+2i)(2-i)^{k-1} + (-1)^{k-1} (3-2i)(4-i)^{k-1}) \frac{1}{(z-i)^k},$$

$$|z-i| < \sqrt{17}. \quad 12.374. \quad \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}} \right), \quad |z| < 1;$$

$$\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{4^{k+1}} \right), \quad 1 < |z| < 2; \quad \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k+1}} (1-4^k), \quad |z| >$$

$$> 2. \quad 12.375. \quad \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}} \right), \quad |z| < 1; \quad -\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2(k+1)}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{4^{k+1}} \right),$$

$$1 < |z| < 2; \quad \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k - 1}{z^{2(k+1)}}, \quad |z| > 2. \quad 12.376. \quad -\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6} \frac{1}{z^3} + \dots, \quad 1 < |z| < +\infty.$$

12.377. Указание. Рассмотреть интеграл $\int_{|\eta-z_0|=\rho} \frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}} d\eta$ и вос-

пользоваться ограниченностью $f(z)$, вытекающей из существования предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

12.378. Указание. Использовать следующее утверждение: если $g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, $m \geq 1$, $\varphi(z_0) \neq 0$ и $\varphi(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки z_0 , то в некоторой окрестности точки z_0 справедливо разложение $\frac{1}{\varphi(z)} = b_0 + b_1(z-z_0) + \dots$, где

$$b_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0. \quad 12.379. \quad \text{Указание. Провести доказательство от про-}$$

тивного, т. е. предположить, что $f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0 и вывести из этого предположения, что z_0 — устранимая особая точка.

12.380. Указание. Рассмотреть функцию $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$; доказать,

что z_0 — существенно особая точка для $\varphi(z)$, и воспользоваться утверждением задачи 12.379. 12.381. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ сходится во всей плоскости, а

- ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ — вне круга $|z| > R$. **12.382.** Точки $z_1 = e^{-\pi i/4}$ и $z_2 = e^{3\pi i/4}$ — полюсы 3-го порядка. **12.383.** Точки $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$ — полюсы 1-го порядка, а точка $z_3 = 1$ — полюс 3-го порядка. **12.384.** Точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы 1-го порядка, $z_1 = 2$ — полюс 3-го порядка, $z_2 = -i$ — полюс 5-го порядка. **12.386.** $z^{(1)} = 0$ — полюс 2-го порядка, $z_k = 1 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы 1-го порядка. **12.387.** $z^{(1)} = -1$ — полюс 3-го порядка, $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы 1-го порядка. **12.388.** $z_0 = 0$ и $z_2 = \pi$ — устранимые особые точки, $z_k = \pi k/2$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$, — полюсы 1-го порядка. **12.389.** $z_0 = \pi/4$ — устранимая особая точка, $z_k = \pi(4k+1)/4$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, — полюсы 1-го порядка. **12.390.** Точки $z_k = \pi(2k+1)/2$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы 2-го порядка. **12.391.** Точка $z_0 = 3i$ — существенно особая. **12.392.** Точка $z_0 = -2i$ — существенно особая. **12.393.** Точки $z_k = 1 + \frac{2}{\pi(2k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы 1-го порядка, а точка $z = 1$ — предельная для полюсов. **12.394.** В точке $z = 1$ устранимая особенность, а в точках $z_k = 1 + \frac{\pi(2k+1)}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы 1-го порядка. **12.395.** В точке $z_0 = 0$ устранимая особенность. **12.396.** В точке $z_0 = 0$ — полюс 4-го порядка. **12.397.** В точках $z_k = \ln 3 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы 1-го порядка. **12.398.** Правильная точка. **12.399.** Полюс 3-го порядка. **12.400.** Правильная точка (нуль 3-го порядка). **12.401.** Полюс 2-го порядка. **12.402.** Существенно особая точка. **12.403.** Существенно особая точка. **12.404.** Полюс 2-го порядка. **12.405.** Правильная точка. **12.406.** Правильная точка. **12.407.** Существенно особая точка. **12.408.** выч $\left[\frac{z^2 + 1}{z - 2}; 2 \right] = 5$.
12.409. выч $\left[\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}; i \right] = -\frac{1}{4}i$, выч $\left[\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}; -i \right] = \frac{1}{4}i$.
12.410. выч $\left[\frac{z^{2n}}{(z - 1)^n}; 1 \right] = \frac{2n(2n - 1) \dots (n + 2)}{(n - 1)!}$.
12.411. выч $\left[\frac{1}{z^3(z^2 + 4)^2}; 0 \right] = -\frac{1}{32}$, выч $\left[\frac{1}{z^3(z^2 + 4)^2}; \pm 2i \right] = \frac{1}{64}$.
12.412. выч $\left[\frac{1}{z(1 - e^{2z})}; 0 \right] = \frac{1}{2}$, выч $\left[\frac{1}{z(1 - e^{2z})}; k\pi i \right] = -\frac{1}{2k\pi i}$,
 $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

12.413. выч $\left[\frac{1}{\sin z - \frac{1}{2}}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \right] = (-1)^k \frac{2}{\sqrt{3}}, k \in \mathbb{Z}.$

12.414. выч $\left[\frac{\sin 2z}{\left(z - \frac{\pi}{2} \right)^2 (z-1)}; \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{4}{\pi-2},$

выч $\left[\frac{\sin 2z}{\left(z - \frac{\pi}{2} \right)^2 (z-1)}; 1 \right] = \frac{4 \sin 2}{(\pi-2)^2}.$

12.415. выч $\left[\frac{\sin 2z}{(z+1)^4}; -1 \right] = -\frac{4 \cos 2}{3}.$

12.416. выч $\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}; 0 \right] = \frac{1}{9}, \quad$ выч $\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}; 3i \right] = \frac{ie^{3i}}{54},$
выч $\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}; -3i \right] = -\frac{ie^{-3i}}{54}.$

12.417. выч $\left[\operatorname{tg} z; \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right] = -1, k \in \mathbb{Z}.$

12.418. выч $[\operatorname{ctg}^2 z; k\pi] = 0, k \in \mathbb{Z}.$

12.419. выч $\left[\frac{\cos^3 z}{z^3}; 0 \right] = -\frac{3}{2}.$

12.420. выч $\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}; 0 \right] = 0, \quad$ выч $\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}; 1 \right] = 1.$

12.421. выч $\left[\frac{1}{z(1-z^2)}; 0 \right], \quad$ выч $\left[\frac{1}{z(1-z^2)}; 1 \right] = -\frac{1}{2},$
выч $\left[\frac{1}{z(1-z^2)}; -1 \right] = -\frac{1}{2}.$

12.422. выч $\left[\frac{1}{z^2-z^5}; 0 \right] = 0, \quad$ выч $\left[\frac{1}{z^2-z^5}; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1+i\sqrt{3}}{6},$
выч $\left[\frac{1}{z^2-z^5}, 1 \right] = -\frac{1}{3}, \quad$ выч $\left[\frac{1}{z^2-z^5}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1-i\sqrt{3}}{6}.$

12.423. выч $\left[\frac{\cos 4z}{(z-2)^6}; 2 \right] = -\frac{128}{15} \sin 8. \quad$ **12.424.** 1. **12.425.** 0. **12.426.** 1.

12.427. -1. **12.428.** 0. **12.429.** $-\frac{1}{3} \operatorname{sh} 3.$ Указание. Воспользоваться второй теоремой о вычетах. **12.430.** 0. **12.431.** $\pi^2.$ **12.432.** -1.

12.433. $\frac{\pi i \sqrt{2}}{2}. \quad$ **12.434.** $2\pi i. \quad$ **12.435.** $\frac{2\pi i}{9}. \quad$ **12.436.** $\frac{2\pi i}{3} \operatorname{sh} 3.$ Указание.

Воспользоваться второй теоремой о вычетах и результатом задачи 12.429.

12.437. $(-1)^n \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!} \frac{2\pi i}{(b-a)^{2n-1}}$. **12.438.** 0. Указание.

Воспользоваться второй теоремой о вычетах и соотношением выч $[f(z); \infty] = 0$.

12.439. $2\pi i$. **12.440.** 0. **12.441.** $-4\pi i$. **12.442.** $2\pi i$, $n = 1; 0, n = 0, 2, 3, \dots$ **12.443.** $\frac{2^{n+1}\pi i}{(n+1)!}$. **12.444.** $2(1-e^{-1})\pi i$. **12.445.** $2\pi i$.

12.446. $(\cos 1 + \sin 1 + i(\sin 1 - \cos 1)) \frac{\pi}{2}$. **12.447.** 0. **12.448.** 0. **12.449.** πi .

12.450. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$. **12.451.** $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}$. **12.452.** $\frac{\pi(a^6 + 1)}{1 - a^2}$. **12.453.** 0.

12.454. $\frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2 - b^2})$. **12.455.** πi . **12.456.** $\pi\sqrt{2}$. **12.457.** $\frac{\pi}{2^{2n-2}} \times$
 $\times \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!}$. **12.458.** $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$. **12.459.** $\frac{\pi}{4a}$. **12.460.** $-\frac{\pi}{27}$.

12.461. $\frac{4}{3}\pi$. **12.462.** $\frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}$. **12.463.** $\frac{\pi e^{-4}}{2}(\sin 2 + 2 \cos 2)$.

12.464. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2} \left(\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2} \right)$. **12.465.** $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. **12.466.** $\pi e^{-2} \cos 2$.

12.467. $\frac{\pi}{2}(e^{-1} + e^{-3})$. **12.468.** $\pi(e^{-2} + e^{-3})$. **12.469.** $\frac{\pi}{6}e^{-3}$. **12.470.** $\pi \frac{2e-1}{12e^2}$.

12.471. 2 корня. Указание. $p(it)$ при изменении t от $+\infty$ до $-\infty$ приращения не получает. **12.472.** 2 корня. **12.473.** 3 корня. **12.474.** Указание. Воспользоваться тем, что $\arg fg = \arg f + \arg g$ и $\arg \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)$

при обходе точкой z контура L приращения не получает, ибо $\left| \frac{\varphi(\eta)}{f(\eta)} \right|_{\eta \in L} < 1$.

12.475. Указание. Рассмотреть функции $f(z) = a_0 z^n$ и $\varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ на окружности $|z| = R$ достаточно большого радиуса R .

12.476. а) в круге $|z| < 1$ один нуль; б) в кольце $1 \leq |z| < 2$ четыре нуля. Указание. Положить $f(z) = 8z$ в случае а) и $f(z) = z^5$ в случае б). **12.477.** а) в круге $|z| < 1$ один нуль; б) в кольце $1 \leq |z| < 2$ нулей нет; в) в кольце $2 \leq |z| < 3$ два нуля. **12.479.** Для

четной: $\beta_k = 0$, $\alpha_k = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x) \cos \frac{2\pi kx}{l} dx$, а для нечетной: $\alpha_k =$

$= 0$, $\beta_k = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x) \sin \frac{2\pi kx}{l} dx$ ($k = 0, 1, \dots$). **12.480.** $f(x) = \frac{1}{2} +$

$+ \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$, $S(\pi) = \frac{1}{2}$ (рис. 38). **12.481.** $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$,

$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ (рис. 39). **12.482.** $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \pi(2m-1)x}{(2m-1)^2}$,

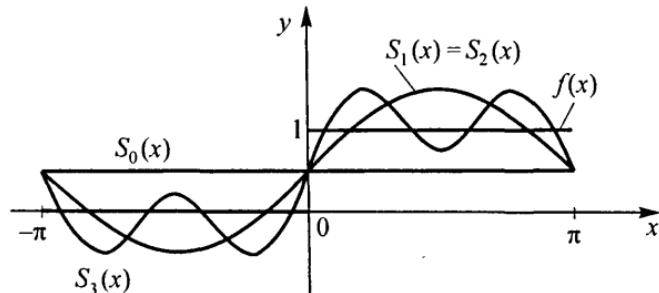


Рис. 38

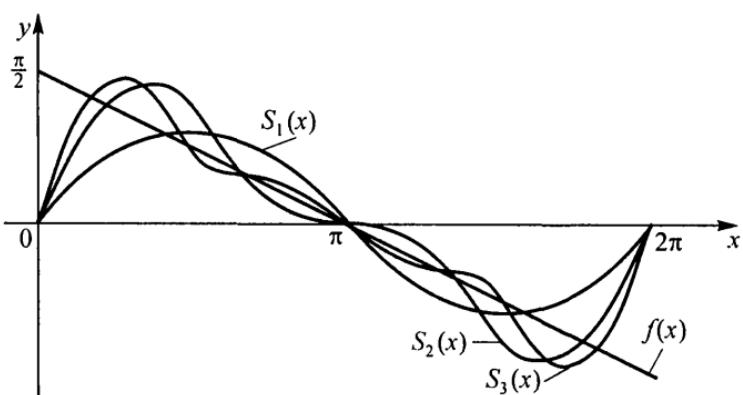


Рис. 39

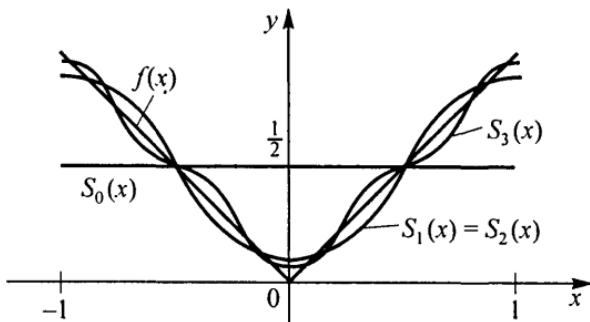


Рис. 40

- $S(1) = 1$ (рис. 40). **12.483.** $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos 2kx$. **12.484.** $\frac{\pi^2}{3} +$
- $+ 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$
- .
- 12.485.**
- $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{\tau}$
- .
- 12.486.**
- $\frac{2}{\pi} -$
- $- \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$
- .
- 12.487.**
- $1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k}$
- .
- 12.488.**
- $\frac{10}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{k\pi x}{5}}{k}$
- .
- 12.489.** $\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin kx}{a^2 - k^2}$, если a — не целое; $\sin ax$, если $a \in \mathbb{Z}$.
- 12.490.** $\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a \cos kx}{a^2 - k^2} \right)$, если a — не целое; $\cos ax$, если $a \in \mathbb{Z}$. **12.491.** $\frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k \sin kx}{a^2 + k^2}$. **12.492.** $\frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a \cos kx}{a^2 + k^2} \right)$. **12.493.** а) $\frac{1}{\ln 2} + 2 \ln 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k - 1}{\ln^2 2 + k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi x}{\ln 2}$, б) $2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2(-1)^k - 1)k}{\ln^2 2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi x}{\ln 2}$. **12.494.** а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos (4k+1)x}{4k+1} - \frac{\cos (4k+3)x}{4k+3} \right)$, б) $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin^2 \frac{k\pi}{4} \sin kx$. **12.495.** а) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \times$
 $\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1)\pi x$, б) $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}$.
- 12.496.** а) $1 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 1} \cos kx - \frac{1}{2} \cos x$, б) $\frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2 - 1)^2} \times$
 $\times \sin 2kx$. **12.497.** а) $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \pi kx$, б) $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{2((-1)^k - 1)}{k^3 \pi^2} \right) \sin \pi kx$. **12.498.** а) $\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1)x$, б) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - 3(-1)^k}{k} \sin kx$. **12.499.** а) $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1)x$, б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin 2kx$. **12.500.** а) $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{l}$,

6) $\frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}$. **12.501.** а) $\frac{\pi^2}{8}$, б) $\frac{\pi^2}{32\sqrt{2}}$. Указание. Рас-

смотреть ряд в точке $x_0 = 1/4$.

12.502. $\pi^2/12$.

12.503. $\pi^2/6$.

12.504. Указание. Умножив и разделив $D_n(x)$ на $2 \sin \frac{x}{2}$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x) &= \frac{1}{2(n+1) \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2x+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{4(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}} \times \\ &\times \sum_{k=0}^n (\cos kx - \cos (k+1)x) = \frac{1 - \cos (n+1)x}{4(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

12.505. $\frac{\pi^4}{90}$.

12.506. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) +$

$$+ f(x-t)) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

12.507. $\frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \times$

$$\times \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt.$$

12.508. \triangleleft Учитывая, что $\frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 1$,

можем записать

$$\sigma_n(f, x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi(n+1)} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = I_1 + I_2.$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем δ столь малым, чтобы для $0 \leq t \leq \delta$ выполнялось неравенство: $|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| < \varepsilon$. Тогда

$$|I_1| \leq \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^\delta \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{\pi(n+1)} \int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее в силу непрерывности $f(x)$ имеет место неравенство $|f(x)| \leq M$ при $x \in [-\pi, \pi]$. Поэтому

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_\delta^\pi 4M \frac{1}{2 \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2} \right)^2} dt = \frac{2M\pi}{n+1} \int_\delta^\pi \frac{dt}{t^2} \leq \frac{2M\pi^2}{(n+1)\delta^2}.$$

Выбирая n столь большим, чтобы $\frac{2M\pi^2}{\delta^2} \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, находим $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. $|\sigma_n(f, x) - f(x)| < \varepsilon$. \triangleright

$$12.509. f(x, y) = \pi^2 - 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m} - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n} + 4 \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{\sin mx \sin ny}{mn}.$$

$$12.510. f(x, y) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n} \sin mx + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin ny + \\ + \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn} \sin mx \sin ny. \quad 12.511. f(x, y) = \frac{4}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi ny}{n} + \frac{16}{\pi^3} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{m^2 n} \cos \pi mx \sin \frac{\pi ny}{2}. \quad 12.512. f(x, y) = \\ = \frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin \pi mx + \frac{2}{\pi} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{mn^2} \sin \pi mx \cos ny.$$

$$12.513. \mathfrak{F}[\operatorname{sign}(t-a) - \operatorname{sign}(t-b)] = \frac{2 \sin \pi \nu(b-a)}{\pi \nu} e^{-\pi i \nu(a+b)}.$$

$$12.514. \mathfrak{F}[f] = h \frac{\sin^2 \pi \nu a}{\pi^2 \nu^2 a}.$$

$$12.515. \mathfrak{F}[f] = \begin{cases} \frac{4\pi\nu}{a^2 - 4\pi^2\nu^2} \sin \frac{4\pi^2\nu}{2a} & \text{при } \nu \neq \frac{a}{2\pi}, \\ \frac{\pi}{a} & \text{при } \nu = \frac{a}{2\pi}. \end{cases}$$

$$12.516. \mathfrak{F}[f] = \frac{2 \sin^2 \pi \nu}{\pi i \nu}. \quad 12.517. \mathfrak{F}_c \left[\frac{1}{a^2 + t^2} \right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-\omega a}; \quad \frac{1}{a^2 + t^2} =$$

$= \frac{1}{a} \sum_{0}^{+\infty} e^{-\omega a} \cos \omega t d\omega$. Указание. Для вычисления $\mathfrak{F}_c \left[\frac{1}{a^2 + t^2} \right]$ использовать соотношение (*) из примера 3 на с. 248.

12.518. $\mathfrak{F}_c \left[\frac{t}{a^2 + t^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega a}$, $\frac{t}{a^2 + t^2} = \int_0^{+\infty} e^{-\omega a} \sin \omega t d\omega$. Указание. Использовать соотношение $\mathfrak{F}_c \left[\frac{t}{a^2 + t^2} \right] = -\frac{d}{d\omega} \mathfrak{F}_c \left[\frac{1}{a^2 + t^2} \right]$, где интеграл $\mathfrak{F}_c \left[\frac{1}{a^2 + t^2} \right]$ вычислен в задаче 12.517.

12.519. $\mathfrak{F}_s[te^{-t^2}] = \frac{\omega}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$, $te^{-t^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\omega}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \sin \omega t d\omega$.

12.520. $\mathfrak{F}_c[e^{-\alpha|t|} \cos \beta t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + (\beta + \omega)^2)(\alpha^2 + (\beta - \omega)^2)}$,

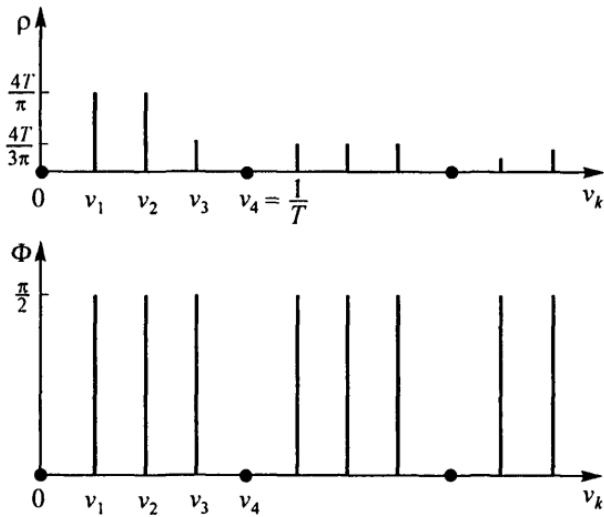
 $e^{-\alpha|t|} \cos \beta t = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + (\beta + \omega)^2)(\alpha^2 + (\beta - \omega)^2)} \cos \omega t d\omega$.


Рис. 41

12.522. $S(\nu_k) = -\frac{2i}{\pi \nu_k} \sin^2 \pi \nu_k T$, $\nu_k = \frac{k}{4T}$, $\rho(\nu_k) = \frac{2}{\pi |\nu_k|} \sin^2 \pi \nu_k T$,

 $\Phi(\nu_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 4n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k \neq 4n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{рис. 41}).$
12.523. $S(\nu_k) =$

$= \frac{\sin 2\pi\nu_k - i(1 - \cos 2\pi\nu_k)}{\pi\nu_k}, \quad \nu_k = \frac{k}{3}, \quad \rho(\nu_k) = \frac{2|\sin \pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|}, \quad \Phi(\nu_k) =$
 $= \begin{cases} \pi\nu_k & \text{при } k = 1, 2, \\ 0 & \text{при } k = 3, \end{cases} \quad \Phi(\nu_{k+3}) = \Phi(\nu_k) \text{ (рис. 42).}$ 12.524. $S(\nu) =$
 $= \frac{\sin 2\pi a\nu}{\pi\nu}, \quad \rho(\nu) = \frac{|\sin 2\pi a\nu|}{\pi|\nu|}, \quad \Phi(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } S(\nu) \geq 0, \\ -\pi, & \text{если } S(\nu) < 0 \end{cases}$
 (рис. 43). 12.525. $S(\nu) = \frac{2 \cos \pi\nu}{\pi(1 - 4\nu^2)}, \quad \rho(\nu) = \frac{2}{\pi} \left| \frac{\cos \pi\nu}{1 - 4\nu^2} \right|, \quad \Phi(\nu) =$
 $= \begin{cases} 0, & \text{если } S(\nu) \geq 0, \\ -\pi, & \text{если } S(\nu) < 0 \end{cases}$ (рис. 44). Указание. При вычислении

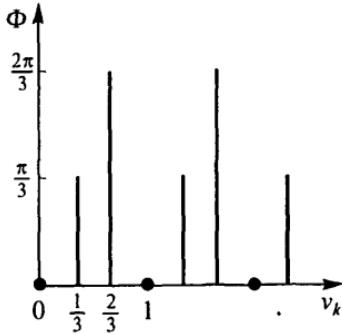
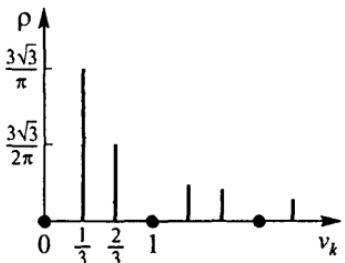


Рис. 42

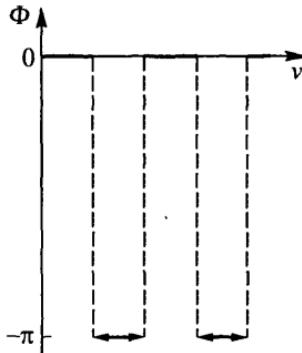
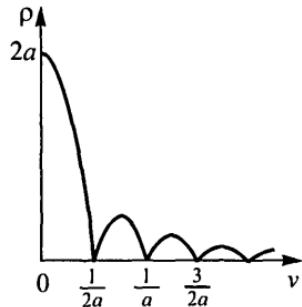


Рис. 43

интеграла $\int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi t e^{-2\pi i \nu t} dt$ функцию $\cos \pi t$ представить по формуле Эйлера. 12.526. $S(\nu) = \frac{\sin^2 \pi\nu}{\pi^2\nu^2}, \quad \rho(\nu) = \frac{\sin^2 \pi\nu}{\pi^2\nu^2}, \quad \Phi(\nu) = 0$ (рис. 45).

12.527. $S(\nu) = \frac{\sin 4\pi\nu + i(\cos 4\pi\nu - 1)}{\pi\nu}$, $\rho(\nu) = \frac{2}{\pi|\nu|} |\sin 2\pi\nu|$, $\Phi(\nu) = -\arg S(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu = 0 \text{ и } \nu = 1/2, \\ -2\pi\nu, & \text{если } 0 < \nu < 1/2, \end{cases} \quad \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = \Phi(\nu)$ (рис. 46).

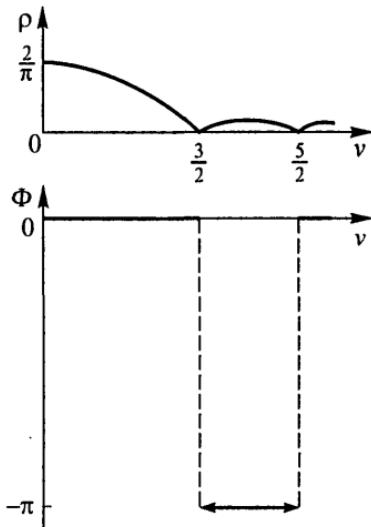


Рис. 44

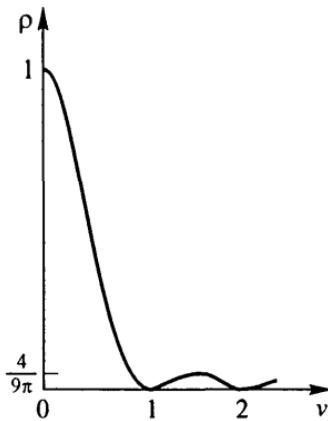


Рис. 45

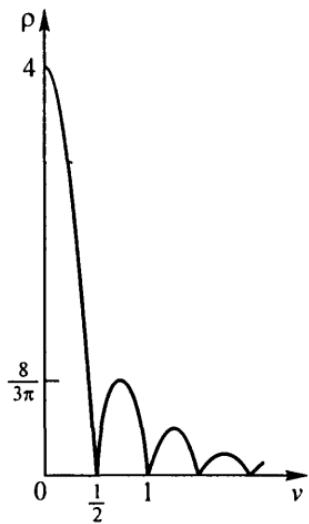


Рис. 46

$$12.528. W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^2 \end{pmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q^3 \end{pmatrix}.$$

$$12.529. Z^{(1)} = \begin{pmatrix} x_0 + x_4 \\ x_0 - x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_1 - x_5 \\ x_2 + x_6 \\ x_2 - x_6 \\ x_3 + x_7 \\ x_3 - x_7 \end{pmatrix}, Z^{(2)} = \begin{pmatrix} (x_0 + x_4) + (x_2 + x_6) \\ (x_0 - x_4) + q^2(x_2 - x_6) \\ (x_0 + x_4) - (x_2 + x_6) \\ (x_0 - x_4) - q^2(x_2 - x_6) \\ (x_1 + x_5) + (x_3 + x_7) \\ (x_1 - x_5) + q^2(x_3 - x_7) \\ (x_1 + x_5) - (x_3 + x_7) \\ (x_1 - x_5) - q^2(x_3 - x_7) \end{pmatrix},$$

$$Z^{(3)} = \begin{pmatrix} (x_0 + x_4 + x_2 + x_6) + (x_1 + x_5 + x_3 + x_7) \\ (x_0 - x_4 + q^2 x_2 - q^2 x_6) + (qx_1 - qx_5 + q^3 x_3 - q^3 x_7) \\ (x_0 + x_4 + x_2 - x_6) + (q^2 x_1 + q^2 x_5 - q^2 x_3 - q^2 x_7) \\ (x_0 - x_4 - q^2 x_2 + q^2 x_6) + (q^3 x_1 - q^3 x_5 - qx_3 + qx_7) \\ (x_0 + x_4 + x_2 + x_6) - (x_1 + x_5 + x_3 + x_7) \\ (x_0 - x_4 + q^2 x_2 - q^2 x_6) - (qx_1 - qx_5 + q^3 x_3 - q^3 x_7) \\ (x_0 + x_4 - x_2 - x_6) - (q^2 x_1 + q^2 x_5 - q^2 x_3 - q^2 x_7) \\ (x_0 - x_4 - q^2 x_2 + q^2 x_6) - (q^3 x_1 - q^3 x_5 - qx_3 + qx_7) \end{pmatrix},$$

Глава 13

- 13.1.** Внутренность круга с центром в точке z_0 радиуса R ; односвязна.
- 13.2.** Внутренность кольца между окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $z_0 = i$; двусвязна. **13.3.** Внешность круга радиуса 2 с центром в точке $z_0 = i$ с выколотой бесконечно удаленной точкой; двусвязна. **13.4.** Внутренность горизонтальной полосы, заключенной между прямыми $y = -1/2$ и $y = 0$; односвязна. **13.5.** Внешность круга радиуса R с центром в точке z_0 ; односвязна. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является внутренней точкой этой области. **13.6.** Внутренность круга с выколотым центром $z_0 = -i$ радиуса 2; двусвязна.
- 13.7.** Открытая полуплоскость, определяемая прямой $x = 1$ и содержащая начало координат. **13.8.** Внутренность круга радиуса 2 с центром в точке $(2, 0)$; односвязна. **13.9.** Прямая $x - y + 1 = 0$. Указание. Записать $\frac{z+1}{z-i}$ в виде $\frac{(z+1)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{(z+1)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}$. **13.10.** Внутренность эллипса $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. **13.11.** Окружность $|z| = -2$, кроме точки $z = -2i$. **13.12.** Часть плоскости, лежащая справа от левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **13.13.** Прямая, проходящая через точки z_1 и z_2 , с вырезанным отрезком, соединяющим эти точки. **13.14.** Внутренность отрезка, соединяющего точки $-i$ и i . Указание. Воспользоваться равенством $\arg(-z) = \pi + \arg z$. **13.15.** $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. **13.16.** $\operatorname{Re} z < 0$. **13.17.** $|\operatorname{Re} z| < 3$. **13.18.** $|z - (1+i)| + |z - (3+i)| < 6$. **13.19.** $3\pi/8 < \arg(z - z_0) < 5\pi/8$. **13.20.** $u = 2x^2 - 2y^2 + y$, $v = 4xy + x$.

13.21. $u = -2xy - x$, $v = 2 - y + x^2 - y^2$. **13.22.** $u = -\frac{x^2 - (1+y)^2}{x^2 + (1+y)^2}$,
 $v = -\frac{2x(1+y)}{x^2 + (1+y)^2}$. **13.23.** $u = -y - \frac{y}{x^2 + y^2}$, $v = -x + \frac{x}{x^2 + y^2}$.

13.24. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy - 1$. **13.25.** $u = \frac{1}{2(x-y)}(2xy + y + x^2 - y^2 + x + 1)$, $v = \frac{1}{2(x-y)}(2xy + y - x^2 + y^2 - x - 1)$. **13.27.** $z^2 + 2iz - 1$.

13.28. $z + \frac{1}{z}$. **13.29.** $4\bar{z}/(\bar{z}^2 - z^2)$. **13.31.** Любая область, лежащая внутри угла с вершиной в начале координат и раствора не более π/n . **13.32.** Любая область, лежащая в полосе, параллельной действительной оси и шириной не более 2π .

13.33. Любая область, лежащая в полосе, параллельной мнимой оси и шириной не более $2\pi/3$. **13.34.** Любая область, лежащая либо внутри единичного круга ($|z| < 1$), либо вне его ($|z| > 1$).

Указание. Равенство $z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$ при $z_1 \neq z_2$ возможно только в случае, когда $z_2 = \frac{1}{z_1}$. **13.35.** $3i$. **13.36.** $-i/2$. **13.37.** $-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

13.38. $\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$. **13.39.** Ось Ox отображается в окружность $u^2 + v^2 = 1$.

Ось Oy отображается на ось Ou . При этом точка $z = i$ переходит в точку $w = \infty$, а точка $z = \infty$ — в точку $w = 1$. **13.40.** Прямая $x = C$ отображается в параболу $v^2 = 4C^2(C^2 - u)$; окружность $|z| = R$ — в окружность $|w| = R^2$, проходящую дважды; луч $\arg z = \alpha$ — в луч $\arg w = 2\alpha$; полуокружность $|z| < r$, $\operatorname{Im} z > 0$ — в круг $|w| < r^2$ с разрезом по отрезку положительной действительной оси. **13.41.** \triangleleft Точки, лежащие на прямой $x = C$, записываются в виде $z = C + iy$, а потому $w =$

$$= \frac{1}{C + iy} = \frac{C}{C^2 + y^2} - i \frac{y}{C^2 + y^2}. \text{ Отсюда } u = \frac{C}{C^2 + y^2}, v = -\frac{y}{C^2 + y^2},$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{C^2 + y^2} = \frac{u}{C}. \text{ Следовательно, образом прямой } x = C \text{ является окружность } u^2 + v^2 - \frac{u}{C} = 0.$$

Образом окружности $|z| = R$ является окружность $|w| = \frac{1}{R}$. Луч $\arg z = \alpha$, т. е. луч $(0, \infty \cdot e^{i\alpha})$ отобразится в идущий из бесконечности луч $(0, \infty \cdot e^{-i\alpha})$. Полуокружность $|z| < r$, $\operatorname{Im} z > 0$, отобразится в нижнюю полуплоскость с вырезанным полуокружением $|w| \leq \frac{1}{r}$,

$\operatorname{Im} w < 0$. \triangleright **13.42.** $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{2} + i)$, $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \sqrt{2} + i)$,

- $w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{2} + i)$, $w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{2} - i)$. **13.43.** $w_0 = \frac{1+i}{2-\sqrt{2}}$,
- $w_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)$. **13.44.** $w_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + i \sin \frac{\varphi_1}{2}\right)$,
- $w_2 = -\sqrt{2+\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + i \sin \frac{\varphi_1}{2}\right)$, $\varphi_1 = \pi - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)$; $w_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} + i \sin \frac{\varphi_2}{2}\right)$, $w_4 = -\sqrt{2-\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} + i \sin \frac{\varphi_2}{2}\right)$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$. **13.45.** $w_1 = 0$, $w_2 = 1+i$, $w_3 = -(1+i)$.
- 13.46.** $2(\varphi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.47.** $3\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.48.** $\frac{1}{3}(\psi + 2\pi(n+3k))$, $n = 0, 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sin \psi = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{1+r^2+2r \cos \varphi}}$, $\cos \psi = \frac{1+r \cos \varphi}{\sqrt{1+r^2+2r \cos \varphi}}$. **13.49.** $\frac{\psi}{2} + \pi(n+2k)$, $n = 0, 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sin \psi = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{64+r^2-16r \cos \varphi}}$, $\cos \psi = \frac{r \cos \varphi - 8}{\sqrt{64+r^2-16r \cos \varphi}}$. **13.50.** $\frac{\psi}{2} + \pi(n+2k)$, $n = 0, 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sin \psi = \frac{r^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{16+r^4-8r^2 \cos 2\varphi}}$, $\cos \psi = \frac{r^2 \cos 2\varphi - 4}{\sqrt{16+r^4-8r^2 \cos 2\varphi}}$. **13.51.** $\frac{\psi}{2} + \pi(n+2k)$, $n = 0, 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sin \psi = \frac{3r \sin \varphi}{\sqrt{9r^2 \sin^2 \varphi + (r^2 - 2 - r \cos \varphi)^2}}$,
- $\cos \psi = \frac{r^2 - 2 - r \cos \varphi}{\sqrt{9r^2 \sin^2 \varphi + (r^2 - 2 - r \cos \varphi)^2}}$.
- 13.53.** $\operatorname{Re} w = e^{1-x} \cos y$, $\operatorname{Im} w = -e^{1-x} \sin y$. **13.54.** $\operatorname{Re} w = e^{x^2-(1-y)^2} \times \cos 2(1-y)$, $\operatorname{Im} w = e^{x^2-(1-y)^2} \sin 2x(1-y)$. **13.55.** $\operatorname{Re} w = \sin x \times \operatorname{ch}(1-y)$, $\operatorname{Im} w = -\cos x \operatorname{sh}(1-y)$. **13.56.** $\operatorname{Re} w = \operatorname{sh} x \cos(y+2)$, $\operatorname{Im} w = \operatorname{ch} x \sin(y+2)$. **13.57.** $\operatorname{Re} w = \frac{\sin 2(1+x)}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2(1+x)}$, $\operatorname{Im} w = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2(1+x)}$. **13.58.** $\operatorname{Re} w = 3^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \frac{y}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im} w = -3^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \frac{y}{x^2+y^2}$. **13.62.** $\operatorname{ch} 1 \cos 1 - i \operatorname{sh} 1 \sin 1$. **13.63.** $\cos 1$. **13.64.** $-\operatorname{sh} 2 \cos 1 + i \operatorname{ch} 2 \sin 1$. **13.65.** $(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.66.** $\frac{\pi}{2}i$. **13.67.** $\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.68.** $i \operatorname{cth} \pi$. **13.69.** 0. **13.70.** $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$, $\operatorname{Arcsin} i = 2k\pi - i \operatorname{ln}(\sqrt{2}-1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- 13.71.** $\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$, $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3} = k\pi + \frac{i}{2} \ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.72.** $\operatorname{Arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$, $\operatorname{Arsh} i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.73.** $\operatorname{Arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$, $\operatorname{Arch}(-1) = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.74.** $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, $\operatorname{Arth}(1-i) = \frac{1}{4} \ln 5 + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} 2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.75.** $|w| = \frac{4}{3}$, $\arg w = \frac{3\pi}{2}$. **13.76.** $|w| = \pi^2$, $\arg w = 0$.
- 13.77.** $|w| = \frac{1}{2}(3 + \cos \ln 4)$, $\arg w = 0$. **13.78.** $|w| = \operatorname{th} 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$, $\arg w = 0$.
- 13.79.** $(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)e^{-2n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. **13.80.** $e^{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.81.** $e^{(2k-\frac{1}{4})\pi} \left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.82.** $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.83.** $5e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi} \left(\cos \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) + i \sin \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.84.** $-5e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + (2k+1)\pi} \left(\cos \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) + i \sin \left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.85.** $e^{-\frac{3\pi}{4}(1+8k)}$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.86.** $e^{\frac{\pi}{6}(1+12k)} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 13.87.** $z = i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.88.** $x = 0$. **13.89.** $z = 1 + i$.
- 13.90.** $z = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.91.** $f(z)$ непрерывна в D , если $\forall \varepsilon > 0 \ \forall z \in D \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, z) > 0 \ ((|\Delta z| < \delta \wedge z + \Delta z \in D) \Rightarrow |f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon)$.
- 13.92.** $-2i$. **13.93.** 1. **13.94.** ∞ . **13.95.** 0. **13.100.** $f(0) = 0$. **13.101.** $f(0) = 0$. **13.102.** $f(0) = 0$. **13.103.** $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ не существует. **13.105.** Не дифференцируема ни в одной точке. Указание. $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ не существует.
- 13.106.** Не дифференцируема ни в одной точке. Указание. При $\Delta y = k\Delta x$ имеем $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + ik}$, т. е. предел не существует.
- 13.107.** Дифференцируема только в точке $z = 0$. **13.108.** Дифференцируема только в точке $z = 0$. **13.109.** Не дифференцируема ни в одной точке. \triangleleft В точке $z = 0$ $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z + \Delta z| - |z|}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z}$ — не существует. Если же $z \neq 0$, то, обозначая $|z| = r$, $\Delta z = \Delta\rho e^{i\varphi}$, имеем

$$\frac{|z + \Delta z| - |z|}{\Delta z} = \frac{r \left(\sqrt{1 + \frac{2\Delta\rho}{r^2}(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1 \right)}{\Delta\rho e^{i\varphi}}. \text{ От-}$$

$$\text{сюда найдем } \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{r \left(\sqrt{1 + 2\frac{\Delta\rho}{r^2}x + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1 \right)}{\Delta\rho} = \frac{x}{r} \text{ при } \varphi = 0 \text{ и}$$

$$\lim_{i\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{r \left(\sqrt{1 + 2\frac{\Delta\rho}{r}y + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1 \right)}{i\Delta\rho} = -\frac{iy}{r} \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2}. \text{ Таким обра-}$$

зом, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z + \Delta z| - |z|}{\Delta z}$ не существует. \triangleright

13.110. Дифференцируема только в точке $z = 1$. **13.111.** Указание. Использовать правила дифференцирования сложной функции двух переменных $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $v(x, y) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ и условия (1): $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi$ и $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \varphi$, т. е. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}$. Аналогично проверяется второе из равенств (2). Для получения равенств (4) следует выразить $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ через производные по r и φ , производные $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$,

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ получить из равенств $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ и подставить найденные выражения в (3). **13.112.** $(e^{3z})' = 3e^{3z}$. **13.113.** $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$. **13.114.** $(z^n)' = nz^{n-1}$ (кроме точки $z = 0$ при отрицательных n). **13.115.** $(\cos z)' = -\sin z$. **13.116.** $(\ln(z^2))' = \frac{2}{z}$. **13.117.** $\left(\sin \frac{z}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cos \frac{z}{3}$.

13.118. Указание. Воспользоваться условиями Коши-Римана. **13.121.** Вся плоскость, кроме точек $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$. **13.122.** Вся плоскость; $f'(z) = e^{-z}(1 - z)$. **13.123.** Вся плоскость, кроме точек $z_{1,2} = \pm i$; $f'(z) = \frac{(1 - z^2) \cos z - z(1 + z^2) \sin z}{(1 + z^2)^2}$.

13.124. Вся плоскость, кроме точек $z_\nu = 2\pi\nu i$, $\nu \in \mathbb{Z}$; $f'(z) = -\frac{2e^z}{(e^z - 1)^2}$.

13.125. Вся плоскость, кроме точек $z_\nu = \frac{\pi}{2}\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$; $f'(z) = \cos 2z$.

13.126. Вся плоскость, кроме точки $z = 0$; $f'(z) = \frac{e^z(z-1)}{z^2}$. **13.127.** Вся

плоскость, кроме точек $z_k = \pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$; $f'(z) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$. **13.128.** Вся

плоскость, кроме точек $z_k = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f'(z) = \frac{1}{1 - \sin 2z}$.

13.130. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. **13.131.** $\Delta u \equiv 0$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$, $f(z) = (x + iy)^3 + Ci = z^3 + Ci$. **13.132.** $\Delta v \equiv 0$, $u(x, y) = 2e^x \cos y + C$, $f(z) = 2e^x(\cos y + i \sin y) + C = 2e^z + C$. **13.133.** $\Delta u \equiv 0$, $v(x, y) = -x^2 + y^2 + C$, $f(z) = -i(x^2 - y^2 + 2ixy) + 3 + Ci = -iz^2 + 3 + Ci$. **13.134.** $\Delta v \equiv 0$, $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C$,

$f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C = \ln|z| + i \arg z + C = \ln z + C$.

13.135. $\Delta u \equiv 0$, $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + 2x + C$, $f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} - 2y + 2ix +$

$+ Ci = \frac{1}{z} + 2iz + Ci$. **13.136.** $\Delta u \equiv 0$, $v(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2xy + C$, $f(z) = z^2 - \frac{i}{2}z^2 + Ci = \frac{2-i}{2}z^2 + Ci$. **13.137.** $\Delta v \equiv 0$,

$u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$, $f(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$. **13.138.** $k = 4$, $\varphi = \pi/4$.

13.139. $k = 2$, $\varphi = \pi/2$. **13.140.** $k = 6$, $\varphi = \pi/2$. **13.141.** $k = 3$, $\varphi = 0$.

13.142. $k = 1$, $\varphi = 0$. **13.143.** $k = 2$, $\varphi = \pi/2$. **13.144.** Сжимается область $|z| > 1$, а растягивается область $|z| < 1$. **13.145.** Сжимается полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$, а растягивается полуплоскость $\operatorname{Re} z > 1$.

13.146. Сжимается область $|z+1| > 1$, а растягивается область $|z+1| < 1$.

13.147. Сжимается внутренность круга $|z+1| < 1/2$, а растягивается внешность этого круга. **13.148.** $|z-1| = 1/2$. **13.149.** $\left|z - \frac{i}{2}\right| = 1/2$.

13.150. $|z+i| = \sqrt{2}$. **13.151.** $|z| = 1/\sqrt{3}$. **13.152.** $\{z | \operatorname{Im}(1-i)z = 0\}$, т. е.

прямая $y = x$. **13.153.** $\{z | \operatorname{Im}(1+i)(i+z) = 0\}$, т. е. прямая $x+y+1=0$.

Указание. Использовать равенство $\operatorname{arg} \frac{-i}{(i+z)^2} = \frac{3\pi}{2} - 2 \operatorname{arg}(i+z) = 0$

и соотношение $-\frac{3\pi}{4} = \operatorname{arg}(-1-i)$. **13.154.** Луч $0 < x < +\infty$, $y = -1/2$.

13.155. Луч $1 < x < +\infty$, $y = 0$. **13.156.** Отображение конформно.

13.157. Отображение не конформно. **13.158.** Отображение конформно.

- 13.159.** Отображение конформно. **13.160.** Отображение не конформно.
- 13.162.** $z_0 = -1$, $\alpha = 0$, $k = 2$. **13.163.** $z_0 = 2(1+i)$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $k = 1$.
- 13.164.** $z_0 = -\frac{i}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $k = 1$. **13.165.** При $a \neq 1$ $z_0 = \frac{b}{1-a}$, $\alpha = \arg a$, $k = |a|$. **13.166.** Прямая $v = -3$.
- 13.167.** Прямая $u - 2v = 0$. **13.168.** Окружность $u^2 + v^2 - u - v = 0$.
- 13.169.** Окружность $u^2 + v^2 + 2u + 2v + 1 = 0$. **13.171.** $w = i \frac{z-i}{z-1}$.
- 13.172.** $w = \frac{(i+1)z-i}{z}$. **13.173.** $w = \frac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$. **13.174.** $z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$, $z_1 = z_2$ при $(a-d)^2 + 4bc = 0$. Бесконечно удаленная точка является неподвижной только при $c = 0$, т. е. для линейной функции. **13.175.** а) $\frac{1}{2}(1+i)$; б) $4+i$. Указание. Точка $1+i$ и центр круга i лежат на прямой $y = 1$. **13.176.** а) $w|_{z=-1+i} = \frac{1+2i}{5}$; б) $w|_{z=1-9i} = \frac{81-2i}{65}$. **13.177.** $\alpha = \frac{1}{2}$, $\theta = \pi$. **13.178.** $\alpha = 0$, $\theta = -\frac{\theta}{2}$.
- 13.179.** $\alpha = z_0$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$. **13.181.** $\alpha = i$, $\theta = 0$. **13.182.** $\alpha = 2i$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
- 13.183.** $\alpha = z_0$, $\theta = \pi$. **13.184.** $E = \{w \mid |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$ (нижняя полуокружность). **13.185.** $E = \left\{ w \mid \left| w - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| > \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{Im} w < 0 \right\}$ (рис. 47). Указание. Луч $0 < x < +\infty$ преобразуется во внешность

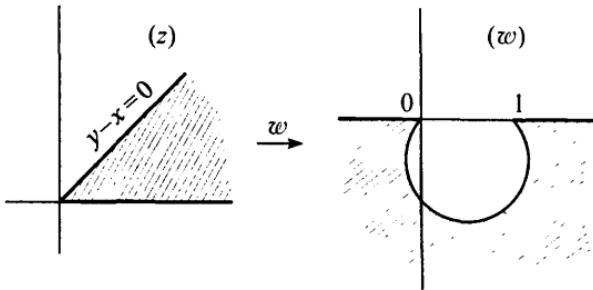


Рис. 47

отрезка $0 \leq u \leq 1$, причем точки верхней полуплоскости (z) отображаются в точки нижней полуплоскости (w). Прямая $y - x = 0$ отображается в окружность $w\bar{w} - \frac{1+i}{2}w + \frac{1-i}{2}\bar{w} = 0$, т. е. в окружность $\left| w - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке $w_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. **13.186.** $E =$

$= \left\{ w \mid \frac{1}{2} \leq |w - 1| \leq 1, -\frac{\pi}{4} < \arg(w - 1) \leq 0 \right\}$. Указание. Окружность $|z| = 1$ отображается в окружность $|w - 1| = 1$, окружность $|z| = 2$ — в окружность $|w - 1| = \frac{1}{2}$, отрезок $1 \leq x \leq 2$ — в отрезок

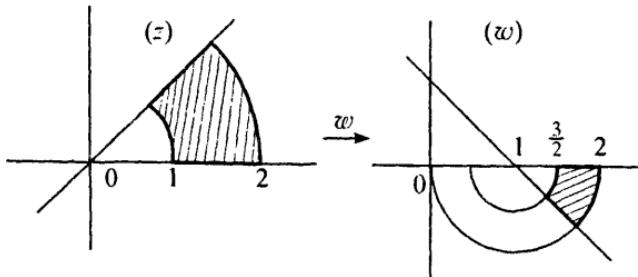


Рис. 48

$\frac{3}{2} \leq u \leq 2$, а прямая $y = x$ — в прямую $u + v = 1$ (рис. 48). 13.187. $E = \{w \mid \operatorname{Im} w > 0, \operatorname{Re} w > 0\}$. 13.188. $E = \left\{ w \mid \left| w - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \left| w - \frac{3}{4} \right| > \frac{1}{4} \right\}$.

13.189. $E = \left\{ w \mid -\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{\pi}{4} \right\}$.

$$\left\{ z \mid \left| z + \frac{r^2}{1-r^2} \right| < \frac{r}{1-r^2} \right\} \quad \text{при } r < 1,$$

13.190 $D = \begin{cases} \{z \mid \operatorname{Re} z < 1/2\} & \text{при } r = 1, \\ \left\{ z \mid \left| z - \frac{r^2}{r^2-1} \right| > \frac{r}{r^2-1} \right\} & \text{при } r > 1. \end{cases}$

Поскольку $|w| < r$, то из соотношения $w(1-z) = z$ получаем $|z| < r|1-z|$. Возводя обе части этого неравенства в квадрат, запишем полученное неравенство в виде $z\bar{z} < r^2(1-z)(1-\bar{z})$, откуда получаем

$$(r^2 - 1)z\bar{z} - r^2(z - \bar{z}) + r^2 > 0. \quad (*)$$

Если $r < 1$, то из $(*)$ имеем

$$z\bar{z} + \frac{r^2}{1-r^2}(z + \bar{z}) < \frac{r^2}{1-r^2}. \quad (**)$$

Но $z\bar{z} + \frac{r^2}{1-r^2}(z + \bar{z}) = \left(z + \frac{r^2}{1-r^2} \right) \left(\bar{z} + \frac{r^2}{1-r^2} \right) - \frac{r^4}{(1-r^2)^2}$. Далее, так как $\frac{r^4}{(1-r^2)^2} + \frac{r^2}{1-r^2} = \frac{r^2}{(1-r^2)^2}$, то из $(**)$ получаем $\left| z + \frac{r^2}{1-r^2} \right|^2 <$

$< \left(\frac{r}{1-r^2} \right)^2$, т. е. $D = \left\{ z \mid \left| z + \frac{r^2}{1-r^2} \right| < \frac{r}{1-r^2} \right\}$ (внутренность круга).

Аналогично в случае $r > 1$ найдем $z\bar{z} - \frac{r^2}{r^2-1}(z+\bar{z}) > -\frac{r^2}{r^2-1}$, т. е.

$\left| z - \frac{r^2}{r^2-1} \right|^2 > \frac{r^4}{(r^2-1)^2} - \frac{r^2}{r^2-1} = \frac{r^2}{(r^2-1)^2}$. Следовательно, $D = \left\{ z \mid \left| z - \frac{r^2}{r^2-1} \right| > \frac{r}{r^2-1} \right\}$ (внешность круга). Наконец, если $r = 1$,

то из (*) получаем $z + \bar{z} < 1$, т. е. $D = \left\{ z \mid \operatorname{Re} z < \frac{1}{2} \right\}$ (полуплоскость).

▷ **13.191.** $w = -\frac{(z-z_1)^3}{(z-z_2)^3}$, $z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.192. $w = e^{\frac{\pi i}{3}} \cdot z^{\frac{4}{3}}$. **13.193.** $w = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$. **13.194.** $w = -\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$.

13.195. $w = \left(\frac{z^4 + 16}{z^4 - 16} \right)^2$. **13.196.** $w = -\left(\frac{z^{2/3} + \sqrt[3]{4}}{z^{2/3} - \sqrt[3]{4}} \right)^2$. **13.197.** $w =$

= $-\left(\frac{z + \sqrt{3} - i}{z - \sqrt{3} - i} \right)^3$. **13.198.** $w = -\left(\frac{2z + \sqrt{3} + i}{2z - \sqrt{3} + i} \right)^{3/2}$. **13.199.** $w =$

= $\left(\frac{2z + \sqrt{3} + i}{2z - \sqrt{3} + i} \right)^3$. **13.200.** $w = -\left(\frac{2z + \sqrt{3} + i}{2z - \sqrt{3} - i} \right)^3$. **13.201.** $w =$

= $\sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. **13.202.** $w = \sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$. **13.203.** $w = \sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$. **13.204.** $w =$

= $\sqrt{z^2 + h^2}$. **13.205.** Как внутренность круга $|z| < R$ при $R < 1$, так

и внешность круга $|z| > R$ при $R > 1$ отобразятся на внешность эллипса

$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(R + \frac{1}{R} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(R - \frac{1}{R} \right)^2} = 1$. **13.206.** Плоскость с раз-

резом по отрезку $[-1, 5/4]$. **13.207.** Плоскость с разрезом по лучам

$(-\infty, -5/4]$, $[1, +\infty)$. **13.208.** Один из ответов: $w = \frac{3}{8} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} +$

+ $\sqrt{\left(\frac{3}{8} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \right)^2 - 1}$ (причем выбирается та ветвь, которая точку

$z = 0$ переводит во внутренность круга $|w| < 1$). Указание. $w_1 =$

= $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $w_2 = \frac{3w_1 - 1}{3}$, $w_3 = \frac{3}{4}w_2$, $w_4 = w_3 + \sqrt{w_3^2 - 1}$, $w =$

$= w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$. **13.209.** $w = \frac{1}{2R} \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$. Указание. Произвести преобразование подобия $w_1 = \frac{z}{R}$ и для отображения $w_2 = \frac{1}{2} \left(w_1 + \frac{1}{w_1} \right)$ проследить за преобразованием границы области. **13.210.** $w = \frac{1}{a+b} \times (z + \sqrt{z^2 - c^2})$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Указание. Производя преобразование подобия $w_1 = \frac{z}{c}$ и определяя R из условий $\frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) = \frac{a}{c}$, $\frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) = \frac{b}{a}$, находим $w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}$ и $w_3 = \frac{1}{R} w_2$. **13.211.** $E = \{w | \operatorname{Im} w < 0\}$. **13.212.** $E = \{w | \operatorname{Re} w > 0\}$. **13.213.** $E = \{w | |w| > 1, w \notin [1, +\infty)\}$. **13.214.** $E = \left\{ w | |w| > 1, 0 < \arg w < \frac{\pi}{2} \right\}$. **13.215.** $E = \{w | 1 < |w| < e, \operatorname{Im} w > 0\}$. **13.216.** Если $w = \rho e^{i\varphi}$, то прямая $x = C$ отображается в окружность $\rho = e^C$, проходящую бесконечное число раз, а прямая $y = C$ — в луч $\psi = C$. **13.217.** $E = \{w | 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. **13.218.** $E = \{w | \operatorname{Re} w < 0, 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. **13.219.** $E = \{w | \operatorname{Re} w < 0, 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$. **13.220.** $E = \{w | 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi, w \neq u + i\pi$ для $u > 0\}$. **13.221.** $E = \{w | \operatorname{Im} w < 0\}$. \triangleleft Представить $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ в виде композиции отображений $w_1 = iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_3 = \frac{1}{2} \left(w_2 + \frac{1}{w_2} \right)$ (рис. 49). \triangleright **13.222.** Прямые $x = C$ преобразуются

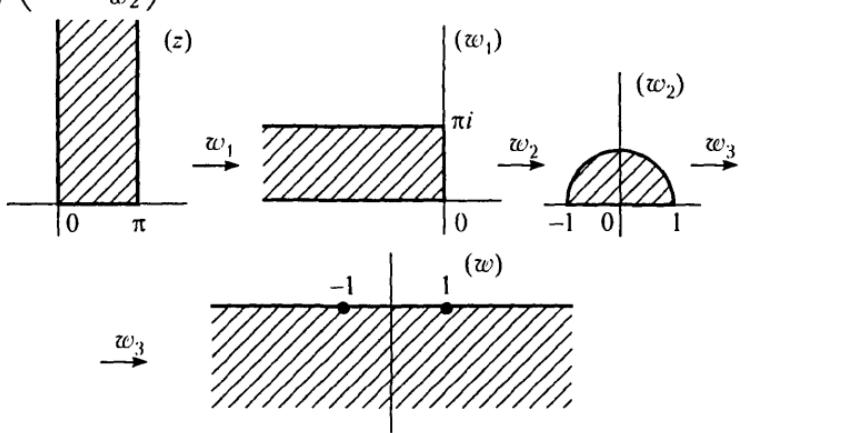


Рис. 49

в эллипсы $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, где $a^2 = \frac{1}{4}(e^C + e^{-C})^2 = (\operatorname{ch} C)^2$, $b^2 = \frac{1}{4} \times (e^C - e^{-C})^2 = (\operatorname{sh} C)^2$, а прямые $y = C$ — в гиперболы $\frac{u^2}{\cos^2 C} -$

$-\frac{v^2}{\sin^2 C} = 1$. **13.223.** Так как область D содержит точки с симметричными мнимыми частями, то область значений E имеет два прообраза: каждый из прямоугольников $D_1 = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, -h < \operatorname{Im} z < 0\}$ и $D_2 = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ отобразится на нижнюю половину внутренности эллипса $\frac{u^2}{\frac{1}{4}(e^h + e^{-h})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(e^h - e^{-h})^2} = 1, v < 0$.

13.224. $-1 + 2i$. **13.225.** $-\frac{\sqrt{13}}{2}(2 + 3i)$. **13.229.** Указание. Оценить интегральную сумму (1) и, учитывая, что $|\Delta z_k| \leq \Delta s_k$, перейти к пределу при $\max \Delta s_k \rightarrow 0$. **13.230.** $-4 + i\pi$. **13.231.** $\frac{2}{3} + 2i$. **13.232.** $\frac{8}{3} - \left(\frac{8}{3} + 4\pi\right)i$. **13.233.** $\frac{1}{30} - \frac{i}{3}$. **13.234.** -2 . **13.235.** $(2 \sin 1 - e) +$

$+ i(1 - 2 \cos 1)$. **13.236.** $-i(1 + e^\pi)$. **13.237.** $-\frac{4000}{3}$. **13.238.** $\frac{i\sqrt{3}}{8} \times$
 $\times (1 + \operatorname{sh} 1)$. **13.239.** $\frac{\operatorname{ch} 1}{\pi^2 + 4}((\pi^2 - 4) - 4\pi i)$. **13.240.** $\frac{101(-1)^{\ln 5} - 25}{20(\pi^2 + 1)} \times$
 $\times (1 - \pi^2 + 2\pi i)$. **13.241.** $-\frac{51}{4} - \frac{2304}{35}i$. **13.242.** $-\frac{1+i}{3}$.

13.244. $\frac{3\sqrt{3}}{4}(-\sqrt{3} + i)$. **13.245.** $\sqrt{2}(1 - \sqrt{2} + i)$. **13.246.** $\frac{\pi i}{6}$. **13.247.** -2π .

13.248. $(-1)^{n+1} \frac{2\pi i}{n+1}$. **13.249.** $e(e \cos 8 - \cos 1) + ie(e \sin 8 - \sin 1)$.

13.250. $\left(\cos \frac{1}{4} \operatorname{ch} \frac{1}{2} - \cos \frac{9}{4} \operatorname{ch} \frac{3}{2}\right) + i \left(\sin \frac{9}{4} \operatorname{sh} \frac{3}{2} - \sin \frac{1}{4} \operatorname{sh} \frac{1}{2}\right)$.

13.251. $(2 \cos 1 - \sin 1) + i(3 \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1)$. **13.252.** $-\ln \sqrt{\operatorname{sh}^2 1 + \operatorname{cos} 1} +$
 $+ i \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1)$. **13.253.** $\oint_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при } n = -1. \end{cases}$

Указание. Произвести замену переменной $z - z_0 = \operatorname{Re}^{i\theta}$.

13.254. $\int\limits_{\substack{|z-z_0|=R \\ 0 \leq \arg(z-z_0) \leq \pi}} (z - z_0)^n dz =$

$$= \begin{cases} \pi i & \text{при } n = -1, \\ 0 & \text{при } n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, k \neq -1, \\ -\frac{2R^{2k+1}}{2k+1} & \text{при } n = 2k. \end{cases}$$

- 13.255.** $\left(2 - \frac{3\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{2}\right) - i(e^{\frac{3\pi}{2}} - 1)$. **13.256.** $\frac{\pi i}{2}(1 + 4k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Указание. В качестве пути интегрирования взять часть окружности $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\varphi}$ либо при $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, либо при $-3\pi/2 \leq \varphi \leq 0$ и добавить любое число оборотов. **13.257.** а) 0; б) $-8\pi i$. **13.258.** а) $2\pi i$; б) 0. **13.259.** а) 0; б) π ; в) $-\pi$. **13.260.** а) πi ; б) $2\pi i$. **13.261.** 0. **13.262.** 0. **13.263.** π . **13.264.** 0. **13.265.** а) $\frac{3\pi i}{8}$; б) $-\frac{3\pi i}{8}$; в) 0. **13.266.** $-\pi \operatorname{sh} 1$. **13.267.** $2\pi i$. **13.268.** $-\frac{i}{8}\pi(\pi + 2)\sqrt{2}$. **13.269.** $\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sh} 1$. **13.270.** $\pi^3 i$. **13.271.** 0. **13.273.** Указание. Рассмотреть функцию $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Глава 14

- 14.1.** Да; 3. **14.2.** Нет. **14.3.** Да; 0. **14.4.** Да; 0. **14.5.** Да; 0. **14.6.** Да; 0. **14.7.** Да; 0. **14.8.** Нет. **14.9.** $\frac{1}{p}(1 + e^{-3p} - 2e^{-2p})$. **14.10.** $\frac{1}{2p^2}(2 - 2pe^{-2p} - 3e^{-2p} + e^{-4p})$. **14.11.** $\frac{1}{p}e^{-p\tau}(1 - \tau) + \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p\tau})$. **14.12.** $\frac{2}{p^3}(p - 1 + e^{-2p}(p + 1))$. **14.13.** $\frac{1}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p})$. **14.14.** $\frac{1}{p^2 + 1}(1 - e^{-2p\pi}) + \frac{1}{p(p^2 + 1)}e^{-\frac{\pi}{2}}(1 + e^{-\pi p}) - \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{\pi p^2}(1 - e^{-\pi p})$. **14.15.** Указание. Воспользоваться теоремой подобия. **14.17.** $\frac{1 + p^2}{p^3}$. **14.18.** $\frac{4 - 4p + p^3}{2p^3(1 - p)}$. **14.19.** $\frac{1}{p + 1} + \frac{3}{p + 2} + \frac{2}{p^3}$. **14.20.** $\frac{-4p^3 + 8p^2 - 4p + 2}{(p^2 + 1)(4p^2 + 1)}$. **14.21.** $\frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}$. **14.22.** $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + 4} (p \cos 2a - 2 \sin 2a) \right)$. **14.23.** $\frac{6}{(p^2 - 1)(p^2 - 9)}$. **14.24.** $\frac{p^2 + 2}{p^4 + 4}$. **14.25.** $\frac{3(p^2 - 13)}{(p^2 + 13)^2 - 36p^2}$. **14.26.** $\frac{p^2 + 4}{(p^2 - 4)^2}$. **14.27.** $\frac{2}{(p^2 + 1)^2}$. **14.28.** $\frac{p^2}{p^4 + 4}$. **14.29.** $\frac{2}{(p + 2)^3}$. **14.30.** $\frac{6}{(p - 2)^4}$. **14.31.** $\frac{p}{p^2 - 4p + 5}$. **14.32.** $\frac{2}{(p + 1)(p^2 + 2p + 5)}$. **14.33.** $\frac{2p(p^2 + 12)}{(p^2 - 4)^3}$. **14.34.** $\frac{2(p + 1)}{(p^2 + 2p + 2)^2}$. **14.35.** $\frac{2(p + 1)}{p^2(p + 2)^2}$. **14.36.** $\frac{p}{p^2(2p + 1)}$. Указание.

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \tau d\tau = e^{-\frac{t}{2}} * t. \quad 14.37. \frac{2}{p^2(p^2+4)}. \quad 14.38. \frac{1}{p^2(p^2-2p+2)}.$$

$$14.39. -\frac{1}{2p} \ln \left(1 - \frac{1}{p^2} \right). \quad \text{Указание. Воспользоваться теоремой интегрирования изображения, а затем теоремой интегрирования оригинала.} \quad 14.40. \frac{1}{p} \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right). \quad 14.41. \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}. \quad 14.42. \frac{1}{2p} \ln \frac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}.$$

Указание. Воспользоваться теоремой интегрирования по параметру, а затем теоремой интегрирования оригинала. $14.43. \frac{1}{p} \ln \frac{p-\alpha}{p-\beta}$.

$$14.44. (p^4 + 4p^3 + 2p^2 - 3p)X(p) - \frac{5}{p}. \quad 14.45. (p^3 + 6p^2 + p - 2)X(p) - 1.$$

$$14.46. (p^2 + 5p - 7)X(p) + \frac{2}{p} - \alpha p - \alpha. \quad 14.47. \frac{e^{-p}}{p-1}. \quad 14.48. \frac{e^{-2p}}{2p(p^2+1)}.$$

$$14.49. \frac{pe^{-(p-1)}}{(p-1)^2}. \quad \text{Указание. } \eta(t-1)te^t = e\eta(t-1)((t-1)e^{t-1} + e^{t-1}).$$

$$14.50. \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}p} \frac{p+1}{p^2+1}. \quad \text{Указание. } \eta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \sin t = \eta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \times \\ \times \left(\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right). \quad 14.51. \frac{1}{p}(1-e^{-p\tau}). \quad 14.52. \frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})e^{-pT}.$$

$$14.53. \frac{h}{\tau p^2}(1-e^{-p\tau}-e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau}). \quad 14.54. \frac{1}{p^2+1}(1-e^{-\frac{p\pi}{2}})(1-pe^{-\frac{p\pi}{2}}).$$

$$14.55. h\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}\right). \quad 14.56. \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p^2e^{-p\pi}}{p^4-1}. \quad 14.57. \triangleleft \text{ Положим } f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t < l, \\ 0, & l \leq t. \end{cases} \quad \text{Тогда } f_0(t) = f(t) - \eta(t-l)f(t-l) \text{ (поскольку } f(t) = f(t-l) \text{ при } t \geq l \text{ в силу периодичности).}$$

Переходя к изображениям, отсюда находим $F_0(p) = F(p) - e^{-pt}F(p)$, где $F_0(p) = \int_0^l e^{-pt}f(t) dt$.

$$\text{Следовательно, } F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pl}} = \frac{1}{1 - e^{-pl}} \int_0^l e^{-pt}f(t) dt. \quad \triangleright$$

$$14.58. \frac{1 - e^{-p\tau}}{p(1 - e^{-pT})}. \quad 14.59. \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\beta}. \quad 14.60. \frac{1 + e^{-p\pi}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-pT})}.$$

$$14.61. \frac{h}{p} \operatorname{th} \frac{cp}{2}. \quad 14.62. \frac{h}{cp^2} - \frac{he^{-pc}}{p(1 - e^{-pc})}. \quad 14.63. \frac{h}{cp^2} \operatorname{th} \frac{cp}{2}.$$

- 14.64. $\frac{p + \beta e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}}{(p^2 + \beta^2)(1 - e^{-\frac{p\pi}{2\beta}})}.$ 14.65. $\frac{\operatorname{cth} p\pi}{p^2 + 1}.$ 14.66. $\frac{1}{(p - \alpha)^{\mu+1}}.$
- 14.67. $\frac{1}{(p - \alpha)^{\mu+1}} \left(\frac{\Gamma'(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} - \ln(p - \alpha) \right).$ 14.68. $-\frac{\gamma + \ln(p - \alpha)}{p - \alpha}$
(γ — постоянная Эйлера). 14.69. $\frac{1}{2} \frac{(p + \beta i)^{\mu+1} + (p - \beta i)^{\mu+1}}{(p^2 + \beta^2)^{\mu+1}}.$
- 14.70. $\frac{1}{2i} \frac{(p + \beta i)^{\mu+1} - (p - \beta i)^{\mu+1}}{(p^2 + \beta^2)^{\mu+1}}.$ 14.71. $\frac{\gamma p + \frac{p}{2} \ln(p^2 + \beta^2) + \beta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{p}}{p^2 + \beta^2}.$
- 14.72. $\frac{p \operatorname{arctg} \frac{\beta}{p} - \beta \gamma - \frac{\beta}{2} \ln(p^2 + \beta^2)}{p^2 + \beta^2}.$ 14.73. $\sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-ap}.$ 14.74. $te^t.$
- 14.75. $\frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}).$ 14.76. $p^{-2t} \operatorname{sh} t.$ 14.77. $1 - e^{-t} - te^{-t}.$ 14.78. $t - \sin t.$
- 14.79. $\frac{3}{5}(1 - e^{-2t} \cos t - 4 \sin t).$ 14.80. $\frac{1}{5}(\operatorname{ch} 2t - \cos t).$ 14.81. $\frac{1}{4}t \sin 4t.$
- 14.82. $\frac{1}{3} \left(e^{t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) - e^{-t} \right).$ 14.83. $\frac{1}{2} \operatorname{sh} t \sin t.$
- 14.84. $\eta(t - 2)(t - 2).$ 14.85. $\frac{1}{2}\eta(t - 2)(t - 2)^2 e^{-(t-2)}.$ 14.86. $e^{2t} +$
+ $\eta(t - 1) + \eta(t - 4) \sin 3(t - 4).$ 14.87. $\cos 2t - 2\eta(t - 1) \operatorname{ch} 2(t - 1).$
- 14.88. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{((2n)!)^2}.$ 14.89. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n + 1)!(2n)!}.$
- 14.90. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n + 1)!(2n + 1)} = \int_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau}{\tau} d\tau.$ 14.91. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!(2n)!}.$
- 14.92. $e^t I_0(2\sqrt{t}).$ Указание. Применить теорему смещения к оригиналу, полученному в примере 4 из § 2. 14.93. $e^{-2t}(\cos t - 2 \sin t).$
- 14.94. $\frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t.$ 14.95. $\sum_{k=1}^n e^{pk} t.$ 14.96. $\frac{t}{8} \times$
 $\times (\operatorname{ch} t - \cos t) - \frac{3}{8}(\operatorname{sh} t - \sin t).$ 14.97. $\frac{1}{10}t \cos t - \frac{7}{50} \sin t + \frac{1}{50} \operatorname{sh} 2t.$
- 14.98. $\frac{1}{8}t(\operatorname{sh} t - \sin t).$ 14.99. $\frac{1}{3} \operatorname{ch} t + \frac{2}{3} \operatorname{ch} \frac{t}{2} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}.$ 14.100. $\frac{1}{8}t^2 \cos t +$
+ $\frac{3}{8}t \sin t.$ 14.101. $\frac{1}{2}(e^{3t} - e^t).$ 14.102. $t - 2 \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t.$ 14.103. $\frac{1}{3} \times$
 $\times (\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} t).$ 14.104. $\frac{1}{10}(\operatorname{ch} t + \cos t) - \frac{1}{5} \operatorname{ch} t \cos t.$ 14.105. $x(t) =$

- $= C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{t}{6} \sin 3t.$ **14.106.** $x(t) = \left(C_1 + C_2 t + \frac{t^2}{2} \right) e^{2t}.$
- 14.107.** $x(t) = C_1 + \left(C_2 - \frac{t^2 + t}{4} \right) e^{-2t}.$ **14.108.** $x(t) = \left(C_1 + \frac{t}{3} \right) e^t + C_2 e^{-2t}.$ **14.109.** $x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-t} (\cos t - \sin t).$ **14.110.** $x(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} - \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} \right) + e^{-t}.$ **14.111.** $x(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{3} \right) e^{-t}.$
- 14.112.** $x(t) = \frac{2}{9}(e^{-3t} - 1) - \frac{t}{3} e^{-3t}.$ **14.113.** $x(t) = \frac{2}{5}(1 - e^t) \cos t + \frac{1}{5}(1 + 6e^t) \sin t.$ **14.114.** $x(t) = \cos 2t - \frac{7}{8} \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t.$ **14.115.** $x(t) = \frac{25}{24} \operatorname{sh} 3t - \operatorname{ch} 3t - \frac{1}{8} \operatorname{sh} t.$ **14.116.** $x(t) = 3 + t + (t - 2)e^t.$ **14.117.** $x(t) = \frac{t}{4} \operatorname{ch} t - \frac{1}{4} \sin t.$ **14.118.** $x(t) = \frac{t^4}{24} e^{-t}.$ **14.119.** $x(t) = 1 - e^{-t} - \eta(t - 2) \times (1 - e^{-(t-2)}).$ **14.120.** $x(t) = \frac{t}{2} \sin t + \frac{1}{2} \eta(t - \pi)(t - \pi) \sin(t - \pi).$
- 14.121.** $x(t) = \operatorname{ch} t - 1 - \frac{1}{e} \eta(t - 1)(\operatorname{ch}(t - 1) - 1).$ **14.122.** $x(t) = 2 \left(\sin^2 \frac{t}{2} - 2\eta(t - 1) \sin^2 \frac{t - 1}{2} + \eta(t - 2) \sin^2 \frac{t - 2}{2} \right).$ **14.123.** \triangleleft Уравнению $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 1$ при нулевых начальных условиях соответствует операторное уравнение $L(p)X_1(p) = \frac{1}{p}$, где $X_1(p) \doteq x_1(t)$, а $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n$ — характеристический многочлен уравнения. Отсюда $L(p) = \frac{1}{p X_1(p)}$. Уравнению $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$ при нулевых начальных условиях соответствует операторное уравнение $L(p)X(p) = F(p)$, где $X(p) \doteq x(t)$, а $F(p) \doteq f(t)$. Отсюда $X(p) = \frac{F(p)}{L(p)} = p X_1(p) F(p)$. С помощью интеграла Диомеля (см. § 1, свойство 11) получаем $x(t) = x_1(0)f(t) + \int_0^t x_1'(\tau)f(t - \tau)d\tau = \int_0^t x_1'(\tau)f(t - \tau)d\tau$ (так как $x_1(0) = 0$), или $x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)x_1(t - \tau)d\tau.$ \triangleright **14.124.** $x(t) = \frac{1}{3}(e^t - 1) - \frac{t}{9}e^t + \frac{1}{9}e^t \ln \frac{e^t + 3}{t}.$ **14.125.** $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - 1 - te^t) + \operatorname{sh} t \ln \frac{1 + e^t}{2e^t}.$

- 14.126.** $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1) \ln(e^t + 1)$. **14.127.** $x(t) = \sin t \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sqrt{3}} \right) \right) + \cos t \ln \frac{2 + \cos t}{3}$. **14.128.** $x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)^2} \sin \tau d\tau$ (этот интеграл не выражается через элементарные функции). **14.129.** $x(t) = C_1 + C_2 \sin t + C_3 \cos t + t$, $y_t = C_4 + C_3 \sin t - C_2 \cos t + \frac{t^2}{2}$. **14.130.** $x = C_1 + C_2 \operatorname{sh} t + C_3 \operatorname{ch} t$, $y = C_4 - C_3 \operatorname{sh} t - C_2 \operatorname{ch} t + \operatorname{ch} t + \cos t$. **14.131.** $x(t) = e^t$, $y(t) = -e^t$. **14.132.** $x(t) = t \cos t$, $y(t) = -t \sin t$. **14.133.** $x(t) = \sin t - \cos t$, $y(t) = \sin t + \cos t$. **14.134.** $x(t) = \sin t + \operatorname{sh} t$, $y(t) = \cos t + \operatorname{ch} t$. **14.135.** $x(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$, $y(t) = 1 - e^t$. **14.136.** $x(t) = -\sin t$, $y(t) = -\cos t$, $z(t) = \sin t$. **14.137.** $x(t) = (1+t-\sin t-\cos t) - 2\eta \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \left(\left(t - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \eta(t-\pi)(-1+(t-\pi)+\cos(t-\pi)-\sin(t-\pi))$, $y(t) = (1-t+\sin t-\cos t) - 2\eta \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \left(1 - \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \eta(t-\pi)(1+(t-\pi)-\sin(t-\pi)-\cos(t-\pi))$. **14.138.** $x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t - 2) - \eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi) + \cos(t-\pi) - 2) + \frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi) + \cos(t-2\pi) - 2)$, $y(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t) - \eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi) - \cos(t-\pi)) + \frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi) - \cos(t-2\pi))$. **14.139.** $2 \sin t$. **14.140.** $\operatorname{ch} 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t$. **14.141.** e^t . **14.142.** $\operatorname{ch} t$. **14.143.** $\frac{1}{\sqrt{t}}$. **14.144.** $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\beta)} \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. **14.145.** $z(x, y) = y \cos x + x \sin x$. **14.146.** $z(x, y) = \frac{1}{a} \sum_0^x \operatorname{sh} a(x-t)f(t) dt$. **14.147.** $u(x, t) = q(t - x\sqrt{LC}) = E \sin \omega(t - x\sqrt{LC})$, $i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \times q(t - x\sqrt{LC}) = E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega(t - x\sqrt{LC})$, $t > x\sqrt{LC}$. \triangleleft Предполагая, что $u(x, t)$ и $i(x, t)$ и их производные как функции переменной t являются оригиналами, и обозначая $U(x, p) \doteq u(x, t)$, $I(x, p) \doteq i(x, t)$, получим операторные уравнения $\frac{\partial U(x, p)}{\partial x} = -LpI(x, p)$, $\frac{\partial I(x, p)}{\partial x} = -CpU(x, p)$

с граничными условиями $q(t) \doteq U(0, p) = Q(p) = \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2}$. Исключая $I(x, p)$ из первого уравнения и считая p параметром, находим $\frac{d^2U(x, p)}{dx^2} = LCp^2U(x, p)$. Отсюда $U(x, p) = A(p)e^{p\sqrt{LC}x} + B(p)e^{-p\sqrt{LC}x}$. Из физических соображений следует, что при $x \rightarrow +\infty$ решение $U(x, p)$ ограничено, а потому при $\operatorname{Re} p > 0$ коэффициент при первом слагаемом должен быть равен нулю, т. е. $A(p) = 0$. Далее, из условия $U(0, p) = \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2}$ следует, что $U(x, p) = \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2}e^{-p\sqrt{LC}x}$, а тогда $I(x, p) = -\frac{1}{Lp} \times \times \frac{\partial U(x, p)}{\partial x} = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{E\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-p\sqrt{LC}x}$. Применяя теорему запаздывания, находим отсюда искомое решение. \triangleright

$$\mathbf{14.148. } u(x, t) = Ee^{-\nu\sqrt{LC}x}(\eta(t - x\sqrt{LC}) - \eta(t - x\sqrt{LC} - \tau)); i(x, t) = = \sqrt{\frac{C}{L}} Ee^{-\nu\sqrt{LC}x}(\eta(t - x\sqrt{LC}) - \eta(t - x\sqrt{LC} - \tau)). \quad \mathbf{14.149. } \ln \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\alpha}.$$

$$\mathbf{14.150. } \frac{1}{\alpha^{\mu+1}} \left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln \alpha \right). \quad \text{Указание. Использовать решение}$$

$$\text{задачи 14.67. } \mathbf{14.151. } \frac{\pi}{2} e^{-\alpha t}. \quad \mathbf{14.152. } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}. \quad \mathbf{14.153. } \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}).$$

$$\mathbf{14.154. } \sqrt{2\pi}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}). \quad \mathbf{14.155. } \sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}). \quad \text{Указание. В заданном интеграле предварительно положить } x^2 = u. \quad \mathbf{14.156. } \quad 2. \quad \triangleleft \quad \text{Имеем}$$

$$\frac{p}{\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2} \doteq t \operatorname{sh} \frac{t}{2}; \quad k = 1. \quad \text{Поэтому по формуле (9) } S = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} t \times \times \operatorname{sh} \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}} dt = -(te^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-\frac{t}{2}})|_0^{+\infty} = 2. \quad \triangleright$$

$$\mathbf{14.157. } \frac{3}{4}\pi. \quad \triangleleft \quad \operatorname{arctg} \frac{9}{n^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}. \quad \text{Но } \operatorname{arctg} \frac{1}{p} \equiv \equiv \frac{\sin t}{t}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{p+1} \doteq e^{-t} \frac{\sin t}{t}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{p-1} \doteq e^t \frac{\sin t}{t} \quad (\text{по теореме смешения}). \quad \text{Следовательно, } \operatorname{arctg} \frac{2}{p^2} \doteq f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t} \sin t; \quad k = 1. \quad \text{Поэтому по формуле (9) } S =$$

$$\int_0^t \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \frac{e^t - e^{-t}}{t} \sin t dt = \int_0^t \frac{1 + e^{-t}}{t} \sin t dt.$$

Но $\frac{1+e^{-t}}{t} \sin t = \operatorname{arctg} \frac{1}{p} + \operatorname{arctg} \frac{1}{p+1} = F(p)$, $F(0) = \operatorname{arctg}(+\infty) + \operatorname{arctg} 1 = \frac{3}{4}\pi$. Следовательно, по формуле (6) $\int_0^{+\infty} \frac{1+e^{-t}}{t} \sin t dt = \frac{3}{4}\pi$.

14.158. $\frac{1}{2}$. Указание. $\frac{2p+1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+2p+2}$.

14.159. $\frac{\pi}{2}$. Указание. $\operatorname{arctg} \frac{3}{n^2+3n+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+3}$; см. решение задачи 14.157.

14.160. $\operatorname{arctg} x$. Указание. Положить $\Phi(t, x) = \frac{x}{1+x^2 t}$.

14.161. $\arcsin x$. Указание. Положить $\Phi(t, x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2 t}}$.

14.162. $\frac{\pi-x}{2}$. Используем производящую функцию $\Phi(t, x) = \frac{t \sin x}{1-2t \cos x + t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin nx$. Имеем

$$\Phi(e^{-t}, x) = \frac{e^{-t} \sin x}{1-2e^{-t} \cos x + e^{-2t}};$$

$\frac{1}{p} = \eta(t) = f(t)$, $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$. Находим по формуле (10):

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin x dt}{1-2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} = \sin x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{(e^{-t}-\cos x)^2 + \sin^2 x} = \\ &= -\operatorname{arctg} \frac{e^{-t}-\cos x}{\sin x} \Big|_0^{+\infty} = -\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x) + \operatorname{arctg} \frac{1-\cos x}{\sin x}, \end{aligned}$$

и, так как $-\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{\pi}{2} - x$,

$$\operatorname{arctg} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2},$$

то $T(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x}{2} = \frac{\pi-x}{2}$. **14.163.** $-\ln \left(2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right)$. Указание. Использовать разложение

$$\frac{1+t \cos x}{1+2t \cos x + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \cos nx,$$

положив $\Phi(t, x) = 1 - \frac{1 + t \cos x}{1 + 2t \cos x + t^2}$. **14.164.** $\frac{E - u_0}{R} e^{-\frac{1}{CR}t}$.

14.165. $\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. **14.166.** $\frac{E - u_0}{L \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t$

при $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$; $\frac{E - u_0}{L} te^{-\frac{R}{2L}t}$ при $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$; $\frac{E - u_0}{L \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \times$

$\times \operatorname{sh} \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} t$ при $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$. **14.167.** $E e^{-\frac{1}{2RL_1}t} \left(\cos \frac{1}{L_1} \times \right.$

$\times \sqrt{\frac{L_1}{L_2} - \frac{1}{4R^2}} t - \frac{1}{2R \sqrt{\frac{L_1}{L_2} - \frac{1}{4R^2}}} \sin \frac{1}{L_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2} - \frac{1}{4R^2}} t \left. \right)$ при $\frac{L_1}{L_2} > \frac{1}{4R^2}$;

$E e^{-\frac{1}{2RL_1}t} \left(1 - \frac{1}{2RL_1} t \right)$ при $\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{4R^2}$; $E e^{-\frac{1}{2RL_1}t} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{L_1} \times \right.$

$\times \sqrt{\frac{1}{4R^2} - \frac{L_1}{L_2}} t - \frac{1}{2R \sqrt{\frac{1}{4R^2} - \frac{L_1}{L_2}}} \operatorname{sh} \frac{1}{L_1} \sqrt{\frac{1}{4R^2} - \frac{L_1}{L_2}} t \left. \right)$ при $\frac{L_1}{L_2} < \frac{1}{4R^2}$.

14.168. $\frac{EL}{L + C} e^{-\frac{1}{R(L+C)}t}$. **14.169.** $E \left(1 - e^{-\frac{2+R_1R_2}{2CR_2}t} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{4+R_1^2R_2^2}}{2CR_2} t - \right. \right.$

$\left. \left. - \frac{(R_1R_2 - 2)\sqrt{4+R_1^2R_2^2}}{4C^2R_2^2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{4+R_1^2R_2^2}}{2CR_2} t \right) \right)$. **14.170.** $E \left(\left(\frac{1}{RC} - \frac{2L}{3C} \right) \times \right.$

$\times e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{2L}{3C} e^{-\frac{1}{R}(\frac{1}{2C} + \frac{1}{t})t} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{L^2+4C^2}}{2LRC} t - \frac{\sqrt{L^2+4C^2}}{4LCR^2} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{L^2+4C^2}}{2LRC} t \right) \right)$.

14.171. $\frac{E}{R^2 + L^2\omega^2} \left(L\omega^{-\frac{R}{L}t} + R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t \right)$. **14.172.** $\frac{E}{R} \times$

$\times e^{-\frac{1}{CR}t} \left(t - \frac{t^2}{2} \right)$. **14.173.** $\frac{E}{\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L}} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(2t - t^2 - \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}} \times \right.$

$\times \sin \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4C^2}} t + \frac{4}{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \left. \right)$.

14.174. $\frac{e^q(e^q - e^\alpha \cos \beta)}{e^{2q} - 2e^{q+\alpha} \cos \beta + e^{2\alpha}}$. **14.175.** $\frac{e^q(e^q - a \cos \beta)}{e^{2q} - 2ae^q \cos \beta + a^2}$.

14.176. $\frac{e^{q+\alpha}(e^q + e^\alpha)}{(e^q - e^\alpha)^3}$. **14.177.** $\frac{ae^q(e^q + a)}{(e^q - a)^3}$. **14.178.** $\frac{1}{(e^q - 1)^{k+1}}$. Ука-

занie. По свойству 3, а). **14.179.** $\frac{e^{(m+1)q}}{(e^q - 1)^{k+1}}$ при $m < k$; $\frac{e^{(m+1)q}}{(e^q - 1)^{k+1}} = \sum_{r=k}^{m-1} C_r^k e^{(m-r)q}$ при $m \geq k$. Указание. По свойству 3, б).

14.180. $\arctg \frac{\sin \beta}{e^q - \cos \beta}$. \triangleleft Применяем формулу интегрирования изображения (свойство 5, б)):

$$\frac{\sin \beta n}{n} = \int_q^\infty \frac{e^q \sin \beta dq}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1} = \int_q^\infty \frac{e^q \sin \beta dq}{q(e^q - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta} = \\ = \arctg \frac{e^q - \cos \beta}{\sin \beta} \Big|_q^\infty = \arctg \frac{\sin \beta}{e^q - \cos \beta}$$

$$\left(\text{так как } \arctg \frac{e^q - \cos \beta}{\sin \beta} \Big|_q^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{e^q - \cos \beta}{\sin \beta} = \arctg \frac{\sin \beta}{e^q - \cos \beta} \right). \triangleright$$

14.181. $f(n) = -\frac{1}{3}1^n + \frac{1}{4}2^n + \frac{1}{12}(-2)^n = \frac{2^{n-3}(3 + (-1)^{n-2}) - 1^{n-3}}{3}$.

14.182. $f(n) = \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n+1}{4}\pi$. **14.183.** $f(n) = (\sqrt{2})^{n+1} \cos \frac{3n+1}{4}\pi$.

Указание. Использовать формулы для изображения функций $a^n \sin \beta n$ и $a^n \cos \beta n$ (пример 3 и задача 14.175). **14.184.** $\frac{n^{[r+1]}}{(r+1)!} = C_n^{r+1}$.

14.185. $\frac{2}{5 - 4 \cos \beta} (\sin \beta - 2^{n-1} \sin n\beta + 2^n \sin(n-1)\beta)$ при $n \geq 1$.

14.186. $\frac{n(n^4 - 1)}{30}$. Указание. Использовать формулу умножения изо-

браний. **14.187.** $\frac{1}{2} \frac{t}{t^2 - t\sqrt{3} + 1}$. **14.188.** $\frac{1 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}t}{1 - t + t^2}$. **14.189.** $x_n =$

$$= \frac{1}{7}(5^{n+1} + (-2)^{n+1}). \quad \mathbf{14.190.} \quad x_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2(n+1)\pi}{3}. \quad \mathbf{14.191.} \quad x_n = \\ = \sin \frac{(n+1)\pi}{6}. \quad \mathbf{14.192.} \quad x_n = (2x_0 - x_1)1^n + (x_1 - x_0)2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n.$$

14.193. $x_n = 2^n - (n+1)$. **14.194.** $x_n = (x_1 - 2x_0 - 2)3^n + (1 - x_1 + 3x_0)2^n + 4^n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n + 4^n$. **14.195.** $x_n = (-1)^n + 2^n + 3^n$,

$$y_n = 2(-1)^n - 2^n - 3^n. \quad \mathbf{14.196.} \quad x_n = \frac{3x_0 - y_0}{5} \cdot 2^n + \frac{2x_0 + y_0}{5} \cdot 3^n = \\ = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n, \quad y_n = \frac{2y_0 - 6x_0}{5} \cdot 2^n + \frac{3y_0 + 6x_0}{5} \cdot 3^n = -C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 \cdot 3^{n+1}.$$

Глава 15

15.4. $y(x) = e^x - 2x - \int_0^x 2xy(t) dt.$ **15.5.** $y(x) = 2x - 9 + \int_2^x (2 - x + t) \times$

$\times y(t) dt.$ **15.6.** $y(x) = e^x(x - 1) - \sin x + x + \int_0^x (\sin x - e^x(x - t))y(t) dt.$

15.7. $y(x) = e^x - x - \frac{1}{2} \int_0^x x(x - t)^2 y(t) dt.$ **15.8.** $y(x) = \frac{x^3}{6} - x -$

$- \int_0^x \left(x - t - \frac{(x - t)^3}{6} \right) y(t) dt.$ **15.9.** Указание. Воспользоваться формулой

$$\int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_a^{t_1} y(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} y(t) dt.$$

15.10. $y(x) = x + \pi + \int_{-\pi}^x t \sin y(t) dt.$ **15.11.** $y(x) = x^3 - x + 1 + \int_1^x y^2(t) dt.$

15.12. $y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t) dt, y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2 + \int_0^x y_1^2(t) dt.$ **15.13.** $y_1(x) =$

$= -3 + \int_0^x y_2(t) dt, y_2(x) = 1 + \int_0^x y_3(t) dt, y_3(x) = -1 + \frac{3}{2} \int_0^x y_2^2(t) dt.$

15.14. $y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t) dt, y_2(x) = \int_0^x y_3(t) dt, y_3(x) = \frac{x^2}{2} +$

$+ \int_0^x ty_1^2(t) dt - \int_0^x y_2^2(t) dt.$ **15.15.** $y(x) = e^x(x + 1).$ **15.16.** $y(x) =$

$= e^{x^2/2}.$ **15.17.** $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$ **15.18.** $y(x) =$

$= \cos x e^{-(x+\sin x)}.$ **15.19.** $y(x) = 2e^x - 2 \cos x + 5 \sin x.$ **15.20.** $y(x) =$

$= -e^{-x}.$ **15.21.** $y(x) = \frac{1}{6} \left(e^x + 3 \cos x + 3 \sin x - 4e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$

15.22. $y(x) = 1.$ **15.23.** $y(x) = x \operatorname{ch} x.$ **15.24.** $y(x) = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x/2} \times$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x + 3 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x \right). \quad 15.25. y(x) = e^x. \quad 15.26. y(x) = x.$$

$$15.27. y(x) = 1. \quad 15.28. y(x) = 1 + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!} = 1 + xe^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

$$15.29. y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}. \quad 15.30. y(x) = e^{\frac{x^{p+1}}{p+1}}. \quad 15.31. y(x) = \sin x. \quad 15.32. y(x) = \operatorname{ch} x. \quad 15.33. y(x) = (2e)^x. \quad 15.34. y(x) = (1+x^2)e^{-\frac{1}{2}x}. \quad 15.35. y_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63}. \quad 15.36. y_2(x) = x + x \cos x - \sin x. \quad 15.37. y_2(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$15.38. e^{\lambda(t-x)}. \quad 15.39. te^{\lambda \frac{x^2-t^2}{2}}. \quad 15.40. x^2 e^{\lambda \frac{x^3-t^3}{3}}. \quad 15.41. xte^{\lambda \frac{x^3-t^3}{3}}.$$

$$15.42. xt^2 e^{\lambda \frac{x^4-t^4}{4}}. \quad 15.43. e^{(\lambda+1)(x-t)}. \quad 15.44. 2^{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t} e^{\lambda(x-t)}.$$

$$15.45. \frac{1+x^2}{1+t^2} e^{\lambda(x-t)}. \quad 15.46. \frac{t^2-t+1}{x^2-x+1} e^{\lambda(x-t)}. \quad 15.47. \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t} e^{\lambda(x-t)}.$$

$$15.50. e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad 15.51. xe^{\frac{x^3}{3}}. \quad 15.52. \frac{1}{5}e^{3x} - \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x. \quad 15.53. e^x \operatorname{ch} x.$$

$$15.54. \frac{e^x}{1+x^2}. \quad 15.55. e^x(x-1)+1. \quad 15.56. \operatorname{ch} x - 1. \quad 15.57. e^{2x} - e^x.$$

$$15.58. \frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x. \quad 15.59. 2e^x - x - 1. \quad 15.60. 2 \sin x - x. \quad 15.61. y(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$15.62. \frac{1}{4}e^{2x}(2x+3) + \frac{1}{4}. \quad 15.63. \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos \sqrt{3}x. \quad 15.64. 1. \quad 15.67. 2 - e^{-x}. \quad 15.68. \operatorname{ch} x + \cos x. \quad 15.69. e^{-x} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{x^2}{2} \right). \quad 15.70. \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{2}} \left(1 + 4 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{5}}{2}x \right). \quad 15.71. 2 - \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x +$$

$$+ \sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x. \quad 15.72. y_1(x) = 1 - 2 \cos x, y_2(x) = 2 \sin x. \quad 15.73. y_1(x) =$$

$$= \frac{3}{25} - \frac{6}{5}x - \frac{1}{25}e^x(3 \cos 2x - 4 \sin 2x), y_2(x) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}e^x(\cos 2x + 2 \sin 2x).$$

$$15.74. y_1(x) = x + e^{-x} - e^{x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right), y_2(x) = -e^{-x} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x. \quad 15.75. y_1(x) = (x+2) \sin x + (2x+1) \cos x, y_2(x) =$$

$$= - \left(\frac{1}{2} + x \right) \sin x + \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \cos x. \quad 15.76. y_1(x) = 2 \sin x, y_2(x) =$$

$$= 2 \cos x - 1, y_3(x) = x. \quad 15.78. e^x. \quad 15.79. x - \frac{x^2}{2}. \quad 15.80. 1 - x \ln 3.$$

$$15.81. 1. \quad 15.82. x. \quad 15.83. 3. \quad 15.84. \text{Решения нет.} \quad 15.85. e^{-x} \left(\frac{1}{2} - \sin x \right).$$

- 15.86.** xe^{x^2} . **15.87.** $3(2x - 1)$. **15.88.** $\operatorname{ch} x$. **15.89.** $x^2 \left(6 + \frac{1}{2}x^2\right)$.
- 15.90.** $2 \sin x$. **15.91.** $2 \cos x - 1$. **15.92.** Решения нет. **15.93.** $\frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$.
- 15.94.** $e^x \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)$. **15.95.1.** **15.96.1.** **15.97.** $\frac{15}{4}x$. Указание. Воспользоваться формулой $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. **15.98.** $3x$. **15.99.** $\frac{2}{3}$. **15.100.** $1 - x$.
- 15.101.** $4 \sin x$. **15.102.** $\frac{2}{3} \cos x$. **15.103.** $R(x, t, \lambda) = \frac{1}{1 - \pi\lambda}, y(x) = \sin x$. **15.104.** $R(x, t, \lambda) = 2^{x+t} \frac{1}{1 - \frac{3\lambda}{2 \ln 2}}, y(x) = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2} 2^{x+1} + x$.
- 15.105.** $R(x, t, \lambda) = x \sin 2\pi t, y(x) = \cos 2\pi x$. **15.106.** $R(x, t, \lambda) = \frac{xe^t}{1 - \lambda}, y(x) = e^{-x} + x$. **15.107.** $R(x, t, \lambda) = \frac{2}{2 - \lambda} \sin x \cos x, y(x) = 1 + 2 \sin x$.
- 15.109.** $1 + \frac{1}{4}x$. **15.110.** $+\frac{1}{3} \cos 2\pi x$. **15.111.** $x - \pi \cos x$. **15.112.** $7 + 6x^2$.
- 15.113.** $\sin x - \frac{1}{6}x$. **15.114.** $\sin x + \cos x$. **15.115.** Решения нет. **15.116.** $x + C(1 - x^2)$. **15.117.** x . **15.118.** $\cos^2 x + \frac{1}{2(2 - \ln 2)}$. **15.119.** Cx .
- 15.120.** 0. **15.121.** $\cos 2\pi x$. **15.122.** $x + \frac{1}{2}$. **15.123.** $C \left(\frac{5}{2}x + x^2\right)$.
- 15.124.** Решения нет. **15.125.** $1 + \sqrt{x}$. **15.126.** $C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
- 15.127.** $2\pi^2 \cos 2\pi x + \frac{5}{3}(2x^2 - 1)$. **15.128.** 0. **15.129.** $\lambda = \frac{6}{7}, y(x) = C(1 + 2x)$. **15.130.** $\lambda = \frac{3}{2}, y(x) = C(1 - x^2)$. **15.131.** $\lambda = 1, y(x) = C|x|$. **15.132.** $\lambda = \frac{1}{\pi}, y(x) = Cx$. **15.133.** $\lambda = \frac{2}{\pi}, y(x) = C \cos x$.
- 15.134.** $\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_{1,2}(x) = C(\sqrt{3}x \pm 1)$. **15.135.** $\mu_{1,2} = 1 \pm \pm \sqrt{\frac{2}{3}(e - 1)}, y_{1,2}(x) = C \left(\sqrt{\frac{3}{2}(e - 1)}x \pm 1 \right)$. **15.136.** $\lambda = -2\pi, y(x) = C$.
- 15.137.** $\lambda_{1,2} = \pm \frac{2}{\pi}, y_{1,2}(x) = C(\sin x \pm \cos x)$. **15.138.** $\lambda = \frac{2}{\pi}, y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **15.139.** При $\lambda \neq \frac{6}{5}$ $y(x) = x^2 + \frac{1}{2} \frac{7\lambda}{6 - 5\lambda} x$, при $\lambda = \frac{6}{5}$ решения нет. **15.140.** При $\lambda \neq 2$ $y(x) = \sin 2\pi x$, при $\lambda = 2$ $y(x) = \sin 2\pi x + Cx$. **15.141.** При $\lambda \neq \frac{6}{7}$ $y(x) = 1 - \frac{3}{2}x$, при $\lambda = \frac{6}{7}$

$y(x) = 1 - \frac{3}{2}x + C(1 + 2x)$. **15.142.** При $\lambda \neq -2\pi$ $y(x) = \frac{2\pi}{2\pi + \lambda}x$, при

$\lambda = -2\pi$ решения нет. **15.143.** $y(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{\pi}{2}\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. **15.144.** При

$\lambda \neq 1$ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi^2\lambda}{8(1-\lambda)}$. **15.145.** $y(x) = \cos x + \frac{\pi\lambda}{2}\sin x$,

$\lambda \in \mathbb{R}$. **15.146.** При $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}y(x) = \sin \pi x + \frac{\frac{2}{\lambda}\lambda}{1 - \frac{2}{3}\lambda}x$, при $\lambda = \frac{1}{2}$

$y(x) = \sin \pi x + \frac{3}{2\pi}x + C$, при $\lambda = \frac{3}{2}$ решения нет. **15.147.** При $\lambda \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{\lambda}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2} \left((1+2\lambda)x + 1 + \frac{2}{3}\lambda \right)$, при $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ реше-

ния нет. **15.148.** При $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$ $y(x) = 1 - \frac{2\lambda}{1 + \frac{\lambda\pi}{2}} \sin x$, при $\lambda = \frac{2}{\pi}$

$y(x) = 1 - \sin x + C \cos x$, при $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ решения нет. **15.149.** $\lambda_n = -\pi^2 n^2$,

$y_n = \sin \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$. **15.150.** $\lambda_n = -\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2$, $y_n = \sin \pi \frac{2n+1}{2}x$,

$n = 0, 1, 2, \dots$ **15.151.** $\lambda_n = -\omega_n^2$, где ω_n — корни уравнения $\omega =$

$= \operatorname{ctg} \omega$, $y_n = \cos \omega_n(x-1)$, $n \in \mathbb{N}$. **15.152.** $\lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$,

$y_n = \sin \frac{2n+1}{2}x$, $n = 0, 1, 2, \dots$ **15.153.** $\lambda_n = 1 - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $y_n =$

$= \cos \frac{2n+1}{2}x$, $n = 0, 1, 2, \dots$ **15.154.** $\lambda_n = 1 - \pi^2 n^2$, $y_n = \sin \pi n x$,

$n \in \mathbb{N}$. **15.155.** $\lambda_n = -1 - \pi^2 n^2$, $y_n = \sin \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$. **15.156.** $\lambda_0 = 1$,

$y_0 = 1$; $\lambda_n = 1 - 4n^2$, $y_n = C_1 \cos 2\pi x + C_2 \sin 2\pi x$, $n \in \mathbb{N}$. **15.157.** $\lambda_n =$

$= 1 + \omega_n^2$, где ω_n — корни уравнения $\omega = \operatorname{ctg} 2\omega$, $y_n = \cos \omega_n x$, $n \in \mathbb{N}$.

15.158. При $\lambda \neq \lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda} \cdot \frac{4 \sin \pi(2k+1)x}{\pi(2k+1)};$$

при $\lambda = \lambda_{2m}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = 1 + \lambda_{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda_{2m}} \cdot \frac{4 \sin \pi(2k+1)x}{\pi(2k+1)} + C \sin 2\pi mx;$$

при $\lambda = \lambda_{2m+1}$, $m = 0, 1, \dots$ решения нет. **15.159.** При $\lambda \neq \lambda_n =$

$$= -\pi^2 \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(x) = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2} x - \lambda \left(\frac{1}{\lambda + \frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{\lambda + \frac{9\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{2} x \right);$$

при $\lambda = \lambda_0 = -\frac{\pi^2}{4}$ и $\lambda = \lambda_1 = -\frac{9\pi^2}{4}$ решения нет; при $\lambda = \lambda_n$, $n = 2, 3, \dots$

$$y(x) = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2} x - \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \frac{\pi^2}{4}} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{\lambda_n + \frac{9\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{2} x \right) + \\ + C \sin \frac{\pi(2n+1)}{2} x.$$

15.160. При $\lambda \neq \lambda_n = 1 - \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$y(x) = x - \pi + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{2n+1} \right)^2}{\lambda - \lambda_n} \cdot \cos \frac{2n+1}{2} x;$$

при $\lambda = \lambda_n$ решения нет. **15.161.** При $\lambda = \lambda_n = 1 - 4\pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $y(x) = (1 - \lambda)^{-1}$; при $\lambda = \lambda_0 = 1$ решения нет, при $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = \frac{1}{1 - \lambda_n} + C_1 \cos 2nx + C_2 \sin 2nx.$$

15.162. ¹⁾ $-3,1459, -3,0518, -2,9692, -2,8983, -2,8387, -2,7903, -2,7527, -2,7257, -2,7088, -2,7015, -2,7033, -2,7137, -2,7321, -2,7577, -2,7900, -2,8282, -2,8715, -2,9193, -2,9707, -3,0247, -3,0811.$

¹⁾ Ответы к задачам 15.162–15.184 приводятся в виде значений функции $y(x)$ в точках отрезка $[0, 1]$, выбранных с шагом $\Delta x = 0,05$, т.е. $y_k = y(x_k) = y(k\Delta x)$, $k = 0, 1, \dots, 20$. При решении этих задач методом конечных сумм, либо моментов следует сравнить значения полученного решения с приведенным в точках вида $x_k = k \cdot 0,05$, $k = 0, 1, \dots, 20$.

- 15.163.** $-4,3533, -4,3578, -4,3631, -4,3688, -4,3747, -4,3806, -4,3863,$
 $-4,3914, -4,3956, -4,3985, -4,3998, -4,3988, -4,3950, -4,3877, -4,3759,$
 $-4,3585, -4,3341, -4,3008, -4,2563, -4,1974, -4,1198.$ **15.164.** $0,5335,$
 $0,3333, 0,1614, 0,0109, -0,1233, -0,2448, -0,3566, -0,4608, -0,5594,$
 $-0,6535, -0,7444, -0,8332, -0,9209, -1,0082, -1,0959, -1,1848, -1,2758,$
 $-1,3695, -1,4668, -1,5688, -1,6765.$ **15.165.** $63,0353, 63,9561, 64,8184,$
 $65,6236, 66,3731, 67,0681, 67,7100, 68,2999, 68,8388, 69,3277, 69,7680,$
 $70,1604, 70,5058, 70,8054, 71,0600, 71,2707, 71,4384, 71,5642, 71,6409,$
 $71,6940, 71,6998.$ **15.166.** $1,0000, 1,0135, 1,0172, 1,0111, 0,9955, 0,9709,$
 $0,9376, 0,8963, 0,8476, 0,7921, 0,7306, 0,6641, 0,5933, 0,5192, 0,4428,$
 $0,3651, 0,2870, 0,2096, 0,1340, 0,0610, -0,0083.$ **15.167.** $0,0000, 0,2209,$
 $0,4469, 0,6780, 0,9142, 1,1557, 1,4025, 1,6546, 1,9121, 2,1751, 2,4436,$
 $2,7176, 2,9972, 3,2825, 3,5734, 3,8701, 4,1726, 4,4809, 4,7950, 5,1150,$
 $5,4410.$ **15.168.** $0,3123, 0,2985, 0,2796, 0,2555, 0,2264, 0,1925, 0,1539,$
 $0,1111, 0,0641, 0,0134, -0,0407, -0,0978, -1,1575, -0,2192, -0,2827,$
 $-0,3472, -0,4125, -0,4780, -0,6076, -0,6708.$ **15.169.** $2,4334, 2,3247,$
 $2,1981, 2,0532, 1,8890, 1,7072, 1,5056, 1,2843, 1,0430, 0,7813, 0,4988,$
 $0,1951, -0,1303, -0,4778, -0,8480, -1,2413, -1,6584, -2,0997, -2,5659,$
 $-3,0576, -3,5754.$ **15.170.** $-1,1130, -1,0644, -1,0122, -0,9562, -0,8963,$
 $-0,8322, -0,7639, -0,6910, -0,6134, -0,5308, -0,4431, -0,3500, -0,2513,$
 $-0,1466, -0,0358, 0,0815, 0,2056, 0,3369, 0,4755, 0,6220, 0,7766.$
15.171. $0,9897, 0,9686, 0,9376, 0,8970, 0,8469, 0,7879, 0,7202, 0,6446,$
 $0,5617, 0,4722, 0,3768, 0,2763, 0,1719, 0,0643, -0,0455, -0,1565, -0,2675,$
 $-0,3777, -0,4860, -0,5914, -0,6929.$ **15.172.** $-0,1988, -0,1636, -0,1312,$
 $-0,1016, -0,0744, -0,0497, -0,0273, -0,0071, 0,0110, 0,0270, 0,0410,$
 $0,0530, 0,0630, 0,0711, 0,0774, 0,0818, 0,0842, 0,0848, 0,0834, 0,0802,$
 $0,0750.$ **15.173.** $0,8313, 0,8287, 0,8039, 0,7577, 0,6912, 0,6062, 0,5048,$
 $0,3894, 0,2629, 0,1281, -0,0116, -0,1528, -0,2922, -0,4265, -0,5526,$
 $-0,6672, -0,7678, -0,8518, -0,9172, -0,9623, -0,9859.$ **15.174.** $-2,0000,$
 $-2,0579, -2,1294, -2,2145, -2,3133, -2,4257, -2,5517, -2,6913, -2,8446,$
 $-3,0114, -3,1920, -3,3861, -23,5938, -3,8152, -4,0502, -4,2988,$
 $-4,5610, -4,8369, -5,1263, -5,4294, -5,7462.$ **15.175.** $-2,8204, -2,7112,$
 $-2,5946, -2,4700, -2,3366, -2,1938, -2,0408, -1,8768, -1,7009, -1,5122,$
 $-1,3096, -1,0922, -0,8587, -0,6050, -0,3388, -0,0497, 0,2607, 0,5939,$

0,9518, 1,3351, 1,7488. **15.176.** 4,7481, 4,9997, 5,2563, 5,5178, 5,7844, 6,0560, 6,3326, 6,6142, 6,9008, 7,1924, 7,4890, 7,7906, 8,0971, 8,4087, 8,7252, 9,0468, 9,3734, 9,7050, 10,0416, 10,3832, 10,7297. **15.177.** 9,0000, 9,6196, 10,4009, 11,3784, 12,5934, 14,0952, 15,9423, 18,2048, 20,9659, 24,3244, 28,3977, 33,3252, 39,2718, 46,4331, 55,0407, 65,3683, 77,7398, 92,5376, 110,213, 131,300, 156,4264. **15.178.** -0,7005, -0,5713, -0,4441, -0,3191, -0,1964, -0,0760, 0,0420, 0,1574, 0,2702, 0,3804, 0,4878, 0,5923, 0,6938, 0,7924, 0,8879, 0,9802, 1,0693, 1,1552, 1,2376, 1,3167, 1,3923. **15.179.** 2,0380, 1,8073, 1,5597, 1,2958, 1,0164, 0,7219, 0,4131, 0,0909, -20,243, -0,589, -0,945, -1,310, -1,682, -2,059, -2,440, -2,821, -3,200, -3,574, -3,939, -4,290, -4,6216. **15.180.** 0,0000, 0,0501, 0,1004, 0,1517, 0,2027, 0,2556, 0,3076, 0,3625, 0,4151, 0,4717, 0,5247, 0,5823, 0,6349, 0,6926, 0,7443, 0,8008, 0,8508, 0,9053, 0,9535, 1,0059, 1,0499. **15.181.** 1,0000, 1,1550, 1,3207, 1,4969, 1,6862, 1,8859, 2,1029, 2,3292, 2,5790, 2,8354, 3,1245, 3,4152, 3,7512, 4,0800, 4,4708, 4,8389, 5,2909, 5,6921, 6,2067, 6,6194, 7,2710. **15.182.** -1,0000, -1,0087, -1,0196, -1,0398, -1,0515, -1,0674, -1,0692, -1,0641, -1,0452, -1,0042, -0,9569, -0,8761, -0,8027, -0,6992, -0,6154, -0,5200, -0,4442, -0,3751, -0,3108, -0,2539, -0,1807. **15.183.** 10,0000, 11,0564, 11,6033, 12,5516, 13,1184, 14,0373, 14,5906, 15,4312, 15,9774, 16,7572, 17,3502, 18,1492, 18,8795, 19,8175, 20,7997, 22,0172, 23,3845, 25,0395, 26,9496, 29,2271, 31,8675. **15.184.** 0,2500, 0,3279, 0,4112, 0,5029, 0,6005, 0,7127, 0,8301, 0,9712, 1,1155, 1,2966, 1,4771, 1,7136, 1,9427, 2,2555, 2,5495, 2,9672, 3,3491, 3,9123, 4,4129, 5,1786, 5,7222.

Глава 16

16.1. $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F(x, t)$, где $u(x, t)$ — отклонение точки струны с абсциссой x от положения равновесия в момент времени t , $a^2 = T/\rho$, ρ — плотность струны, $F(x, t)$ — плотность распределения действующих на струну внешних сил. \triangleleft Пусть $\alpha = \alpha(x, t)$ — острый угол между осью абсцисс и касательной к струне в точке с абсциссой x в момент времени t . Условие малости колебаний означает, что величиной

$\alpha^2(x, t)$ можно пренебречь, а потому имеем $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$. Длина любого участка $M_1 M_2$ струны в момент времени t выражается формулой

$$|M_1 M_2| = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx,$$

а так как $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx \alpha^2 \approx 0$, то

$$|M_1 M_2| \approx x_2 - x_1 = \Delta x.$$

Согласно второму закону Ньютона сумма всех сил, действующих на участок струны $M_1 M_2$, равна по величине и по направлению вектору ускорения этого участка, умноженному на его массу. Вычислим все силы, действующие на этот участок. Плотность распределения внешних сил обозначим через $F(x, t)$, тогда внешняя сила, действующая на $M_1 M_2$, равна $F(x, t)\Delta x$. Далее, силы натяжения T_1 и T_2 , действующие на концах M_1 и M_2 , направлены по касательным к дугам в соответствующих точках. Из малости колебаний и из того, что равнодействующая этих сил вызывает только вертикальные перемещения, заключаем, что горизонтальная составляющая равнодействующей равна нулю, т. е. $-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$. Так как $\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx 1$, то отсюда выводим равенство $T_1 = T_2 = T$. Следовательно, вертикальная составляющая сил натяжения дается выражением $T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1$ и сумма всех сил $F_{M_1 M_2}$, действующих на участок $M_1 M_2$, равна

$$F_{M_1 M_2} = T(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + F(x, t)\Delta x.$$

Но в момент времени t $\alpha = \alpha(x) = \operatorname{arctg} u'_x$, а потому

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 &= \sin \alpha(x_1 + \Delta x) - \sin \alpha(x_1) = \\ &= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x)(\alpha(x_1 + \Delta x) - \alpha(x_1)) = \\ &= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x)(\operatorname{arctg} u'_x)' \Big|_{x=x_1+\theta_1 \Delta x} \Delta x = \\ &= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (u'_x)^2}} u''_{xx} \right] \Big|_{x=x_1+\theta_1 \Delta x} \Delta x \\ &\quad (0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta_1 < 1). \end{aligned}$$

При наших предположениях $\cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x) \approx 1$ и $(u'_x)^2|_{x=x_1+\theta_1 \Delta x} \approx 0$. Таким образом,

$$F_{M_1 M_2} \approx T \frac{\partial^2 u(x_1 + \theta_1 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x + F(x, t) \Delta x. \quad (*)$$

С другой стороны, считая участок $M_1 M_2$ материальной точкой (при достаточно малом Δx), имеем

$$F_{M_1 M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho \Delta x. \quad (**)$$

Приравняв согласно закону Ньютона выражения (*) и (**) и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, для искомой функции $u(x, t)$ получаем дифференциальное уравнение $u''_{tt} = \frac{T}{\rho} u''_{xx} + \frac{1}{\rho} F(x, t)$. **16.2.** Найти функцию $u(x, t)$, определенную при $0 \leq x \leq l$, и $0 \leq t \leq +\infty$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F(x, t)$$

($a^2 = T/\rho$, T — натяжение струны, ρ — плотность струны, $F(x, t)$ — плотность распределения внешних сил) и удовлетворяющую условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (\text{границные условия}),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (\text{начальные условия}).$$

16.3. Найти функцию $u(x, t)$, определенную при $0 \leq x \leq l$ и $0 \leq t < +\infty$, являющуюся решением уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($a^2 = \frac{T}{\rho}$, T — натяжение, ρ — плотность струны) и удовлетворяющую условиям

$$u(l, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{границные условия}),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (\text{начальные условия}).$$

Указание. Граничное условие при $x = 0$ получить из отсутствия на этом конце внешней силы и, следовательно, равенства нулю силы натяжения T , пропорциональной $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$. **16.4.** Напряжение $u(x, t)$ и сила тока $i(x, t)$ в точках линии в любой момент времени t должны удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + (LC + RC) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + RGw(x, t).$$

▷ Рассматриваем двухпроводную линию как систему равномерно распределенных индуктивностей, сопротивлений, емкостей и утечки

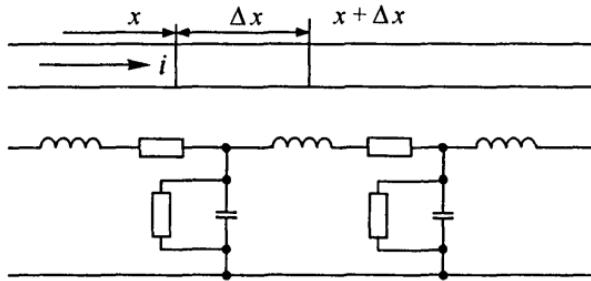


Рис. 50

(см. рис. 50). Согласно первому закону Кирхгофа (алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю) имеем

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) = C \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + G \Delta x u(x, t),$$

где $C \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$ — ток через конденсатор, а $G \Delta x u(x, t)$ — ток утечки. Разделив это равенство на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - Gu(x, t). \quad (*)$$

Далее, согласно второму закону Кирхгофа падение напряжения $u(x, t)$ на участке между x и $x + \Delta x$ состоит из падения напряжения на индуктивности $L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ и из падения напряжения на сопротивле-

нии $R \Delta xi(x, t)$, т. е.

$$u(x, t) - u(x + \Delta x, t) = L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R \Delta xi(x, t).$$

Разделив на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - Ri(x, t). \quad (**)$$

Уравнения (*) и (**) называются *уравнениями длинной линии*. Исключая из этих уравнений $i(x, t)$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LC + RG) \frac{\partial u}{\partial t} + RG u, \quad (***)$$

а исключая $u(x, t)$ — к уравнению

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (LC + RG) \frac{\partial i}{\partial t} + RG i. \quad (****)$$

Уравнения (***) и (****) называют также *телеграфными уравнениями*. ▷ **16.5.** Найти функции $u(x, t)$ и $i(x, t)$, определенные при $0 \leq x < +\infty$ и $0 \leq t < +\infty$, являющиеся решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), && \text{(начальные условия)}, \\ i(x, 0) &= \psi(x) \\ u(0, t) &= E_0, && \text{(граничные условия)} \\ u(+\infty, t) &= i(+\infty, t) = 0 \end{aligned}$$

(условия при $x = +\infty$ следуют из физических соображений). **16.6.** Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и удовлетворяющую условиям

$$u(x, 0) = u_0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_0, \\ u'_x(l, t) + \gamma[u(l, t) - \varphi(t)] &= 0 \quad (\text{границные условия}), \end{aligned}$$

где γ — коэффициент теплообмена между стержнем и средой. Указание. Для получения граничного условия при $x = l$ заметим, что количество теплоты, проходящей через конец стержня за время Δt , равно $\Delta q = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} S \Delta t$, где S — площадь поперечного сечения стержня, а k — коэффициент теплопроводности материала стержня. С другой стороны, Δq пропорционально произведению разности температур $u(l, t) - \varphi(t)$ на площадь S и на время Δt , т. е. $\Delta q = h[u(l, t) - \varphi(t)]S \Delta t$, где $h \geq 0$ зависит от качества теплоизоляции конца стержня от окружающей среды. Сравнивая оба выражения для Δq и обозначая $\gamma = \frac{h}{k}$, приходим к написанному граничному условию. **16.7.** Пусть система координат выбрана так, что ось Oz параллельна образующей. Область, ограниченную кривой L в плоскости Oxy , обозначим через D . Найти функцию $u(x, y)$, которая для всех точек $M(x, y) \in D$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. является гармонической в области D , а на границе области, т. е. на кривой L , удовлетворяет условию

$$u(x, y) \Big|_{(x, y) \in L} = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — заданная на L непрерывная функция. Для установившегося теплового процесса $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. **16.8.** Гиперболический, $u''_{\xi\eta} = 0$.

16.9. Параболический. Выбирая $\xi(x, y) = 2x - y$ и $\eta(x, y) = x$, после преобразования получаем уравнение $u''_{\eta\eta} + 3u'_{\eta} = 0$. **16.10.** Эллиптический, $u''_{\mu\mu} + u''_{\nu\nu} = 0$, где $\mu(x, y) = -3x - y = \operatorname{Re} \xi(x, y)$ и $\nu(x, y) = 2x = \operatorname{Im} \xi(x, y)$. **16.11.** Параболический. Выбирая $\xi = \sqrt{y} - \sqrt{x}$ и $\eta = x$, после преобразования получаем уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$. **16.12.** Параболич-

ский. Выбирая $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x$ при $\xi \neq \eta^2$, т. е. при $y \neq 0$, получаем уравнение $u''_{\eta\eta} + \frac{2\xi}{\xi - \eta^2} u'_\xi = 0$. При $y = 0$ имеем уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, а

при $x = 0$ — уравнение $u''_{xx} = 0$. **16.13.** В области $D = \{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$ гиперболический, $u''_{\xi\eta} - \frac{\xi + 2\eta}{(\xi^2 - \eta^2)} u'_\xi - \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} u'_\eta = 0$. При

$x = 0$ или $y = 0$ параболический. **16.14.** В области $D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ эллиптический, $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$. При $x = 0$ или $y = 0$ параболический. **16.15.** Гиперболический, $u''_{\xi\eta} = 0$. **16.16.** В области

$D = \{(x, y) | x \neq 0\}$ гиперболический, $u''_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} (u'_\xi - u'_\eta) = 0$. При $x = 0$ параболический. **16.17.** В области $D = \{(x, y) | x \neq 0\}$

эллиптический, $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u'_\eta = 0$. При $x = 0$ параболический.

16.18. Параболический. Выбирая $\xi(x, y) = y/x$ и $\eta(x, y) = y$, после преобразования получаем уравнение $u''_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0$. **16.19.** $u(x, y) =$

$= \varphi(4x - y) + \psi(x - y)$, где $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. **16.20.** Выбирая $\xi(x, y) = 4x - y$ и $\eta(x, y) = x - y$, приводим уравнение к виду $u''_{\xi\eta} = 0$ (см. задачу 16.8), последовательно интегрируя которое, находим $u'_\xi = \varphi_0(\xi)$ и $u(\xi, \eta) = \int \varphi_0(\xi) d\xi +$

$+ \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Подставив сюда выражения для $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, получим искомое решение. **16.21.** $u(x, y) = \psi(2x - y)e^{-3x} + \varphi(2x -$

$- y)$, где $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. **16.22.** $u(x, y) = x\varphi(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \psi(\sqrt{y} - \sqrt{x})$, где $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. **16.23.** $u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)y + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$,

где $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. **16.24.** $u(x, t) = \frac{x \sin x \cos at - at \cos x \sin at}{x^2 - a^2 t^2}$.

$$16.25. u(x, t) = \frac{x \sin x \cos at - at \cos x \sin at}{x^2 - a^2 t^2} + \frac{1}{4a} \ln \frac{1 + (x + at)^2}{1 + (x - at)^2}.$$

$$16.26. u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{x + t}{1 + (x + t)^2} + \frac{x - t}{1 + (x - t)^2} \right] + \sin x \sin t.$$

$$16.27. u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + (x + t)^2} + \frac{1}{1 + (x - t)^2} \right] + \sin x \cos t.$$

$$16.28. u(x, t) = e^{-(x^2+t^2)} \cdot \operatorname{ch} 2xt + \frac{1}{4} \ln \frac{1+(x+t)^2}{1+(x-t)^2}.$$

16.29. Если $0 \leq t \leq \frac{l}{2a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } -at \leq x \leq at, \\ x & \text{при } at \leq x \leq l-at, \\ l-at & \text{при } l-at \leq x \leq l+at, \\ 2l-x & \text{при } l+at \leq x \leq 2l-at, \\ l-\frac{1}{2}(x-at) & \text{при } 2l-at \leq x \leq 2l+at, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Если $\frac{l}{2a} \leq t \leq \frac{l}{a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } -at \leq x \leq l-at, \\ l-\frac{1}{2}(x+at) & \text{при } l-at \leq x \leq at, \\ l-at & \text{при } at \leq x \leq 2l-at, \\ \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } 2l-at \leq x \leq l+at, \\ l-\frac{1}{2}(x-at) & \text{при } l+at \leq x \leq 2l+at, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Если $\frac{l}{a} \leq t < +\infty$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at) & \text{при } -at \leq x \leq l-at, \\ l-\frac{1}{2}(x+at) & \text{при } l-at \leq x \leq 2l-at, \\ \frac{1}{2}(x-at) & \text{при } at \leq x \leq l+at, \\ l-\frac{1}{2}(x-at) & \text{при } l+at \leq x \leq 2l+at, \\ 0 & \text{при остальных } x; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{2a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(x + \frac{l}{2} \right) & \text{при } -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{l}{2} & \text{при } \frac{l}{2} \leq x \leq \frac{3l}{2}, \\ \frac{5}{4}l - \frac{1}{2}x & \text{при } \frac{3l}{2} \leq x \leq \frac{5l}{2}, \\ 0 & \text{при остальных } x; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + l) & \text{при } -l \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(l - x) & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{2}(x - l) & \text{при } l \leq x \leq 2l, \\ \frac{3l}{2} - \frac{x}{2} & \text{при } 2l \leq x \leq 3l, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Указание. Рассмотреть случаи различного возможного расположения значений $x - at$ и $x + at$ на оси x , а именно: если $x - at < 0$, то $x + at$ может лежать в промежутках $(-\infty, 0)$ $(0, l)$, $(l, 2l)$ и $(2l, +\infty)$; если $0 < x - at < l$, то точка $x + at$ может лежать в промежутках $(0, l)$, $(l, 2l)$ и $(2l, +\infty)$; если $l < x - at < 2l$, то точка $x + at$ может лежать в промежутках $(l, 2l)$ и $(2l, +\infty)$; если $2l < x - at < +\infty$, то и $x + at \in (2l, +\infty)$. **16.30.** Если $0 \leq t \leq \frac{h}{2a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq -h - at \\ & \text{и при } h + at \leq x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x + at + h) & \text{при } -h - at \leq x \leq at - h, \\ -at & \text{при } at - h \leq x \leq -at, \\ x & \text{при } -at \leq x \leq at, \\ at & \text{при } at \leq x \leq h - at, \\ \frac{1}{2}(-x + at + h) & \text{при } h - at \leq x \leq h + at. \end{cases}$$

Если $\frac{h}{2a} \leq t \leq \frac{h}{a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq -h - at \\ & \text{и при } h + at \leq x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x + at + h) & \text{при } -h - at \leq x \leq -at, \\ \frac{1}{2}(x + at - h) & \text{при } -at \leq x \leq at - h, \\ x & \text{при } -h + at \leq x < h - at, \\ \frac{1}{2}(x - at + h) & \text{при } h - at \leq x \leq at, \\ \frac{1}{2}(-x + at + h) & \text{при } at \leq x \leq h + at. \end{cases}$$

При $t \geq \frac{h}{a}$ имеем

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq -h - at \\ & \text{и при } h + at \leq x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x + at + h) & \text{при } -h - at \leq x \leq -at, \\ \frac{1}{2}(x + at - h) & \text{при } -at \leq x \leq h - at, \\ 0 & \text{при } h - at \leq x \leq at - h, \\ \frac{1}{2}(x - at + h) & \text{при } at - h \leq x \leq at, \\ \frac{1}{2}(-x + at + h) & \text{при } at \leq x \leq h + at. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{h}{2a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \left(-\infty, -\frac{3h}{2}\right) \cup \left(\frac{3h}{2}, +\infty\right), \\ -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3h}{2}\right) & \text{при } x \in \left(-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}\right), \\ x & \text{при } x \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), \\ \frac{1}{2}\left(-x + \frac{3h}{2}\right) & \text{при } x \in \left(\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right). \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{3h}{4a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \left(-\infty, -\frac{7h}{4}\right) \cup \left(\frac{7h}{4}, +\infty\right), \\ -\frac{1}{2} \left(x + \frac{7h}{4}\right) & \text{при } x \in \left(-\frac{7h}{4}, -\frac{3h}{4}\right), \\ \frac{1}{2} \left(x - \frac{h}{4}\right) & \text{при } x \in \left(-\frac{3h}{4}, -\frac{h}{4}\right), \\ x & \text{при } x \in \left(-\frac{h}{4}, \frac{h}{4}\right), \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{h}{4}\right) & \text{при } x \in \left(\frac{h}{4}, \frac{3h}{4}\right), \\ \frac{1}{2} \left(-x + \frac{7h}{4}\right) & \text{при } x \in \left(\frac{3h}{4}, \frac{7h}{4}\right). \end{cases}$$

Указание. Рассмотреть случаи различного возможного расположения значений $x - at$ и $x + at$: если $x - at < -h$, то $x + at$ может лежать в промежутках $(-\infty, -h)$, $(-h, 0)$, $(0, h)$ и $(h, +\infty)$; если $-h < x - at < 0$, то $x + at$ может лежать в промежутках $(-h, 0)$, $(0, h)$ и $(h, +\infty)$; если $0 < x - at < h$, то $x + at$ может лежать в промежутках $(0, h)$ и $(h, +\infty)$; если $h < x - at < +\infty$, то и $x + at \in (h, +\infty)$.

$$16.31. u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{a} \sin x \sin at, & at \leqslant x < +\infty, \\ \frac{1}{2} (1 - \cos x \cos at), & 0 \leqslant x \leqslant at. \end{cases}$$

$$16.32. u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{(x + at)^2}{1 + (x + at)^2} + \frac{(x - at)^2}{1 + (x - at)^2} \right] & \text{при } x \geqslant at, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{(x + at)^2}{1 + (x + at)^2} - \frac{(at - x)^2}{1 + (at - x)^2} \right] & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant at. \end{cases}$$

$$16.33. u(x, t) = \frac{1}{4a} \ln \frac{1 + (x + at)^2}{1 + (x - at)^2}.$$

$$16.34. u(x, t) = \frac{1}{4a} \ln \frac{1 + (x + at)^2}{1 + (x - at)^2} +$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{(x + at)^2}{1 + (x + at)^2} - \frac{(x - at)^2}{1 + (x - at)^2} \right] & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant at, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{(x + at)^2}{1 + (x + at)^2} + \frac{(x - at)^2}{1 + (x - at)^2} \right] & \text{при } x \geqslant at. \end{cases}$$

$$16.35. u(x, t) = e^{-(x^2 + a^2 t^2)} \operatorname{ch} axt +$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{a} (1 - \cos x \cos at) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant at, \\ \frac{1}{a} \sin (x) \sin at & \text{при } x \geqslant at. \end{cases}$$

16.36. Если $0 \leq t \leq \frac{l}{a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq l - at, \\ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{l} (x - at) & \text{при } l - at \leq x \leq l + at, \\ 0 & \text{при } l + at \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Если $\frac{l}{a} \leq t < +\infty$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq at - l \\ & \text{и при } l + at \leq x < +\infty, \\ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{l} (x - at) & \text{при } at - l \leq x \leq at + l. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{4a}\right) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{3l}{4}, \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{l} \left(x - \frac{l}{4}\right) & \text{при } \frac{3l}{4} \leq x \leq \frac{5l}{4}, \\ 0 & \text{при } \frac{5l}{4} \leq x < +\infty. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{3l}{4a}\right) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{l} \left(x - \frac{l}{4}\right) & \text{при } \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{7l}{4}, \\ 0 & \text{при } \frac{7l}{4} \leq x < +\infty. \end{cases}$$

16.37. Если $0 \leq t < \frac{l}{a}$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} ct & \text{при } 0 \leq x < l - at, \\ \frac{c}{2a}(l + at - x) & \text{при } l - at \leq x < l + at, \\ 0 & \text{при } l + at \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Если $\frac{l}{a} \leq t < \infty$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} ct & \text{при } 0 \leq x \leq at - l, \\ \frac{c}{2a}(l + at - x) & \text{при } at - l \leq x < at + l, \\ 0 & \text{при } at + l \leq x < +\infty. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{c}{2a}(2l - x) & \text{при } 0 \leq x < 2l, \\ 0 & \text{при } 2l \leq x < +\infty; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{5l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{cl}{a} & \text{при } 0 \leq x < 4l, \\ \frac{c}{2a}(6l - x) & \text{при } 4l \leq x < 6l, \\ 0 & \text{при } 6l \leq x < +\infty. \end{cases}$$

16.38. Указание. Выражение $(x_n, y_n) - (x, y)$ записать в виде $(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)$ и воспользоваться неравенством Коши–Буняковского.

16.40. Указание. Показать, что в произвольном ортонормированном базисе фундаментальность последовательности векторов $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ эквивалентна фундаментальности числовых последовательностей их координат. **16.43.** Указание. Воспользовавшись результатами задач 16.41

и 16.42, доказать полноту пространства l_2 . **16.44.** $\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq$

$$\leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx. \quad \text{16.45. Указание. Пусть } f(x) — \text{произ-}$$

вольная функция из $C^{(2)}[-1, 1]$ и $h(t)$ — разрывная функция, равная -1 при $t < 0$ и 1 при $t \geq 0$. Неравенства Коши–Буняковского для интегралов (неравенства Шварца, см. задачу 16.44) следует, что

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi_n(r))^2 dt \right)^{1/2} \geq \\ & \geq \left(\int_{-1}^1 (f(t - h(t)))^2 dt \right)^{1/2} - \left(\int_{-1}^1 (\varphi_n(t) - h(t))^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (\varphi_n(t) - h(t))^2 dt = 0,$$

и в силу непрерывности

$$\int_{-1}^1 (f(t) - h(t))^2 dt > 0.$$

Отсюда следует, что интеграл $\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt$ не может стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$, какова бы ни была $f(t) \in C^{(2)}[-1, 1]$.

16.51. $\widehat{P}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\widehat{P}_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $\widehat{P}_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$, $\widehat{P}_3(x) =$

$$= \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right).$$

16.52. $\widehat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$,

$$\widehat{T}_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x$$
, $\widehat{T}_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2 - 1)$,

$$\widehat{T}_3(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(4x^3 - 3x).$$

16.53. Указание. При вычислении интегралов произвести замену переменной $\arccos x = \theta$.

16.54. $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)$,

$$\varphi_2(x) = 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right).$$

16.55. См. рис. 51. Вертикальные прямые в точках разрыва проведены только для наглядности. **16.58.** См. рис. 52. Вертикальные прямые в точках разрыва проведены для

наглядности. **16.60.** \triangleleft Учитывая, что $I_\nu(\alpha x)$ есть решение уравнения $xy'' + y' + \left(\alpha^2 x - \frac{\nu}{x} \right) y = 0$ (см. гл. 12, задача 12.338), т. е. уравнения

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\alpha^2 x - \frac{\nu}{x} \right) y = 0,$$

и полагая $Z_\alpha = I_\nu(\alpha x)$ и $U_l = I_\nu(\mu_l^{(\nu)} x)$, можно записать

$$\frac{d}{dx}(xZ'_\alpha) + \left(\alpha^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) Z_\alpha = 0$$

и

$$\frac{d}{dx}(xU'_l) + \left((\mu_l^{(\nu)})^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) U_l = 0.$$

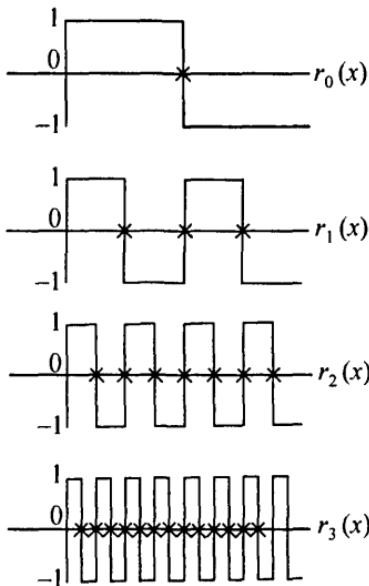


Рис. 51

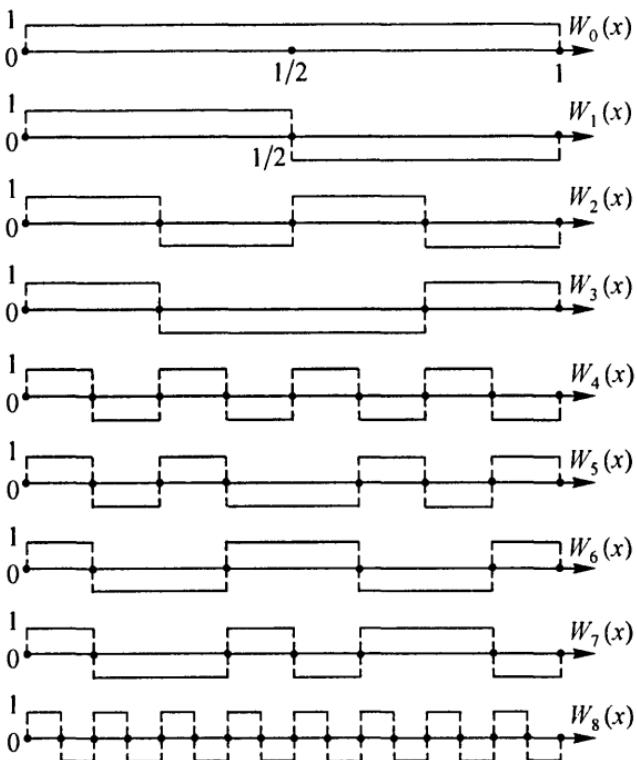


Рис. 52

Умножая первое равенство на U_l , второе на Z_α , вычитая из первого полученного равенства второе и принимая во внимание соотношение

$$U_l \frac{d}{dx}(xZ'_\alpha) - Z_\alpha \frac{d}{dx}(xU'_l) = \frac{d}{dx}(Z_\alpha xU'_l - xU_l Z'_\alpha),$$

получим

$$\frac{d}{dx}(xZ_\alpha U'_l - xU_l Z'_\alpha) + x((\mu_l^{(\nu)})^2 - \alpha^2)Z_\alpha U_l = 0.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до 1 и учитывая, что $\frac{d}{dx}(Z_\alpha) = \frac{d}{dx}I_\nu(\alpha x) = \alpha I'_\nu(\alpha x)$, приходим к равенству

$$((\mu_l^{(\nu)})^2 - \alpha^2) \int_0^1 I_\nu(\mu_l^{(\nu)} x) I_\nu(\alpha x) x dx = -\mu_l^{(\nu)} I_\nu(\alpha) I'_\nu(\alpha) (\mu_l^{(\nu)}).$$

Отсюда при $\alpha = \mu_m^{(\nu)} \neq \mu_l^{(\nu)}$ получаем

$$\int_0^1 I_\nu(\mu_l^{(\nu)} x) I_\nu(\mu_m^{(\nu)} x) x dx = 0,$$

а переходя к пределу при $\alpha \rightarrow \mu_l^{(\nu)}$, найдем

$$\int_0^1 [I_\nu(\mu_l^{(\nu)} x)]^2 x dx = \lim_{\alpha \rightarrow \mu_l^{(\nu)}} \frac{\mu_l^{(\nu)} I_\nu(\alpha) I'_\nu(\mu_l^{(\nu)})}{\alpha^2 - (\mu_l^{(\nu)})^2} = \frac{1}{2} [I'_\nu(\mu_l^{(\nu)})]^2 \neq 0. \quad \triangleright$$

16.61. $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $y_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$. \triangleleft Из общего решения уравнения $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ при $\lambda > 0$ или $y(x) = c_1 x + c_2$ при $\lambda = 0$ и из граничных условий следует, что отличное от тождественного нуля решение этой задачи возможно только при $\lambda < 0$ (системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 l = 0 \end{cases} \text{ имеют нулевое решение}$$

$C_1 = C_2 = 0$). Поэтому полагаем $\lambda = -\omega^2$ и общее решение уравнения запишем в виде $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Из граничных условий следует, что $C_1 = 0$ и $C_2 \sin \omega l = 0$. Это означает, что отличное от тождественного нуля решение задачи возможно только в случае $\sin \omega l = 0$, т. е. при $\omega = \omega_k = \frac{\pi k}{l}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и находим собственные числа. Функции $y_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, являются собственными функциями этой задачи. \triangleright

16.62. $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$, $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $y_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l}$,

$k \in \mathbb{N}$. **16.63.** $\lambda_k = -\left(\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right)^2$, $y_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$, $k \in \mathbb{N}$.

16.64. $\lambda_k = -\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2$, $y_k(x) = \cos x \frac{2k-1}{2l}\pi x$, $k \in \mathbb{N}$. **16.65.** $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2$, $y_k(r) = I_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}r\right)$, где $I_0(r)$ — функция Бесселя порядка

нуль, а $\mu_k^{(0)}$, $k \in \mathbb{N}$, — ее нули, т. е. $I_0(\mu_k^{(0)}) = 0$. \triangleleft Если $\omega = 0$, то получаем уравнение $\frac{1}{r}(ry''(r) + y'(r)) = 0$, или $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ry') = 0$, решая которое,

находим сначала $ry'(r) = c_1$ и, наконец, $y = c_1 \ln r + c_2$. Из ограниченности решения при $r = 0$ следует, что $c_1 = 0$. Используя далее граничное условие $y(R) = 0$, находим, что $c_2 = 0$, т.е. $y(r) \equiv 0$. Последнее означает, что $\omega = 0$ не является собственным числом. Пусть теперь $\omega \neq 0$. Произведем в исходном уравнении замену переменной $\eta = \omega r$. Так как $y'_r = y'_\eta \eta'_r = \omega y'_\eta$, $y''_{rr} = \omega^2 y''_{\eta\eta}$, то уравнение преобразуется к виду

$$\omega^2 \left(y''_{\eta\eta}(\eta) + \frac{1}{\eta} y'_\eta(\eta) + y(\eta) \right) = 0, \quad (*)$$

которое является частным случаем (при $\nu = 0$) уравнения Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0.$$

Следовательно, решением уравнения (*) является функция Бесселя $J_0(\eta)$, т.е. решением исходного уравнения является функция $y(r) = I_0(\omega r)$.

Из граничного условия $y(R) = I_0(\omega R) = 0$ находим, что $\omega R = \mu_k^{(0)}$. Таким образом, собственными значениями нашей задачи являются числа $\lambda_k = \omega_k^2 = \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} \right)^2$, $k \in \mathbb{N}$, а собственными функциями — функции $I_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} r \right)$. **Замечание.** Уравнение

$$y'' + \frac{1}{r} y' - \omega^2 y = 0 \quad (**)$$

заменой $y_1 = -y$ приводится к виду $y_1'' + \frac{1}{r} y_1' + \omega^2 y_1 = 0$, откуда заключаем, что уравнение (**) имеет решение $y = -I_0(\omega r)$, а потому для краевой задачи с уравнением (**) легко находим собственные числа

и собственные функции. **▷ 16.66.** $c_k = \frac{2}{[I'_\nu(\mu_k^{(\nu)})]^2} \int_0^1 f(x) I_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) x dx$,

$k \in \mathbb{N}$. **16.67.** $c_1 = c_3 = 0$, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{8}$. **Указание.** Воспользоваться четностью функции $|x|$ и четностью или нечетностью соответствующих полиномов.

16.68. $c_0 = \pi \int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $c_k = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 f(x) \frac{\cos(k \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $k \in \mathbb{N}$.

16.69. $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = -\frac{1}{8}$, $c_3 = 0$. **16.70.** Указание. Воспользовавшись ортонормированностью функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, записать интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 dx &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k(f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 + \sum_{k=0}^n (c_k - \alpha_k)^2. \end{aligned}$$

16.72. $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 - b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$. **16.73.** Равенство Парсеваля означает, что квадрат модуля вектора равен сумме квадратов всех его координат (в ортонормированном базисе), а неравенство Бесселя — что квадрат модуля вектора не меньше суммы квадратов некоторых из его координат. **16.74.** Указание. Воспользоваться тем фактом, что функции Уолша $W_k(x)$ при $k \neq 2^n$ (см. определение перед задачей 16.58 и задачу 16.59) ортогональны функциям Радемахера $r_m(x) = W_{2m}(x)$.

16.75. $u(x, t) = \frac{1}{8} \cos \frac{3a\pi t}{l} \sin \frac{3\pi}{l} x$.

16.76. $u(x, t) = \frac{l}{15a\pi} \sin \frac{5a\pi t}{l} \sin \frac{5\pi x}{l}$.

16.77. $u(x, t) = \frac{1}{9} \cos \frac{3a\pi t}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l}$.

16.78. $u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(2k+1)at}{l}}{(2k+1)^3} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}$.

16.79. $u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k}{3} \sin \frac{\pi^2 k}{2lh}}{k^2} \sin \frac{\pi k a t}{l} \sin \frac{\pi k x}{l}$.

16.80. $u(x, t) = \frac{16l}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \times$

$$\times \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

$$16.81. u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{2}{(2k+1)(2k-3)} \cos \frac{(2k-1)\pi at}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{4l}{\pi^2 a} \left[-1 + \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} \right] \frac{1}{(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi at}{2l} \right\} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

$$16.82. u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} e^{-\left(\frac{(2m+1)\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{l}.$$

$$16.83. u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{4}}{2k+1} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

$$16.84. u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t + \right. \\ \left. + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t \right) \sin \frac{\pi kx}{l} \sin \frac{\pi ny}{m},$$

где

$$A_{k,n} = \frac{4}{lm} \int_0^m \int_0^l \varphi(v, z) \sin \frac{\pi kv}{l} \sin \frac{\pi nz}{m} dv dz,$$

$$B_{k,n} = \frac{4}{\pi alm \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}} \int_0^m \int_0^l \psi(v, z) \sin \frac{\pi kv}{l} \sin \frac{\pi nz}{l} dv dz,$$

$k, n \in \mathbb{N}$. В случае, когда $\varphi(x, y) = \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$, $\psi(x, y) \equiv 0$ и $a = 1$, $u(x, y, t) = \cos \pi \sqrt{\frac{9}{l^2} + \frac{64}{m^2}} t \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$. \triangleleft Предполагая, что мембрана совершают малые колебания, имеем первую краевую задачу: найти решение $u(x, y, t)$ уравнения свободных колебаний мембранны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, m, t) = 0. \quad (3)$$

Ищем решение в виде произведения

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t),$$

подставив которое в (1), получаем

$$XYT'' = a^2(X''YT + Y''XT).$$

Разделив это равенство на a^2XYT , имеем

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}. \quad (4)$$

Каждое отношение здесь зависит от своей переменной, а потому равенство возможно только в том случае, когда каждое из этих отношений постоянно. Полагая $X''/X = \lambda$, $Y''/Y = \mu$ и используя граничные условия (3), получаем две задачи Штурма–Лиувилля:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (5)$$

$$Y'' - \mu Y = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала задачу (5). Как показано в задаче 16.61, собственными числами задачи (5) являются числа $\lambda_k = -(\pi k/l)^2$, а собственными функциями — функции

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi kx}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Аналогично, собственными значениями задачи (6) являются числа $\mu_n = -(\pi n/m)^2$, $n \in \mathbb{N}$, а собственными функциями — система функций $Y_n(y) = \sin(\pi ny/m)$, $n \in \mathbb{N}$. Подставив в (4) вместо отношений X''/X и Y''/Y их значения $-(\pi k/l)^2$ и $-(\pi n/m)^2$, получим уравнения

$$T'' + \pi^2 a^2 \left[\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{m} \right)^2 \right] T = 0,$$

решениями которых при различных k и n будут функции

$$T_{k,n}(t) = A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{m} \right)^2} t + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{m} \right)^2} t.$$

Таким образом, решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (3), являются функции

$$u_{k,n}(x, y, t) = \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t \right) \sin \frac{\pi kx}{l} \sin \frac{\pi ny}{m}. \quad (8)$$

Из линейности уравнения (1) следует, что и любая линейная комбинация решений (8), т. е. формально составленный двойной ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t + B_{k,n} \sin \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} t \right) \sin \frac{\pi kx}{l} \sin \frac{\pi ny}{m}, \quad (9)$$

при условии возможности его двукратного почлененного дифференцирования также является решением уравнения (2), удовлетворяющим условиям (3). Потребуем, чтобы представленное рядом (9) решение $u(x, y, t)$ удовлетворяло условиям (6), т. е. чтобы

$$u(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{k,n} \sin \frac{\pi kx}{l} \sin \frac{\pi ny}{m} = \varphi(x, y)$$

и

$$u'_t(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{k,n} \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} \sin \frac{\pi kx}{l} \sin \frac{\pi ny}{m} = \psi(x, y).$$

Из этих равенств заключаем, что если числа $A_{k,n}$ являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x, y)$, т. е. если

$$A_{k,n} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m \varphi(v, z) \sin \frac{\pi kv}{l} \sin \frac{\pi nz}{m} dv dz, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

а числа $B_{k,n}\pi a\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}$ — коэффициентами Фурье функции $\psi(x, y)$, т. е. если

$$B_{k,n} = \frac{4}{\pi alm\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}} \int_0^m \int_0^l \psi(v, z) \sin \frac{\pi kv}{l} \sin \frac{\pi nz}{m} dv dz,$$

$$k, n \in \mathbb{N},$$

то ряд (9) является искомым решением задачи 16.84 в общем случае.

Если же $\psi(x, y) = 0$, то все $B_{k,n} = 0$, $k, n \in \mathbb{N}$, а для $\varphi(x, y) = \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{8\pi y}{m}$ имеем $A_{k,n} = 0$ при $(k, n) \neq (3, 8)$ и $A_{3,8} = 1$. \triangleright

16.85. $u(x, y, t) = \frac{l}{\pi a \sqrt{5}} \sin \frac{\pi a \sqrt{5}}{l} t \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi y}{l}$. Указание. Воспользоваться формулами для коэффициентов $A_{k,n}$ и $B_{k,n}$, полученными в задаче 16.84.

$$\begin{aligned} 16.86. u(x, y, t) &= \left(\cos \frac{\pi a \sqrt{2}t}{l} + \frac{16}{\pi^3 \sqrt{2}} \sin \frac{\pi a \sqrt{2}t}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} + \\ &+ \frac{16}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi a \sqrt{(2k+1)^2 + (2n+1)^2}}{l} t}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2 + (2n+1)^2}} \times \\ &\quad \times \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{l}. \end{aligned}$$

Воспользоваться формулами для коэффициентов $A_{k,n}$ и $B_{k,n}$, полученными в задаче 16.84.

$$16.87. u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi ky}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b}} \left[a_k \operatorname{sh} \frac{\pi k(a-x)}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi kx}{b} \right],$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv = \frac{2}{b} \int_0^b v(b-v) \sin \frac{\pi kv}{b} dv = \\ &= \begin{cases} \frac{8b^2}{\pi^3(2m-1)^3} & \text{при } k = 2m-1, \\ 0 & \text{при } k = 2m, m \in \mathbb{N}; \end{cases} \\ b_k &= \frac{2}{b} \int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi ky}{b} dy = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

« Определение стационарного распределения температуры сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ с заданными граничными условиями. Решение ищется в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Тогда имеем уравнения $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \omega^2$ и граничные условия $Y(0) = Y(b) = 0$. Таким образом, задача $Y'' + \omega^2 Y = 0$, $Y(0) = Y(b) = 0$ приводит к собственным функциям (см. задачу 16.61) $Y_k(y) = \sin \frac{\pi k y}{b}$ и собственным числам $-\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Решения уравнений $X'' - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 X = 0$ запишем через гиперболические функции:

$$X_k(x) = a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b}.$$

Тогда решение исходного уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющее всем граничным условиям, запишем в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b} \right) \sin \frac{\pi k y}{b}.$$

Для определения чисел a_k и b_k получаем соотношения

$$u(0, y) = \varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k y}{b}$$

и

$$u(a, y) = \psi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k a}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b} \right) \sin \frac{\pi k y}{b},$$

из которых находим, что

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv = \frac{2}{b} \int_0^b v(b-v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv = \\ &= \begin{cases} \frac{8b^2}{(2m-1)^3 \pi^3} & \text{при } k = 2m-1, \\ 0 & \text{при } k = 2m, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k a}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b \psi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv.$$

Из последнего равенства находим b_k :

$$b_k = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b}} \left[\frac{2}{b} \int_0^b \psi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv - \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv \operatorname{ch} \frac{\pi k a}{b} \right].$$

Подставляя значения a_k и b_k в ряд для $u(x, y)$, получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(b) \sin \frac{\pi k v}{b} dv \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2}{b} \int_0^b \psi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv - \frac{2}{b} \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv \operatorname{ch} \frac{\pi k a}{b} \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b}} \right\} \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi k y}{b} = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^b \varphi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv \left[\operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b} - \operatorname{ch} \frac{\pi k a}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^b \psi(v) \sin \frac{\pi k v}{b} dv \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b} \right\} \frac{\sin \frac{\pi k y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi k a}{b}} \left[a_k \operatorname{sh} \frac{\pi k(a-x)}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b} \right]. \quad \triangleright \end{aligned}$$

$$16.88. u(x, y) = -\frac{b^2}{6a}x + \frac{b^2}{6} + \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{2m\pi(x-a)}{b}}{m^2 \operatorname{sh} \frac{2m\pi a}{b}} \cos \frac{2m\pi y}{b}.$$

Указание. Собственными числами соответствующей задачи Штурма–Лиувилля являются числа $-\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$, $k = 0, 1, \dots$, а соответствующие им собственные функции имеют вид $Y_k(y) = \cos \frac{\pi k y}{b}$, $k = 0, 1, \dots$. Поэтому уравнение $X'' - \left(\frac{\pi k}{6}\right)^2 X = 0$ имеет систему решений $X_0(x) = a_0 x + b_0$ и $X_k(x) = a_k \operatorname{ch} \frac{\pi k x}{b} + b_k \operatorname{sh} \frac{\pi k x}{b}$, $k \in \mathbb{N}$.

16.89. $u(x, y) = \alpha + \frac{\alpha(b-2)}{2a}x -$

$$-\frac{4\alpha b}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2m-1)\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2m-1)\pi a}{b}} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{b}.$$

16.90. $u(r, \varphi, t) = u(r, t) = \alpha \cos \frac{\alpha \mu_1 t}{l} I_0 \left(\frac{\mu_1}{l} r \right) +$

$$+ 2cl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 I_1(\mu_k)} \sin \frac{\alpha \mu_k t}{l} I_0 \left(\frac{\mu_k}{l} r \right).$$

▷ Уравнение $u''_{tt} = a^2 \Delta u$, где $u = u(x, y, t)$ и $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$, в полярных координатах (r, φ) записывается в виде (см. задачу 11.168 при $u(x, y, z, t) = u(x, y, t)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

Начальные условия не зависят от φ , поэтому колебания радиальные, и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (*)$$

Требуется найти решение $u = u(r, t)$, $0 \leq r \leq l$, уравнения (*) при начальных условиях

$$u(r, 0) = \alpha I_0 \left(\frac{\mu_1 r}{l} \right),$$

$$u'_t(r, 0) = ca$$

и граничном условии $u(l, t) = 0$.

Ищем решение в виде произведения $u(r, t) = R(r)T(t)$, подставив которое в (*) получаем:

$$T''R = a^2 \left(TR'' + \frac{1}{r} TR' \right),$$

т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{R''(r) + \frac{1}{r} R'(r)}{R(r)} = \lambda.$$

Отсюда получаем уравнение

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) - \lambda R(r) = 0$$

с граничным условием $R(l) = 0$. Собственными числами этой краевой задачи (см. ответ к задаче 16.65) являются числа $\lambda_k = -\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2$, $k \in N$, а собственными функциями — функции $R_k(r) = I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right)$.

Решая уравнение

$$T_k''(t) + a^3 \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 T_k(t) = 0,$$

получаем

$$T_k(t) = \alpha_k \cos \frac{a\mu_k t}{l} + \beta_k \sin \frac{a\mu_k t}{l}.$$

Следовательно, искомое решение представляется в виде ряда

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{a\mu_k t}{l} + \beta_k \sin \frac{a\mu_k t}{l} \right) I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right).$$

Используя начальные условия, находим

$$u(r, 0) = \alpha I_0\left(\frac{\mu_1}{l}r\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right), \quad (**)$$

$$u'_t(r, 0) = ca = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{a\mu_k}{l} I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right).$$

Из ортогональности с весом $\rho(x) = x$ (см. задачу 16.60) системы $\left\{ I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right), k \in N \right\}$ на промежутке $[0, l]$ и из соотношения $(**)$ имеем $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_k = 0$ при $k \geq 2$.

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \int_0^l I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) I_0\left(\frac{\mu_m}{l}r\right) r dr &= l^2 \int_0^1 I_0(\mu_k v) I_0(\mu_m v) v dv = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} l^2 (I'_0(\mu_k))^2, & m = k, \\ 0, & m \neq k, \end{cases} \end{aligned}$$

находим выражения коэффициентов Фурье–Бесселя γ_k функции $f(r)$ по системе $\left\{ I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right), k \in N \right\}$ на отрезке $[0, l]$ (ср. задачу 16.66):

$$\gamma_k = \frac{2}{l^2 (I'_0(\mu_k))^2} \int_0^1 r f(r) I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) dr, \quad k \in N,$$

а тогда из второго начального условия имеем

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{l}{a\mu_k} \cdot \frac{2}{l^2(I'_0(\mu_k))^2} \int_0^l r \cdot ca \cdot I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) dr = \\ &= \frac{2c}{l\mu_k(I'_0(\mu_k))^2} \int_0^{\mu_k} \left(\frac{l}{\mu_k}\right)^2 v I_0(v) dv = \frac{2cl}{\mu_k^3(I'_0(\mu_k))^2} \int_0^{\mu_k} v I_0(v) dv.\end{aligned}$$

Но (см. задачу 12.335) $vI_0(v) = \frac{d}{dv}(vI_1(v))$ и $I_1(v) = -I'_0(v)$, а потому

$$\int_0^{\mu_k} v I_0(v) dv = \int_0^{\mu_k} \frac{d}{dv}(vI_1(v)) dv = vI_1(v)|_0^{\mu_k} = \mu_k I_1(\mu_k) = -\mu_k I'_0(\mu_k),$$

т. е.

$$\beta_k = -\frac{2cl}{\mu_k^2 I'_0(\mu_k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}u(r, t) &= \alpha \cos \frac{a\mu_1 t}{l} I_0\left(\frac{\mu_1}{l}r\right) - \\ &\quad - 2cl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 I'_0(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k t}{l} I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) = \\ &= \alpha \cos \frac{a\mu_1 t}{l} I_0\left(\frac{\mu_1}{l}r\right) + 2cl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 I_1(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k t}{l} I_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right). \quad \triangleright\end{aligned}$$

16.91. $u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k \cos k\varphi + B_k r^k \sin k\varphi) = \frac{r}{R} \sin \varphi$, где

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{R}, \quad B_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi = 0, \quad k \geq 2.$$

« Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ (u не зависит от z). Решение $u(r, \varphi)$ должно быть ограничено при $0 \leq r \leq R$ и периодично по φ , т. е. $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$. Полагая $u(r, \varphi) = X(r)\Phi(\varphi)$, приходим к уравнениям

$$\frac{\frac{1}{r}X'(r) + X''(r)}{\frac{1}{r^2}X(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda. \quad (*)$$

Решение уравнения $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ должно иметь период 2π , а потому $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, \dots$, и мы имеем

$$\Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi.$$

При $\lambda = k^2$ из левой части (*) получаем уравнение Эйлера

$$r^2X''(r) + rX'(r) - k^2X(r) = 0,$$

которое путем замены $r = e^v$ сводится к уравнению $X''(v) = 0$ при $k = 0$ и к уравнению $X''(v) - k^2X(v) = 0$ при $k \geq 1$, решениями которого будут функции $X_0(v) = a_0v + b_0$, $X_{k,1}(v) = e^{kv} = r^k$ и $X_{k,2}(v) = e^{-kv} = r^{-k}$. При $a_0 \neq 0$ решение $X_0(v)$ не ограничено при $v \rightarrow -\infty$, также не ограничены и решения $X_{k,2}(r) = r^{-k}$ при $0 < r < R$. Следовательно, будем иметь $u_0(r, \varphi) = b_0$, $u_k(r, \varphi) = r^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$. Выберем a_k и b_k так, чтобы функция $u(r, \varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$ удовлетворяла условию $u(R, \varphi) = f(\varphi)$, т. е. чтобы $f(\varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$. Для этого следует выбрать $b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$, $a_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi$, $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \frac{1}{\pi R^k} \times \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi$, $k \in \mathbb{N}$. В нашем случае $f(\varphi) = \sin(\varphi)$, а потому $b_0 = 0$, $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $b_1 = \frac{1}{R}$ и $b_k = 0$ при $k \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 16.92. u(x, t) &= \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m-1)\pi t}{l} - 1}{(2m-1)^5} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{l} = \\
 &= \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m-1)\pi t}{l}}{(2m-1)^5} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{l} - \frac{x}{12}(x^3 - 2x^2l + l^3).
 \end{aligned}$$

Указание. Последнее выражение получено путем двукратного почлененного интегрирования:

$$\int_0^x dx_1 \int_{l/2}^{x_1} v(v-l) dv = -\frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \int_0^x dx_1 \int_{l/2}^{x_1} \sin \frac{(2m-1)\pi v}{l} dv.$$

$$\begin{aligned}
 16.93. u(x, t) &= \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi at}{l} - \frac{at}{l} \cos \frac{\pi at}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} + \\
 &+ \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \left[-\frac{1}{(2m-1)^2} \sin \frac{(2m-1)\pi at}{l} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2m+1} \sin \frac{\pi at}{l} \right] \sin \frac{(2m-1)\pi x}{l}.
 \end{aligned}$$

Указание. При решении системы уравнений $C_k''(t) + \left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 C_k(t) = A_k(t)$, $k = 2m-1$ — нечетные числа, следует учесть, что частота амплитуды внешней силы совпадает с частотой амплитуды первой гармоники, т. е. имеет место резонанс и частное решение следует искать в форме

$$\tilde{C}_1(t) = t \left(\alpha_1 \sin \frac{\pi at}{l} + \beta_1 \cos \frac{\pi at}{l} \right).$$

$$16.94. u(x, t) = \frac{2Ql}{C\rho\pi^2a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} \right] \sin \frac{\pi kx_0}{l} \sin \frac{\pi kx}{l}.$$

$$16.95. u(x, t) = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 t} \right) \sin \frac{\pi x}{4}.$$

$$16.96. u(x, t) = \frac{x}{t} e^{-t} + \frac{2l^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} - e^{-t} \right]}{k[(\pi ka)^2 - l^2]} \sin \frac{\pi kx}{l}.$$

16.97. $u(x, t) = e^{-\frac{t}{4l^2}} +$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)[\pi(2k+1)^2 - 1]} \left[e^{-\frac{t}{4l^2}} - e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}\right)^2 t} \right].$$

16.98. $u(x, t) = \frac{x}{l} \sin \frac{\pi at}{2l} +$

$$+ \frac{1}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{3l+1}{k} \sin \frac{\pi akt}{l} - 2 \sin \frac{\pi at}{2l} \right) \sin \frac{\pi kx}{l}.$$

16.99. $u(x, t) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{l-x}{l} e^{-t} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-\left(\frac{\pi a(2m-1)}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi(2m-1)x}{l} + \\ &+ \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\pi ak+l)(\pi ak-l)} \left(e^{-t} - e^{-\left(\frac{\pi ak}{l}\right)^2 t} \right) \sin \frac{\pi kx}{l}. \end{aligned}$$

16.100. $u(x, t) = e^{-t/l^2} +$

$$+ 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2 t} - e^{-t/l^2}}{(2k-1) \left(\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2 - 1 \right)} \cos \frac{2k-1}{2l} \pi x.$$

16.101. $u(x, t) = \frac{2A}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\omega^2 t} \frac{\sin \omega h}{\omega} \cos \omega x d\omega.$

16.102. $u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega^2 t}}{\omega^2 + 1} \cos \omega x d\omega.$

16.103. $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\omega^2 t} \frac{\sin \frac{\omega h}{2}}{\omega} \left(h \cos \frac{\omega h}{2} - \frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega h}{2} \right) \cos \omega x d\omega.$

16.104. $u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\omega^2 t} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\sin \omega h}{\omega} - h \cos \omega h \right) \sin \omega x d\omega.$

- 16.105.** Первый. **16.106.** Первый. **16.107.** Второй. **16.108.** Второй.
16.109. Второй. **16.110.** Второй, если $\tau = \lambda h$. **16.111.** Первый, если
 $\tau = \lambda h$. **16.112.**

$$\bar{L}_h u_h \equiv \begin{cases} \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\tau} - a^2 \frac{u_{m+1,n+1} - 2u_{m,n+1} + u_{m-1,n+1}}{h^2}, & m = 1, \dots, k-1, n = 0, \dots, s-1, \\ u_{m,0}, & m = 0, \dots, k, \\ u_{0,n}, & n = 0, \dots, s; \\ u_{k,n}, & \end{cases}$$

$$\bar{f}_h \equiv \begin{cases} f_{m,n+1}, & m = 1, \dots, k-1, n = 0, \dots, s-1, \\ \varphi_m, & m = 0, \dots, k, \\ \psi_{1,n}, & n = 0, \dots, s, \\ \psi_{2,n}, & \end{cases}$$

$\bar{L}_h u_h = \bar{f}_h$. Порядок приближения разностным оператором L_h — второй по h и первый по τ . **16.113.** $Lu = u'_x + u'_y$, порядок приближения — первый по h и второй по τ , если $\tau^2 = \lambda h$. **16.114.** $Lu = u''_{xx} + u''_{yy}$, порядок приближения второй. **16.115.** $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{12h}$.

16.116. Разностные схемы могут быть следующими:

$$\bar{L}_h u_h \equiv \begin{cases} \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2}, & m = 1, \dots, k-1, n = 1, \dots, s-1, \\ u_{m,0}, & \\ \frac{u_{m,1} - u_{m,0}}{\tau}, & m = 0, \dots, k, \\ u_{0,n}, & n = 0, \dots, s; \\ u_{k,n}, & \end{cases}$$

$$\bar{L}_h u_h \equiv \begin{cases} \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2}, & m = 1, \dots, k-1, n = 1, \dots, s-1, \\ u_{m,0}, & \\ \frac{u_{m,1} - u_{m,-1}}{2\tau}, & m = 0, \dots, k, \\ u_{0,n}, & n = 0, \dots, s; \\ u_{k,n}, & \end{cases}$$

$$\bar{f}_h \equiv \begin{cases} f_{m,n+1}, & m = 1, \dots, k-1, n = 0, \dots, s-1, \\ \varphi_m, & m = 0, \dots, k, \\ \psi_m, & \\ \psi_{1,n}, & n = 0, \dots, s, \bar{L}_h u_h = \bar{f}_h. \\ \psi_{2,n}, & \end{cases}$$

16.117. $\tau = h, \bar{L}_h u_h \equiv$

$$\equiv \begin{cases} c_{m,n} \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + d_{m,n} \frac{u_{m,n+1} + 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{h^2}, \\ \quad m = 1, \dots, k-1, n = 1, \dots, s-1, \\ u_{m,n}(x_m, y_n) \in \gamma_h; \\ \bar{f}_h \equiv \begin{cases} f_{m,n}, & m = 1, \dots, k-1, n = 1, \dots, s-1, \\ \varphi_{m,n}, & (x_m, y_n) \in \gamma_h. \end{cases} \end{cases}$$

Замечание. В случае данной области разностные уравнения составляются и для точек γ_h . **16.119.** $u_{m+1,n+1} + u_{m-1,n+1} + u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} - 4u_{m,n} = 2h^2 f_{m,n}$. Порядок аппроксимации равен двум.

Указание. $(Lu)_0 = c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4$. В силу симметрии уравнения и симметрии шаблона положить $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = b$.

16.120. \triangleleft По определению аппроксимации имеем (см. соотношение (14))

$$\|\delta f_h\| \leq B h^\sigma, \quad (*)$$

где $\delta \bar{f}_h = \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) - \bar{f}_h$.

Положим $\varepsilon_h(x_m, y_n) = \tilde{u}(x_m, y_n) - \tilde{u}_{m,n}$. Здесь, как и ранее, $\tilde{u}(x, y)$ — решение краевой задачи (1), (2), а $\{\tilde{u}_{m,n}\} = \tilde{u}_h$ — решение разностной схемы (4). В силу линейности оператора \bar{L}_h имеем:

$$\begin{aligned} \bar{L}_h(\varepsilon_h) &= \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n) - \tilde{u}_{m,n}) = \\ &= \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) - L_h(\tilde{u}_{m,n}) = \bar{L}_h(\tilde{u}(x_m, y_n)) - \bar{f}_h = \delta \bar{f}_h, \end{aligned}$$

т. е. сеточная функция $\varepsilon_h(x_m, y_n)$ является решением разностной схемы $\bar{L}_h u_h = \delta \bar{f}_h$. В силу устойчивости этой разностной схемы (соотношение (15)), а также используя неравенство (*), находим:

$$\|\varepsilon_h(x_m, y_n)\| \leq C \|\delta \bar{f}_h\| \leq C B h^\sigma = A h^\sigma,$$

где $A = BC$. Тем самым неравенство (13) установлено, что и доказывает теорему.

16.121. Указание. Для доказательства неустойчивости достаточно рассмотреть разностную схему при некотором выборе правой части \bar{f}_h . Положить $f_{m,n} = 0$ для всех m и n и $\varphi_m = (-1)^m \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Тогда разностная схема запишется в виде:

$$u_{m,n+1} = (1 - \lambda)u_{m,n} + \lambda u_{m+1,n},$$

$$u_{m,0} = (-1)^m \varepsilon.$$

Получить отсюда, что

$$\tilde{u}_{m,n} = (1 - 2\lambda)^n (-1)^m \varepsilon.$$

Затем показать, что

$$\|\tilde{u}_h\| = |1 - 2\lambda|^{[T/(\lambda h)]} \varepsilon.$$

Если $\|\bar{f}_h\| = \max_{-M \leq m \leq M} |\varphi_m| = \varepsilon$, то, следовательно, выполняется равенство

$$\|\tilde{u}_h\| = |1 - 2\lambda|^{[T/(\lambda h)]} \cdot \|\bar{f}_h\|.$$

Сравнивая это равенство и соотношение (15) и учитывая, что

$$|1 - 2\lambda|^{[T/(\lambda h)]} \rightarrow \infty$$

при $h \rightarrow 0$, получаем, что исходная разностная схема неустойчива.

16.122.

$$\bar{L}_h u_h \equiv \begin{cases} A_{m,n} u_{m,n+1} + B_{m,n} u_{m,n-1} + C_{m,n} u_{m+1,n} + \\ \quad + D_{m,n} u_{m-1,n} + E_{m,n} u_{m,n}, \\ n = 1, \dots, s-1, m = 1, \dots, k-1, \\ u_{m,0}, \quad m = 0, \dots, k, \\ u_{m,1}, \\ u_{0,n}, \quad n = 0, \dots, s; \\ u_{k,n}, \end{cases}$$

$$\bar{f}_h \equiv \begin{cases} f_{m,n}, \quad n = 1, \dots, s-1, m = 1, \dots, k-1, \\ \varphi_m, \quad m = 0, \dots, k, \\ \varphi_m + \tau \psi_m, \\ \Phi_n, \quad n = 0, \dots, s, \\ F_n, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= -\frac{b_{m,n}}{\tau^2} + \frac{d_{m,n}}{2\tau}, & B_{m,n} &= -\frac{b_{m,n}}{\tau^2} - \frac{d_{m,n}}{2\tau}, \\ C_{m,n} &= \frac{a_{m,n}}{h^2} + \frac{c_{m,n}}{2h}, & D_{m,n} &= \frac{a_{m,n}}{h^2} - \frac{c_{m,n}}{2h}, \\ E_{m,n} &= -\frac{2a_{m,n}}{h^2} + 2\frac{b_{m,n}}{\tau^2} + g_{m,n}. \end{aligned}$$

16.123.

$$\begin{aligned} \bar{L}_h u_h &\equiv \begin{cases} A_{m,n}u_{m,n+1} + B_{m,n}u_{m,n-1} + C_{m,n}u_{m+1,n} + \\ + D_{m,n}u_{m-1,n} + E_{m,n}u_{m,n}, \\ u_{m,0}, \\ u_{m,1}, \\ u_{0,n}, \\ u_{k,n}. \end{cases} \\ \bar{f}_h &\equiv \begin{cases} f_{m,n}, \\ \varphi_m, \\ \frac{1}{A_{m,0} + B_{m,0}}[f_{m,0} + 2\tau B_{m,0}\psi_m - C_{m,0}\varphi_{m+1} - \\ - D_{m,0}\varphi_{m-1} - E_{m,0}\varphi_m], \\ \Phi_n, \\ F_n, \end{cases} \end{aligned}$$

где значения коэффициентов те же, что и в задаче 16.122. Указание.

Привлекая еще один горизонтальный ряд, соответствующий $n = -1$, производную $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ заменить разностным отношением $\frac{u_{m,1} - u_{m,-1}}{2\tau}$.

Промежуточные значения $u_{m,-1}$ исключить, используя разностное уравнение

$$\begin{aligned} L_h u_h &= A_{m,n}u_{m,n+1} + B_{m,n}u_{m,n-1} + C_{m,n}u_{m+1,n} + \\ &+ D_{m,n}u_{m-1,n} + E_{m,n}u_{m,n} = f_{m,n}. \end{aligned}$$

При исследовании порядка аппроксимации учесть, что порядок аппроксимации уравнения равен двум. Для исследования порядка аппроксимации разностной схемы необходимо определить порядок аппроксимации начальных и граничных условий.

16.124. $A_{m,n}u_{m,n+1} + B_{m,n}u_{m,n-1} + C_{m,n}u_{m+1,n} + D_{m,n}u_{m-1,n} + E_{m,n}u_{m,n} = f_{m,n}$, $m = 1, \dots, k-1$, $n = 1, \dots, s-1$.

$$\begin{aligned} u_{m,0} &= \varphi_m, \\ u_{m,1} &= \varphi_m + \tau\psi_m, \end{aligned} \quad m = 0, \dots, k,$$

$$u_{1,n} = (1 - \delta_{1n}h)u_{0,n} + h\Phi_n, \quad u_{k,n} = \frac{h}{(1 + \delta_{2n}h)}F_n + \frac{u_{k-1,n}}{(1 + \delta_{2n}h)}.$$

Значения коэффициентов те же, что и в задаче 16.122.

16.125. $A_{m,n}u_{m,n+1} + B_{m,n}u_{m,n-1} + C_{m,n}u_{m+1,n} + D_{m,n}u_{m-1,n} + E_{m,n}u_{m,n} = f_{m,n}$, $m = 1, \dots, k-1$, $n = 1, \dots, s-1$, $u_{m,0} = \varphi_m$, $m = 0, \dots, k$.

$$u_{m,1} = \frac{1}{A_{m,0} + B_{m,0}}[f_{m,0} + 2\tau B_{m,0}\psi_m - C_{m,0}\varphi_{m+1} - D_{m,0}\varphi_{m-1} - E_{m,0}\varphi_m],$$

$$A_{0,n}u_{0,n+1} + B_{0,n}u_{0,n-1} + (C_{0,n} + D_{0,n})u_{1,n} + (E_{0n} + 2h\delta_{1n}D_{0,n})u_{0,n} = f_{0,n} + 2hD_{0,n}\Phi_n, \quad (*)$$

$$(A_{0,0} + B_{0,0})u_{0,1} = f_{0,0} + 2\tau B_{0,0}\psi_0 + 2hD_{0,0}\Phi_0 - (C_{0,0} + D_{0,0})\varphi_1 - (E_{0,0} + 2h\delta_{10}D_{0,0})\varphi_0,$$

$$(A_{k,0} + B_{k,0})u_{k,1} = f_{k,0} + 2\tau B_{k,0}\psi_k - 2hC_{k,0}F_0 - (C_{k,0} + D_{k,0})\varphi_{k-1} - (E_{k,0} - 2h\delta_{20}C_{k,0})\varphi_k,$$

$$A_{k,n}u_{k,n+1} + B_{k,n}u_{k,n-1} + (C_{k,n} + D_{k,n})u_{k-1,n} + (E_{k,n} + 2h\delta_{2n}C_{k,n})u_{k,n} = f_{k,n} - 2hC_{k,n}F_n.$$

Схема (*) имеет второй порядок аппроксимации на решении, обладающем ограниченными четвертыми производными. \triangleleft Заменим входящие в начальные и граничные условия производные центральными разностями. Для аппроксимации граничных условий в узлах $(0, n)$ и (k, n) привлечем еще узлы вертикальных рядов, соответствующие $m = -1$ и $m = k + 1$ (см. рис.53), и запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{u_{1,n} - u_{-1,n}}{2h} + \delta_{1n}u_{0,n} &= \Phi_n, \\ \frac{u_{k+1,n} - u_{k-1,n}}{2h} + \delta_{2n}u_{k,n} &= F_n. \end{aligned} \quad (**)$$

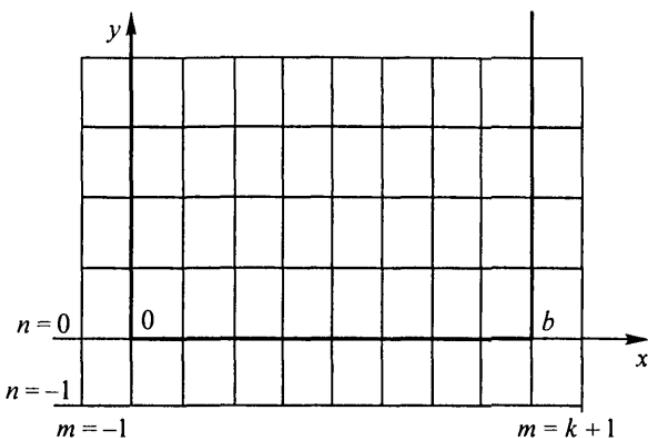


Рис. 53

Разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальное уравнение задачи 16.122 в узлах $(0, n)$ и (k, n) , имеют вид

$$A_{0,n}u_{0,n+1} + B_{0,n}u_{0,n-1} + C_{0,n}u_{1,n} + D_{0,n}u_{-1,n} + E_{0,n}u_{0,n} = f_{0,n},$$

$$A_{k,n}u_{k,n+1} + B_{k,n}u_{k,n-1} + C_{k,n}u_{k+1,n} + D_{k,n}u_{k-1,n} + E_{k,n}u_{k,n} = f_{k,n}.$$

Исключая из этих уравнений $u_{-1,n}$, $u_{k+1,n}$ с помощью выражений (**), получим

$$\begin{aligned} A_{0,n}u_{0,n+1} + B_{0,n}u_{0,n-1} + (C_{0,n} + D_{0,n})u_{1,n} + (E_{0,n} + 2h\delta_{1n}D_{0,n})u_{0,n} = \\ = f_{0,n} + 2hD_{0,n}F_{1,n}, \quad (***) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{k,n}u_{k,n+1} + B_{k,n}u_{k,n-1} + (C_{k,n} + D_{k,n})u_{k-1,n} + \\ + (E_{k,n} - 2h\delta_{2n}C_{k,n})u_{k,n} = f_{k,n} - 2hC_{k,n}F_{2,n}. \end{aligned}$$

Значения решения в узлах $(0, 1)$ и $(k, 1)$ определяются из (***) при $n = 0$. Исключая величины $u_{0,-1}$, $u_{k,-1}$ с помощью начальных условий $\frac{u_{0,1} - u_{0,-1}}{2\tau} = \psi_0$, $\frac{u_{k,1} - u_{k,-1}}{2\tau} = \psi_n$, получим выражения для определения $u_{0,1}$, $u_{k,1}$:

$$\begin{aligned} (A_{0,0} + B_{0,0})u_{0,1} = f_{0,0} + 2\tau B_{0,0}\psi_0 + 2hD_{0,0}\Phi_0 - \\ - (C_{0,0} + D_{0,0})\varphi_1 - (E_{0,0} + 2h\delta_{10}D_{0,0})\varphi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_{k,0} + B_{k,0})u_{k,1} = f_{k,0} + 2\tau B_{k,0}\psi_k - 2hC_{k,0}F_0 - \\ - (C_{k,0} + D_{k,0})\varphi_{k-1} - (E_{k,0} - 2h\delta_{20}C_{k,0})\varphi_k. \quad \triangleright \end{aligned}$$

16.126. Порядок аппроксимации равен двум. Указание. Для замены частных производных u''_{xx} , u''_{yy} использовать разностный оператор из задачи 16.108. Положить $\tau = h$.

16.127. 1)

$$\bar{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{1}{\lambda h} u_{m,n+1} - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) u_{m,n} + \frac{1}{h} u_{m-1,n}, \\ u_{m,0}, \end{cases}$$

$$\bar{f}_h = \begin{cases} f_{m,n}, \\ \varphi_m. \end{cases}$$

2) Шаблон изображен на рис. 54. 4) Схема неустойчива при любом λ .

16.128. 1) $\bar{L}_h u_h =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\lambda h} u_{m,n+1} - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) u_{m,n} - \frac{1}{h} u_{m-1,n}, \\ u_{m,0}. \end{cases} \quad \bar{f}_h = \begin{cases} f_{m,n}, \\ \varphi_m. \end{cases}$$

2) Шаблон тот же, что и в задаче 16.127. 4) Схема устойчива при $\lambda \leq 1$.

16.129. 1) $\bar{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{1}{\lambda h} u_{m,n+1} - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) u_{m,n} + \frac{1}{h} u_{m+1,n}, \\ u_{m,0}, \end{cases}$,

$\bar{f}_h = \begin{cases} f_{m,n}, \\ \varphi_m. \end{cases}$ 2) Шаблон изображен на рис. 55. 4) Схема неустой-

чива при любом λ . **16.130.** Схема устойчива при условии $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$.

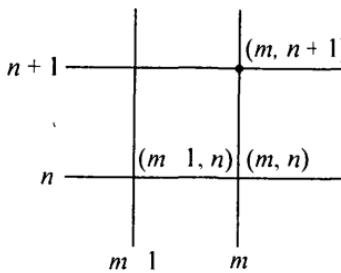


Рис. 54

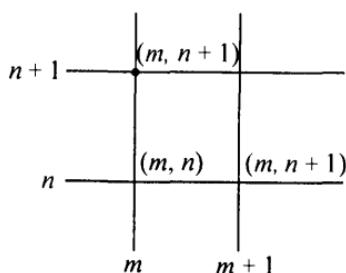


Рис. 55

16.131. Схема устойчива при любых h, τ . **16.132.** Схема устойчива при условии $a\tau \leq h$.

16.133. Схема всегда устойчива. **16.134.** Прогоночные коэффициенты $Q_{1,n} = -\frac{\alpha_{1,n}}{h\beta_{1,n} - \alpha_{1,n}}$, $H_{1,n} = \frac{h\Phi_{1,n}}{h\beta_{1,n} - \alpha_{1,n}}$,

$n = 1, \dots, s$. Значение решения на правой границе, необходимое для обратной прогонки,

$$u_{k,n} = \frac{\alpha_{2,n} H_{k,n} + h\Phi_{2n}}{\alpha_{2,1}(1 - Q_{k,n}) + h\beta_{2,n}}, \quad n = 1, \dots, s.$$

▫ Аппроксимируем граничные условия задачи 16.134 разностными соотношениями

$$\alpha_{1,n} \frac{u_{1,n} - u_{0,n}}{h} + \beta_{1,n} u_{0,n} = \Phi_{1,n}, \quad (*)$$

$$\alpha_{2,n} \frac{u_{k,n} - u_{k-1,n}}{h} + \beta_{2,n} u_{k,n} = \Phi_{2,n}, \quad n = 0, \dots, s. \quad (**)$$

Полагая в формуле (25) $m = 0$, запишем следующее равенство:

$$u_{0,n} = Q_{1,n} u_{1,n} + H_{1,n}, \quad n = 1, \dots, s. \quad (***)$$

Сравнивая равенства (*) и (**), получим начальные значения прогоночных коэффициентов

$$Q_{1,n} = -\frac{\alpha_{1,n}}{h\beta_{1,n} - \alpha_{1,n}}, \quad H_{1,n} = \frac{h\Phi_{1,n}}{h\beta_{1,n} - \alpha_{1,n}}, \quad n = 1, \dots, s.$$

Для обратной прогонки необходимо знать значение решения на правой границе $u_{k,n}$. Для определения этого значения запишем равенство (23) в узле (k, n) :

$$u_{k-1,n} = Q_{k+n} u_{k,n} + H_{k,n}, \quad n = 1, \dots, s. \quad (****)$$

Заметим, что все прогоночные коэффициенты определены по формулам (24). Сравнивая равенства (****) и (**), получим систему линейных уравнений

$$Q_{k,n} u_{k,n} - u_{k-1,n} = -H_{k,n},$$

$$(\alpha_{2,k} + h\beta_{2,k}) u_{k,n} - \alpha_{2,k} u_{k-1,n} = h\Phi_{2,n}.$$

$u_{k,n}$ получим как решение этой системы. ▷

16.135. $h = 0,02; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,2	0,22	0,28	0,82	1,67	2,80	3,98
0,4	0,49	0,48	1,08	1,96	3,10	3,68
0,6	0,82	0,92	1,41	2,33	3,19	3,30
0,8	1,23	1,42	1,82	2,76	3,11	2,79
1,00	1,72	1,97	2,46	2,97	2,88	2,16

16.136. $h = 0,01; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,2	0,20	0,20	0,40	0,60	0,80	0,80
0,4	0,40	0,20	0,39	0,59	0,78	0,60
0,6	0,60	0,39	0,37	0,56	0,54	0,40
0,8	0,80	0,57	0,34	0,49	0,28	0,20
1,00	1,00	0,73	0,47	0,20	0,00	0,00

16.137. $h = 0,02; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	1,00	1,16	1,64	2,44	3,56	5,00
0,2	1,20	2,42	2,94	3,82	5,06	4,90
0,4	1,39	3,73	4,33	5,29	6,57	4,61
0,6	1,56	4,15	5,80	6,82	6,53	4,13
0,8	1,72	4,53	7,31	8,37	6,23	3,48
1,00	1,84	4,91	7,94	8,38	5,74	2,70

16.138. $h = 0,01; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00
0,2	-0,42	-0,03	0,41	0,93	1,53	3,01
0,4	-1,14	-0,08	0,68	1,52	2,44	7,28
0,6	-3,28	-0,14	0,97	2,12	4,18	14,60
0,8	-10,87	-0,51	1,27	2,75	8,14	26,44
1,00	-40,84	-2,30	1,56	4,20	15,18	44,60

16.139. $h = 0,02; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	5,00	6,60	8,20	9,80	11,40	13,00
0,2	5,30	6,79	8,39	9,99	11,59	13,12
0,4	5,65	6,98	8,58	10,17	11,77	13,18
0,6	6,19	7,15	8,74	10,33	11,92	13,18
0,8	7,26	7,32	8,89	10,46	12,04	13,09
1,00	9,61	7,57	9,01	10,57	12,03	12,87

16.140. $h = 0,02; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	1,00	0,80	0,60	0,40	0,20	0,0
0,2	0,98	0,84	0,72	0,58	0,42	0,20
0,4	0,92	0,87	0,81	0,72	0,59	0,39
0,6	0,83	0,88	0,88	0,83	0,73	0,56
0,8	0,70	0,86	0,91	0,92	0,86	0,72
1,00	0,54	0,80	0,92	0,98	0,96	0,84

16.141. $h = 0,02; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00
0,20	-0,17	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
0,40	-0,72	0,04	0,02	0,01	0,00	0,00
0,60	-1,63	0,10	0,04	0,00	0,00	0,00
0,80	0,97	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

16.142. $h = 0,02; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,00	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,2	0,28	0,46	0,83	1,28	1,52	1,27
0,4	0,30	0,42	0,53	0,60	0,54	0,38
0,6	-0,03	0,05	-0,05	-0,24	-0,43	-0,44
0,8	-0,67	-0,61	-0,87	-1,23	-1,47	-1,29
1,0	-1,57	-1,52	-1,90	-2,38	-2,62	-2,21

16.143. $h = 0,01; \tau = 0,01;$

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,00
0,0	0,0	0,59	0,95	0,95	0,59	0,00
0,2	0,50	0,54	0,57	0,58	0,57	0,53
0,4	0,60	0,70	0,88	1,10	1,29	1,31
0,6	2,01	2,51	3,54	4,88	6,08	6,31
0,8	8,05	9,90	13,58	18,31	22,41	23,03
1,00	25,35	30,58	40,44	52,78	63,21	64,34

16.144. $h = 0,02;$

y	x					
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
0,0	1,00	1,40	1,80	2,20	2,60	3,00
0,2	2,00	1,05	0,95	1,06	1,44	2,96
0,4	3,00	1,02	0,60	0,59	0,93	2,84
0,6	4,00	1,36	0,76	0,67	0,93	2,64
0,8	5,00	2,76	2,12	1,81	1,64	2,36
1,00	6,00	5,84	5,36	4,56	3,44	2,00

16.145. $h = 0,02;$

y	x					
	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,20	0,08	0,32	0,51	0,72	0,99	0,84
0,40	0,32	0,72	1,07	1,41	1,78	1,76
0,60	0,72	1,23	1,68	2,12	2,56	2,76
0,80	1,28	1,82	2,65	3,22	3,82	3,84
1,00	2,00	2,44	2,96	3,56	4,24	5,00

16.146. $h = 0,02;$

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,20	1,00	0,24	0,35	1,24	0,0	0,0
0,40	2,00	0,34	0,10	0,82	0,0	0,0
0,60	3,00	0,66	0,19	0,47	1,96	0,0
0,80	4,00	1,92	1,34	1,25	2,04	0,0
1,00	5,00	4,60	4,20	3,80	3,40	3,00

16.147. $h = 0,02$;

y	x					
	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,63	0,89	1,10	1,26	1,41
0,20	1,00	0,36	0,44	0,54	0,64	1,29
0,40	2,00	0,32	0,26	0,28	0,32	1,20
0,60	3,00	0,83	0,66	0,56	0,45	1,12
0,80	4,00	2,86	2,06	1,69	1,19	1,05
1,00	5,00	4,84	4,36	3,56	2,44	1,00

Глава 17

17.1. $U^* = \mathbb{Z}$ **17.2.** $U^* = \{0, 1\}$. **17.3.** $U^* = \left\{ \frac{1}{2k-1}, k \in \mathbb{N} \right\}$.

17.4. $U^* = [-1; 1]$. **17.6.** $f_* = 0$. **17.7.** $f_* = -\infty$. **17.8.** $f_* = -\infty$.

17.9. $f_* = -\pi/2$. **17.10.** $f_* = -\infty$. **17.11.** а) $f_* = -\infty$; б) $f_* = 0$.

17.20. $[-1; 0], [0; 1], [1; 2]$. **17.21.** $b = 2,5$. **17.22.** Да. **17.23.** Указание.

Воспользоваться результатом задачи 17.19. **17.25.** $x^* = 1,4142$,

$f^* = 2,8284$. **17.26.** $x^* = 1,156$, $f^* = 0,6609$. **17.27.** $x^* = 0,6605$,

$f^* = -0,4501$. **17.28.** $x^* = 0,6565$, $f^* = 1,4653$. **17.29.** $x^* = 1,6702$, $f^* =$

$= -33,5064$. **17.30.** $x^* = 1,2963$, $f^* = -1,7557$. **17.31.** $x^* = 0,8241$, $f^* =$

$= -1,6421$. **17.32.** $x^* = 3,3532$, $f^* = -47,1447$. **17.33.** $x^* = 1,8411$, $f^* =$

$= -6,0016$. **17.34.** $\delta_n \leq \frac{M}{2n}(b-a)$. **17.37.** $n \geq \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$. **17.38.** Да.

17.39. $N_d = 32$, $N_p = 100001$; $N_p/N_d = 3125$. Указание. Использовать результат задачи 17.37, полагая $\delta \approx 0$.

17.40. $x^* = 1,2599$, $f^* = 1,8899$. **17.41.** $x^* = -4,4934$, $f^* = -4,8206$. **17.42.** $x^* = 1,6030$,

$f^* = -2,1376$. **17.43.** $x^* = -0,7549$, $f^* = -3,6347$. **17.44.** $x^* =$

$= 0,3822$, $f^* = -3,7491$. **17.45.** $x^* = 1,7556$, $f^* = 2,4154$. **17.46.** $x^* =$

$= 0,3684$, $f^* = 2,4154$. **17.47.** $x^* = 4$, $f^* = -8,9169$. **17.48.** $x^* =$

$= -1,5$, $f^* = -1,6519$. **17.51.** 6) $x_2 - a = b - x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)$.

17.52. $\Delta_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n-1}$. **17.53.** $N_d = 32$, $N_c = 24$; $N_d/N_c =$

$= 1,33$. **17.54.** $x^* = 0,7071$, $f^* = 2,8284$. **17.55.** $x^* = -0,6823$, $f^* =$

$= -0,5814$. **17.56.** $x^* = -2,2340$, $f^* = 61,1806$. **17.57.** $x^* = 0,6488$,

- 17.58.** $x^* = 0,5110$, $f^* = -2,5054$. **17.59.** $x^* = -2,3247$, $f^* = -7,7290$. **17.60.** $x^* = 1,5160$, $f^* = 20,4415$. **17.61.** $x^* = 0$, $f^* = -3$.
- 17.62.** $x^* = 0,7339$, $f^* = 1,6796$. **17.65.** а) $L = 5$; б) $L = 135$.
- 17.67.** $f^* = 1,152 \times 10^{-2}$. **17.68.** $f^* = -10,006$. **17.69.** $f^* = 0,523$.
- 17.70.** $f^* = 2,387$. **17.71.** $f^* = 1,393 \times 10^{-3}$. **17.73.** \triangleleft Уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. По формуле конечных приращений $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$, где ξ заключено между x и x_0 . Поэтому $f(x) - y = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0) \geqslant 0$, так как $f'(x)$ не убывает. \triangleright . **17.76.** $x^* = 1$, $f^* = 1$. **17.77.** $x^* = 0,4502$, $f^* = -0,2325$. **17.78.** $f^* = -0,3855$, $f^* = 0,7852$. **17.79.** $x^* = 0$, $f^* = -1$. **17.80.** $x^* = 0,6501$, $f^* = 1,6951$. **17.81.** $x^* = 0,7035$, $f^* = 3,4422$. **17.82.** $x^* = 3,8708$, $f^* = 1,3702$. **17.83.** $x^* = 0,5283$, $f^* = 0,6675$. **17.84.** $x^* = 0,351734$, $f^* = 0,827184$. **17.85.** $x^* = -0,693147$, $f^* = 0,6137064$. **17.86.** $x^* = -0,835430$, $f^* = -0,879073$. **17.87.** $x^* = 0,738835$, $f^* = 0,284712$. **17.88.** $x^* = -0,175203$, $f^* = 1,908524$. **17.89.** $x^* = -0,443931$, $f^* = 0,765751$.
- 17.91.** Да. **17.92.** Да. **17.93.** Да. **17.94.** Нет. **17.95.** Да. **17.96.** Да. **17.97.** Нет. **17.98.** Да. **17.99.** Да. **17.100.** Нет. **17.107.** $U = \{(x_1, x_2) | x_2 > 0\}$. **17.108.** $U = \{(x_1, x_2) | (2k-1)\pi < x_1 + x_2 < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **17.109.** $U = \mathcal{E}_2$. **17.110.** $U = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 > 0\} \cup \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 < -\sqrt[3]{2}\}$. **17.111.** $a > 0$, $4ac - b^2 > 0$. **17.112.** $a \in (-2; 2)$.
- 17.113.** $Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.
- 17.114.** $Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 17.115.** $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- 17.116.** $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- 17.117.** а) $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0611; -0,1389)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) < f(\mathbf{x}^{(0)})$; б) $\mathbf{x}^{(1)} = (-1,4881; -2,0181)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$; в) $\mathbf{x}^{(1)} = (-3,6945; -4,6945)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) > f(\mathbf{x}^{(0)})$.

- $> f(\mathbf{x}^{(0)})$. **17.118.** а) $\mathbf{x}^{(1)} = (-0,1; -0,1)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) < f(\mathbf{x}^{(0)})$; б) $\mathbf{x}^{(1)} = (-0,5; -0,5)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$; в) $\mathbf{x}^{(1)} = (-1; -1)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) > f(\mathbf{x}^{(0)})$.
- 17.119.** $\mathbf{x}^{(1)} = (-0,1; 0,8; -0,1)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) < f(\mathbf{x}^{(0)})$; б) $\mathbf{x}^{(1)} = (-0,638; -0,276; -0,638)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$; в) $\mathbf{x}^{(1)} = (-10, -19, -10)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) > f(\mathbf{x}^{(0)})$. **17.120.** а) $\mathbf{x}^{(1)} = (-0,1437; 0,4; 0,4)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) < f(\mathbf{x}^{(0)})$; б) $\mathbf{x}^{(1)} = (-1,4323; -0,2761; -0,2761)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$; в) $\mathbf{x}^{(1)} = (-10,4366; -5; -5)$, $f(\mathbf{x}^{(1)}) > f(\mathbf{x}^{(0)})$. **17.122.** Указание. Воспользоваться необходимым условием минимума функции $\Phi_k(\alpha) = f[\mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})]$ в точке α_k : $\Phi'_k(\alpha_k) = 0$.
- 17.123.** $\alpha_0 = 0,5$. **17.124.** $\alpha_0 = 0,333$. **17.125.** $\alpha_0 = 0,113$. **17.126.** $\alpha_0 = 0,25$. **17.127.** $\alpha_0 = 0,236$. **17.128.** $\alpha_0 = 0,119$. **17.129.** $\mathbf{x}^* = (-0,2206; 1,0441)$, $f^* = -5,3309$. **17.130.** $\mathbf{x}^* = (0,3333; 0)$, $f^* = 0,3333$. **17.131.** $\mathbf{x}^* = (0,3846; -0,1923)$, $f^* = -0,4877$. **17.132.** $\mathbf{x}^* = (0,1667; 0,1667)$, $f^* = -0,1667$. **17.133.** $\mathbf{x}^* = (2,55; -0,85)$, $f^* = -21,675$. **17.134.** $\mathbf{x}^* = (0; 0,5)$, $f^* = -0,75$. **17.135.** $\mathbf{x}^* = (0,9677; -6,4516)$, $f^* = -32,2581$. **17.136.** $\mathbf{x}^* = (-0,5; 0)$, $f^* = -0,25$. **17.137.** $\mathbf{x}^* = (-0,1053; 0,0789; -0,0639)$, $f^* = -0,1207$. **17.138.** $\mathbf{x}^* = (-0,1538; 0,1154; 0,3077)$, $f^* = -0,5385$. **17.139.** $\mathbf{x}^* = (-2,6028; -0,0198; 0,1050)$, $f^* = -6,4658$. **17.140.** $\mathbf{x}^* = (-1,5865; 0,3221; 0,2981)$, $f^* = -5,8029$. **17.141.** $\mathbf{x}^* = (-0,1112; -0,0292; 0,0308)$, $f^* = -0,4435$. **17.142.** $\mathbf{x}^* = (-0,5236; 0,2028; -0,1698)$, $f^* = -1,3939$. **17.143.** $\mathbf{x}^* = (-1,2867; 0,2317; -0,2569)$, $f^* = -4,6319$. **17.144.** $\mathbf{x}^* = (-0,0732; -0,2195; 0,6830)$, $f^* = -0,4146$. **17.148.** $\mathbf{x}^* = (0,1; -1; 1)$, $f^* = -3$. **17.149.** $\mathbf{x}^* = (0,2310; -0,3160)$, $f^* = 0,5565$. **17.150.** $\mathbf{x}^* = (-0,7071; 0,7074)$, $f^* = -0,7071$. **17.151.** $\mathbf{x}^* = (-0,7592; -0,4053)$, $f^* = -1,4428$. **17.152.** $\mathbf{x}^* = (0; 0)$, $f^* = 1$. **17.153.** $\mathbf{x}^* = (0,2420; 0,1829)$, $f^* = 1,7814$. **17.154.** $\mathbf{x}^* = (-0,1918; -0,9596)$, $f^* = -2,3843$. **17.155.** $\mathbf{x}^* = (0,7358; -0,8580)$, $f^* = -1,4001$. **17.156.** $\mathbf{x}^* = (0,2400; -0,3267)$, $f^* = -0,4504$. **17.157.** $\mathbf{x}^* = (0; 0)$, $f^* = 0,6931$. **17.158.** $\mathbf{x}^* = (-0,6132; -0,6633)$, $f^* = -1,805$. **17.159.** $\mathbf{x}^* = (-0,3015; -0,6031)$, $f^* = 3,3166$. **17.160.** $\mathbf{x}^* = (-0,2990; 1,4952)$, $f^* = -4,7299$. **17.161.** $\mathbf{x}^* = (1,2248; 0; 1,2248)$, $f^* = 2,4495$. **17.162.** $\mathbf{x}^* = (0; 0,1555; -0,4119)$, $f^* = 0,6949$. **17.163.** $\mathbf{x}^* = (-0,3016; 0,6030; 0)$, $f^* = 3,3166$. **17.164.** $\mathbf{x}^* = (-0,4446; -0,5778; 0,0010)$, $f^* = -0,7668$. **17.165.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 0)$, $f^* = 1$. **17.166.** $\mathbf{x}^* = (0'; 0^\circ; 0)$, $f^* = 2,3863$. **17.167.** $\mathbf{x}^* = (-0,1907;$

$-0,0954; 0,9535)$, $f^* = -2,4321$. **17.168.** $\mathbf{x}^* = (-0,6300; 0; -1,5811)$, $f^* = 1,1087$.

17.169. $\mathbf{x}^* = (0,2300; 0,4600; -0,1150$, $f^* = -0,4131$.

17.170. $\mathbf{x}^* = (1,0610; 0,3539; 0,0011)$, $f^* = 2,8284$. **17.171.** $\mathbf{x}^* = (-0,4041$

$; 0,2235; 0)$, $f^* = 0,6600$. **17.172.** $\mathbf{x}^* = (-0,1912; -0,4081; -0,3602)$, $f^* =$

$3,5056$. **17.173.** $\mathbf{x}^* = (-0,2136; -0,3328; 0)$, $f^* = 1,4461$. **17.174.** $\mathbf{x}^* =$

$= (-0,1154; -1,1544; 0,3463)$, $f^* = -8,3670$.

17.182. $f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$,

$$0,1x_1 + 0,1x_2 \leqslant 2,$$

$$0,1x_1 + 0,3x_2 \geqslant 3,$$

$$0,8x_1 + 0,6x_2 \geqslant 7,2,$$

$$0,8x_1 + 0,6x_2 \leqslant 12,8,$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

17.183. $f(\mathbf{x}) = -3x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$,

$$10x_1 + 70x_2 \leqslant 570,$$

$$20x_1 + 50x_2 \leqslant 420,$$

$$300x_1 + 400x_2 \leqslant 5600,$$

$$200x_1 + 100x_2 \leqslant 3400,$$

$x_1, x_2 \geqslant 0$. Указание. Максимуму прибыли $3x_1 + 8x_2$ соответствует минимум противоположной величины.

17.184. $f(\mathbf{x}) = -626x_1 - 656x_2 \rightarrow \min$,

$$x_1 + x_2 \leqslant 12,$$

$$x_1 \leqslant 8,$$

$$5x_1 + 8x_2 \leqslant 81,$$

$$6x_1 + 4x_2 \leqslant 70,$$

$$3x_1 + x_2 \leqslant 26,$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

17.185. $f(\mathbf{x}) = -c_1x_1 - c_2x_2 \rightarrow \min$,

$$0,4x_1 - 0,6x_2 \geqslant 0,$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b,$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

17.186. $f(\mathbf{x}) = x_1 \sum_{i=1}^8 c_i + x_2 \sum_{i=2}^9 c_i + x_3 \sum_{i=3}^{10} c_i - \sum_{i=1}^{10} c_i b_i \rightarrow \min$,

$$x_1 \geqslant b_1,$$

$$x_1 + x_2 \geqslant b_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant \max_{3 \leqslant i \leqslant 8} b_i,$$

$$x_2 + x_3 \geqslant b_9,$$

$$x_3 \geqslant b_{10},$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3.$$

17.187. $f(\mathbf{x}) = -c_1x_1 - c_2x_2 \rightarrow \min,$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

17.188. $\mathbf{x}^* = (1; 1); f^* = -1.$ **17.189.** $\mathbf{x}^* = (2/3; 2/3); f^* = -8/3.$

17.190. Нет решений. **17.191.** Бесконечное множество решений: $\mathbf{x}^* = (\alpha; 1 - \alpha)$, где $\alpha \in [0; 1]; f^* = 1.$ **17.192.** $\mathbf{x}^* = (1; 2); f^* = -9.$

17.193. $\mathbf{x}^* = (2; 2); f^* = -4.$ **17.194.** Нет решений. **17.195.** Бесконечное множество решений: $\mathbf{x}^* = (2 - \alpha; \alpha + 1)$, где $\alpha \in [0; 1]; f^* = -3.$ **17.196.** $\mathbf{x}^* = (2; 28/3).$ **17.197.** $\mathbf{x}^* = (1; 8).$ **17.198.** $\mathbf{x}^* = (5; 7).$

17.199. $\mathbf{x}^* = (146, 25; 97, 5).$ **17.200.** а) $\mathbf{x}^* = (20; 50);$ б) $\mathbf{x}^* = (30; 40).$

17.201. $\mathbf{x}^* = (4; 1; 7; 0; 0); f^* = -7.$ **17.202.** $\mathbf{x}^* = (5; 6; 5; 0; 0; 13); f^* = 2.$ **17.203.** $\mathbf{x}^* = (1; 0; 4; 0; 7); f^* = 5.$ **17.204.** $\mathbf{x}^* = (0; 2; 1; 0); f^* = 3.$

17.205. Бесконечное множество решений: $\mathbf{x}^* = (6 - 3\alpha; 5 + \alpha; 6 - 6\alpha; 0; 3\alpha; 3 + 4\alpha)$, где $\alpha \in [0; 1]; f^* = -21.$ **17.206.** $\mathbf{x}^* = (1; 2; 0; 3; 14; 0); f^* = -3.$ **17.207.** $\mathbf{x}^* = (1; 0; 2; 0; 2); f^* = -17.$

17.208. Нет решений. **17.209.** $\mathbf{x}^* = (3; 0; 2; 0; 1); f^* = 6.$ **17.210.** Нет решений. **17.211.** $\mathbf{x}^* = (9/2; 0; 0; 3/2; 2); f^* = -25/2.$ **17.212.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 11/10; 12/5; 3/5); f^* = -53/10.$ **17.213.** $\mathbf{x}^* = (2; 0; 1; 0; 1); f^* = -9.$ **17.214.** $\mathbf{x}^* = (5; 2; 0; 0); f^* = -46.$ **17.215.** $\mathbf{x}^* = (1/2; 0; 6; 3/2; 0); f^* = -6,5.$ **17.216.** $\mathbf{x}^* = (0; 1; 3; 1); f^* = 7.$ **17.217.** $\mathbf{x}^* = (1; 0; 3; 3); f^* = 2.$ **17.218.** $\mathbf{x}^* = (1/5; 27/5; 0; 7/5; 0); f^* = -17/5.$

17.219. Нет решений. **17.220.** Нет решений. **17.221.** $\mathbf{x}^* = (0; 2; 4; 1; 0); f^* = -2.$ **17.222.** $\mathbf{x}^* = (3; 0; 0; 4/5); f^* = -36.$ **17.223.** а) $\mathbf{x}^* = (0,8; 8; 0,4; 0);$ б) $\mathbf{x}^* = (5; 0; 6; 0).$ **17.224.** а) $\mathbf{x}^* = (600; 0; 0);$ б) $\mathbf{x}^* = (0; 700; 0).$ **17.225.** $\mathbf{x}^* = (15; 5; 5).$ **17.227.** $\mathbf{x}^* = (13; 3), f^* = -16.$ **17.228.** $\mathbf{x}^* = (1; 2), f^* = -31.$ **17.229.** $\mathbf{x}^* = (2; 1), f^* = -11.$

17.230. Два решения: $\mathbf{x}^* = (2; 0), \mathbf{x}^* = (1; 1); f^* = -2.$ **17.231.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 1; 2), f^* = -1.$ **17.232.** $\mathbf{x}^* = (1; 9; 0; 5), f^* = -9.$ **17.233.** $\mathbf{x}^* = (3; 6).$ **17.234.** $\mathbf{x}^* = (3; 9).$ **17.235.** $\mathbf{x}^* = (2; 0; 1; 0; 5), f^* = -2.$

17.236. $\mathbf{x}^* = (0; 0; 11; 3; 1), f^* = -24.$ **17.237.** $\mathbf{x}^* = (3; 2; 2; 1), f^* = -2.$ **17.238.** $\mathbf{x}^* = (0; 3; 2; 0)$ или $\mathbf{x}^* = (1; 2; 1; 1)$ или $\mathbf{x}^* = (2; 1; 0; 2), f^* = -3.$ **17.239.** $\mathbf{x}^* = (1; 3; 0; 0; 1), f^* = 8.$ **17.240.** $\mathbf{x}^* = (2; 1; 1; 1),$

- $f^* = -11.$ **17.241.** $\mathbf{x}^* = (2; 1; 2; 1)$ или $\mathbf{x}^* = (1; 2; 1; 2)$ или $\mathbf{x}^* = (3; 0; 3; 0)$ или $\mathbf{x}^* = (0; 3; 0; 3)$, $f^* = -3.$ **17.242.** $\mathbf{x}^* = (1; 3; 5; 3)$, $f^* = -5.$ **17.243.** $\mathbf{x}^* = (1; 2; 3)$, $f^* = 10.$ **17.244.** $\mathbf{x}^* = (6; 1; 4)$, $f^* = -17.$ **17.245.** $\mathbf{x}^* = (6; 18)$, $f^* = -78.$ **17.246.** $\mathbf{x}^* = (0; 1; 1)$, $f^* = 3.$ **17.247.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 7)$, $f^* = -21.$ **17.248.** $x_{11} = 76$, $x_{12} = 24$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 200.$ **17.249.** $\mathbf{x}^* = (7; 7).$ **17.250.** а) $\mathbf{x}^* = (146; 97);$ б) $\mathbf{x}^* = (146; 96).$ **17.251.** $\mathbf{x}^* = (3/8; 9)$, $f^* = -717/8.$ **17.252.** $\mathbf{x}^* = (1; 3/2)$, $f^* = -5/2.$ **17.253.** $\mathbf{x}^* = (3; 7/2; 0; 1/2; 3/2)$, $f^* = -17.$ **17.254.** $\mathbf{x}^* = (1; 0; 1/6; 2/3)$, $f^* = -65/6.$ **17.255.** $\mathbf{x}^* = (3; 9).$ **17.256.** а) $\mathbf{x}^* = (146; 292/3);$ б) $\mathbf{x}^* = (293/2; 97).$ **17.258.** $\mathbf{x}^* = (6; 0)$, $f^* = 2.$ **17.259.** $\mathbf{x}^* = (12; 20; 0)$, $f^* = -8/41.$ **17.260.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 2; 4)$, $f^* = -2/3.$ **17.261.** $\mathbf{x}^* = (3/5; 11/5; 0; 1/5)$, $f^* = 5/6.$ **17.262.** $\mathbf{x}^* = (5/2; 11/2; 0; 27; 0)$, $f^* = -21/38.$ **17.263.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 6; 9; 10)$, $f^* = -3.$ **17.264.** $\mathbf{x}^* = (12/5; 23/5; 46/5; 29/5)$, $f^* = -1/91.$ **17.265.** $\mathbf{x}^* = (5; 5; 10; 0; 0; 16)$, $f^* = -4/13.$ **17.266.** Нет решений. **17.267.** $\mathbf{x}^* = (2; 3)$, $f^* = -52.$ **17.268.** $\mathbf{x}^* = (5; 2)$, $f^* = -131.$ **17.269.** $\mathbf{x}^* = (2/3; 14/9)$, $f^* = -22/9.$ **17.270.** $\mathbf{x}^* = (2; 4)$, $f^* = -80.$ **17.271.** $\mathbf{x}^* = (33/13; 4/13; 0)$, $f^* = -273/13.$ **17.272.** $\mathbf{x}^* = (1/2; 1; 9/2; 8)$, $f^* = -7/4.$ **17.273.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 1)$, $f^* = -1.$ **17.274.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 0)$, $f^* = 0.$ **17.275.** $\mathbf{x}^* = (1; 23; 25)/6$, $f^* = 143/12.$ **17.276.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 3)$, $f^* = -6.$ **17.277.** $\mathbf{x}^* = (2; 3)$, $f^* = -13.$ **17.278.** $\mathbf{x}^* = (8; 28/5)$, $f^* = -154,24.$ **17.279.** $\mathbf{x}^* = (5; 8)$, $f^* = -153.$ **17.280.** $\mathbf{x}^* = (10; 4)$, $f^* = -344.$ **17.281.** $\mathbf{x}^* = (29/5; 22/5)$, $f^* = -108,44.$ **17.282.** $\mathbf{x}^* = (7; 8)$, $f^* = -173.$ **17.283.** $\mathbf{x}^* = (10; 5)$, $f^* = 52.$ **17.284.** $\mathbf{x}^* = (1; 2)$, $f^* = -3.$ **17.285.** $\mathbf{x}^* = (2; 4; 8; 16)$, $f^* = -20.$ **17.286.** $\mathbf{x}^* = (0; 10; 0; 30)$, $f^* = -10.$ **17.287.** $\mathbf{x}^* = (3; 8; 13; 4; 14)$, $f^* = -137.$ **17.288.** $\mathbf{x}^* = (0; 0; 0)$, $f^* = 0.$ **17.289.** $\mathbf{x}^* = (0; 1; 0)$, $f^* = -1.$ **17.290.** $\mathbf{x}^* = (1; 0; 0)$, $f^* = -2.$ **17.291.** $\mathbf{x}^* = (-2,683; -1,342)$, $f^* = -4,025.$ **17.292.** $\mathbf{x}^* = (3,578; 1,789)$, $f^* = -37,667.$ **17.293.** $\mathbf{x}^* = (0,447; 0,894)$, $f^* = -1,4.$ **17.294.** $\mathbf{x}^* = (0,791; 1,258)$, $f^* = -2,214.$ **17.295.** $\mathbf{x}^* = (0; 0)$, $f^* = 0.$ **17.296.** $\mathbf{x}^* = (1,005; 0,099)$, $f^* = 9,95.$ **17.297.** $\mathbf{x}^* = (0,618; 0,618)$, $f^* = 4,090.$ **17.298.** $\mathbf{x}^* = (1; 0,5)$, $f^* = -1,75.$ **17.299.** $z_{Uj} = \max(0, z_j)$, $j = 1, \dots, n.$

$$17.300. z_{Uj} = \begin{cases} a_j, & \text{если } z_j < a_j, \\ b_j, & \text{если } z_j > b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ z_j, & \text{если } a_j \leq z_j \leq b_j. \end{cases}$$

$$17.301. z_U = \begin{cases} z, & \text{если } z \in U, \\ \mathbf{x}^{(0)} + R_0(z - \mathbf{x}^{(0)}) / \|z - \mathbf{x}^{(0)}\|, & \text{если } z \notin U. \end{cases}$$

$$17.302. \mathbf{z}_U = \mathbf{z} - [(a, z) - b]a / \|a\|. \quad 17.303. \mathbf{z}_U = \mathbf{z} + \max \{0, b - (a, z)\}a / \|a\|.$$

$$17.304. \mathbf{x}^* = (0; 0), f^* = 0. \quad 17.305. \mathbf{x}^* = (3; 0), f^* = -81. \quad 17.306. \mathbf{x}^* =$$

$$= (4; 2), f^* = -68. \quad 17.307. \mathbf{x}^* = (5; 1), f^* = 11,29. \quad 17.308. \mathbf{x}^* =$$

$$= (3,1056; 1,5528), f^* = 7,764. \quad 17.309. \mathbf{x}^* = (2,1213; 1,8787), f^* =$$

$$= -8,9411. \quad 17.310. \mathbf{x}^* = (1; 1; 1), f^* = 6. \quad 17.311. \mathbf{x}^* = (0,8; 1; 0,4),$$

$$f^* = -8,2. \quad 17.312. \mathbf{x}^* = (0,8; 0,4), f^* = 104,987. \quad 17.313. \mathbf{x}^* = (1; 0,5),$$

$$f^* = 0,5. \quad 17.314. \mathbf{x}^* = (1,5; 0,5), f^* = -8,5. \quad 17.315. \mathbf{x}^* = (2; 1),$$

$$f^* = -16. \quad 17.316. \mathbf{x}^* = (1; 2), f^* = -3. \quad 17.317. \mathbf{x}^* = (3; 1), f^* =$$

$$= 2,3026. \quad 17.318. \mathbf{x}^* = (-0,9487; 0,3162), f^* = -5,3246. \quad 17.319. \mathbf{x}^* =$$

$$= (1,7071; 0,2929), f^* = -9,4858. \quad 17.320. \mathbf{x}^* = (-2,111; 0,8944), f^* =$$

$$= 1,7603. \quad 17.321. \mathbf{x}^* = (1,6; 0,8), f^* = -3,8. \quad 17.322. \mathbf{x}^* = (2; 2),$$

$$f^* = -2,2082. \quad 17.323. \mathbf{x}^* = (2; 3), f^* = -117. \quad 17.324. \mathbf{x}^* = (5; 2), f^* =$$

$$= -51. \quad 17.325. \mathbf{x}^* = (33/13; 4/13; 0), f^* = -7,385. \quad 17.326. \mathbf{x}^* = (2; 4),$$

$$f^* = -30. \quad 17.327. \mathbf{x}^* = (2/3; 14/9), f^* = -2,444. \quad 17.328. \mathbf{x}^* = (0; 1; 1),$$

$$f^* = -1. \quad 17.329. \mathbf{x}^* = (1,258; 0,791), f^* = -2,214. \quad 17.330. \mathbf{x}^* =$$

$$= (2,684; 1,342), f^* = -11,125. \quad 17.331. \mathbf{x}^* = (0,5; 1), f^* = -1,75.$$

$$17.332. \mathbf{x}^* = (0,618; 0,618), f^* = 4,090. \quad 17.333. \mathbf{x}^* = (1,8388; 0,7862),$$

$$f^* = -2,7933. \quad 17.334. \mathbf{x}^* = (0,6667; 0,6667), f^* = -8,1111. \quad 17.335. \mathbf{x}^* =$$

$$= (0,791; 1,258), f^* = -0,214. \quad 17.336. \mathbf{x}^* = (2,530; 1,265), f^* = -14,299.$$

$$17.337. \mathbf{x}^* = (1; 0,5), f^* = -0,75. \quad 17.338. \mathbf{x}^* = (0,8284; 0,4142), f^* =$$

$$= -2,8995. \quad 17.339. \mathbf{x}^* = (3; 4), f^* = 40.$$

$$17.340. J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(u^{(k)}) \rightarrow \max,$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(k)} \in [0; S], \quad k = 1, \dots, N - 1,$$

$$u^{(k)} \in [0; S], \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(0)} = 0; \quad x^{(N)} = S,$$

где $u^{(k)}$ — средства, выделенные k -му предприятию, $x^{(k)}$ — сумма средств, выделенных предприятиям с номерами от 1 до k . **17.341.** См. ответ к задаче 17.340, где $u^{(k)}$ — средства, выделенные предприятию в k -м году, а $\mathbf{x}^{(k)}$ — средства, выделенные ему за первые k лет, $k = 1, \dots, N$.

17.342. $J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \max,$

$$x_1^{(k)} = x^{(k-1)} + u^{(k)}, \quad x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} \cdot u^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x_1^{(k)} \in [0; S], \quad k = 1, \dots, N - 1,$$

$$u^{(k)} \in [0; S], \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 1, \quad x_1^{(N)} = S,$$

где $x_1^{(k)} = \sum_{i=1}^k u^{(i)}$, $x_2^{(k)} = \prod_{i=1}^k u^{(i)}$; $J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) = 0$, $k = 1, \dots, N - 1$,

$$J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}) = x_2^{(N-1)} \cdot u^{(N)}.$$

17.343. $J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N F(u^{(k)}) \rightarrow \max,$

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} - u^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(k)} \geq 0, \quad k = 1, \dots, N - 1,$$

$$u^{(k)} \in [0; Ax^{k-1}], \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(0)} = a, \quad x^{(N)} = 0,$$

где $u^{(k)}$ — количество семян, проданных в k -м году, $x^{(k)}$ — их количество, оставленное в совхозе к концу k -го года, $k = 1, \dots, N$. **17.344.** В ответе задачи 17.343 заменить конечное условие $x^{(N)} = 0$ на условие $x^{(N)} \geq b$.

17.345. $J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N [J_1(u^{(k)}) + J_2(x^{(k-1)} - u^{(k)})] \rightarrow \max,$

$$x^{(k)} = f_1(u^{(k)}) + f_2(x^{(k-1)} - u^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$u^{(k)} \in [0; x^{(k-1)}], \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(0)} = S, \quad x^{(N)} \geq 0,$$

где $x^{(k-1)}$ — средства, перераспределяемые в начале k -го года, $u^{(k)}$ — средства, выделяемые первому предприятию в k -м году.

$$17.346. J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N (\beta_k u_2^{(k)} - \alpha_k u_1^{(k)}) \rightarrow \max,$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + u_1^{(k)} - u_2^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(k)} \in [0; P], \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$u_1^{(k)} \in [0; P - x^{(k-1)}], \quad u_2^{(k)} \in [0; x^{(k-1)} + u_1^{(k)}], \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(0)} = a, \quad x^{(N)} \in [0; P],$$

где $x^{(k-1)}$ — запасы продукции в начале k -го месяца, $u_1^{(k)}$ и $u_2^{(k)}$ — количества продукции, принятой и проданной в начале k -го месяца соответственно.

17.347. В ответе задачи 17.346 заменить ограничения на управлений следующими ограничениями: $u_2^{(k)} \in [0; x^{(k-1)}]$, $u_1^{(k)} \in [0; P - x^{(k-1)} + u_2^{(k)}]$, $k = 1, \dots, N$.

$$17.348. J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N F_k(u^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - a_k u^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(k)} \geq 0, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$u^{(k)} \geq 0, \quad u^{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(0)} = b, \quad x^{(N)} \geq 0,$$

$$\text{где } x^{(k)} = b - \sum_{j=1}^k a_j u^{(j)}.$$

$$17.349. J(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N F_k(u^{(k)}) \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - u^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{x}_i^{(k)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$u^{(k)} \geq 0, \quad u^{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m), \quad x_i^{(N)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\text{где } \mathbf{x}^{(k)} \text{ и } \mathbf{a}^{(k)} \text{ — } m\text{-мерные векторы с компонентами } x_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^k a_{ij} u^{(j)}$$

и $a_i^{(k)} = a_{ik}$ соответственно, $k = 1, \dots, N$.

17.350. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{1, 2, 1, 1, 1\}$, $J^* = 12$.

17.351. Три решения: $\hat{\mathbf{u}}^* = \{0, 2, 1, 1, 1\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{1, 1, 1, 1, 1\}$,

$\hat{\mathbf{u}}^* = \{0, 1, 1, 1, 2\}$, $J^* = 13,5$.

17.352. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{25, 25, 25, 25\}$, $J^* = 44$.

17.353. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{100, 100, 200, 100\}$, $J^* = 226$.

17.354. а) $\hat{\mathbf{u}}^* =$

$\{100, 100, 200, 0\}$, $J^* = 186$; б) $\hat{\mathbf{u}}^* = \{100, 100, 300, 100\}$. Указание. Использовать результаты условной оптимизации, полученные при решении задачи 17.353.

17.355. Семь решений: $\hat{\mathbf{u}}^* = \{100, 0, 200, 100\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{100, 40, 180, 80\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{120, 0, 200, 80\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{120, 0, 180, 100\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{120, 20, 180, 80\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{100, 20, 200, 80\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{100, 20, 180, 100\}$; $J^* = 620$.

17.356. а) $\hat{\mathbf{u}}^* = \{100, 100, 100\}$, $J^* = 300$; б) $\hat{\mathbf{u}}^* = \{114,3; 114,3; 71,4\}$, $J^* = 48,6$.

17.357. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{0, 150, 0\}$, $J^* = 27$.

17.358. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{3, 3, 3\}$, $J^* = 27$.

17.359. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{S/N, S/N, \dots, S/N\}$, $J^* = (S/N)^N$.

17.360. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{0, 0, \dots, aA^N\}$, $J^* = caA^N$.

17.361. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{19,2; 3,84; 0,768\}$, $J^* = 38,402$.

17.362. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{0, 0, \dots, aA^N - b\}$, $J^* = caA^N - cb$.

17.363. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{19,01; 3,802; 7,604\}$, $J^* = 37,638$.

17.364. $\hat{\mathbf{u}}_1^* = \{200, 160, 128, 0\}$, $\hat{\mathbf{u}}_2^* = \{0; 0; 0; 102,4\}$, $J^* = 187,36$, где $\hat{\mathbf{u}}_1^*$ и $\hat{\mathbf{u}}_2^*$ — средства, распределенные первому и второму предприятиям соответственно.

17.365. $\hat{\mathbf{u}}_1^* = \{40; 64; 25,6\}$, $\hat{\mathbf{u}}_2^* = \{80, 0, 0\}$, $J^* = 99,84$.

17.366. $\hat{\mathbf{u}}_1^* = \{10, 0, 10, 0\}$, $\hat{\mathbf{u}}_2^* = \{0, 10, 10, 0\}$, $J^* = 90$.

17.367. $\hat{\mathbf{u}}_1^* = \{7, 0, 12, 4\}$, $\hat{\mathbf{u}}_2^* = \{0, 12, 12, 0\}$, $J^* = 111$.

17.368. $\mathbf{u}^* = (2, 1)$, $F^* = -11$.

17.369. Два решения: $\mathbf{u}^* = \{2, 0\}$, $\mathbf{u}^* = \{1, 1\}$; $F^* = -2$.

17.370. $\mathbf{u}^* = \{1, 2\}$, $F^* = -31$.

17.371. $\mathbf{u}^* = \{0, 0, 7\}$, $F^* = -21$.

17.372. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{2, 1, 1\}$, $J^* = 115$.

17.373. $\hat{\mathbf{u}}^* = \{10, 1, 1\}$, $J^* = 5760$.

17.374. Четыре решения: $\hat{\mathbf{u}}^* = \{2, 3, 4\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{3, 3, 3\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{1, 4, 4\}$, $\hat{\mathbf{u}}^* = \{2, 4, 3\}$; $J^* = 72$.

17.375. $y = \frac{1}{12}(x^3 - x)$.

17.376. Бесконечное множество решений: $y = (C + x) \sin x$, $C \in \mathbb{R}$.

17.377. $y = e/x - \ln x$.

17.378. $y = x^3 - x$.

17.379. Нет решений.

17.380. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - \frac{x}{2}$.

17.381. $y = \operatorname{sh} 2x - \frac{\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x$.

17.382. $y = \frac{1}{2}xe^x - \operatorname{sh} x$.

17.383. $y = e^x - e^{-3x}$.

17.384. $y = \frac{y_1 - \sin b}{\operatorname{sh} b} \operatorname{sh} x + \sin x$.

17.386. Нет решений.

17.387. $y = -x$.

17.388. $y = x$.

17.389. $y = \frac{1}{2}(1 + x)$.

17.390. $y = (2x/3)^{3/2}$.

17.391. $y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$.

17.392. $y = x^{1-n}/(1-n)$.

17.393. $y = \frac{1}{4}(x - x^2)$.

17.394. Два решения: $y = (x + 1)^{2/3}$ и $y = (3x - 1)^{2/3}$.

17.395. $y = \cos x + \sin x - 1$.

17.396. $y = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A$.

17.397. $y = \sqrt{1 - x^2} + 1$.

17.398. $y = \operatorname{ch} \left(x - \frac{1}{2} \right) / \operatorname{ch} \frac{1}{2}$.

17.399. \triangleleft На-

правим ось Oy вертикально вниз. Скорость материальной точки $ds/dt = \sqrt{2gy}$, поэтому время ее движения из точки M_0 в точку M_1 $t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$. Так как подынтегральная функция не зависит явно от x , то уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \text{ или } y(1+y'^2) = C_1. \quad \text{Введем параметр } t, \text{ полагая } y' = \operatorname{ctg} t. \quad \text{Тогда } y = \frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t); \quad dx = \frac{dy}{y'} =$$

$= C_1(1-\cos 2t) dt, x = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2$. Из условия прохождения кривой $y(x)$ через точку $M_0(0, 0)$ находим: $C_2 = 0$. Обозначив $2t$ через t_1 , получим уравнения семейства циклоид: $x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1), y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_1)$.

Таким образом, искомая кривая является циклоидой. Постоянная C_1 может быть найдена из условия ее прохождения через точку $M_1(x_1, y_1)$.

17.400. $y = x(x-1)^2$. **17.401.** $y = x^4$. **17.402.** $y = \frac{1}{10}(x^5 + 3x^3 - 2x^2)$.

17.403. $y = x + \cos x$. **17.404.** $y \equiv 0$. **17.405.** $y = xe^x$.

17.406. $y = \frac{1}{x+1}$. **17.407.** $y = \cos x$. **17.408.** $y = x^4$. **17.409.** $y = \operatorname{sh} x$.

17.410. $y = x - \sin x$. **17.411.** $y = \operatorname{sh} x - \sin x$. **17.412.** $y_1 = \sin x, y_2 = -\sin x$.

17.413. $y_1 = \operatorname{sh} x, y_2 = -\operatorname{sh} x$. **17.414.** $y_1 = \sin x, y_2 = -\sin x$.

17.415. $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$. **17.416.** $y_1 = x^4, y_2 = x^3$. **17.417.** $y_1 = \ln x + 1, y_2 \equiv 0$.

17.418. Бесконечное множество решений: $y_1 = -\frac{x}{2} \sin x - \cos x - C \sin x + x, y_2 = -\frac{x}{2} \sin x + C \sin x, C \in \mathbb{R}$.

17.419. $y_1 = \frac{x^2}{2} + 1, y_2 \equiv 1$.

17.420. $y = -2x, x_1 = 1$. **17.421.** Два решения: $y = \pm 4x, x_1 = \frac{1}{2}$.

17.422. $y = x/\sqrt{2}, x_1 = \sqrt[6]{2}$. **17.423.** $y = -x + 3/4, x_0 = 1/2, x_1 = 23/8$.

17.424. $y = \frac{1}{4}x(1-x)$. **17.425.** $y = (x^2 - 1)/4$. **17.426.** Бесконечное множество решений: $y = C \sin x, C \in \mathbb{R}$.

17.427. Нет решений. **17.428.** $y = \sqrt{2 - (x-1)^2}, x_1 = 2$.

17.429. $y = \left(x - \frac{\pi}{4} - 1\right) \sin x$. **17.430.** $y \equiv 0$.

17.431. $y = \operatorname{sh} x$. **17.432.** $y = e^x + \sin x$.

17.433. Два решения: $y = \sqrt{x+1}$ и $y = \sqrt[6]{\frac{4}{3}x^2}$.

17.434. $y = \ln x + 1$. **17.435.** $y = -e^x/(e^3 + 1)$.

- 17.436.** $y = 2 \ln(x + 1)$. **17.437.** $y = \sin x + \cos x$. **17.438.** $y_1 = \cos x + \sin x$, $y_2 = \cos x - \sin x$. **17.439.** $y_1 = (x - 2)e^{-x}$, $y_2 = (1 - x)e^{-x}$. **17.440.** $y_1 = 2 - x$, $y_2 = x + 1$. **17.441.** $y_1 = x^2 + x$, $y_2 = x^2 - x$. **17.442.** Нет решений. **17.443.** $y_1 = \frac{x}{2} \sin x$, $y_2 = \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x)$. **17.444.** $y_1 = x^2 + \cos x + \sin x$, $y_2 = x^2 - \cos x - \sin x$. **17.445.** Бесконечное множество решений: $y_1 = \psi(x)$, $y_2 = x - \psi(x) + y_2^{(0)} + y_1^{(0)} - a$, где $\psi(x) \in C_1[a; b]$, если $y_2^{(1)} - y_1^{(1)} - (y_2^{(0)} - y_1^{(0)}) = b - a$; нет решений при $y_2^{(1)} - y_1^{(1)} - (y_2^{(0)} - y_1^{(0)}) \neq b - a$. **17.446.** $y = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. **17.447.** $y = 60x^3 - 96x^2 + 36x$. **17.448.** $y = (x - 2 \sin x)/\pi$. **17.449.** Два решения: $y = x + \sin x$, $y = x - \sin x$. **17.450.** $y = xe^{-x}$. **17.451.** $y_1 = -6x^2 + 6x$, $y_2 = 3x^2 - 2x$. **17.452.** Два решения: $y_1 = 3x^2 - 2x$, $y_2 = 3x^2 - 6x$ и $y_1 = -3x^2 + 4x$, $y_2 = -3x^2$. **17.453.** $y_1 \equiv 0$, $y_2 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. **17.454.** Бесконечное множество решений: $y_1 = 2 \sin k\pi x$, $y_2 = -2 \sin k\pi x$, $k \in \mathbb{Z}$. **17.455.** Два решения: $y_1 = 3x - x^3$, $y_2 = x^3 - x$ и $y_1 = x^3 + x$, $y_2 = -x^3 + x$. **17.456.** $y_2^*(x) = x(2 - x)(-1,3551 + 0,303x)$. Указание. Искать решение $y_2(x) = x(2 - x)(C_1 + C_2x)$. **17.457.** $y_1^*(x) = 0,3215(x - 1)(x - 2)$. Указание. Решение искать в виде $y_1(x) = C_1(x - 1)(x - 2)$. **17.458.** $y_2^*(x) = x(1 - x)(0,192 + 0,171x)$. Указание. Решение искать в виде $y_2(x) = x(1 - x)(C_1 + C_2x)$. **17.459.** $u_3^*(x, y) = x^2 + y^2 + xy(1 - x - y)(3,0401 - 0,0562x(1 + x))$. Указание. Решение искать в виде $u_3(x, y) = x^2 + y^2 + C_1xy(1 - x - y) + C_2x^2y(1 - x - y) + C_3x^3y(1 - x - y)$. **17.460.** $u_1^*(x, y) = 0,0037(x^2 - 4)(y^2 - 4)$. Указание. Решение искать в виде $u_1(x, y) = C_1(x^2 - 4)(y^2 - 4)$. **17.461.** $y_2^*(x) = x(x - 1)(0,1708 + 0,1744x)$, $y_3^* = x(x - 1)(0,1705 + 0,176x - 0,002x^2)$. Указание. Решения искать в виде $y_2(x) = x(x - 1)(C_1 + C_2x)$, $y_3(x) = x(x - 1)(C_1 + C_2x + C_3x^2)$. В заданных точках значения y_2^* и y_3^* совпадают с точностью до 0,0001. **17.462.** $u_1^*(x, y) = 0,3125(x^2 - 1)(y^2 - 1)$. Указание. Решение искать в виде $u_1(x, y) = C_1(x^2 - 1)(y^2 - 1)$. **17.463.** $u_1^*(x, y) = 0,3125xy(x - 1)(y - 1)$. Указание. Решение искать в виде $u_1(x, y) = 0,3125xy(x - 1)(y - 1)$. **17.464.** $y(x) = x(2 - x)/4$. **17.465.** $y(x) = x(1 - x)(0,140 - 0,144x)$. **17.466.** $y(x) = x(1 - x)(-0,655 - 0,277x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
2. Кузин Л. Т. Основы кибернетики. — Т. I: Математические основы кибернетики. — М.: Энергия, 1973.
3. Ефимов А. В. Математический анализ (специальные разделы). — Ч. I: Общие функциональные ряды и их приложения. — М.: Высшая школа, 1980.
4. Ефимов А. В., Золотарев Ю. Г., Терпигорева В. М. Математический анализ (специальные разделы). — Ч. II: Применение некоторых методов математического и функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1980.
5. Гачев Э. М., Кущириенко А. Г., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимальному управлению. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
6. Колихман И. Л., Войтенко М. А. Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1979.
7. Очан Ю. С. Методы математической физики. — М.: Высшая школа, 1965.
8. Очан Ю. С. Сборник задач по методам математической физики. — М.: Высшая школа, 1967.
9. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1972.
10. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1964.
11. Смирнов М. М. Задачник по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1968.
12. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
13. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
14. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989.
15. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. — М.: Наука, 1975.
16. Краснов М. Л., Киселев А. Н., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

3

- ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ
- РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ
- ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
- ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
- ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
- УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
- МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

