ные могут иметь довольно сильные особенности. Поэтому для таких задач классические постановки уже оказываются недостаточными. Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться (частично или полностью) от требований гладкости решения в области или вплоть до границы, вводить так называемые *обобщенные решения*. Но тогда встает вопрос о том, какие функции можно называть решениями уравнения. Чтобы сделать это, необходимо существенно обобщить понятие производной и вообще понятие функции, т. е. ввести так называемые *обобщенные функции*. Изучению этого вопроса целиком посвящается следующая глава.

ГЛАВА II

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Обобщенные функции впервые в науку были введены П. Дираком [1] в его квантомеханических исследованиях, в которых систематически использовалась знаменитая δ-функция. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С. Л. Соболевым ([2], 1936 г.) и Л. Шварцем ([2], 1950—1951 гг.). В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась многими математиками. Быстрое развитие теории обобщенных функций стимулировалось главным образом потребностями математической физики, в особенности теории дифференциальных уравнений и квантовой физики. В настоящее время теория обобщенных функций далеко продвинута вперед, имеет многочисленные применения в физике и математике и прочно вошла в обиход математика, физика и инженера *).

§ 5. Основные и обобщенные функции

1. Введение. Обобщенная функция является обобщением классического понятия функции. Это обобщение, с одной стороны, дает возможность выразить в математической форме такие идеализированные понятия, как, например, плотность материальной точки, плотность точечного заряда или диполя, плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность силы, приложенной в точке, и т. д. С другой стороны, в понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя, например, измерить плотность вещества в точке, а можно измерить лишь

*) См. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов и И. Т. Тодоров [1], И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов [1], В. С. Владимиров [2, 3], Р. Стритер, А. Вайтман [1], Р. Йост [1], Г. Бремерман [1], Л. Шварц [1], Л. Хёрмандер [1].

его среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки и объявить это плотностью в данной точке; грубо говоря, обобщенная функция определяется своими «средними значениями» в окрестностях каждой точки.

Чтобы пояснить сказанное, попытаемся определить плотность, создаваемую материальной точкой массы 1. Считаем, что эта точка совпадает с началом координат.

Чтобы определить эту плотность, распределим (или, как говорят, размажем) массу 1 равномерно внутри шара U_ε. В результате получим среднюю плотность

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x|<\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon.\end{cases}$$

Примем сначала в качестве искомой плотности (мы ее обозначим через $\delta(x)$) поточечный предел последовательности средних плотностей $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to 0$, т. е.

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{если } x=0,\\ 0, & \text{если } x\neq 0.\end{cases} \qquad (1)$$

От плотности δ естественно требовать, чтобы интеграл от нее по любому объему V давал бы массу вещества, заключенного в этом объеме, т. е.

$$\int_V \delta(x)\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } 0\in V,\\ 0, & \text{если } 0\,\overline{\in}\, V.\end{cases}$$

Но, в силу (1), левая часть этого равенства всегда равна нулю. Полученное противоречие показывает, что поточечный предел последовательности $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon\to 0$, не может быть принят в качестве плотности $\delta(x)$.

Вычислим теперь *слабый предел* последовательности функций $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon\to 0$, т. е. для любой непрерывной функции φ найдем предел числовой последовательности $\int f_\varepsilon\varphi\,dx$ при $\varepsilon\to 0$ (см. § 1.10).

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(0).$$

Действительно, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ для любого $\eta>0$ существует такое $\varepsilon_0>0$, что $|\varphi(x)-\varphi(0)|<\eta$, коль скоро $|x|<\varepsilon_0$. Отсюда при всех $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ получаем

$$\left|\int f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx-\varphi(0)\right|=\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\left|\int_{|x|<\varepsilon}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int_{|x|<\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx<\eta\,\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int_{|x|<\varepsilon}dx=\eta,$$

что и утверждалось.

Таким образом, слабым пределом последовательности функций $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon\to 0$, является функционал $\varphi(0)$, сопоставляющий каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(0)$ — значение ее в точке $x=0$. Вот этот-то функционал и принимается за определение плотности $\delta(x)$; это и есть известная *δ-функция Дирака.*

Итак, $f_\varepsilon(x)\to\delta(x)$, $\varepsilon\to 0$, в том смысле, что для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ справедливо предельное соотношение

$$\int f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx\to(\delta,\ \varphi),\quad \varepsilon\to 0,$$

где символ $(\delta,\ \varphi)$ обозначает число $\varphi(0)$ — значение функционала δ на функции φ.

Чтобы восстановить теперь полную массу, нужно подействовать функционалом (плотностью) $\delta(x)$ на функцию $\varphi(x)=1$, $(\delta,\ 1)=1(0)=1$.

Если в точке $x=0$ сосредоточена масса m, то соответствующую плотность следует считать равной $m\delta(x)$. Если масса m сосредоточена в точке x_0, то ее плотность естественно считать равной $m\delta(x-x_0)$, где $(m\delta(x-x_0),\ \varphi)=$ $=m\varphi(x_0)$. И вообще, если в различных точках x_k, $k=$ $=1,\ 2,\ \ldots,\ N$, сосредоточены массы m_k, то соответствующая плотность равна

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\delta(x-x_k).$$

Таким образом, плотность, создаваемая материальными точками, не может быть описана в рамках классического понятия функции, и для ее описания следует привлекать объекты более общей математической природы — линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции).

2. Пространство основных функций $\mathscr{D}$. Уже́ на примере δ-функции видно, что она определяется посредством непрерывных функций как линейный непрерывный функционал на этих функциях (см. § 1.10). Непрерывные функции, как говорят, являются *основными функциями* для δ-функции. Эта точка зрения и берется за основу определения произвольной обобщенной функции как линейного непрерывного функционала на пространстве достаточно «хороших» (основных) функций. Ясно, что чем у́же пространство основных функций, тем больше существует линейных непрерывных функционалов на нем. С другой стороны, запас основных функций должен быть достаточно велик. В этом пункте введем важное пространство основных функций $\mathscr{D}$.

Отнесем к множеству *основных функций* $\mathscr{D}=\mathscr{D}(R^n)$ (см. § 1.2) все *финитные бесконечно дифференцируемые в R^n функции.* Сходимость в $\mathscr{D}$ определим следующим образом. Последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из $\mathscr{D}$ сходится к функции φ (из $\mathscr{D}$), если: a) существует такое число $R>0$, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset U_R$; b) при каждом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$$D^\alpha\varphi_k(x) \overset{x\in R^n}{\rightrightarrows} D^\alpha\varphi(x), \quad k\to\infty.$$

В этом случае будем писать: $\varphi_k\to\varphi$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}$.

Линейное множество $\mathscr{D}$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством основных функций $\mathscr{D}$.*

Операция дифференцирования $D^\beta\varphi(x)$ непрерывна из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$.

Действительно, если $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}$, то a) $\varphi_k(x)=0$, $|x|>R$ при некотором $R>0$ и b) при каждом α

$$D^\alpha\varphi_k(x) \overset{x}{\rightrightarrows} 0, \quad k\to\infty.$$

Но тогда: a) $\operatorname{supp} D^\beta\varphi_k \subset \bar{U}_R$; b) при каждом α

$$D^\alpha[D^\beta\varphi_k(x)] = D^{\alpha+\beta}\varphi_k(x) \overset{x}{\rightrightarrows} 0,$$

если $k\to\infty$, что, в силу определения сходимости в $\mathscr{D}$, и означает, что $D^\beta\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}$. Это и значит, что оператор D^β непрерывен из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$ (см. § 1.10).

Аналогично, *операции неособенной линейной замены переменных $\varphi(Ay+b)$ и умножения на функцию $a\in C^\infty(R^n)$, $a(x)\varphi(x)$, непрерывны из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$.*

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области G, обозначим через $\mathscr{D}(G)$; таким образом,

$$\mathscr{D}(G)\subset\mathscr{D}(R^n)=\mathscr{D}.$$

В связи с приведенным определением возникает вопрос: существуют ли основные функции, отличные от тождественного нуля? Ясно, что такие функции не могут быть

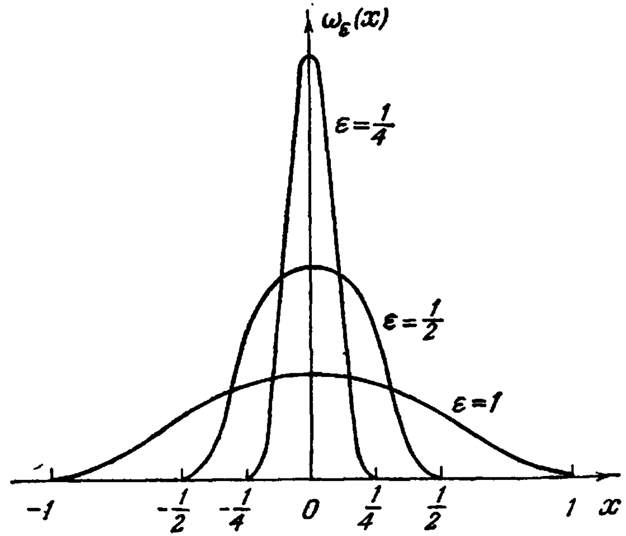

Рис. 15.

аналитическими в R^n (см. § 4.8). Примером основной функции, отличной от нулевой, является «шапочка» (рис. 15)

$$\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}}, & |x|\le\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon.\end{cases}$$

Постоянную C_ε выберем так, чтобы

$$\int\omega_\varepsilon(x)\,dx=1,$$

т. е.

$$C_\varepsilon\varepsilon^n\int_{U_1} e^{-\frac{1}{1-|\xi|^2}}\,d\xi=1.$$

Легко проверить, что

$$\omega_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\,\omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Следующая лемма дает другие многочисленные примеры основных функций.

Лемма 1. *Для любой области G и любого числа $\varepsilon>0$ существует функция $\eta\in C^\infty(R^n)$ такая, что*

$$0\leqslant\eta(x)\leqslant 1;\quad \eta(x)=1,\quad x\in G_\varepsilon;\quad \eta(x)=0,\quad x\,\overline{\in}\,G_{3\varepsilon}.$$

(График функции $\eta(x)$ при $G=(a,\ b)$ изображен на рис. 16.)

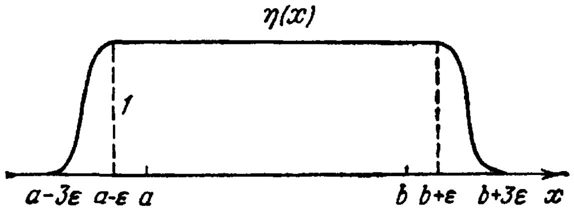

Рис. 16.

Доказательство. Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция множества $G_{2\varepsilon}$: $\chi(x)=1$, $x\in G_{2\varepsilon}$; $\chi(x)=0$, $x\,\overline{\in}\,G_{2\varepsilon}$. Тогда функция

$$\eta(x)=\int\chi(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy$$

обладает требуемыми свойствами. Действительно, так как $\omega_\varepsilon\in\mathscr{D}$, $0\leqslant\omega_\varepsilon(x)$, $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon=\overline{U}_\varepsilon$, $\int\omega_\varepsilon(x)\,dx=1$, то (рис. 17)

$$\eta(x)=\int\limits_{G_{2\varepsilon}}\omega_\varepsilon(x-y)\,dy\in C^\infty(R^n);$$

$$0\leqslant\eta(x)\leqslant\int\omega_\varepsilon(x-y)\,dy=\int\omega_\varepsilon(\xi)\,d\xi=1;$$

$$\eta(x)=\int\limits_{U(x;\,\varepsilon)}\chi(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{U(x;\,\varepsilon)}\omega_\varepsilon(x-y)\,dy=\int\omega_\varepsilon(\xi)\,d\xi=1, & x\in G_\varepsilon;\\ 0, & x\,\overline{\in}\,G_{3\varepsilon}.\end{cases}$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает следствие: *если область G ограничена и $G'\Subset G$, то существует функция $\eta\in\mathscr{D}(G)$ такая, что $0\leqslant\eta\leqslant 1$ и $\eta(x)\equiv 1$, $x\in G'$.*

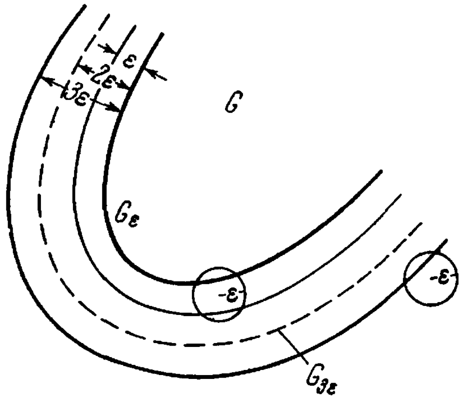

Рис. 17

Следующая лемма утверждает, что запас основных функций достаточно велик.

Лемма 2. *Множество $\mathscr{D}(G)$ плотно в $\mathscr{L}_2(G)$.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathscr{L}_2(G)$ и $\varepsilon>0$ — любое число. В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. § 1.4, е)) существует такая область $G'\Subset G$, что

$$\int\limits_{G\setminus G'}|f(x)|^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{5}. \tag{2}$$

Так как множество полиномов плотно в $\mathscr{L}_2(G')$ (см. § 1.7), то существует полином P такой, что

$$\int\limits_{G'}|f(x)-P(x)|^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{5}. \tag{2'}$$

Теперь выберем подобласть $G''\Subset G'$, настолько близкую к области G', чтобы

$$\int\limits_{G'\setminus G''}|P(x)|^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{5}. \tag{2''}$$

Возьмем функцию η из $\mathscr{D}(G')$ такую, что $0\leqslant\eta\leqslant 1$ $\eta(x)=1$, $x\in G''$ (по следствию из леммы 1 такие функции существуют). Тогда $P\eta\in\mathscr{D}(G)$ и, в силу неравенств (2), (2′) и (2″),

$$\|f-P\eta\|^2=\int\limits_G|f-P\eta|^2\,dx=\int\limits_{G'}|f-P\eta|^2\,dx+\int\limits_{G\setminus G'}|f|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^2}{5}+2\int\limits_{G'}|f-P|^2\,dx+2\int\limits_{G'}|P-P\eta|^2\,dx<$$

$$<\frac{3}{5}\varepsilon^2+2\int\limits_{G'\setminus G''}|P|^2\,dx<\varepsilon^2,$$

что и требовалось.

3. Пространство обобщенных функций $\mathscr{D}'$. *Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathscr{D}$.* В соответствии с обозначениями § 1.10 значение функционала (обобщенной функции) f на основной функции φ будем записывать (f, φ). Обобщенную функцию f будем также формально записывать в виде $f(x)$, подразумевая под x аргумент основных функций, на которые действует функционал f.

Расшифруем определение обобщенной функции f.

1) Обобщенная функция f есть *функционал* на $\mathscr{D}$, т. е. каждой $\varphi \in \mathscr{D}$ сопоставляется (комплексное) число (f, φ).

2) Обобщенная функция f есть *линейный* функционал на $\mathscr{D}$, т. е. если $\varphi \in \mathscr{D}$, $\psi \in \mathscr{D}$ и λ, μ — комплексные числа, то

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

3) Обобщенная функция f есть *непрерывный* функционал на $\mathscr{D}$, т. е. если $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$, то $(f, \varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$.

Обозначим через $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(R^n)$ множество всех обобщенных функций.

Множество $\mathscr{D}'$ — линейное, если линейную комбинацию $\lambda f + \mu g$ обобщенных функций f и g определить как функционал, действующий по формуле

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Проверим, что функционал $\lambda f + \mu g$ — линейный и непрерывный на $\mathscr{D}$, т. е. принадлежит $\mathscr{D}'$. Действительно, если $\varphi \in \mathscr{D}$, $\psi \in \mathscr{D}$ и α, β — любые комплексные числа, то по определению,

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lambda(f, \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu(g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ &= \alpha[\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)] + \beta[\lambda(f, \psi) + \mu(g, \psi)] = \\ &= \alpha(\lambda f + \mu g, \varphi) + \beta(\lambda f + \mu g, \psi)\end{aligned}$$

и потому этот функционал — линейный. Непрерывность его следует из непрерывности функционалов f и g: если $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$, то

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Определим сходимость в $\mathscr{D}'$ как *слабую сходимость* последовательности функционалов (см. § 1.10): последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ из $\mathscr{D}'$ сходится к обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'$, если для любой $\varphi \in \mathscr{D}$ $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$, $k \to \infty$. В этом случае мы будем писать $f_k \to f$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}'$. Линейное множество $\mathscr{D}'$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством обобщенных функций* $\mathscr{D}'$.

Замечание. Линейные функционалы на $\mathscr{D}$ не обязаны быть непрерывными на $\mathscr{D}$. Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на $\mathscr{D}$; можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

4. Полнота пространства обобщенных функций $\mathscr{D}'$. Весьма важным является свойство полноты пространства $\mathscr{D}'$.

Теорема. *Пусть последовательность $f_1, f_2, \ldots$ из $\mathscr{D}'$ такова, что для каждой $\varphi \in \mathscr{D}$ числовая последовательность (f_k, φ) сходится при $k \to \infty$. Тогда функционал f на $\mathscr{D}$, определенный равенством*

$$(f, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D},$$

также является линейным и непрерывным на $\mathscr{D}$, т. е. $f \in \mathscr{D}'$.

Доказательство*). Линейность предельного функционала доказывается просто:

$$\begin{aligned}(f, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lim_{k \to \infty} (f_k, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ &= \alpha \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi) + \beta \lim_{k \to \infty} (f_k, \psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi), \\ &\qquad \varphi, \psi \in \mathscr{D}.\end{aligned}$$

Докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$ в $\mathscr{D}$; нам нужно доказать, что $(f, \varphi_\nu) \to 0$, $\nu \to \infty$ (см. § 5.3). Допуская противное и переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что при всех $\nu = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство $|(f, \varphi_\nu)| \geqslant 2a$ при некотором $a > 0$. Так как

$$(f, \varphi_\nu) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi_\nu),$$

*) Это элементарное доказательство взято из книги Г. Е. Шилова [1], § 9.

то для каждого $\nu=1, 2, \ldots$ найдется такой номер k_ν, что $|(f_{k_\nu}, \varphi_\nu)| \geqslant a$. Но это невозможно в силу леммы, следующей ниже. Полученное противоречие и доказывает непрерывность функционала f. Теорема доказана.

Лемма. *Пусть последовательность функционалов $f_1, f_2, \ldots$ из $\mathscr{D}'$ удовлетворяет условиям теоремы и последовательность основных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из $\mathscr{D}$ стремится к 0 в $\mathscr{D}$. Тогда $(f_k, \varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда, перейдя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $|(f_k, \varphi_k)| \geqslant c > 0$. Сходимость φ_k к 0 в $\mathscr{D}$ означает, что a) $\varphi_k(x)=0$, $|x|>R$ при некотором $R>0$; b) при каждом α

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x}{\rightrightarrows} 0, \qquad k \to \infty.$$

Поэтому, переходя, если нужно, опять к подпоследовательности, можно считать, что

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{4^k}, \qquad |\alpha| \leqslant k = 0, 1, \ldots$$

Положим $\psi_k = 2^k \varphi_k$; тогда

$$|D^\alpha \psi_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^k}, \qquad |\alpha| \leqslant k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

$\psi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$ и любой ряд вида $\sum\limits_\nu \psi_{k_\nu}(x)$ сходится в $\mathscr{D}$; в то же время

$$|(f_k, \psi_k)| = 2^k |(f_k, \varphi_k)| \geqslant 2^k c \to \infty, \qquad k \to \infty. \tag{4}$$

Теперь построим подпоследовательности $\{f_{k_\nu}\}$ и $\{\psi_{k_\nu}\}$ следующим образом. Выберем f_{k_1} и ψ_{k_1} такими, чтобы $|(f_{k_1}, \psi_{k_1})| \geqslant 2$. (Это можно сделать в силу (4).) Пусть f_{k_j} и ψ_{k_j}, $j=1, \ldots, \nu-1$, уже построены; построим f_{k_ν} и ψ_{k_ν}. Так как $\psi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$, то $(f_{k_j}, \psi_k) \to 0$, $k \to \infty$, $j=1, \ldots, \nu-1$, и поэтому найдется такой номер N, что при всех $k \geqslant N$

$$|(f_{k_j}, \psi_k)| \leqslant \frac{1}{2^{\nu-j}}, \qquad j=1, \ldots, \nu-1. \tag{5}$$

Далее, поскольку

$$(f_k, \psi_{k_j}) \to (f, \psi_{k_j}), \qquad k \to \infty, \quad j=1, \ldots, \nu-1,$$

то найдется такой номер $N_1 \geqslant N$, что при всех $k \geqslant N_1$

$$|(f_k, \psi_{k_j})| \leqslant |(f, \psi_{k_j})| + 1, \qquad j=1, \ldots, \nu-1. \tag{6}$$

Наконец, в силу (4), выберем такой номер $k_\nu \geqslant N_1$, что

$$|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| \geqslant \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f, \psi_{k_j})| + 2\nu. \tag{7}$$

Таким образом, в силу (5)—(7), построенные f_{k_ν} и ψ_{k_ν} таковы, что

$$|(f_{k_j}, \psi_{k_\nu})| \leqslant \frac{1}{2^{\nu-j}}, \qquad j=1, \ldots, \nu-1, \tag{8}$$

$$|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| \geqslant \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| + \nu + 1. \tag{9}$$

Положим

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{k_\nu}(x).$$

В силу (3) этот ряд сходится в $\mathscr{D}$, и, следовательно, его сумма $\psi \in \mathscr{D}$ и

$$(f_{k_\nu}, \psi) = (f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{\infty} (f_{k_\nu}, \psi_{k_j}).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенства (8) и (9), получаем

$$|(f_{k_\nu}, \psi)| \geqslant |(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| - \sum_{j=1}^{\nu-1} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| - {}$$
$$- \sum_{j=\nu+1}^{\infty} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| \geqslant \nu + 1 - \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = \nu,$$

т. е. $(f_{k_\nu}, \psi) \to \infty$, $\nu \to \infty$. Но это противоречит соотношению $(f_k, \psi) \to (f, \psi)$, $k \to \infty$, что и доказывает лемму.

5. Носитель обобщенной функции. Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции в области.

Обобщенная функция f *обращается в нуль в области G*, если $(f, \varphi)=0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(G)$; этот факт будем записывать так: $f=0$, $x \in G$ или $f(x)=0$, $x \in G$. В соответствии с этим определением, обобщенные функции f и g называются *равными в области* G, если $f-g=0$, $x \in G$; при этом пишем: $f=g$, $x \in G$. В частности, обобщенные функции f и g называются *равными*, $f=g$, если для всех $\varphi \in \mathscr{D}$ $(f, \varphi)=(g, \varphi)$.

Пусть обобщенная функция f обращается в нуль в области G. Тогда она, очевидно, обращается в нуль и в окрестности каждой точки этой области. Справедливо и обратное.

Лемма. *Если обобщенная функция f обращается в нуль в окрестности каждой точки области G, то она обращается в нуль и в области G.*

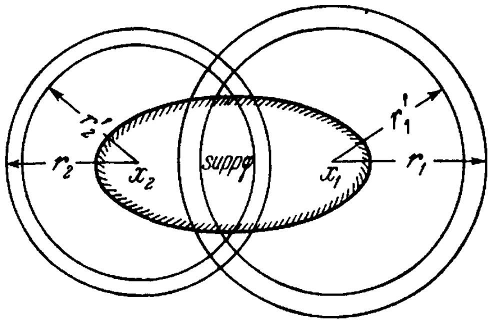

Рис. 18.

Доказательство. Пользуясь предыдущим замечанием, можно считать окрестности шарами. Нам нужно доказать, что $(f, \varphi)=0$ для любой $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Фиксируем произвольную функцию φ из $\mathscr{D}(G)$. Компакт $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в области G. Поэтому по лемме Гейне — Бореля (см. § 1.1) $\operatorname{supp}\varphi$ можно покрыть конечным числом шаров $U(x_k; r_k)$, $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, N(\varphi)$, в которых f обращается в нуль. Возьмем уменьшенные шары $U(x_k; r'_k)$, $r'_k<r_k$, $k=1, 2, \ldots, N$, все еще покрывающие $\operatorname{supp}\varphi$ (рис. 18). По следствию из леммы 1 § 5.2 существуют основные функции $h_k(x)$ такие, что

$$h_k(x)=1, \quad x \in U(x_k; r'_k), \quad \operatorname{supp} h_k \subset U(x_k; r_k).$$

Обозначим

$$h(x)=\sum_{k=1}^{N} h_k(x), \quad \varphi_k(x)=\varphi(x)\frac{h_k(x)}{h(x)}.$$

По построению $h(x) \geqslant 1$ в окрестности $\operatorname{supp}\varphi$. Поэтому

$$\varphi_k \in \mathscr{D}(U(x_k; r_k)) \quad \text{и} \quad \varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x).$$

Отсюда

$$(f, \varphi)=\left(f, \sum_{k=1}^{N}\varphi_k\right)=\sum_{k=1}^{N}(f, \varphi_k)=0.$$

Лемма доказана.

Пусть $f \in \mathscr{D}'$. Объединение *всех* окрестностей, где $f=0$, образует открытое множество $\mathscr{O}_f$, которое называется *нулевым множеством* обобщенной функции f. По лемме в каждой области, содержащейся в $\mathscr{O}_f$, $f=0$; далее, $\mathscr{O}_f$ есть наибольшее открытое множество, в котором f обращается в нуль.

Носителем обобщенной функции f называется дополнение $\mathscr{O}_f$ до R^n; носитель f обозначим $\operatorname{supp} f$, так что $\operatorname{supp} f=R^n \setminus \mathscr{O}_f$; $\operatorname{supp} f$ — замкнутое множество. Если $\operatorname{supp} f$ — ограниченное множество, то обобщенная функция f называется *финитной*.

Из этих определений выводим: a) в любой области, лежащей вне $\operatorname{supp} f$, обобщенная функция f обращается в нуль, т. е.

$$(f, \varphi)=0, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \quad \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\varphi=\varnothing; \tag{10}$$

b) носитель f состоит из тех и только тех точек, ни в какой окрестности которых f не обращается в нуль.

Замечание. Доказанная в этом пункте лемма допускает следующее обобщение. Пусть $f \in \mathscr{D}'$ и G — область в R^n. Тогда f индуцирует линейный функционал f_G на $\mathscr{D}(G)$, действующий по формуле

$$(f_G, \varphi)=(f, \varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(G).$$

Функционал f_G непрерывен на $\mathscr{D}(G)$ в следующем смысле: если $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$ и $\operatorname{supp}\varphi_k \subset G' \Subset G$, то $(f_G, \varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$. Функционал f_G назовем *локальным элементом* обобщенной функции f на G (сужение f на G).

Таким образом, всякая обобщенная функция индуцирует в каждой области свой локальный элемент. Справедливо и обратное: из всякой совокупности согласованных локальных элементов можно «склеить» единую обобщенную функцию. Точнее, справедлива следующая теорема «о кусочном склеивании». *Пусть семейство областей $\{G_\alpha\}$ покрывает R^n и для каждого α задан линейный непрерывный функционал f_α на $\mathscr{D}(G_\alpha)$, причем если $G_\alpha \cap G_{\alpha'} \neq \varnothing$, то $f_\alpha=f_{\alpha'}$, $x \in G_\alpha \cap G_{\alpha'}$. Тогда существует единственная обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'$, имеющая f_α своими локальными элементами на G_α при всех α.*

6. Регулярные обобщенные функции. Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в R^n функцией $f(x)$:

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{11}$$

Из свойства линейности интеграла следует линейность этого функционала:

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \int f(x)[\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]\,dx =$$
$$= \lambda \int f(x)\varphi(x)\,dx + \mu \int f(x)\psi(x)\,dx = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi),$$

а из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла следует его непрерывность на $\mathscr{D}$:

$$(f, \varphi_k) = \int_{U_R} f(x)\varphi_k(x)\,dx \to 0, \qquad k \to \infty,$$

если $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$. Таким образом, функционал (11) определяет обобщенную функцию из $\mathscr{D}'$.

Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в R^n функциями по формуле (11), называются *регулярными обобщенными функциями*. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными обобщенными функциями*.

Лемма (дю Буа-Реймон). *Для того чтобы локально интегрируемая в G функция $f(x)$ обращалась в нуль в области G в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ почти везде в G.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем его необходимость. Пусть a — произвольная точка области G. Найдется такой замкнутый шар $\bar{U}(a; \varepsilon)$, который целиком содержится в области G и в котором, следовательно, $f = 0$ в смысле § 5.5. Так как при каждом $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ функция

$$\psi_k(x) = e^{\frac{i}{\varepsilon}(k, x)}\omega_\varepsilon(x - a),$$

где ω_ε — «шапочка» (см. § 5.2), принадлежит $\mathscr{D}(G)$, то

$$(f, \psi_k) = \int f(x)\,\omega_\varepsilon(x - a)\,e^{\frac{i}{\varepsilon}(k, x)}\,dx = 0.$$

Таким образом, все коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\left\{e^{\frac{i}{\varepsilon}(k, x)}\right\}$ функции $f(x)\,\omega_\varepsilon(x - a)$, интегрируемой на шаре $U(a; \varepsilon)$, равны нулю. Отсюда сле-

дует *), что эта функция равна нулю почти везде и, стало быть, $f(x) = 0$ почти везде в этом шаре. Так как a — произвольная точка области G, то $f(x) = 0$ почти везде в G. Лемма доказана.

Всякая локально интегрируемая функция в R^n определяет по формуле (11) регулярную обобщенную функцию. Из леммы дю Буа-Реймона следует, что всякая регулярная обобщенная функция определяется единственной **) локально интегрируемой в R^n функцией. Следовательно, между локально интегрируемыми в R^n функциями и регулярными обобщенными функциями существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому мы будем отождествлять локально интегрируемую функцию $f(x)$ и порождаемую ею по формуле (11) обобщенную функцию — функционал (f, φ). В этом смысле «обычные», т. е. локально интегрируемые в R^n, функции являются (регулярными) обобщенными функциями.

Из леммы дю Буа-Реймона вытекает также, что оба определения носителя непрерывной функции, данные в § 1.2 и § 5.5, совпадают.

Наконец, отметим, что если последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, локально интегрируемых функций в R^n сходится равномерно к функции $f(x)$ на каждом компакте, то она сходится к $f(x)$ и в $\mathscr{D}'(R^n)$.

Действительно, для любой $\varphi \in \mathscr{D}$ имеем

$$(f_k, \varphi) = \int f_k(x)\varphi(x)\,dx \to \int f(x)\varphi(x)\,dx = (f, \varphi), \qquad k \to \infty.$$

Будем говорить, что обобщенная функция f *принадлежит классу $C^p(G)$*, $f \in C^p(G)$, если в области G она совпадает с функцией $f_0(x)$ класса $C^p(G)$, т. е. для любой $\varphi \in \mathscr{D}(G)$

$$(f, \varphi) = \int f_0(x)\varphi(x)\,dx.$$

Если к тому же $f_0 \in C^p(\bar{G})$, то будем говорить, что f принадлежит классу $C^p(\bar{G})$.

7. Сингулярные обобщенные функции. В соответствии с определением, данным в предыдущем пункте, сингулярную обобщенную функцию нельзя отождествить ни с ка-

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], т. III, гл. XX и А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин [1], гл. VIII.

**) С точностью до значений на множестве меры нуль.

кой локально интегрируемой функцией. Простейшим примером сингулярной обобщенной функции является δ-функция Дирака (см. § 5.1)

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \qquad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, $\delta \in \mathcal{D}'$, $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$, так что $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

Докажем, что $\delta(x)$ — *сингулярная обобщенная функция*. Пусть, напротив, существует локально интегрируемая в R^n функция $f(x)$ такая, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\int f(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0). \tag{12}$$

Так как $x_1 \varphi(x) \in \mathcal{D}$, если $\varphi \in \mathcal{D}$, то из (12) вытекает

$$\int f(x)\, x_1 \varphi(x)\, dx = x_1 \varphi(x)\big|_{x=0} = 0 = (x_1 f, \varphi)$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}$; здесь x_1 — первая координата x. Таким образом, локально интегрируемая в R^n функция $x_1 f(x)$ равна нулю в смысле обобщенных функций. По лемме дю Буа-Реймона, $x_1 f(x) = 0$ почти везде, и, стало быть, $f(x) = 0$ почти везде. Но это противоречит равенству (12). Полученное противоречие и доказывает сингулярность δ-функции.

Пусть $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 5.2). Докажем, что

$$\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x), \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } \mathcal{D}'. \tag{13}$$

Действительно, по определению сходимости в $\mathcal{D}'$ соотношение (13) эквивалентно равенству

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int \omega_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0), \qquad \varphi \in \mathcal{D}.$$

По непрерывности функции $\varphi(x)$ для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$, коль скоро $|x| < \varepsilon_0$. Отсюда, пользуясь свойствами «шапочки» $\omega_\varepsilon(x)$, при всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ получаем

$$\left|\int \omega_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(0)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int \omega_\varepsilon(x)\, |\varphi(x) - \varphi(0)|\, dx < \eta \int \omega_\varepsilon(x)\, dx = \eta,$$

что и утверждалось.

Исходя из вида приближающей последовательности $\omega_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to +0$ (рис. 15), обобщенную функцию $\delta(x)$ удобно изображать графически, как это показано на рис. 19.

Обобщением δ-функции является простой слой на поверхности. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность и $\mu(x)$ — непрерывная функция, заданная на S. Введем обобщенную функцию $\mu\delta_S$, действующую по правилу

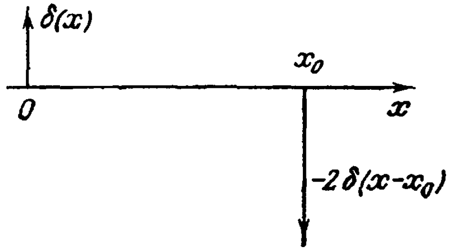

Рис. 19.

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\, \varphi(x)\, dS, \qquad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, $\mu\delta_S \in \mathcal{D}'$; $\mu\delta_S(x) = 0$, $x \,\overline{\in}\, S$, так что $\operatorname{supp} \mu\delta_S \subset S$. Обобщенная функция $\mu\delta_S$ называется *простым слоем* на поверхности S с плотностью μ.

Замечание. Локально интегрируемые функции и δ-функции описывают распределения (плотности) масс, зарядов, сил и т. д. (см. § 5.1). Поэтому обобщенные функции называются также *распределениями* (distributions, см. Л. Шварц [1, 2]). Если, например, обобщенная функция f есть плотность масс или зарядов, то выражение $(f, 1)$ есть полная масса или заряд соответственно (если f имеет смысл на функции, тождественно равной 1; эта функция не принадлежит $\mathcal{D}$!); в частности, $(\delta, 1) = 1$; $(f, 1) = \int f(x)\, dx$, если f — (абсолютно) интегрируемая функция на R^n.

8. Формулы Сохоцкого. Введем линейный функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, действующий по формуле

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \mathrm{Vp} \int \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right) \frac{\varphi(x)}{x}\, dx,$$
$$\varphi \in \mathcal{D}(R^1).$$

Докажем непрерывность этого функционала на $\mathcal{D}$. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}$, т. е. $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ и $D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows 0$, $k \to \infty$. Тогда

$$\left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k\right)\right| = \left|\mathrm{Vp} \int \frac{\varphi_k(x)}{x}\, dx\right| = \left|\mathrm{Vp} \int_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k'(x')}{x}\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-R}^{R} |\varphi_k'(x')|\, dx \leqslant 2R \max_{|x| \leqslant R} |\varphi_k'(x)| \to 0, \qquad k \to \infty$$

Таким образом, $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$.

Обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ совпадает (в смысле § 5.6) с функцией $\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$. Она называется *конечной частью* (partie finie) или *главным значением интеграла* от $\frac{1}{x}$.

Установим теперь равенство

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = -i\pi\varphi(0) + \mathrm{Vp}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{14}$$

Действительно, если $\varphi(x) = 0$ при $|x| > R$, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R}^{R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R}^{R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-R}^{R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx =$$

$$= -2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname{arctg}\frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx =$$

$$= -i\pi\varphi(0) + \mathrm{Vp}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Соотношение (14) означает, что существует предел последовательности $\frac{1}{x+i\varepsilon}$, $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'$, который мы обозначим $\frac{1}{x+i0}$, и этот предел равен $-i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$. Итак,

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{15}$$

Аналогично,

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{15'}$$

Формулы (15) и (15′) называются *формулами Сохоцкого* ([1], 1873 г.). Они широко используются в квантовой физике.

9. Линейная замена переменных в обобщенных функциях. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая в R^n функция и $x = Ay + b$, $\det A \neq 0$, — неособенное линейное преобразование пространства R^n на себя. Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ получим

$$(f(Ay+b), \varphi) = \int f(Ay+b)\varphi(y)\,dy = \frac{1}{|\det A|}\int f(x)\varphi[A^{-1}(x-b)]\,dx = \frac{1}{|\det A|}\left(f, \varphi[A^{-1}(x-b)]\right).$$

Это равенство мы и примем за определение обобщенной функции $f(Ay+b)$ для любой $f(x) \in \mathcal{D}'$:

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right), \qquad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{16}$$

Так как операция $\varphi(x) \to \varphi[A^{-1}(x-b)]$ линейна и непрерывна из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$ (см. § 5.2), то функционал $f(Ay+b)$, определяемый правой частью равенства (16), принадлежит $\mathcal{D}'$.

В частности, если A — вращение, т. е. $A' = A^{-1}$ и $b = 0$, то

$$(f(Ay), \varphi) = (f, \varphi(A'x));$$

если A — подобие (с отражением при $c < 0$), $A = cI$, $c \neq 0$, и $b = 0$, то

$$(f(cy), \varphi) = \frac{1}{|c^n|}\left(f, \varphi\left(\frac{x}{c}\right)\right);$$

если $A = I$, то

$$(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b)).$$

Обобщенная функция $f(x+b)$ называется *сдвигом* обобщенной функции $f(x)$ на вектор b. Например, $\delta(x-x_0)$ — сдвиг $\delta(x)$ на вектор $-x_0$ — действует по формуле

$$(\delta(x-x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0).$$

Изложенное позволяет определить сферически-симметричные, центрально-симметричные, однородные, периодические, лоренцинвариантные и т. д. обобщенные функции.

Например, обобщенная функция f называется *инвариантной относительно группы Лоренца* (лоренцинвариантной), если $f(Ax) = f(x)$ для всех преобразований A из группы Лоренца (т. е. для всех линейных преобразований A в R^n, сохраняющих квадратичную форму $x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$).

Непосредственно из определения (16) вытекает, что *операция линейной замены переменных линейна и непрерывна из* $\mathscr{D}'$ *в* $\mathscr{D}'$:

$$(\lambda f+\mu g)(Ay+b)=\lambda f(Ay+b)+\mu g(Ay+b), \quad f,\ g\in\mathscr{D}';$$

$$f_k(Ay+b)\to 0,\ k\to\infty \text{ в } \mathscr{D}', \text{ если } f_k\to 0,\ k\to\infty \text{ в } \mathscr{D}'.$$

10. Умножение обобщенных функций. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая в R^n функция и $a(x)\in C^\infty(R^n)$. Тогда для любой $\varphi\in\mathscr{D}$ справедливо равенство

$$(af,\ \varphi)=\int a(x)f(x)\varphi(x)\,dx=(f,\ a\varphi).$$

Это равенство мы и примем за определение произведения af обобщенной функции $f\in\mathscr{D}'$ с бесконечно дифференцируемой функцией a:

$$(af,\ \varphi)=(f,\ a\varphi), \qquad \varphi\in\mathscr{D}. \tag{17}$$

Так как операция умножения на функцию $a\in C^\infty(R^n)$ линейна и непрерывна из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$ (см. § 5.2), то функционал af, определяемый правой частью равенства (17), принадлежит $\mathscr{D}'$.

Из определения (17) вытекает, что *операция умножения на функцию* $a\in C^\infty(R^n)$ *линейна и непрерывна из* $\mathscr{D}'$ *в* $\mathscr{D}'$:

$$a(\lambda f+\mu g)=\lambda(af)+\mu(ag), \qquad f,\ g\in\mathscr{D}';$$

$$af_k\to 0,\ k\to\infty \text{ в } \mathscr{D}', \text{ если } f_k\to 0,\ k\to\infty \text{ в } \mathscr{D}'.$$

Если $f\in\mathscr{D}'$, *то справедливо равенство*

$$f=\eta f, \tag{18}$$

где η — *любая функция класса* $C^\infty(R^n)$, *равная* 1 *в окрестности носителя* f.

Действительно, для любой $\varphi\in\mathscr{D}$ носители f и $(1-\eta)\varphi$ не имеют общих точек, а потому, в силу (10),

$$(f-\eta f,\ \varphi)=(f,\ (1-\eta)\varphi)=0.$$

Примеры:

a) $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$,

так как при всех $\varphi\in\mathscr{D}$

$$(a\delta,\ \varphi)=(\delta,\ a\varphi)=a(0)\varphi(0)=(a(0)\delta,\ \varphi).$$

b) $x\mathscr{P}\dfrac{1}{x}=1$,

так как при всех $\varphi\in\mathscr{D}(R^1)$

$$\left(x\mathscr{P}\frac{1}{x},\ \varphi\right)=\left(\mathscr{P}\frac{1}{x},\ x\varphi\right)=\mathrm{Vp}\int\frac{x\varphi(x)}{x}\,dx=\int\varphi(x)\,dx=(1,\ \varphi).$$

Возникает вопрос: нельзя ли определить произведение любых обобщенных функций так, чтобы это произведение опять было обобщенной функцией? Для локально интегрируемых функций их произведение не обязано быть таковым $\left(\text{например, } \left(|x|^{-\frac{1}{2}}\right)^2=|x|^{-1} \text{ в } R^1\right)$. Подобное имеет место и для обобщенных функций: Л. Шварцем показано, что такое произведение, которое было бы ассоциативно и коммутативно, определить нельзя. Действительно, если бы оно существовало, то, пользуясь примерами a) и b), мы имели бы противоречивую цепочку равенств:

$$0=0\mathscr{P}\frac{1}{x}=(x\delta(x))\mathscr{P}\frac{1}{x}=(\delta(x)x)\mathscr{P}\frac{1}{x}=\delta(x)\left(x\mathscr{P}\frac{1}{x}\right)=\delta(x).$$

Чтобы определить однозначно произведение обобщенных функций f и g, достаточно, чтобы они обладали, грубо говоря, свойствами: насколько f «нерегулярна» в окрестности (произвольной) точки, настолько g должна быть «регулярной» в этой окрестности, и наоборот. Например, естественно считать $\delta(x-a)\delta(x-b)=0$, если $a\neq b$; $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$, если функция $a(x)$ непрерывна в окрестности точки 0.

11. Упражнения. a) Доказать, что функции

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}},\quad \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon},\quad \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},\quad \frac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon}$$

стремятся к $\delta(x)$ при $\varepsilon\to+0$.

b) Доказать предельные соотношения при $t\to+\infty$:

$$\frac{e^{ixt}}{x-i0}\to 2\pi i\delta(x), \quad \frac{e^{-ixt}}{x-i0}\to 0,$$

$$\frac{e^{ixt}}{x+i0}\to 0, \quad \frac{e^{-ixt}}{x+i0}\to -2\pi i\delta(x), \quad t^m e^{ixt}\to 0, \quad m\geqslant 0,$$

$$t\theta(t)e^{ixt}\to i\delta(x).$$

c) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k)$$

сходится в $\mathscr{D}'$ при любых a_k.

d) Доказать, что $\delta_{S_R}(x) \to 0$, $R \to \infty$ в $\mathscr{D}'$.

e) Доказать, что $\mathscr{P}\frac{\cos kx}{x} \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}'(R^1)$, где

$$\left(\mathscr{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx.$$

f) Пусть $\alpha \in \mathscr{D}(R^n)$, $\alpha \geqslant 0$, $\int \alpha(x)\,dx = 1$. Доказать, что

$$\varepsilon^{-n}\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta(x), \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } \mathscr{D}'.$$

g) Доказать равенство

$$(af)(x+h) = a(x+h)f(x+h), \quad a \in C^\infty(R^n),$$
$$f \in \mathscr{D}', \quad h \in R^n.$$

h) Пусть f — финитная обобщенная функция в R^1 и η — произвольная функция из $\mathscr{D}(R^1)$, равная 1 в окрестности $\operatorname{supp} f$. Положим

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(f(x'), \frac{\eta(x')}{x'-z}\right), \quad z = x + iy.$$

Доказать, что: 1) $\hat{f}(z)$ не зависит от выбора вспомогательной функции η; 2) $\hat{f}(z)$ — аналитическая функция при $z \,\overline{\in}\, \operatorname{supp} f$; 3) $\hat{f}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, $z \to \infty$; 4) $\hat{f}(x+i\varepsilon) - \hat{f}(x-i\varepsilon) \to f(x)$, $\varepsilon \to +0$ в $\mathscr{D}'(R^1)$; 5) $\widehat{f^{(k)}}(z) = \hat{f}^{(k)}(z)$, $k = 1, 2, \ldots$

Функция $\hat{f}(z)$ называется *представлением Коши* обобщенной функции f *).

§ 6. Дифференцирование обобщенных функций

Обобщенные функции обладают рядом удобных свойств. Например, при надлежащем обобщении понятия производной любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой, сходящиеся ряды из обобщенных функций можно почленно дифференцировать бесконечное число раз.

1. Производные обобщенной функции. Пусть $f \in C^p(R^n)$. Тогда при всех α, $|\alpha| \leqslant p$, и $\varphi \in \mathscr{D}$ справедлива формула интегрирования по частям

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int D^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int f(x) D^\alpha\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi).$$

*) См. Г. Бремерман [1], ч. II.

Это равенство мы и примем за определение (обобщенной) *производной* $D^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'$:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}. \qquad (1)$$

Проверим, что $D^\alpha f \in \mathscr{D}'$. Действительно, поскольку $f \in \mathscr{D}'$, то функционал $D^\alpha f$, определяемый правой частью равенства (1), линейный:

$$(D^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}(f, \lambda D^\alpha\varphi + \mu D^\alpha\psi) = \lambda(-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi) +$$
$$+ \mu(-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\psi) = \lambda(D^\alpha f, \varphi) + \mu(D^\alpha f, \psi),$$

и непрерывный:

$$(D^\alpha f, \varphi_k) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi_k) \to 0, \quad k \to \infty,$$

ибо если $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$, то и $D^\alpha\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$ (см. § 5.2).

В частности, при $f = \delta$ равенство (1) принимает вид

$$(D^\alpha\delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Обозначим $\{D^\alpha f(x)\}$ классическую производную (там, где она существует). Из определения обобщенной производной вытекает, что если обобщенная функция $f \in C^p(G)$, то

$$D^\alpha f = \{D^\alpha f(x)\}, \quad x \in G, \quad |\alpha| \leqslant p$$

(в смысле определений §§ 5.5 и 5.6).

2. Свойства обобщенных производных. Справедливы следующие свойства операции дифференцирования обобщенных функций.

а) *Операция дифференцирования D^α линейна и непрерывна из $\mathscr{D}'$ в $\mathscr{D}'$:*

$$D^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha f + \mu D^\alpha g, \quad f, g \in \mathscr{D}';$$

$$D^\alpha f_k \to 0, \ k \to \infty \textit{ в } \mathscr{D}', \textit{ если } f_k \to 0, \ k \to \infty \textit{ в } \mathscr{D}'.$$

Докажем непрерывность. По определению производной при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ имеем

$$(D^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f_k, D^\alpha\varphi) \to 0, \quad k \to \infty,$$

что и означает, что $D^\alpha f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}'$ (см. § 5.3). Линейность доказывается аналогично.

В частности, если $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 5.2), то

$$D^\alpha \omega_\varepsilon(x) \to D^\alpha \delta(x), \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } \mathscr{D}'. \tag{2}$$

Соотношение (2) вытекает из соотношения (13) § 5.7.

Например, $\omega'_\varepsilon(x) \to \delta'(x)$, $\varepsilon \to +0$ в $\mathscr{D}'$. Последовательность $\omega'_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to +0$, изображена на рис. 20. Поэтому

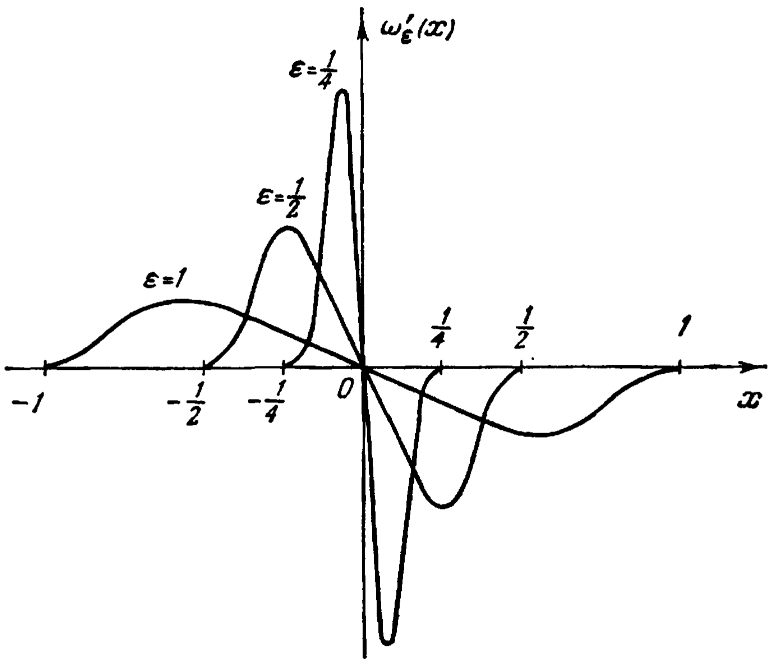

Рис. 20.

обобщенную функцию $\delta'(x)$ удобно изображать графически, как это показано на рис. 21.

b) *Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема.*

Действительно, если $f \in \mathscr{D}'$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathscr{D}'$; в свою очередь $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \in \mathscr{D}'$ и т. д.

c) *Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.* Например:

$$D_1(D_2 f) = D_2(D_1 f) = D^{(1,1)} f, \quad f \in \mathscr{D}'. \tag{3}$$

В самом деле, для любой $\varphi \in \mathscr{D}$ получаем

$$(D^{(1,1)} f, \varphi) = (f, D_1 D_2 \varphi) = (D_1(D_2 f), \varphi) = (D_2(D_1 f), \varphi),$$

откуда и вытекают равенства (3) (см. § 5.5).

И вообще

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha (D^\beta f) = D^\beta (D^\alpha f). \tag{4}$$

d) *Если $f \in \mathscr{D}'$ и $a \in C^\infty(R^n)$, то справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения af* (см. § 5.10).

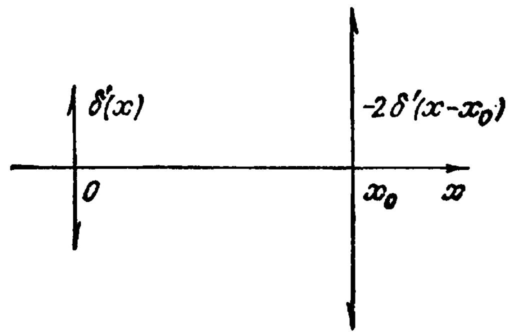

Рис. 21.

Например:

$$\frac{\partial (af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{a x_1} f + a \frac{\partial f}{\partial x_1}. \tag{5}$$

Действительно, если φ — любая основная функция, то

$$\left(\frac{\partial (af)}{\partial x_1}, \varphi\right) = -\left(af, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = -\left(f, a\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) =$$
$$= -\left(f, \frac{\partial (a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial (a\varphi)}{\partial x_1}\right) + \left(f, \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) = \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) =$$
$$= \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right),$$

откуда и вытекает равенство (5) (см. § 5.5).

e) *Если обобщенная функция $f = 0$, $x \in G$, то и $D^\alpha f = 0$, $x \in G$, так что* $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$.

В самом деле, если $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, то $D^\alpha\varphi \in \mathscr{D}(G)$, а потому

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi) = 0, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(G),$$

что и означает $D^\alpha f = 0$, $x \in G$ (см. § 5.5).

f) *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x),$$

составленный из локально интегрируемых функций $u_k(x)$, *сходится равномерно на каждом компакте, то его можно почленно дифференцировать любое число раз и полученные ряды будут сходиться в* $\mathscr{D}'$.

В самом деле, поскольку при любом $R > 0$

$$S_p(x) = \sum_{k=1}^{p} u_k(x) \xrightarrow[]{|x| \leqslant R} S(x), \qquad p \to \infty,$$

то $S_p \to S$, $p \to \infty$ в $\mathscr{D}'$ (см. § 5.6). Но тогда, в силу а),

$$D^\alpha S_p = \sum_{k=1}^{p} D^\alpha u_k \to D^\alpha S, \qquad p \to \infty \text{ в } \mathscr{D}',$$

что и утверждалось.

Отсюда, в частности, вытекает: *если*

$$|a_k| \leqslant A|k|^m + B, \tag{6}$$

то тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \tag{7}$$

сходится в $\mathscr{D}'(R^1)$.

Действительно, в силу (6) ряд

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

сходится равномерно в R^1; следовательно, ряд, представляющий его производную порядка $m+2$, сходится в $\mathscr{D}'(R^1)$ и совпадает с рядом (7).

3. Первообразная обобщенной функции. В этом пункте считаем $n = 1$. Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет

(единственную с точностью до аддитивной постоянной) первообразную $f^{(-1)}(x)$,

$$f^{(-1)}(x) = \int^x f(\xi)\,d\xi + C, \qquad f^{(-1)\prime}(x) = f(x).$$

Равенство $f^{(-1)\prime} = f$ мы и примем за исходное для определения первообразной произвольной обобщенной функции f.

Обобщенная функция $f^{(-1)}$ из $\mathscr{D}'(R^1)$ называется *первообразной обобщенной функции* f из $\mathscr{D}'(R^1)$, если $f^{(-1)\prime} = f$, т. е.

$$(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{8}$$

Равенство (8) показывает, что функционал $f^{(-1)}$ задан не на всех основных функциях, а только на их первых производных. Наша задача — продолжить этот функционал на все $\mathscr{D}$ (в смысле определения § 1.10), причем так, чтобы продолженный функционал $f^{(-1)}$ был линейным и непрерывным на $\mathscr{D}$, и выяснить степень произвола при таком продолжении.

Предположим сперва, что $f^{(-1)}$ — первообразная f — *существует*. Построим ее. Пусть φ — произвольная функция из $\mathscr{D}(R^1)$. Представим ее в виде

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x)\int \varphi(\xi)\,d\xi, \tag{9}$$

где $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 5.2) и

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi(x') - \omega_\varepsilon(x')\int \varphi(\xi)\,d\xi\right] dx'. \tag{10}$$

Докажем, что $\psi \in \mathscr{D}$. Действительно, $\psi \in C^\infty(R^1)$ и $\psi(x) = 0$, $x < -\max(R, \varepsilon)$, если $\varphi(x) = 0$, $|x| > R$. Далее, при $x > \max(R, \varepsilon)$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\,dx' - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x')\,dx' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi = 0$$

в силу нормировки (3) § 5.2. Таким образом, $\psi(x) = 0$, $|x| > \max(R, \varepsilon)$. Следовательно, $\psi \in \mathscr{D}$.

Применяя функционал $f^{(-1)}$ к равенству (9), получим

$$(f^{(-1)}, \varphi) = (f^{(-1)}, \psi') + (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon)\int \varphi(\xi)\,d\xi,$$

т. е., учитывая (8),

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + C\int \varphi(\xi)\,d\xi, \qquad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{11}$$

где обозначено $C = (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon)$. Итак, если $f^{(-1)}$ — первообразная f — существует, то она выражается равенством (11), где ψ определена формулой (10).

Теперь докажем обратное: при *любой* постоянной C функционал $f^{(-1)}$, определенный равенствами (11) и (10), дает первообразную f.

Действительно, функционал $f^{(-1)}$, очевидно, линеен. Докажем его непрерывность на $\mathcal{D}$. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}$, т. е. $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$ и $\varphi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows 0$, $k \to \infty$. А тогда, по доказанному,

$$\psi_k(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi_k(x') - \omega_\varepsilon(x')\int \varphi_k(\xi)\,d\xi\right] dx' = 0,$$

$$|x| > \max(R, \varepsilon),$$

и, очевидно, $\psi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows 0$, $k \to \infty$, т. е. $\psi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}$. Поэтому, в силу непрерывности f на $\mathcal{D}$, имеем

$$(f^{(-1)}, \varphi_k) = -(f, \psi_k) + C\int \varphi_k(\xi)\,d\xi \to 0, \qquad k \to \infty,$$

что и утверждалось. Следовательно, $f^{(-1)} \in \mathcal{D}'$. Осталось проверить, что $f^{(-1)}$ является первообразной f. В самом деле, заменяя в (10) φ на φ' и учитывая, что $\int \varphi'(\xi)\,d\xi = 0$, получим $\psi = \varphi$, и тогда из (11) вытекает равенство (8), что и требовалось. Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Любая обобщенная функция f имеет единственную, с точностью до аддитивной постоянной, первообразную, и всякая ее первообразная $f^{(-1)}$ выражается формулой*

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + (C, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{12}$$

где ψ определяется равенством (10) *и C — произвольная постоянная.*

Доказанная теорема утверждает, что решение дифференциального уравнения

$$u' = f, \qquad f \in \mathcal{D}'(R^1), \tag{13}$$

существует в $\mathcal{D}'(R^1)$ и его общее решение имеет вид $u = f^{(-1)} + C$, где $f^{(-1)}$ — некоторая первообразная f и C — произвольная постоянная. В частности, если f — непрерывная функция, то всякое решение в $\mathcal{D}'$ уравнения (13) — классическое. Например, общее решение уравнений $u' = 0$ в $\mathcal{D}'$ есть произвольная постоянная.

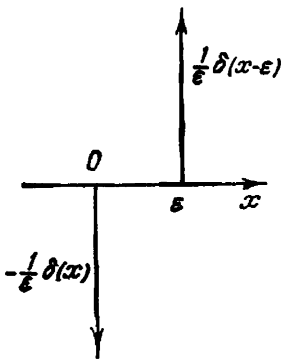

Рис. 22.

Аналогично определяется и первообразная $f^{(-n)}$ *порядка n* обобщенной функции f, $f^{(-n)(n)} = f$. Применяя доказанную теорему к рекуррентной цепочке для $f^{(-k)}$ — первообразных порядка k, —

$$f^{(-1)'} = f,$$
$$f^{(-2)'} = f^{(-1)}, \ \ldots, \ f^{(-n)'} = f^{(-n+1)},$$

заключаем, что $f^{(-n)}$ *существует и единственна с точностью до произвольного аддитивного полинома степени* $n-1$.

4. Примеры, $n=1$.

а) Вычислим плотность зарядов, соответствующих диполю с электрическим моментом $+1$ в точке $x=0$ на прямой.

Этому диполю приближенно соответствует плотность зарядов $\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x)$, $\varepsilon > 0$ (рис. 22). Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'$:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x), \varphi\right) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] \to \varphi'(0) = (\delta, \varphi') = -(\delta', \varphi),$$

заключаем, что искомая плотность равна $-\delta'(x)$.

Проверим, что полный заряд диполя равен 0:

$$(-\delta', 1) = (\delta, 1') = (\delta, 0) = 0,$$

а его момент равен 1:

$$(-\delta', x) = (\delta, x') = (\delta, 1) = 1.$$

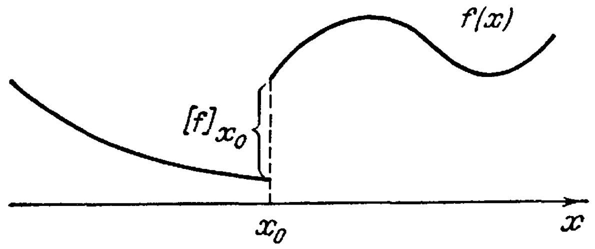

Рис. 23.

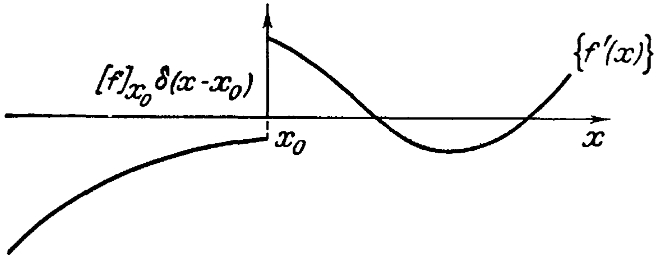

Рис. 24

b) Пусть функция $f(x)$ такова, что $f \in C^1(x \leqslant x_0)$ и $f \in C^1(x \geqslant x_0)$ (рис. 23). Покажем, что (рис. 24)

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\,\delta(x - x_0), \tag{14}$$

где $[f]_{x_0}$ — скачок $f(x)$ в точке x_0:

$$[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Действительно, если $\varphi \in \mathscr{D}$, то

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$
$$= [f(x_0+0) - f(x_0-0)]\,\varphi(x_0) + \int \{f'(x)\}\,\varphi(x)\,dx =$$
$$= ([f]_{x_0}\,\delta(x - x_0) + \{f'(x)\}, \varphi).$$

В частности, если θ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = 1, \quad x > 0; \quad \theta(x) = 0, \quad x \leqslant 0,$$

то

$$\theta'(x) = \delta(x). \tag{15}$$

В теории электрических цепей функция Хевисайда называется «единичной ступенькой», а δ-функция — «единичным импульсом». Формула (15) утверждает, что «единичный импульс» есть производная от «единичной ступеньки».

Замечание. Первообразная δ-функции есть $\theta(x) + C$, где C — произвольная постоянная (см. § 6.3). Таким образом, $\theta(x)$ восстанавливается как первообразная *своей обобщенной производной* $\delta(x)$; с другой стороны, $\theta(x)$ не восстанавливается как первообразная *своей классической производной* $\{\theta'(x)\} = 0$, $x \neq 0$.

c) Если же функция $f(x)$ имеет изолированные разрывы 1-го рода в точках $\{x_k\}$ и $\{f'(x)\}$ — кусочно-непрерывная функция на R^1, то формула (14) естественно обобщается:

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k}\,\delta(x - x_k). \tag{16}$$

Формулу (16) удобно получать локально, в окрестности каждой точки x_k, с использованием формулы (14) и теоремы «о кусочном склеивании» (см. замечание § 5.5).

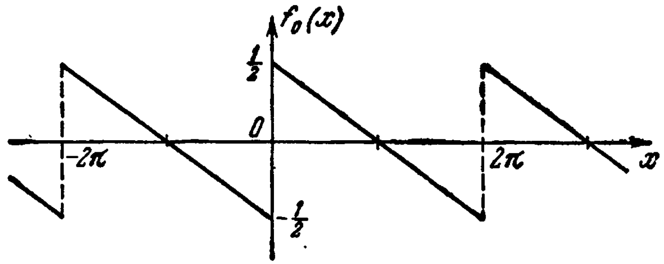

Рис. 25.

В частности, если

$$f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \qquad x \in [0, 2\pi),$$

— 2π-периодическая функция (рис. 25), то

$$f_0' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{17}$$

Мы видим, таким образом, что обобщенные и классические производные, вообще говоря, не совпадают!

d) Докажем формулу

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{18}$$

Для этого разложим 2π-периодическую функцию

$$\int_0^x f_0(x')\,dx' = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \qquad x \in [0, 2\pi)$$

(функция f_0 определена в § 6.4, с)) в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\int_0^x f_0(x')\,dx' = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikx}.$$

В силу результатов § 6.2, f) этот ряд можно почленно дифференцировать в $\mathscr{D}'$ любое число раз. Дифференцируя его дважды и учитывая (17), получим

$$f_0' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} e^{ikx},$$

что и требовалось.

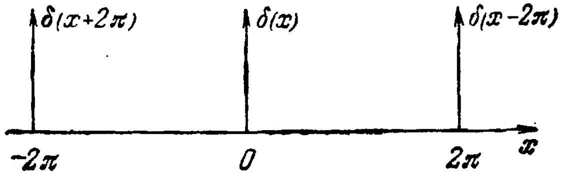

Рис. 26.

Отметим, что левая часть равенства (18) есть ряд Фурье 2π-периодической обобщенной функции $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$, график которой изображен на рис. 26.

e) Покажем, что общее решение уравнения

$$x^m u = 0 \tag{19}$$

в $\mathscr{D}'(R^1)$ дается формулой

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x), \tag{20}$$

где c_k — произвольные постоянные.

Поскольку при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ и $k = 0, 1, \ldots, m-1$

$$(x^m \delta^{(k)}, \varphi) = (\delta^{(k)}, x^m \varphi) = (-1)^k (\delta, (x^m\varphi)^{(k)}) = \\ = (-1)^k (x^m\varphi)^{(k)}\,|_{x=0} = 0,$$

то

$$x^m \delta^{(k)}(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

и, следовательно, обобщенная функция (20) удовлетворяет уравнению (19).

Докажем, что формула (20) дает общее решение в $\mathscr{D}'$ этого уравнения. Пусть $\eta(x)$ — основная функция, равная 1 в окрестности точки $x = 0$. (По лемме 1 § 5.2 такая функция существует.) Тогда любая функция φ из $\mathscr{D}$ представляется в виде

$$\varphi(x) = \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^m \psi(x), \tag{21}$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m}\left[\varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\right].$$

Функция $\psi \in \mathscr{D}$, так как она финитна и бесконечно дифференцируема; бесконечная дифференцируемость ее в точке $x = 0$ следует из формулы Тейлора

$$\psi(x) = \sum_{k=m}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m} + O(|x|^{N+1}),$$

справедливой в некоторой окрестности (где $\eta = 1$) точки 0 при всех $N \geqslant m$.

Следовательно, если $u \in \mathscr{D}'$ — решение уравнения (19), то, в силу (21),

$$(u, \varphi) = \left(u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) + (u, x^m\psi(x)) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (u, \eta(x) x^k) + (x^m u, \psi) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (\delta^{(k)}, \varphi),$$
$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} (u, \eta x^k),$$

что и требовалось установить.

З а м е ч а н и е. Полученный результат непосредственно следует из более общего утверждения о том, что всякая обобщенная функция, у которой носитель есть точка, представляется в виде линейной комбинации δ-функции и ее производных в этой точке (см. § 8.4).

Отметим, что в классе локально интегрируемых функций уравнение (19) имеет единственное решение $u=0$.

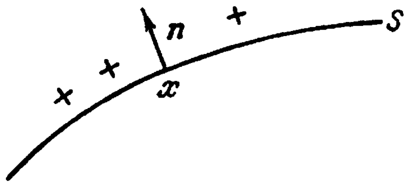

Рис. 27.

f) Проверим, что функция $\mathscr{E}(t)=\theta(t)Z(t)$, где $Z(t)$ есть решение однородного дифференциального уравнения

$$LZ \equiv Z^{(m)}+a_1(t)Z^{(m-1)}+\ldots+a_m(t)Z=0,$$

удовлетворяющее условиям

$$Z(0)=Z'(0)=\ldots=Z^{(m-2)}(0)=0, \quad Z^{(m-1)}(0)=1,$$

удовлетворяет уравнению $L\mathscr{E}=\delta(t)$.

Действительно, пользуясь формулой (14), получаем

$$\mathscr{E}'(t)=\theta(t)Z'(t), \ \ldots, \ \mathscr{E}^{(m-1)}(t)=\theta(t)Z^{(m-1)}(t),$$
$$\mathscr{E}^{(m)}(t)=\delta(t)+\theta(t)Z^{(m)}(t),$$

откуда

$$L\mathscr{E}=\theta(t)LZ+\delta(t)=\delta(t),$$

что и утверждалось.

5. Примеры, $n \geqslant 2$.

a) Обобщением $-\delta'(x)$ является двойной слой на поверхности. Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к S (рис. 27) и $\nu(x)$ — непрерывная функция, заданная на S. Введем обобщенную функцию $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$, действующую по правилу

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \varphi\right)=\int\limits_S \nu(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\,dS, \quad \varphi\in\mathscr{D}.$$

Очевидно,

$$-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)\in\mathscr{D}', \quad \operatorname{supp}\left[-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)\right]\subset S.$$

Обобщенная функция $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$ называется *двойным слоем* на поверхности S с плотностью $\nu(x)$, ориентированным

по нормали $\boldsymbol{n}$. Эта обобщенная функция описывает плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности S с поверхностной плотностью момента $\nu(x)$ и ориентированных вдоль заданного направления нормали $\boldsymbol{n}$ на S (ср. § 6.4, a)).

b) Пусть область G имеет кусочно-гладкую границу S и функция $f\in C^1(\bar{G})\cap C^1(\bar{G}_1)$, где $G_1=R^n\setminus\bar{G}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}+[f]_S\cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_x$ — внешняя нормаль к S в точке $x\in S$ и $[f]_S$ — скачок функций f при переходе извне через поверхность S:

$$\lim_{x'\to x,\ x'\in G_1} f(x')-\lim_{x'\to x,\ x'\in G} f(x')=[f]_S(x), \quad x\in S.$$

Для получения формулы (22) воспользуемся формулой Грина и определением простого слоя (см. § 5.7):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right)=-\left(f, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=-\int f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,dx=$$
$$=\int\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\}\varphi(x)\,dx+\int\limits_S [f]_S(x)\cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\varphi(x)\,dS=$$
$$=\left(\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}+[f]_S\cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S, \varphi\right), \quad \varphi\in\mathscr{D}.$$

c) Пусть в условиях примера b) функция $f\in C^2(\bar{G})\cap C^2(\bar{G}_1)$. Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_j}([f]_S\cos(\boldsymbol{n}x_i)\,\delta_S)+$$
$$+\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}\right]_S\cos(\boldsymbol{n}x_j)\,\delta_S. \tag{23}$$

Для получения формулы (23) продифференцируем равенство (22) по x_j и при дифференцировании функции $\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\}$ воспользуемся опять формулой (22):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}=\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\right\}+\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}\right]_S\cos(\boldsymbol{n}x_j)\,\delta_S.$$

Полагая в (23) $i=j$ и суммируя по $i=1, 2, \ldots, n$, получаем

$$\Delta f=\{\Delta f\}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}([f]_S\cos(nx_i)\,\delta_S)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}\right]_S\cos(nx_i)\,\delta_S. \qquad (24)$$

Принимая во внимание равенства

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}([f]_S\cos(nx_i)\,\delta_S)=\frac{\partial}{\partial n}([f]_S\,\delta_S), \qquad (25)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}\right]_S\cos(nx_i)\,\delta_S=\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_S\delta_S, \qquad (26)$$

перепишем формулу (24) в виде

$$\Delta f=\{\Delta f\}+\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_S\delta_S+\frac{\partial}{\partial n}([f]_S\,\delta_S). \qquad (27)$$

Докажем формулу (25). При всех $\varphi\in\mathscr{D}$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}([f]_S\cos(nx_i)\,\delta_S),\ \varphi\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left([f]_S\cos(nx_i)\,\delta_S,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=$$
$$=-\sum_{i=1}^{n}\int_S[f]_S\cos(nx_i)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dS=-\int_S[f]_S\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cos(nx_i)\,dS=$$
$$=-\int_S[f]_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS=\left(\frac{\partial}{\partial n}([f]_S\,\delta_S),\ \varphi\right).$$

Формула (26) устанавливается аналогично.

Полагая в формуле (27) $f=0$, $x\in G_1$, получим

$$\Delta f=\{\Delta f\}-\frac{\partial f}{\partial n}\delta_S-\frac{\partial}{\partial n}(f\delta_S). \qquad (28)$$

Это есть вторая формула Грина, записанная в терминах обобщенных функций. Применяя обе части равенства (28) к основной функции φ, получим эту формулу в обычной

записи:

$$\int_G(f\,\Delta\varphi-\varphi\,\Delta f)\,dx=\int_S\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS. \qquad (29)$$

Если G — ограниченная область, то формула (29) справедлива для всех $\varphi\in C^2(\bar{G})$.

d) Пусть $n=2$. Вычислим $\Delta\ln|x|$. Функция $\ln|x|$ локально интегрируема в R^2. Если $x\neq 0$, то $\ln|x|\in C^\infty$, а поэтому $D^\alpha\ln|x|=\{D^\alpha\ln|x|\}$ (см. § 6.1). Следовательно, переходя к полярным координатам (см. (15) § 3.2), получаем

$$\Delta\ln|x|=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\ln r}{\partial r}\right)=0,\quad x\neq 0. \qquad (30)$$

Пусть $\varphi\in\mathscr{D}$, $\operatorname{supp}\varphi\subset U_R$. Тогда

$$(\Delta\ln|x|,\ \varphi)=$$
$$=(\ln|x|,\ \Delta\varphi)=\int_{U_R}\ln|x|\,\Delta\varphi(x)\,dx=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<R}\ln|x|\,\Delta\varphi(x)\,dx.$$

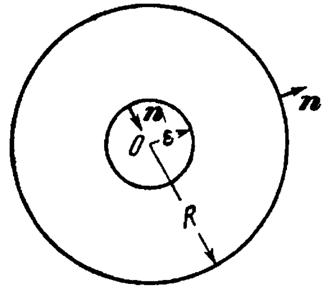

Рис. 28.

Применяя формулу (29) при $f=\ln|x|$ и $G=[\varepsilon<|x|<R]$ (рис. 28) и учитывая (30), получим, далее

$$(\Delta\ln|x|,\ \varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon<|x|<R}\Delta\ln|x|\,\varphi\,dx+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{S_\varepsilon}+\int_{S_R}\right)\left(\ln|x|\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\ln|x|}{\partial n}\right)dS\right]=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\left(-\ln|x|\frac{\partial\varphi}{\partial|x|}+\varphi\frac{1}{|x|}\right)dS=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\varphi\,dS=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dS+2\pi\varphi(0)\right\}=2\pi\varphi(0)=(2\pi\delta,\ \varphi).$$

Таким образом,

$$\Delta\ln|x|=2\pi\delta(x),\quad n=2. \qquad (31)$$

Аналогично при $n\geqslant 3$ получим

$$\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}}=-(n-2)\,\sigma_n\delta(x), \qquad (32)$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n:

$$\sigma_n = \int\limits_{S_1} ds = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

Γ — эйлеров интеграл (гамма-функция):

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

e) Проверим, что функции

$$\mathscr{E}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \overline{\mathscr{E}}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|} \tag{33}$$

при $n=3$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta\mathscr{E} + k^2\mathscr{E} = \delta(x). \tag{34}$$

Действительно, так как функции $\cos k|x|$ и $|x|^{-1}\sin k|x|$ бесконечно дифференцируемы, то при дифференцировании функции $|x|^{-1} e^{ik|x|}$ можно пользоваться формулой Лейбница (см. § 6.2, d)). Учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x|} = -\frac{x_j}{|x|^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} e^{ik|x|} = \frac{ikx_j}{|x|} e^{ik|x|},$$

$$\Delta e^{ik|x|} = \left(\frac{2ik}{|x|} - k^2\right) e^{ik|x|}$$

и пользуясь формулой (32) при $n=3$, получаем

$$(\Delta + k^2)\frac{1}{|x|} e^{ik|x|} =$$

$$= e^{ik|x|}\Delta\frac{1}{|x|} + 2\left(\operatorname{grad} e^{ik|x|}, \operatorname{grad}\frac{1}{|x|}\right) +$$

$$+ \frac{1}{|x|}\Delta e^{ik|x|} + \frac{k^2}{|x|} e^{ik|x|} = -4\pi e^{ik|x|}\delta(x) +$$

$$+\left(-\frac{2ik}{|x|^2} + \frac{2ik}{|x|^2} - \frac{k^2}{|x|} + \frac{k^2}{|x|}\right) e^{ik|x|} = -4\pi\delta(x),$$

что и утверждалось.

f) Пусть

$$\mathscr{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

Докажем, что

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - a^2\Delta\mathscr{E} = \delta(x, t). \tag{35}$$

Функция $\mathscr{E}(x, t)$ локально интегрируема в R^{n+1}, поскольку $\mathscr{E}=0$, $t<0$; $\mathscr{E}\geqslant 0$, $t\geqslant 0$ и при $t>0$

$$\int \mathscr{E}(x, t)\, dx = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\, dx =$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_i^2}\, d\xi_i = 1. \tag{36}$$

Если $t>0$, то $\mathscr{E}\in C^\infty$, а поэтому

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t}\right)\mathscr{E}, \quad \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2t}\mathscr{E}, \quad \frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^4t^2} - \frac{1}{2a^2t}\right)\mathscr{E},$$

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - a^2\Delta\mathscr{E} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t}\right)\mathscr{E} - \left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t}\right)\mathscr{E} = 0. \tag{37}$$

Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+1})$. Учитывая равенство (37), получаем

$$\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - a^2\Delta\mathscr{E}, \varphi\right) = -\left(\mathscr{E}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) =$$

$$= -\int\limits_0^\infty\int \mathscr{E}(x, t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) dx\, dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^\infty\int \mathscr{E}(x, t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) dx\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon)\, dx + \int\limits_\varepsilon^\infty\int\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t} - a^2\Delta\mathscr{E}\right)\varphi\, dx\, dt\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\varphi(x, 0)\, dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathscr{E}(x, \varepsilon)[\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)]\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\varphi(x, 0)\, dx, \tag{38}$$

так как, в силу (36),

$$\left|\int \mathscr{E}(x, \varepsilon)[\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)]\, dx\right| \leqslant K\varepsilon\int \mathscr{E}(x, \varepsilon)\, dx = K\varepsilon.$$

Докажем теперь соотношение

$$\mathscr{E}(x,\ t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \to \delta(x), \quad t \to +0 \text{ в } \mathscr{D}'(R^n). \tag{39}$$

Действительно, пусть $\varphi(x) \in \mathscr{D}$. Тогда, учитывая, что

$$\left|\int \mathscr{E}(x,\ t)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx\right| \leqslant \frac{K}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} |x|\,dx =$$

$$= \frac{K\sigma_n}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} r^n\,dr = \frac{2K\sigma_n \sqrt{ta}}{\pi^{n/2}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^n\,du = C\sqrt{t}$$

в силу (36), получаем при $t \to +0$ соотношение (39):

$$(\mathscr{E}(x,\ t),\ \varphi) = \int \mathscr{E}(x,\ t)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \int \mathscr{E}(x,\ t)\,dx +$$

$$+ \int \mathscr{E}(x,\ t)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx \to \varphi(0) = (\delta,\ \varphi).$$

Формула (35) следует из соотношений (38) и (39). Отметим, что предельное соотношение (39) справедливо и на ограниченных функциях, непрерывных в точке 0.

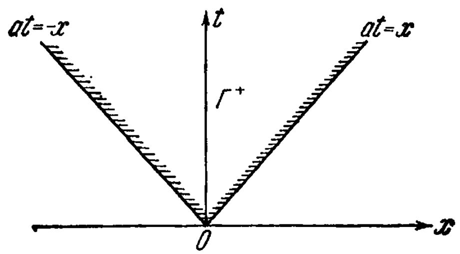

Рис. 29.

g) Пусть $x = x_1$ и

$$\mathscr{E}_1(x,\ t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|),$$

Докажем, что

$$\Box_a \mathscr{E}_1 = \delta(x,\ t). \tag{40}$$

Функция $\mathscr{E}_1$ локально интегрируема в R^2 и обращается в нуль вне замыкания конуса будущего $\overline{\Gamma}^+$ (рис. 29).

Пусть $\varphi \in \mathscr{D}$. Тогда

$$(\Box_a \mathscr{E}_1,\ \varphi) = (\mathscr{E}_1,\ \Box_a \varphi) = \int \mathscr{E}_1(x,\ t)\,\Box_a \varphi(x,\ t)\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{|x|}{a}}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\,dt\,dx - \frac{a}{2} \int_0^\infty \int_{-at}^{at} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,dx\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi\left(x,\ \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}\,dx - \frac{a}{2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial \varphi(at,\ t)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(-at,\ t)}{\partial x}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{\partial \varphi\left(x,\ \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}\,dx - \frac{a}{2} \int_0^\infty \frac{\partial \varphi(at,\ t)}{\partial x}\,dt -$$

$$- \frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{\partial \varphi\left(-x,\ \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}\,dx + \frac{a}{2} \int_0^\infty \frac{\partial \varphi(-at,\ t)}{\partial x}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial \varphi(at,\ t)}{\partial t} + a\frac{\partial \varphi(at,\ t)}{\partial x}\right] dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial \varphi(-at,\ t)}{\partial t} - a\,\frac{\partial \varphi(-at,\ t)}{\partial x}\right] dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\varphi(at,\ t)}{dt}\,dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\varphi(-at,\ t)}{dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(0,\ 0) + \frac{1}{2}\varphi(0,\ 0) = (\delta,\ \varphi),$$

что и доказывает равенство (40).

h) Пусть δ_{S_r} — простой слой на сфере $|x| = r$ (см. § 5.7). Установим справедливость соотношения (формула Пицетти)

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\delta_{S_r} - \delta\right) \to \frac{1}{2n}\Delta\delta, \quad r \to 0 \text{ в } \mathscr{D}'. \tag{41}$$

Действительно, при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ при $r \to 0$ имеем

$$\left(\frac{1}{\sigma_n r^{n+1}}\delta_{S_r} - \frac{1}{r^2}\delta,\ \varphi\right) =$$
$$= \frac{1}{\sigma_n r^{n+1}}\int\limits_{S_r}\varphi(x)\,dS - \frac{\varphi(0)}{r^2} = \frac{1}{\sigma_n r^2}\int\limits_{S_1}[\varphi(rs)-\varphi(0)]\,ds =$$
$$= \frac{1}{\sigma_n r^2}\int\limits_{S_1}\left[r\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi(0)}{\partial x_k}s_k + \frac{r^2}{2}\sum_{k,\,i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial x_k\,\partial x_i}s_k s_i + O(r^3)\right]ds \to$$
$$\to \frac{1}{2n}\Delta\varphi(0) = \frac{1}{2n}(\Delta\delta,\ \varphi),$$

так как

$$\int\limits_{S_1} s_k\,ds = 0,\quad \int\limits_{S_1} s_k s_i\,ds = \delta_{ki}\int\limits_{S_1} s_k^2\,ds = \frac{\sigma_n}{n}\delta_{ki},$$

$$\int\limits_{S_1} s_k^2\,ds = \sigma_{n-1}\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta\cos^2\theta\,d\theta = \sigma_{n-1}\int\limits_0^1(1-\mu)^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{\mu}\,d\mu =$$
$$= \sigma_{n-1}\mathrm{B}\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{3}{2}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sigma_n}{n}.$$

Здесь B — эйлеров интеграл (бета-функция):

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \int\limits_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

i) Пусть $n=2$, $z=x+iy$, $\bar z = x-iy$, $dz=dx+i\,dy$. Дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

называется *оператором Коши — Римана*. Пусть $f\in C^1(\bar G)$ и $f(x,\ y)=0$, $z\in G_1$, где $G_1 = R^2\setminus\bar G$.

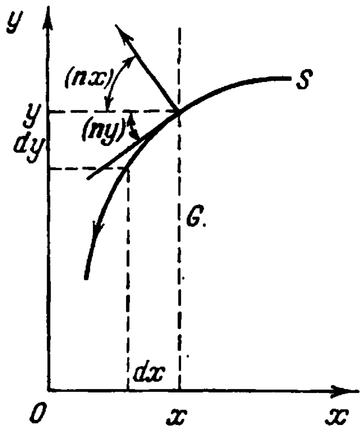

Рис. 30.

Границу S области G предполагаем кусочно-гладкой линией; за положительное направление на S принимаем то направление, при движении по которому область G остается слева, как это принято в ТФКП (рис. 30). Используя

формулу (22), выводим

$$\frac{\partial f}{\partial\bar z} = \left\{\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right\} - \frac{f}{2}[\cos(nx)+i\cos(ny)]\,\delta_S. \qquad (42)$$

Применяя обе части равенства (42) к основной функции φ, получаем формулу, аналогичную формуле (29):

$$\int\limits_G\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}+\frac{\partial f}{\partial\bar z}\varphi\right)dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_S f\varphi[\cos(nx)+i\cos(ny)]\,dS =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_S f\varphi\,(dy-i\,dx) = -\frac{i}{2}\int\limits_S f\varphi\,dz,$$

т. е.

$$\int\limits_G\frac{\partial}{\partial\bar z}(f\varphi)\,dx\,dy = -\frac{i}{2}\int\limits_S f\varphi\,dz. \qquad (43)$$

j) Докажем, что

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{1}{z} = \pi\delta(x,\ y). \qquad (44)$$

Функция $\frac{1}{z}$ локально интегрируема в R^2. Поэтому, пользуясь формулой (43) при $f=\frac{1}{z}$ и $G=[\varepsilon<|z|<R]$ (рис. 28), при всех $\varphi\in\mathscr{D}$, $\operatorname{supp}\varphi\subset U_R$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{1}{z},\ \varphi\right) = -\left(\frac{1}{z},\ \frac{\partial}{\partial\bar z}\varphi\right) =$$
$$= -\int\limits_{U_R}\frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}\,dx\,dy = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon<|z|<R}\frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}\,dx\,dy =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{\varepsilon<|z|<R}\varphi\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{1}{z}\,dx\,dy + \frac{i}{2}\left(\int\limits_{S_R}-\int\limits_{S_\varepsilon}\right)\frac{\varphi}{z}\,dz\right] =$$
$$= -\frac{i}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|z|=\varepsilon}\varphi(z)\frac{dz}{z} = -\frac{i}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} i\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta =$$
$$= \pi\varphi(0) = (\pi\delta,\ \varphi),$$

что и требовалось.

6. Упражнения. а) Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathscr{P}\frac{1}{x},\quad \frac{d}{dx}\mathscr{P}\frac{1}{x} = -\mathscr{P}\frac{1}{x^2},$$
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x\pm i0} = \mp i\pi\delta'(x) - \mathscr{P}\frac{1}{x^2},$$

где

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x^2},\ \varphi\right)=\mathrm{Vp}\int\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx.$$

b) Показать, что стоящие справа обобщенные функции являются общими решениями в $\mathscr{D}'(R^1)$ уравнений:

$$xu'=1,\qquad u=c_1+c_2\theta(x)+\ln|x|,$$

$$xu'=\mathscr{P}\frac{1}{x},\qquad u=c_1+c_2\theta(x)-\mathscr{P}\frac{1}{x},$$

$$x^2u'=1,\qquad u=c_1+c_2\theta(x)+c_3\delta(x)-\mathscr{P}\frac{1}{x},$$

$$xu=\sin x,\qquad u=c\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{|x|},$$

где

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|},\ \varphi\right)=\int\limits_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx+\int\limits_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx,$$

$$(\sin x)\,u=0,\quad u=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\delta(x-k\pi).$$

Обратим внимание, что классические решения дифференциальных уравнений первого порядка содержат лишь одну произвольную постоянную!

c) Доказать равенство

$$a(x)\,\delta'(x)=-a'(0)\,\delta(x)+a(0)\,\delta'(x),\qquad a\in C^1(R^1).$$

d) Доказать: если $f\in\mathscr{D}'$ и $f(x)=0$, $x<x_0$, то существует единственная первообразная $f^{(-1)}$, обращающаяся в нуль при $x<x_0$.

e) Доказать равенство

$$(D^\alpha f)(x+h)=D^\alpha f(x+h),\qquad f\in\mathscr{D}',\quad h\in R^n.$$

f) Доказать: если обобщенная функция инвариантна относительно всех сдвигов, то она — постоянная.

g) Доказать, что система обобщенных функций $D^\alpha\delta(x)$, $|\alpha|=m$, $m=0,1,\ldots,$ линейно независима.

h) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\delta^{(k)}(x-k)$$

сходится в $\mathscr{D}'$ при любых α_k.

i) Доказать, что общее решение в $\mathscr{D}'$ уравнения $x^nu^{(m)}=0$, $n>m$, есть

$$u(x)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k\theta(x)\,x^{m-1-k}+\sum_{k=m}^{n-1}c_k\delta^{(k-m)}(x)+\sum_{k=0}^{m-1}d_kx^k,$$

где c_k и d_k — произвольные постоянные.

§ 7. Прямое произведение и свертка обобщенных функций

1. Определение прямого произведения. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ — локально интегрируемые функции в пространствах R^n и R^m соответственно. Функция $f(x)g(y)$ также будет локально интегрируемой в R^{n+m}. Она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции $\varphi(x,y)\in\mathscr{D}$ по формулам

$$(f(x)g(y),\ \varphi)=\int f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy=$$
$$=\int f(x)\int g(y)\varphi(x,y)\,dy\,dx=(f(x),\ (g(y),\ \varphi(x,y))),\quad(1)$$

$$(g(y)f(x),\ \varphi)=\int g(y)f(x)\varphi(x,y)\,dx\,dy=$$
$$=\int g(y)\int f(x)\varphi(x,y)\,dx\,dy=(g(y),\ (f(x),\ \varphi(x,y))).\quad(1')$$

Эти равенства выражают теорему Фубини (см. § 1.4, h)) о совпадении повторных интегралов с кратным. Равенство (1) мы и примем за определение *прямого произведения* $f(x)\cdot g(y)$ обобщенных функций $f(x)\in\mathscr{D}'(R^n)$ и $g(y)\in\mathscr{D}'(R^m)$:

$$(f(x)\cdot g(y),\ \varphi)=(f(x),\ (g(y),\ \varphi(x,y))),\quad\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m}).\quad(2)$$

Проверим, что это определение корректно, т. е. что правая часть равенства (2) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathscr{D}(R^{n+m})$.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Для любых $g\in\mathscr{D}'(R^m)$ и $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$ функция $\psi(x)=(g(y),\ \varphi(x,y))$ принадлежит $\mathscr{D}(R^n)$, причем при всех α*

$$D^\alpha\psi(x)=(g(y),\ D_x^\alpha\varphi(x,y)).\quad(3)$$

Далее, если $\varphi_k\to0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}(R^{n+m})$, то

$$\psi_k(x)=(g(y),\ \varphi_k(x,y))\to0,\ k\to\infty\ \text{в}\ \mathscr{D}(R^n).$$

Доказательство. Так как при каждом $x\in R^n$ $\varphi(x,y)\in\mathscr{D}(R^m)$, то функция $\psi(x)$ определена в R^n. Докажем, что она непрерывна в R^n. Фиксируем точку x, и пусть $x_k\to x$, $k\to\infty$. Тогда

$$\varphi(x_k,y)\to\varphi(x,y),\ k\to\infty\ \text{в}\ \mathscr{D}(R^m),\quad(4)$$

так как, в силу $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$, носители $\varphi(x_k, y)$ ограничены в R^m независимо от k (рис. 31) и при всех β

$$D_y^\beta\varphi(x_k, y)\overset{y\in R^m}{\rightrightarrows} D_y^\beta\varphi(x, y),\qquad k\to\infty.$$

Поскольку функционал $g(y)$ непрерывен на $\mathscr{D}(R^m)$, то из (4) вытекает непрерывность функции $\psi(x)$ в точке x:

$$\psi(x_k)=(g(y),\ \varphi(x_k, y))\to(g(y),\ \varphi(x, y))=\psi(x),\qquad x_k\to x.$$

Докажем теперь формулу (3). Фиксируем точку x и обозначим $h_i=(\underbrace{0, \ldots, h}_{i}, \ldots, 0)$. Тогда

$$\chi_h^{(i)}(y)=\frac{1}{h}\left[\varphi(x+h_i, y)-\varphi(x, y)\right]\to\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_i},\qquad (5)$$
$$h\to 0 \text{ в } \mathscr{D}(R^m),$$

так как, в силу $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$, носители $\chi_h^{(i)}$ ограничены в R^m независимо от h и при всех β

$$D^\beta\chi_h^{(i)}(y)=\frac{1}{h}\left[D_y^\beta\varphi(x+h_i, y)-D_y^\beta\varphi(x, y)\right]\overset{y\in R^m}{\rightrightarrows} D_y^\beta\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_i},$$
$$h\to 0.$$

Поскольку $g\in\mathscr{D}'(R^m)$, то, пользуясь (5), получаем

$$\frac{\psi(x+h_i)-\psi(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[(g(y),\ \varphi(x+h_i, y))-(g(y),\ \varphi(x, y))\right]=$$
$$=\left(g(y),\ \frac{\varphi(x+h_i, y)-\varphi(x, y)}{h}\right)=(g,\ \chi_h^{(i)})\to\left(g(y),\ \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_i}\right),$$
$$h\to 0,$$

откуда и вытекает справедливость формулы (3) при $\alpha=(\underbrace{0, \ldots, 1}_{i}, \ldots, 0)$:

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}=\left(g(y),\ \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_i}\right),\qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Применяя снова эти рассуждения к полученной формуле, убеждаемся в справедливости формулы (3) при всех α. Так как, вместе с φ, $D^\alpha\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$, то из формулы (3) заключаем по доказанному, что $D^\alpha\psi(x)$ — непрерывная функция в R^n при всех α. Таким образом, $\psi\in C^\infty(R^n)$. Далее, функция $\psi(x)$ финитна в R^n, ибо $\varphi(x, y)=0$, $|x|>R$

(рис. 31), а потому $\psi(x)=(g, 0)=0$ при этих x. Следовательно, $\psi\in\mathscr{D}(R^n)$.

Пусть $\varphi_k(x, y)\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Докажем, что $\psi_k(x)\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}(R^n)$: Так как носители $\varphi_k(x, y)$ ограничены в R^{n+m} независимо от k, то, как мы видели выше, носители $\psi_k(x)$ также ограничены в R^n независимо от k. Поэтому осталось доказать, что при всех α

$$D^\alpha\psi_k(x)\overset{x\in R^n}{\rightrightarrows} 0,\qquad k\to\infty.$$

Пусть это не так. Тогда найдутся такие число $\varepsilon_0>0$, индекс α_0 и последовательность точек x_k, что

$$|D^{\alpha_0}\psi_k(x_k)|\geqslant\varepsilon_0,$$
$$k=1, 2, \ldots \qquad (6)$$

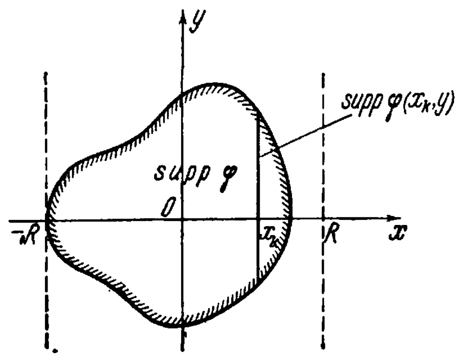

Рис. 31.

Так как носители ψ_k ограничены в R^n независимо от k, то из (6) следует, что последовательность x_k, $k=1, 2, \ldots$, также ограничена в R^n. Поэтому по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. § 1.1) из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{k_i}\to x_0$, $i\to\infty$. Но тогда

$$D_x^{\alpha_0}\varphi_{k_i}(x_{k_i}, y)\to 0,\quad i\to\infty \text{ в } \mathscr{D}(R^m).$$

Отсюда, в силу непрерывности функционала g на $\mathscr{D}(R^m)$, из формулы (3) получаем

$$D^{\alpha_0}\psi_{k_i}(x_{k_i})=\left(g(y),\quad D_x^{\alpha_0}\varphi_{k_i}(x_{k_i}, y)\right)\to 0,\quad i\to\infty,$$

что противоречит неравенствам (6). Лемма доказана.

Вернемся к определению прямого произведения. По только что доказанной лемме $\psi(x)=(g(y),\ \varphi(x, y))\in\mathscr{D}(R^n)$ для всех $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$. Следовательно, правая часть равенства (2), равная (f, ψ), имеет смысл для любых обобщенных функций f и g и, таким образом, определяет функционал на $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Далее, из линейности функционалов f и g следует линейность этого функционала.

Докажем, что построенный функционал непрерывен на $\mathcal{D}(R^{n+m})$. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}(R^{n+m})$. Тогда по лемме

$$(g(y),\ \varphi_k(x,\ y)) \to 0,\ k \to \infty \text{ в } \mathcal{D}(R^n),$$

а потому, в силу непрерывности функционала f на $\mathcal{D}(R^n)$, $(f(x),\ (g(y),\ \varphi_k(x,\ y))) \to 0$, $k \to \infty$, что и означает непрерывность линейного функционала, стоящего в правой части равенства (2).

Таким образом, функционал $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{D}'(R^{n+m})$, т. е. является обобщенной функцией.

2. Коммутативность прямого произведения. Пусть даны обобщенные функции $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ и $g \in \mathcal{D}'(R^m)$. Наряду с прямым произведением $f(x) \cdot g(y)$, в соответствии с формулой (2), определяется прямое произведение $g(y) \cdot f(x)$:

$$(g(y) \cdot f(x),\ \varphi) = (g(y),\ (f(x),\ \varphi(x,\ y))),\quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m}). \qquad (2')$$

Оказывается, что

$$f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x), \qquad (7)$$

т. е. операция прямого произведения *коммутативна*.

Действительно, на основных функциях $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ вида

$$\varphi(x,\ y) = \sum_{l=1}^{N} u_l(x)\, v_l(y),\quad u_l \in \mathcal{D}(R^n),\ v_l \in \mathcal{D}(R^m), \qquad (8)$$

равенство (7) вытекает из определений (2) и (2'):

$$(f(x) \cdot g(y),\ \varphi) = \left(f,\ \sum_{l=1}^{N} u_l(g,\ v_l)\right) = \sum_{l=1}^{N} (f,\ u_l)(g,\ v_l) =$$

$$= \left(g,\ \sum_{l=1}^{N} v_l(f,\ u_l)\right) = (g(y) \cdot f(x),\ \varphi).$$

Чтобы распространить равенство (7) на любые основные функции, докажем лемму о том, что множество основных функций вида (8) плотно в $\mathcal{D}(R^{n+m})$ (ср. § 1.7).

Лемма. *Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$ существует последовательность основных функций $\varphi_k(x,\ y)$, $k = 1, 2, \ldots$, вида* (8), *сходящаяся к φ в $\mathcal{D}(R^{n+m})$.*

Доказательство. Пусть носитель $\varphi(x,\ y)$ содержится в шаре $\bar{U}_R$ (рис. 32). По теореме Вейерштрасса

(см. § 1.3) существуют полиномы $P_k(x,\ y)$, $k = 1, 2, \ldots$ такие, что

$$|D^\alpha \varphi - D^\alpha P_k| < \frac{1}{k} \text{ при всех } |\alpha| \leqslant k \text{ и } |x|^2 + |y|^2 \leqslant 8R^2. \quad (9)$$

Пусть $e(x)$ и $h(y)$ — основные функции, равные 1 в шаре радиуса R и 0 вне шара радиуса $2R$ (по лемме 1 § 5.2 такие функции существуют). Тогда последовательность основных функций

$$\varphi_k(x,\ y) = e(x)\, h(y)\, P_k(x,\ y), \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

обладает требуемыми свойствами. Действительно, φ_k имеют вид (8), их носители содержатся в шаре $|x|^2 + |y|^2 \leqslant 8R^2$ и, в силу (9), при любых α и $k \geqslant |\alpha|$

$$|D^\alpha \varphi - D^\alpha \varphi_k| = |D^\alpha \varphi - D^\alpha (ehP_k)| \leqslant \frac{C_\alpha}{k},$$

$$|x|^2 + |y|^2 \leqslant 8R^2,$$

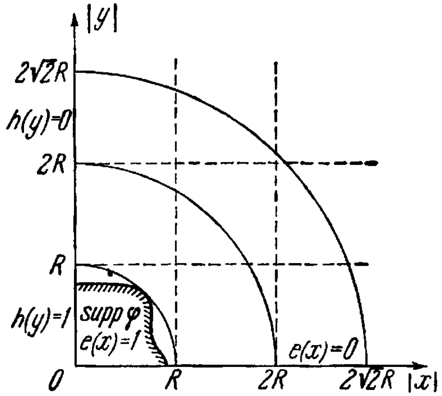

Рис. 32.

где C_α — некоторые числа, не зависящие от k. Это значит, что $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}(R^{n+m})$. Лемма доказана.

Пусть φ — произвольная основная функция из $\mathcal{D}(R^{n+m})$. В силу доказанной леммы существует последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ основных функций вида (8), сходящаяся к φ в $\mathcal{D}(R^{n+m})$. Отсюда, пользуясь непрерывностью на $\mathcal{D}(R^{n+m})$ функционалов $f(x) \cdot g(y)$ и $g(y) \cdot f(x)$ (см. § 7.1) и доказанным равенством (7) на функциях вида (8), получим равенство (7) и в общем случае:

$$(f(x) \cdot g(y),\ \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f(x) \cdot g(y),\ \varphi_k) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} (g(y) \cdot f(x),\ \varphi_k) = (g(y) \cdot f(x),\ \varphi).$$

3. Дальнейшие свойства прямого произведения.

а) *Операция прямого произведения $f(x) \cdot g(y)$ линейна и непрерывна относительно f* (из $\mathcal{D}'(R^n)$ в $\mathcal{D}'(R^{n+m})$) *и* *относительно* g (из $\mathscr{D}'(R^m)$ в $\mathscr{D}'(R^{n+m})$), например:

$$[\lambda f(x)+\mu f_1(x)]\cdot g(y)=\lambda[f(x)\cdot g(y)]+\mu[f_1(x)\cdot g(y)],$$
$$f,\ f_1\in\mathscr{D}'(R^n),\qquad g\in\mathscr{D}'(R^m);$$
$$f_k(x)\cdot g(y)\to 0,\quad k\to\infty \text{ в } \mathscr{D}'(R^{n+m}),$$
$$\text{если } f_k\to\infty \text{ в } \mathscr{D}'(R^n).$$

Докажем непрерывность. Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$. По лемме § 7.1 $\psi(x)=(g(y),\ \varphi(x,\ y))\in\mathscr{D}(R^n)$. Поэтому, пользуясь определением (2) прямого произведения, получаем

$$(f_k(x)\cdot g(y),\ \varphi)=(f_k(x),\ (g(y),\ \varphi(x,\ y)))=$$
$$=(f_k,\ \psi)\to 0,\ k\to\infty,$$

что и требовалось.

b) Ассоциативность прямого произведения: если $f\in\mathscr{D}'(R^n)$, $g\in\mathscr{D}'(R^m)$ и $h\in\mathscr{D}'(R^k)$, то

$$f(x)\cdot[g(y)\cdot h(z)]=[f(x)\cdot g(y)]\cdot h(z). \tag{10}$$

Действительно, если $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m+k})$, то

$$(f(x)\cdot[g(y)\cdot h(z)],\ \varphi)=(f(x),\ (g(y)\cdot h(z),\ \varphi))=$$
$$=(f(x),\ (g(y),\ (h(z),\ \varphi)))=$$
$$=(f(x)\cdot g(y),\ (h(z),\ \varphi))=([f(x)\cdot g(y)]\cdot h(z),\ \varphi).$$

c) Дифференцирование прямого произведения:

$$D_x^\alpha[f(x)\cdot g(y)]=D^\alpha f(x)\cdot g(y). \tag{11}$$

В самом деле, если $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$, то (см. § 6.1)

$$\left(D_x^\alpha[f(x)\cdot g(y)],\ \varphi\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(f(x)\cdot g(y),\ D_x^\alpha\varphi\right)=$$
$$=(-1)^{|\alpha|}\left(g(y),\ \left(f(x),\ D_x^\alpha\varphi(x,\ y)\right)\right)=$$
$$=(g(y),\ (D^\alpha f(x),\ \varphi))=(D^\alpha f(x)\cdot g(y),\ \varphi).$$

d) Умножение прямого произведения: если $a\in C^\infty(R^n)$, то

$$a(x)[f(x)\cdot g(y)]=a(x)f(x)\cdot g(y). \tag{12}$$

Действительно, если $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$, то (см. § 5.10)

$$(a(x)[f(x)\cdot g(y)],\ \varphi)=(f(x)\cdot g(y),\ a\varphi)=$$
$$=(f(x),\ (g(y),\ a(x)\varphi(x,\ y)))=(f(x),\ a(x)(g(y),\ \varphi(x,\ y)))=$$
$$=(a(x)f(x),\ (g(y),\ \varphi(x,\ y)))=(a(x)f(x)\cdot g(y),\ \varphi).$$

e) Сдвиг прямого произведения:

$$(f\cdot g)(x+h,\ y)=f(x+h)\cdot g(y). \tag{13}$$

В самом деле, если $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$, то (см. § 5.9)

$$((f\cdot g)(x+h,\ y),\ \varphi)=(f(x)\cdot g(y),\ \varphi(x-h,\ y))=$$
$$=(g(y),\ (f(x),\ \varphi(x-h,\ y)))=$$
$$=(g(y),\ (f(x+h),\ \varphi(x,\ y)))=(f(x+h)\cdot g(y),\ \varphi).$$

f) Говорят, что обобщенная функция вида $f(x)\cdot 1(y)$ *не зависит от* y. Она действует по правилу: если $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$, то

$$(f(x)\cdot 1(y),\ \varphi)=\left(f(x),\ \int\varphi(x,\ y)\,dy\right)=(1(y)\cdot f(x),\ \varphi)=$$
$$=\int(f(x),\ \varphi(x,\ y))\,dy.$$

Таким образом, получено равенство

$$\left(f(x),\ \int\varphi(x,\ y)\,dy\right)=\int(f(x),\ \varphi(x,\ y))\,dy, \tag{14}$$

справедливое для всех $f\in\mathscr{D}'(R^n)$ и $\varphi\in\mathscr{D}(R^{n+m})$.

4. Свертка обобщенных функций. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — локально интегрируемые функции в R^n, причем функция

$$h(x)=\int|g(y)f(x-y)|\,dy$$

также локально интегрируема в R^n. *Сверткой* $f*g$ этих функций называется функция

$$(f*g)(x)=\int f(y)g(x-y)\,dy=$$
$$=\int g(y)f(x-y)\,dy=(g*f)(x). \tag{15}$$

Отметим, что свертки $f*g$ и $|f|*|g|=h$ существуют одновременно и удовлетворяют неравенству $|(f*g)(x)|\leqslant\leqslant h(x)$ (при почти всех x), так что свертка $f*g$ оказывается также локально интегрируемой функцией в R^n (см. § 1.4, b)). Поэтому она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$ по правилу:

$$(f*g,\ \varphi)=$$
$$=\int(f*g)(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi=\int\left[\int g(y)f(\xi-y)\,dy\right]\varphi(\xi)\,d\xi=$$
$$=\int g(y)\left[\int f(\xi-y)\varphi(\xi)\,d\xi\right]dy=$$
$$=\int g(y)\left[\int f(x)\varphi(x+y)\,dx\right]dy$$

(в силу теоремы Фубини, см. § 1.4, h)), т. е.

$$(f*g,\ \varphi)=\int f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)\,dx\,dy,\quad \varphi\in\mathscr{D}(R^n). \qquad (16)$$

Отметим три случая, когда условие локальной интегрируемости функции $h(x)$ выполнено и, стало быть, свертка $f*g$ существует и определяется формулой (15).

1) Одна из функций f или g финитна, например $\operatorname{supp} g\subset U_{R_1}$:

$$\int\limits_{U_R} h(x)\,dx=\int\limits_{U_{R_1}}|g(y)|\int\limits_{U_R}|f(x-y)|\,dx\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{U_{R_1}}|g(y)|\,dy\int\limits_{U_{R+R_1}}|f(\xi)|\,d\xi<\infty.$$

2) Функции f и g обращаются в нуль при $x<0$ $(n=1)$:

$$\int\limits_{-R}^{R} h(x)\,dx=\int\limits_0^R\int\limits_0^x|g(y)|\,|f(x-y)|\,dy\,dx=$$
$$=\int\limits_0^R|g(y)|\int\limits_y^R|f(x-y)|\,dx\,dy\leqslant\int\limits_0^R|g(y)|\,dy\int\limits_0^R|f(\xi)|\,d\xi<\infty.$$

3) Функции f и g интегрируемы на R^n:

$$\int h(x)\,dx=\int|g(y)|\int|f(x-y)|\,dx\,dy=$$
$$=\int|g(y)|\,dy\int|f(\xi)|\,d\xi<\infty,$$

так что в этом случае свертка $f*g$ интегрируема на R^n.

Будем говорить, что последовательность $\{\eta_k\}$ основных функций из $\mathscr{D}(R^n)$ *сходится к* 1 в R^n, если:

a) для любого компакта K найдется такой номер N, что $\eta_k(x)=1$ при всех $x\in K$ и $k\geqslant N$; b) функции $\{\eta_k\}$ равномерно ограничены в R^n вместе со всеми производными, $|D^\alpha\eta_k(x)|<C_\alpha$, $x\in R^n$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha$ — любое. Возможный график функций последовательности $\eta_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, при $n=1$ изображен на рис. 33.

Отметим, что такие последовательности всегда существуют, например: $\eta_k(x)=\eta\left(\frac{x}{k}\right)$, где $\eta\in\mathscr{D}$, $\eta(x)=1$ в U_1.

Докажем, что равенство (16) можно переписать в виде

$$(f*g,\ \varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\,g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)), \qquad (16')$$
$$\varphi\in\mathscr{D}(R^n),$$

где $\eta_k(x;\ y)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, — любая последовательность, сходящаяся к 1 в R^{2n}.

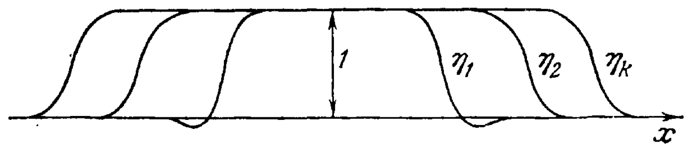

Рис. 33.

Действительно, по доказанному функция

$$c_0|f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)|$$

интегрируема на R^{2n} и

$$|f(x)\,g(y)\,\eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)|\leqslant c_0|f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)|,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots$$

Далее,

$$f(x)\,g(y)\,\eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)\to f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y),$$
$$k\to\infty \text{ почти везде в } R^{2n}.$$

Применяя теорему Лебега (см. § 1.4, f)), получим равенство

$$\int f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)\,dx\,dy=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\int f(x)\,g(y)\,\eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)\,dx\,dy,$$

что, в силу (16), эквивалентно равенству (16′).

Исходя из равенств (16) и (16′), примем следующее определение свертки. Пусть пара обобщенных функций f и g из $\mathscr{D}'(R^n)$ такова, что их прямое произведение $f(x)\cdot g(y)$ допускает продолжение (см. § 1.10) $(f(x)\cdot g(y),\ \varphi(x+y))$ на функции вида $\varphi(x+y)$, где φ — любая функция из $\mathscr{D}(R^n)$, в следующем смысле: какова бы ни была последовательность $\{\eta_k\}$ функций из $\mathscr{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n}, существует предел числовой последовательности

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y),\quad \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y))=(f(x)\cdot g(y),\quad \varphi(x+y))$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$. Отметим, что при каждом k функция $\eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)$ принадлежит $\mathscr{D}(R^{2n})$, так что наша числовая последовательность определена.

Сверткой $f*g$ называется функционал

$$(f*g,\ \varphi)=(f(x)\cdot g(y),\ \varphi(x+y))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)),\quad \varphi\in\mathscr{D}(R^n).\quad (17)$$

Докажем, что функционал $f*g$ принадлежит $\mathscr{D}'(R^n)$, т. е. является обобщенной функцией. Для этого, в силу полноты пространства $\mathscr{D}'(R^n)$ (см. § 5.4), достаточно установить непрерывность линейных функционалов

$$(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)),\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\quad (18)$$

на $\mathscr{D}(R^n)$. Пусть $\varphi_\nu\to 0$, $\nu\to\infty$ в $\mathscr{D}(R^n)$. Тогда

$$\eta_k(x;\ y)\,\varphi_\nu(x+y)\to 0,\ \ \nu\to\infty\ \text{ в }\ \mathscr{D}(R^{2n}),$$

поскольку $\eta_k\in\mathscr{D}(R^{2n})$. Отсюда, в силу непрерывности функционала $f(x)\cdot g(y)$ на $\mathscr{D}(R^{2n})$ (см. § 7.1), получаем

$$(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi_\nu(x+y))\to 0,\quad \nu\to\infty,$$

что доказывает непрерывность функционалов (18) на $\mathscr{D}(R^n)$.

Заметим, что, поскольку $\varphi(x+y)$ не принадлежит $\mathscr{D}(R^{2n})$ (она не финитна в R^{2n}!), правая часть равенства (17) существует не для любых пар обобщенных функций f и g, и, таким образом, свертка существует не всегда.

Пример. *Свертка любой обобщенной функции f с δ-функцией существует и равна f,*

$$f*\delta=\delta*f=f.$$

Действительно, пусть $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$ и $\{\eta_k\}$ — любая последовательность функций из $\mathscr{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n}. Тогда $\eta_k(x;\ 0)\ \ \varphi(x)\to\varphi(x)$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}(R^n)$, и поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot\delta(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(f(x),\ \eta_k(x;\ 0)\,\varphi(x))=(f,\ \varphi).$$

Отсюда, в силу определения (17), следует, что свертки $f*\delta$ и $\delta*f$ существуют и равны f, что и утверждалось.

Замечание. Смысл формулы $f=f*\delta$ состоит в том, что всякую обобщенную функцию f можно разложить по δ-функциям, что формально часто записывают так:

$$f(x)=\int f(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi.$$

Именно эту формулу и имеют в виду, когда говорят, что всякое материальное тело состоит из точечных масс, всякий источник состоит из точечных источников и т. д.

5. Свойства свертки.

a) Линейность свертки. *Свертка $f*g$ — линейная операция из $\mathscr{D}'$ в $\mathscr{D}'$ относительно f и g в отдельности*, например:

$$(\lambda f+\mu f_1)*g=\lambda(f*g)+\mu(f_1*g),\quad f,\ f_1,\ g\in\mathscr{D}',$$

при условии, что свертки $f*g$ и f_1*g существуют.

Это свойство свертки непосредственно следует из определения (17) и из линейности прямого произведения $f(x)\cdot g(y)$ относительно f и g в отдельности (см. § 7.3, a)).

Отметим попутно, что свертка $f*g$, вообще говоря, не является непрерывной операцией из $\mathscr{D}'$ в $\mathscr{D}'$ относительно f или g, например: $\delta(x-k)\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'(R^1)$, но

$$1*\delta(x-k)=1\not\to 0,\ \ k\to\infty\ \text{ в }\ \mathscr{D}'(R^1).$$

b) Коммутативность свертки. *Если свертка $f*g$ существует, то существует и свертка $g*f$ и они равны:*

$$f*g=g*f.\quad (19)$$

Это утверждение вытекает из определения свертки и из коммутативности прямого произведения (см. § 7.2):

$$(f*g,\ \varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(g(y)\cdot f(x),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y))=(g*f,\ \varphi),\quad \varphi\in\mathscr{D},$$

c) Дифференцирование свертки. *Если свертка $f*g$ существует, то существуют свертки $D^\alpha f*g$ и $f*D^\alpha g$, причем*

$$D^\alpha f*g=D^\alpha(f*g)=f*D^\alpha g.\quad (20)$$

Это утверждение достаточно доказать для каждой первой производной D_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$ и $\eta_k(x;\ y)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ — произвольная последовательность функций из $\mathscr{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n}. Тогда последовательность $\eta_k+\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ функций из $\mathscr{D}(R^{2n})$ также сходится к 1 в R^{2n}. Отсюда, пользуясь существованием свертки $f*g$ (см. § 7.4), получим следующую цепочку равенств:

$$
\begin{aligned}
(D_j(f*g),\ \varphi) &= -(f*g,\ D_j\varphi) = \\
&= -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_j}\right) = \\
&= -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\cdot g(y),\ \frac{\partial[\eta_k\varphi(x+y)]}{\partial x_j} - \frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\varphi(x+y)\right) = \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}[f(x)\cdot g(y)],\ \eta_k\varphi(x+y)\right) + \\
&+ \lim_{k\to\infty}\left(f(x)\cdot g(y),\ \left(\eta_k+\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)\varphi(x+y)\right) - \\
&- \lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k\varphi(x+y)) = \\
&= \lim_{k\to\infty}(D_jf(x)\cdot g(y),\ \eta_k\varphi(x+y)) + \\
&+ (f*g,\ \varphi) - (f*g,\ \varphi) = (D_jf*g,\ \varphi),
\end{aligned}
$$

откуда и следует первое равенство (20) для D_j. Второе равенство (20) следует из первого и из коммутативности свертки (см. § 7.5, b)):

$$D_j(f*g) = D_j(g*f) = D_jg*f = f*D_jg.$$

Из равенств (20) вытекают равенства

$$D^\alpha f = D^\alpha\delta * f = \delta * D^\alpha f, \qquad f\in\mathscr{D}'. \tag{21}$$

Отметим, что существование сверток $D^\alpha f*g$ и $f*D^\alpha g$, $|\alpha|\geqslant 1$, недостаточно для существования свертки $f*g$ и справедливости равенства $D^\alpha f*g = f*D^\alpha g$, например: $\theta'*1 = \delta*1 = 1$, но $\theta*1' = \theta*0 = 0$. Другими словами, операция свертки, вообще говоря, не ассоциативна:

$$(\theta*\delta')*1 = \theta'*1 = 1, \quad \text{но} \quad \theta*(\delta'*1) = \theta*0 = 0.$$

d) Сдвиг свертки. *Если свертка $f*g$ существует, то существует и свертка $f(x+h)*g(x)$, причем*

$$f(x+h)*g(x) = (f*g)(x+h), \qquad h\in R^n, \tag{22}$$

т. е. операции сдвига и свертки коммутируют.

Действительно, пусть $\eta_k(x;\ y)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ — любая последовательность функций из $\mathscr{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n}. Тогда при любом $h\in R^n$ последовательность $\eta_k(x-h;\ y)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ сходится к 1 в R^{2n}. Теперь,

пользуясь определениями сдвига (см. § 5.9) и свертки (см. § 7.4), при всех $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$ получаем

$$
\begin{aligned}
((f*g)(x+h),\ \varphi) &= (f*g,\ \varphi(x-h)) = \\
&= \lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x-h;\ y)\varphi(x-h+y)) = \\
&= \lim_{k\to\infty}(f(x+h)\cdot g(y),\ \eta_k(x;\ y)\varphi(x+y)) = \\
&= (f(x+h)*g(x),\ \varphi),
\end{aligned}
$$

что и требовалось. Здесь мы воспользовались формулой (13) для сдвига прямого произведения.

6. Существование свертки. Установим некоторые достаточные условия (помимо указанных в § 7.4), при которых свертка заведомо существует в $\mathscr{D}'$.

Теорема. *Пусть f — произвольная и g — финитная обобщенные функции. Тогда свертка $f*g$ существует в $\mathscr{D}'$ и представляется в виде*

$$(f*g,\ \varphi) = (f(x)\cdot g(y),\ \eta(y)\varphi(x+y)), \qquad \varphi\in\mathscr{D}, \tag{23}$$

где η — любая основная функция, равная 1 в окрестности носителя g. При этом свертка непрерывна относительно f и g в отдельности: 1) если $f_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'$, то $f_k*g\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'$; 2) если $g_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'$ и при некотором R $\operatorname{supp} g_k\subset U_R$, то $f*g_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'$.

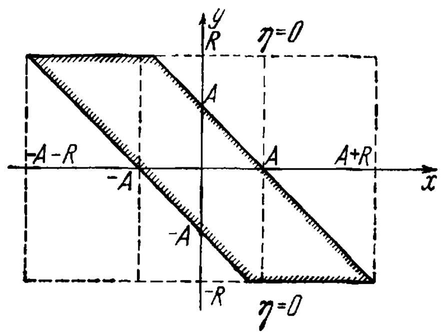

Рис. 34.

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} g\subset U_R$, η — функция из $\mathscr{D}(R^n)$, равная 1 в окрестности $\operatorname{supp} g$, и $\operatorname{supp}\eta\subset U_R$. (По лемме 1 § 5.2 такие функции существуют.) Пусть, далее, φ — произвольная функция из $\mathscr{D}(R^n)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset U_A$ и $\eta_k(x;\ y)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ — последовательность функций из $\mathscr{D}(R^{2n})$, сходящаяся к 1 в R^{2n} (см. § 7.4). Тогда при всех достаточно больших k

$$\eta(y)\eta_k(x;\ y)\varphi(x+y) = \eta(y)\varphi(x+y). \tag{24}$$

Для доказательства равенства (24) достаточно установить, что функция $\eta(y)\varphi(x+y)\in\mathscr{D}(R^{2n})$. Но это следует из того, что она бесконечно дифференцируема и ее носитель содержится в ограниченном множестве (рис. 34):

$$[(x, y): |x+y| \leqslant A, |y| \leqslant R] \subset \bar{U}_{A+R} \times \bar{U}_R.$$

Учитывая теперь соотношение (24) и равенство $g = \eta g$ (см. (8) § 5.10), убеждаемся в справедливости формулы (23):

$$(f*g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot g(y), \eta_k(x; y)\varphi(x+y)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot\eta(y)g(y), \eta_k(x; y)\varphi(x+y)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot g(y), \eta(y)\eta_k(x; y)\varphi(x+y)) =$$
$$= (f(x)\cdot g(y), \eta(y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Непрерывность свертки $f*g$ относительно f и g вытекает из представления (23) и из непрерывности прямого произведения $f(x)\cdot g(y)$ относительно f и g в отдельности (см. § 7.3, а)). При этом в случае 2) условие $\operatorname{supp} g_k \subset U_R$ дает возможность выбрать вспомогательную функцию η, не зависящую от k. Теорема доказана.

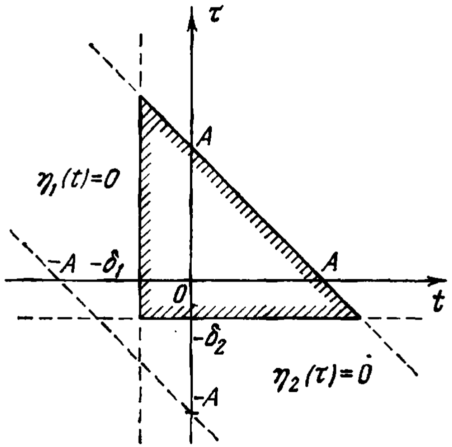

Рис. 35.

7. Сверточная алгебра обобщенных функций $\mathscr{D}'_+$. Совокупность обобщенных функций из $\mathscr{D}'(R^1)$, обращающихся в нуль при $t<0$, обозначим через $\mathscr{D}'_+$.

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{D}'_+$ и $g \in \mathscr{D}'_+$. Тогда их свертка $f*g$ существует в $\mathscr{D}'_+$ и представляется в виде*

$$(f*g, \varphi) =$$
$$= (f(t)\cdot g(\tau), \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)), \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^1), \quad (25)$$

где $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ — любые функции класса $C^\infty(R^1)$, равные 1 в окрестности полуоси $[0, \infty)$ и 0 при достаточно больших отрицательных t. При этом свертка непрерывна относительно f и g в отдельности, например: если $f_k \to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'$ и $f_k \in \mathscr{D}'_+$, то $f_k*g \to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — любая функция из $\mathscr{D}(R^1)$, причем $\operatorname{supp}\varphi \subset (-A, A)$; $\eta_k(t; \tau)$, $k=1, 2, \ldots,$ — любая последовательность функций из $\mathscr{D}(R^2)$, сходящаяся к 1 в R^2 (см. § 7.4); $\eta_i(t)$, $i=1, 2,$ — любые функции со свойствами, указанными в теореме, причем $\eta_i(t)=0$, $t<-\delta_i$; можно считать, что $A>\delta_1$ и $A>\delta_2$. Тогда при всех достаточно больших k справедливо равенство

$$\eta_1(t)\eta_2(\tau)\eta_k(t; \tau)\varphi(t+\tau) = \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau). \quad (26)$$

Для доказательства равенства (26) достаточно установить, что функция $\eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau) \in \mathscr{D}(R^2)$. Но это следует из того, что она бесконечно дифференцируема, а множество

$$[(t, \tau): t \geqslant -\delta_1, \tau \geqslant -\delta_2, |t+\tau| \leqslant A],$$

в котором содержится ее носитель, ограничено в R^2 (рис. 35).

Далее, по построению $\eta_1(t)=1$ и $\eta_2(\tau)=1$ в окрестности носителей $f(t)$ и $g(\tau)$ соответственно. Следовательно, по формуле (8) § 5.10

$$f(t) = \eta_1(t)f(t), \qquad g(\tau) = \eta_2(\tau)g(\tau).$$

Учитывая теперь эти равенства и равенство (26), убеждаемся в существовании свертки $f*g$ в $\mathscr{D}'(R^1)$ и в справедливости формулы (25):

$$(f*g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f(t)\cdot g(\tau), \eta_k(t; \tau)\varphi(t+\tau)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (\eta_1(t)f(t)\cdot\eta_2(\tau)g(\tau), \eta_k(t; \tau)\varphi(t+\tau)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (f(t)\cdot g(\tau), \eta_1(t)\eta_2(\tau)\eta_k(t; \tau)\varphi(t+\tau)) =$$
$$= (f(t)\cdot g(\tau), \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)).$$

Докажем, что $f*g=0$ при $t<0$, т. е. что $f*g \in \mathscr{D}'_+$. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [t<0]$. Так как носитель φ — компакт в R^1, то, в силу леммы Гейне — Бореля (см. § 1.1), $\operatorname{supp}\varphi \subset [t<-\varepsilon]$ при некотором $\varepsilon>0$. А тогда, выбирая вспомогательные функции $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ равными 0 при $t<-\varepsilon/2$, получим $\eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)=0$ в R^2, откуда и из представления (25) вытекает $(f*g, \varphi) = (f(t)\cdot g(\tau), 0) = 0$, что и утверждалось (см. § 5.5).

Непрерывность свертки $f*g$ относительно f и g в отдельности следует из представления (25) и из непрерывности прямого произведения $f(t)\cdot g(\tau)$ относительно f и g в отдельности (см. § 7.3, а)). При этом вспомогательные функции η_1 или η_2 можно выбрать не зависящими от f_k или g_k соответственно. Теорема доказана.

Следствие. *Свертка обобщенных функций из $\mathscr{D}'_+$ обладает свойством ассоциативности (и коммутативности):*

$$f_1*(f_2*f_3)=(f_1*f_2)*f_3=f_2*(f_1*f_3). \qquad (27)$$

Действительно, пусть вспомогательная функция $\eta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда, в силу представления (23), при всех $\varphi\in\mathscr{D}(R^1)$ будем иметь

$$\begin{aligned}(f_1*(f_2*f_3),\ \varphi)&=(f_1(t)\cdot(f_2*f_3)(\tau),\ \eta(t)\eta(\tau)\varphi(t+\tau))=\\&=((f_2*f_3)(\tau),\ (f_1(t),\ \eta(t)\eta(\tau)\varphi(t+\tau)))=\\&=(f_2(\tau)\cdot f_3(\tau'),\ \eta(\tau)\eta(\tau')(f_1(t),\ \eta(t)\eta(\tau+\tau')\times\\&\times\varphi(t+\tau+\tau')))=([f_2(\tau)\cdot f_3(\tau')]\cdot f_1(t),\ \eta(\tau)\eta(\tau')\times\\&\times\eta(t)\eta(\tau+\tau')\varphi(t+\tau+\tau')).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались леммой § 7.1, согласно которой

$$(f_1(t),\ \eta(t)\eta(\tau)\varphi(t+\tau))\in\mathscr{D}(R^1).$$

Учитывая теперь равенство

$$[f_2(\tau)\cdot f_3(\tau')]\,\eta(\tau)\eta(\tau')\eta(\tau+\tau')=[f_2(\tau)\cdot f_3(\tau')]\,\eta(\tau)\eta(\tau')$$

(см. (8) § 5.10), продолжаем нашу цепочку равенств:

$$(f_1*(f_2*f_3),\ \varphi)=\\=([f_2(\tau)\cdot f_3(\tau')]\cdot f_1(t),\ \eta(t)\eta(\tau)\eta(\tau')\varphi(t+\tau+\tau')).$$

Меняя местами f_1, f_2 и f_3 в полученном равенстве и пользуясь коммутативностью (см. § 7.2) и ассоциативностью (см. § 7.3, b)) прямого произведения, убеждаемся в справедливости равенств (27).

Определение. Линейное множество $\mathscr{A}$ называется *алгеброй*, если на нем определена операция умножения, линейная относительно каждого множителя в отдельности. Алгебра $\mathscr{A}$ называется *ассоциативной*, если всегда $x(yz)=(xy)z$; алгебра $\mathscr{A}$ называется *коммутативной*, если всегда $xy=yx$.

Доказанные в этом пункте теорема и следствие из нее утверждают, что $\mathscr{D}'_+$ образует ассоциативную и коммутативную алгебру, если в качестве умножения взять операцию свертки $*$; $\mathscr{D}'_+$ называется *сверточной алгеброй*. Единицей в алгебре $\mathscr{D}'_+$ является δ-функция, так как $\delta*f=f$.

8. Уравнения в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+$. В алгебре $\mathscr{D}'_+$ рассмотрим уравнение

$$a*u=f, \qquad (28)$$

где a и f — известные, а u — неизвестная обобщенные функции из $\mathscr{D}'_+$. Решение уравнения (28) при $f=\delta$, если оно существует, называется *фундаментальным решением сверточного оператора* $a*$ и обозначается a^{-1}. Другими словами, a^{-1} — обратный элемент к a в алгебре $\mathscr{D}'_+$, $a*a^{-1}=\delta$.

Теорема. *Если a^{-1} существует в $\mathscr{D}'_+$, то для любой f из $\mathscr{D}'_+$ решение уравнения (28) в $\mathscr{D}'_+$ существует, единственно и выражается формулой*

$$u=a^{-1}*f. \qquad (29)$$

Действительно, свертка $a^{-1}*f\in\mathscr{D}'_+$ и удовлетворяет уравнению (28):

$$a*(a^{-1}*f)=(a*a^{-1})*f=\delta*f=f.$$

Так как однородное уравнение $a*u_0=0$, соответствующее уравнению (28), имеет в $\mathscr{D}'_+$ только нулевое решение:

$$a^{-1}*(a*u_0)=(a^{-1}*a)*u_0=\delta*u_0=u_0=a^{-1}*0=0,$$

то решение уравнения (28) единственно в $\mathscr{D}'_+$ (см. § 1.11).

Доказанная теорема сводит задачу решения уравнения (28) при *произвольной* f из $\mathscr{D}'_+$ к решению его при *конкретной* $f=\delta$, т. е. к нахождению a^{-1}.

Следующее предложение весьма полезно при построении фундаментальных решений в алгебре $\mathscr{D}'_+$: *если a_1^{-1} и a_2^{-1} существуют в $\mathscr{D}'_+$, то*

$$(a_1*a_2)^{-1}=a_1^{-1}*a_2^{-1}. \qquad (30)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(a_1*a_2)*(a_1^{-1}*a_2^{-1})&=(a_2*a_1)*(a_1^{-1}*a_2^{-1})=\\&=a_2*(a_1*(a_1^{-1}*a_2^{-1}))=a_2*((a_1*a_1^{-1})*a_2^{-1})=\\&=a_2*(\delta*a_2^{-1})=a_2*a_2^{-1}=\delta.\end{aligned}$$

В § 10, используя методы ТФКП, мы построим операционное исчисление на некоторой подалгебре алгебры $\mathscr{D}'_+$. А сейчас ограничимся определением в алгебре $\mathscr{D}'_+$ операторов дробного дифференцирования и интегрирования.

Введем обобщенную функцию f_α из $\mathscr{D}'_+$, зависящую от вещественного параметра α:

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}, & \alpha>0,\\ f'_{\alpha+1}, & \alpha\leqslant 0.\end{cases}$$

Проверим, что

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}. \qquad (31)$$

Действительно, если $\alpha>0$ и $\beta>0$, (см. § 7.4)

$$f_\alpha * f_\beta=\frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}\,dy=$$
$$=\frac{\theta(x)\,x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt=$$
$$=\frac{\theta(x)\,x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\theta(x)\,x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}=f_{\alpha+\beta}.$$

Если же $\alpha\leqslant 0$ или $\beta\leqslant 0$, то, подбирая целые числа $m>-\alpha$ и $n>-\beta$, получим

$$f_\alpha * f_\beta = f^{(m)}_{\alpha+m} * f^{(n)}_{\beta+n}=(f_{\alpha+m} * f_{\beta+n})^{(m+n)}=f^{(m+n)}_{\alpha+\beta+m+n}=f_{\alpha+\beta},$$

что и требовалось.

Рассмотрим свёрточный оператор $f_\alpha *$ в алгебре $\mathscr{D}'_+$. Так как $f_0=\delta$, то из (31) вытекает, что фундаментальное решение f_α^{-1} оператора $f_\alpha *$ существует и равно $f_{-\alpha}$: $f_\alpha^{-1}=f_{-\alpha}$. Далее, при целых $n<0$ $f_n=\delta^{(n)}$ и потому $f_n * u=\delta^{(n)} * u=u^{(n)}$, т. е. оператор $f_n *$ есть оператор n-кратного дифференцирования. Наконец, при целых $n>0$

$$(f_n * u)^{(n)}=f_{-n} * (f_n * u)=(f_{-n} * f_n) * u=\delta * u=u,$$

т. е. $f_n * u$ есть первообразная порядка n обобщенной функции u (см. § 6.3). Поэтому оператор $f_\alpha *$ называют оператором *дробного дифференцирования* при $\alpha<0$ и *дробного интегрирования* при $\alpha>0$ (а также *оператором Римана — Лиувилля*).

9. Регуляризация обобщенных функций. Пусть f — обобщенная функция и ψ — основная функция. Поскольку ψ финитна, то свертка $f*\psi$ существует по теореме § 7.6. Докажем, что

$$f*\psi=(f(y),\ \psi(x-y))\in C^\infty(R^n). \qquad (32)$$

Действительно, в силу (23) при всех $\varphi\in\mathscr{D}$ имеем

$$(f*\psi,\ \varphi)=(f(y)\cdot\psi(\xi),\ \eta(\xi)\,\varphi(y+\xi))=$$
$$=\Big(f(y),\ \int\psi(\xi)\,\eta(\xi)\,\varphi(y+\xi)\,d\xi\Big)=$$
$$=\Big(f(y),\ \int\psi(\xi)\,\varphi(y+\xi)\,d\xi\Big)=\Big(f(y),\ \int\varphi(x)\,\psi(x-y)\,dx\Big),$$

где вспомогательная функция $\eta\in\mathscr{D}$ и равна 1 в окрестности носителя ψ. Замечая теперь, что функция $\varphi(x)\times\psi(x-y)$ принадлежит $\mathscr{D}(R^{2n})$, и пользуясь равенством (14), получаем равенство (32):

$$(f*\psi,\ \varphi)=\int\varphi(x)\,(f(y),\ \psi(x-y))\,dx=$$
$$=((f(y),\ \psi(x-y)),\ \varphi),\qquad \varphi\in\mathscr{D}.$$

Бесконечная дифференцируемость правой части равенства (32) устанавливается, как и при доказательстве леммы § 7.1.

Пусть $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 5.2). Тогда бесконечно дифференцируемая функция

$$f_\varepsilon(x)=f*\omega_\varepsilon=(f(y),\ \omega_\varepsilon(x-y))$$

называется *регуляризацией* обобщенной функции f.

В § 5.7 было доказано, что $\omega_\varepsilon(x)\to\delta(x)$, $\varepsilon\to+0$ в $\mathscr{D}'$. Отсюда, пользуясь непрерывностью свертки $f*\omega_\varepsilon$ относительно ω_ε (см. теорему § 7.6), получаем

$$f_\varepsilon(x)\to f(x),\qquad \varepsilon\to+0 \text{ в } \mathscr{D}'. \qquad (33)$$

Итак, всякая обобщенная функция есть слабый предел своих регуляризаций.

Пользуясь этим утверждением, установим более сильный результат.

Теорема. *Всякая обобщенная функция f есть слабый предел основных функций, т. е. множество $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{D}'$.*

Доказательство. Пусть $f_\varepsilon(x)$ — регуляризация f и $\eta_\varepsilon(x)$, $\varepsilon\to+0$, — последовательность основных функций, равных 1 в шаре $U_{1/\varepsilon}$. Тогда последовательность основных функций $\eta_\varepsilon(x)\,f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon\to+0$, стремится к f в $\mathscr{D}'$, поскольку для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, в силу (33), имеем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\eta_\varepsilon f_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon, \eta_\varepsilon\varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon, \varphi) = (f, \varphi),$$

что и утверждалось.

Замечание. Из полноты пространства $\mathcal{D}'$ (см. § 5.4) вытекает обратное к теореме утверждение: всякий слабый предел локально интегрируемых функций есть обобщенная функция из $\mathcal{D}'$. Поэтому теорию обобщенных функций можно строить, исходя из слабо сходящихся последовательностей обычных функций. По поводу этого подхода см. П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский [1].

10. Примеры сверток. Ньютонов потенциал. a) Пусть $f(x)$ — непрерывная функция в $R^n \setminus \{0\}$ с интегрируемой особенностью в 0 и $\mu\delta_S(x)$ — простой слой на ограниченной кусочно-гладкой поверхности S с непрерывной плотностью μ (см. § 5.7).

Их свертка $f * \mu\delta_S$ — локально интегрируемая функция в R^n — выражается интегралом

$$f * \mu\delta_S = \int_S \mu(y) f(x-y)\, dS_y. \tag{34}$$

Это утверждение вытекает из представления (23):

$$\begin{aligned}(f * \mu\delta_S, \varphi) &= (\mu\delta_S(y) \cdot f(\xi), \eta(y)\varphi(y+\xi)) = \\ &= (\mu\delta_S(y), \eta(y)(f(\xi), \varphi(y+\xi))) = \\ &= \int_S \mu(y)\eta(y) \int f(\xi)\varphi(y+\xi)\, d\xi\, dS_y = \\ &= \int_S \mu(y) \int f(x-y)\varphi(x)\, dx\, dS_y = \\ &= \int \varphi(x) \int_S \mu(y) f(x-y)\, dS_y\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.\end{aligned}$$

b) Пусть ρ — обобщенная функция. Свертка

$$V_n = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho, \quad n \geq 3; \quad V_2 = \ln\frac{1}{|x|} * \rho, \quad n = 2, \tag{35}$$

называется *ньютоновым* (при $n = 2$ *логарифмическим*) *потенциалом* с плотностью ρ.

Если ρ — финитная обобщенная функция, то потенциал V_n существует в $\mathcal{D}'$ и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V_n = -(n-2)\sigma_n\rho, \quad n \geq 3; \quad \Delta V_2 = -2\pi\rho, \quad n = 2. \tag{36}$$

Существование потенциала V_n вытекает из теоремы § 7.6. Пользуясь (20) § 7.5 и (33) § 6.6, заключаем, что при $n \geq 3$ потенциал V_n удовлетворяет уравнению Пуассона (36):

$$\begin{aligned}\Delta V_n = \Delta\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho\right) = \Delta\frac{1}{|x|^{n-2}} * \rho = \\ = -(n-2)\sigma_n\delta * \rho = -(n-2)\sigma_n\rho;\end{aligned}$$

аналогично поступаем и в случае $n = 2$.

c) Если ρ — финитная (абсолютно) интегрируемая функция на R^n, то соответствующий ньютонов (логарифмический) потенциал V_n называется *объемным потенциалом* (*потенциалом площади*).

Объемный потенциал V_n — локально интегрируемая функция в R^n — выражается интегралами

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \int \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy, \qquad n \geq 3; \\ V_2(x) &= \int \rho(y) \ln\frac{1}{|x-y|}\, dy, \quad n = 2. \end{aligned} \tag{37}$$

Это утверждение вытекает из формулы (15) для свертки финитной интегрируемой функции ρ с локально интегрируемой функцией $|x|^{2-n}$, $n \geq 3$, и $-\ln|x|$, $n = 2$.

d) Пусть S — ограниченная кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность с выбранным направлением нормали $\boldsymbol{n}$ на ней и μ и ν — непрерывные функции на S. Пусть

$$\mu\delta_S \text{ и } -\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$$

— простой и двойной слои на S с поверхностными плотностями μ и ν (см. § 5.7 и § 6.5, a)). Порождаемые ими ньютоновы (логарифмические) потенциалы

$$V_n^{(0)} = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu\delta_S, \quad n \geq 3; \quad V_2^{(0)} = \ln\frac{1}{|x|} * \mu\delta_S, \quad n = 2; \tag{38}$$

$$\begin{aligned} V_n^{(1)} &= -\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \quad n \geq 3; \\ V_2^{(1)} &= -\ln\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \quad n = 2 \end{aligned} \tag{39}$$

называются соответственно поверхностными *потенциалами простого и двойного слоя* с плотностями μ и ν.

Поверхностные потенциалы $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ — локально интегрируемые функции в R^n — выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} V_n^{(0)}(x) &= \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dS_y, \qquad n \geqslant 3;\\ V_2^{(0)}(x) &= \int_S \mu(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\,dS_y, \quad n=2; \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} V_n^{(1)}(x) &= \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dS_y, \qquad n\geqslant 3;\\ V_2^{(1)}(x) &= \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}\,dS_y, \quad n=2. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Формулы (40) являются частными случаями формулы (34). Докажем для определенности формулу (41) для потенциала $V_n^{(1)}$, $n\geqslant 3$. Пользуясь представлением (23) для свертки и определением двойного слоя, при всех $\varphi\in\mathscr{D}$ получаем

$$\begin{aligned} (V_n^{(1)}, \varphi) &= -\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S),\ \varphi\right) =\\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S(y))\cdot\frac{1}{|\xi|^{n-2}},\ \eta(y)\,\varphi(y+\xi)\right) =\\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S(y)),\ \eta(y)\left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}},\ \varphi(y+\xi)\right)\right) =\\ &= \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n}\left[\eta(y)\int\frac{\varphi(y+\xi)}{|\xi|^{n-2}}\,d\xi\right]dS_y =\\ &= \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n}\int\frac{\varphi(x)}{|x-y|^{n-2}}\,dx\,dS_y =\\ &= \int_S \nu(y)\int\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dx\,dS_y =\\ &= \int\varphi(x)\int_S\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dS_y\,dx, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемая формула (41).

Дифференцирование под знаком интеграла здесь обеспечивается теоремой § 1.6, а перемена порядка интегрирования — теоремой Фубини (см. § 1.4, h)) в силу существования повторного интеграла

$$\int_S |\nu(y)|\int|\varphi(x)|\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right|dx\,dS_y.$$

11. Упражнения. а) Доказать равенство

$$\frac{\partial^n[\theta(x_1)\ldots\theta(x_n)]}{\partial x_1\ldots\partial x_n} = \delta(x_1)\ldots\delta(x_n) = \delta(x).$$

b) Доказать: $\operatorname{supp}[f(x)\cdot g(y)] = \operatorname{supp} f\times\operatorname{supp} g$.

c) Доказать: для того чтобы обобщенная функция $f(x)$ не зависела от x_i, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0$.

d) Доказать: для того чтобы обобщенная функция не зависела от x_i, необходимо и достаточно, чтобы она была инвариантна относительно всех сдвигов по x_i.

e) Доказать:

$$\operatorname{supp}(f*g)\subset\overline{[x\colon\ x=y+z,\ y\in\operatorname{supp} f,\ z\in\operatorname{supp} g]}.$$

f) Доказать: если обобщенная функция f не зависит от x_i, то таким же свойством обладает и свертка $f*g$. (Указание: воспользоваться c) или d).)

g) Пользуясь f), доказать: если свертка $f*1$ существует, то она совпадает с постоянной.

h) Проверить равенства:

1) $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, $\quad f_\alpha(x) = \dfrac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{ax}$, $\quad\alpha>0$;

2) $f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\quad f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$, $\quad\alpha>0$;

3) $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, $\quad f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$, $\quad\alpha>0$.

i) Доказать, что

$$[*(\delta'-\lambda\delta)^k]^{-1} = *\,[(\delta'-\lambda\delta)^{-1}]^k = \frac{\theta(x)}{(k-1)!}x^{k-1}e^{\lambda x};$$

здесь введено обозначение $*f^k = f*\ldots*f$ (k раз).

j) Пользуясь формулой (31), показать, что функция

$$u(x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^x\frac{g'(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi$$

есть решение интегрального уравнения Абеля

$$\int_0^x\frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\alpha}\,d\xi = g(x),\qquad g(0)=0,\qquad g\in C^1(x\geqslant 0),\qquad 0<\alpha<1.$$

k) Доказать равенство

$$e^{ax}f * e^{ax}g = e^{ax}(f * g), \qquad f,\ g \in \mathscr{D}'_+.$$

l) Доказать: если $f \in \mathscr{D}'(R^1)$, $f * \varphi \in \mathscr{D}'_+$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ $(x < 0)$, то $f \in \mathscr{D}'_+$.

m) Обозначим через $\mathscr{E}'$ пространство финитных обобщенных функций со сходимостью: $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{E}'$, если a) $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}'$ и b) существует такое $R > 0$, что $\operatorname{supp} f_k \subset U_R$ при всех $k = 1, 2, \ldots$

Доказать теорему: для того чтобы оператор L, действующий из $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{D}'$, представлялся в виде свертки, $Lf = f_0 * f$, где $f_0 \in \mathscr{D}'$, необходимо и достаточно, чтобы он был линейным и непрерывным из $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{D}'$ и коммутировал с операцией сдвига (см. § 7.5, d)). При этом элемент f_0 — единственный и $f_0 = L\delta$.

§ 8. Обобщенные функции медленного роста

Одним из мощных средств для решения задач математической физики является метод преобразования Фурье. В § 9 будет изложена теория преобразования Фурье для так называемых обобщенных функций медленного роста (tempered distributions). Поэтому сначала нужно изучить класс обобщенных функций медленного роста.

1. Пространство основных функций $\mathscr{S}$. *Отнесем к множеству основных функций $\mathscr{S} = \mathscr{S}(R^n)$ все функции класса $C^\infty(R^n)$, убывающие при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.* Сходимость в $\mathscr{S}$ определим следующим образом: последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из $\mathscr{S}$ сходится к функции $\varphi \in \mathscr{S}$, $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$, если для всех α и β

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x \in R^n}{\rightrightarrows} x^\beta D^\alpha \varphi(x), \qquad k \to \infty. \tag{1}$$

Очевидно, $\mathscr{S}$ — линейное пространство. Кроме того, $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ и *из сходимости в $\mathscr{D}$ следует сходимость в $\mathscr{S}$.*

Действительно, если $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$, то, поскольку носители φ_k ограничены независимо от k, справедливо предельное соотношение (1) при всех α и β, которое и означает, что $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$.

Однако $\mathscr{S}$ не совпадает с $\mathscr{D}$; например, функция $e^{-|x|^2}$ принадлежит $\mathscr{S}$, но не принадлежит $\mathscr{D}$.

Тем не менее $\mathscr{D}$ *плотно* в $\mathscr{S}$, т. е. для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ существует последовательность $\varphi_k \in \mathscr{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$.

Действительно, последовательность функций из $\mathscr{D}$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\,\eta\left(\frac{x}{k}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\eta \in \mathscr{D}$ и $\eta(x) = 1$, $|x| < 1$, сходится к φ в $\mathscr{S}$.

Операции дифференцирования $D^\beta\varphi(x)$ и неособенной линейной замены переменных $\varphi(Ay + b)$ непрерывны из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$. Это вытекает непосредственно из определения сходимости в пространстве $\mathscr{S}$.

С другой стороны, умножение на бесконечно дифференцируемую функцию может вывести за пределы множества $\mathscr{S}$, например: $e^{-|x|^2}e^{|x|^2} = 1 \overline{\in} \mathscr{S}$.

Пусть функция $a \in C^\infty(R^n)$ растет на бесконечности вместе со всеми производными не быстрее полинома:

$$|D^\alpha a(x)| \leqslant C_\alpha(1 + |x|)^{m_\alpha}. \tag{2}$$

Множество таких функций обозначим через θ_M.

Операция умножения на функцию $a \in \theta_M$ непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$.

Действительно, из неравенства (2) вытекает: если $\varphi \in \mathscr{S}$, то $a\varphi \in \mathscr{S}$, и если $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$, то при всех α и β

$$x^\beta D^\alpha(a\varphi_k) \overset{x \in R^n}{\rightrightarrows} 0,$$

т. е. $a\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$.

2. Пространство обобщенных функций медленного роста $\mathscr{S}'$. *Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathscr{S}$.* Обозначим через $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(R^n)$ множество всех обобщенных функций медленного роста. Очевидно, $\mathscr{S}'$ — линейное множество (ср. § 5.3). Сходимость в $\mathscr{S}'$ определим как *слабую* сходимость последовательности функционалов: последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ из $\mathscr{S}'$ сходится к обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'$, $f_k \to f$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}'$, если для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$, $k \to \infty$. Линейное множество $\mathscr{S}'$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством обобщенных функций медленного роста $\mathscr{S}'$.*

Из этих определений непосредственно вытекает, что *$\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ и из сходимости в $\mathscr{S}'$ следует сходимость в $\mathscr{D}'$.*

Действительно, если $f \in \mathscr{S}'$, то $f \in \mathscr{D}'$, так как $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ и из сходимости в $\mathscr{D}$ вытекает сходимость в $\mathscr{S}$ (см. § 8.1). Далее, если $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}'$, то $(f_k, \varphi) \to 0$, $k \to \infty$, при всех φ из $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ и, стало быть, $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}'$.

Теорема (Л. Шварц). *Для того чтобы линейный функционал f на $\mathscr{S}$ принадлежал $\mathscr{S}'$ (т. е. был непрерывным на $\mathscr{S}$), необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $C > 0$ и $p \geqslant 0$, p — целое, что для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ справедливо неравенство*

$$|(f, \varphi)| \leqslant C \|\varphi\|_p, \tag{3}$$

где

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leqslant p,\ x \in R^n} (1 + |x|)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть линейный функционал f на $\mathscr{S}$ удовлетворяет неравенству (3) при некоторых $C > 0$ и $p \geqslant 0$. Докажем, что $f \in \mathscr{S}'$. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$. Тогда $\|\varphi_k\|_p \to 0$, $k \to \infty$, а потому $|(f, \varphi_k)| \leqslant C \|\varphi_k\|_p \to 0$, $k \to \infty$. Это значит, что f — непрерывный функционал на $\mathscr{S}$.

Необходимость. Пусть $f \in \mathscr{S}'$. Докажем, что существуют числа $C > 0$ и $p \geqslant 0$ такие, что для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ справедливо неравенство (3). Пусть, напротив, указанных чисел C и p не существует. Тогда найдется последовательность функций φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, из $\mathscr{S}$ таких, что

$$|(f, \varphi_k)| \geqslant k \|\varphi_k\|_k. \tag{4}$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

стремится к 0 в $\mathscr{S}$, ибо при $k \geqslant |\alpha|$ и $k \geqslant |\beta|$

$$|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)| = \frac{|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)|}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Отсюда и из непрерывности функционала f на $\mathscr{S}$ следует, что $(f, \psi_k) \to 0$, $k \to \infty$. С другой стороны, неравенство (4) дает

$$|(f, \psi_k)| = \frac{1}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k} |(f, \varphi_k)| \geqslant \sqrt{k}.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Смысл доказанной теоремы состоит в том, что всякая обобщенная функция медленного роста является непрерывным функционалом относительно некоторой нормы $\|\ \|_p$ (как говорят, имеет *конечный порядок*).

3. Примеры обобщенных функций медленного роста.

a) *Если $f(x)$ — локально интегрируемая функция медленного роста на бесконечности, т. е. при некотором $m \geqslant 0$*

$$\int |f(x)| (1 + |x|)^{-m} dx < \infty,$$

то она определяет регулярный функционал f из $\mathscr{S}'$ по формуле (11) § 5.6,

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{5}$$

Однако не всякая локально интегрируемая функция определяет обобщенную функцию медленного роста, например, $e^x \overline{\in} \mathscr{S}'(R^1)$.

С другой стороны, не всякая локально интегрируемая функция, принадлежащая $\mathscr{S}'$, имеет медленный рост. Например, функция $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$ не является функцией медленного роста, но тем не менее она определяет обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$ по формуле

$$((\cos e^x)', \varphi) = -\int \cos e^x \varphi'(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Замечание. Пользуясь теоремой Л. Шварца (см. § 8.2) можно доказать *), что всякая обобщенная функция из $\mathscr{S}'$ является производной от непрерывной функции медленного роста. Этим объясняется название $\mathscr{S}'$ — пространство обобщенных функций медленного роста.

b) *Если f — финитная обобщенная функция из $\mathscr{D}'$, то она единственным образом продолжается на $\mathscr{S}$ как элемент из $\mathscr{S}'$ по формуле*

$$(f, \varphi) = (f, \eta\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{6}$$

где $\eta \in \mathscr{D}$ и $\eta = 1$ в окрестности носителя f.

Действительно, линейный функционал $(f, \eta\varphi)$, стоящий в правой части равенства (6), непрерывен на $\mathscr{S}$: если $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$, то $\eta\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}$, и потому

$$(f, \eta\varphi_k) \to 0, \quad k \to \infty.$$

---

*) См. Л. Шварц [2], гл. VII.

Единственность продолжения функционала f на $\mathscr{S}$ следует из плотности $\mathscr{D}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 8.1). В частности, продолжение (6) не зависит от вспомогательной функции η.

c) *Если $f \in \mathscr{S}'$, то и каждая производная $D^\alpha f \in \mathscr{S}'$.*

Действительно, поскольку операция дифференцирования $D^\alpha\varphi$ непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 8.1), то правая часть равенства

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi)$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$ (ср. § 6.1).

d) *Если $f \in \mathscr{S}'$ и $\det A \neq 0$, то $f(Ay+b) \in \mathscr{S}'$.*

В самом деле, поскольку операция преобразования $\varphi[A^{-1}(x-b)]$ непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 8.1), то правая часть равенства

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right)$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$ (ср. § 5.9).

e) *Если $f \in \mathscr{S}'$ и $a \in \theta_M$, то $af \in \mathscr{S}'$.*

Действительно, поскольку операция умножения на функцию a из θ_M непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 8.1), то правая часть равенства

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$ (ср. § 5.10).

4. Структура обобщенных функций с точечным носителем.

Теорема. *Если носитель обобщенной функции f есть точка $\{0\}$, то она единственным способом представляется в виде*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} C_\alpha D^\alpha\delta(x). \tag{7}$$

Доказательство. Так как обобщенная функция f имеет носитель $\{0\}$, то $f \in \mathscr{S}'$ (см. § 8.3) и, в силу (18) § 5.10, при всех $k>0$

$$f = \eta(kx) f, \tag{8}$$

где $\eta(x)$ — основная функция, равная 1 в окрестности точки 0 и равная 0 при $|x|>1$. Далее, по теореме

Л. Шварца (см. § 8.2) справедливо неравенство

$$|(f, \varphi)| \leq C\|\varphi\|_m, \quad \varphi \in \mathscr{D}, \tag{9}$$

при некоторых $m \geq 0$ и $C>0$, не зависящих от φ.

Пусть φ — произвольная функция из $\mathscr{D}$. Положим

$$\psi_k(x) = \varphi_m(x)\eta(kx), \quad \varphi_m(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}x^\alpha. \tag{10}$$

Применяя неравенство (9) к функции ψ_k и пользуясь тем, что

$$D^\gamma\varphi_m(x) = O(|x|^{m+1-|\gamma|}), \quad x\to 0 \quad (|\gamma| \leq m),$$
$$D^\delta\eta(kx) = O(k^{|\delta|}), \quad k\to\infty,$$

получим

$$\begin{aligned}|(f, \psi_k)| &\leq C\|\psi_k\|_m = \\ &= C \sup_{|\beta|\leq m,\ |x|\leq \frac{1}{k}} (1+|x|^m)|D^\beta[\varphi_m(x)\eta(kx)]| \leq \\ &\leq C_1 \max_{|\beta|\leq m,\ |x|\leq\frac{1}{k}} \sum_{|\gamma|=0}^{|\beta|} |D^\gamma\varphi_m(x)||D^{\beta-\gamma}\eta(kx)| \leq \\ &\leq C_1 \max_{|\beta|\leq m} \sum_{|\gamma|=0}^{|\beta|} k^{-m-1+|\gamma|}k^{|\beta-\gamma|} = \frac{C_2}{k} \to 0, \quad k\to\infty.\end{aligned}$$

Но, в силу (8), (f, ψ_k) не зависит от k. Следовательно, по доказанному

$$(f, \psi_1) = \lim_{k\to\infty}(f, \psi_k) = 0.$$

Отсюда, пользуясь (8) и (10) при $k=1$, получаем представление (7):

$$(f, \varphi) = (\eta f, \varphi) = (f, \eta\varphi) = \left(f, \psi_1 + \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}x^\alpha\eta(x)\right) =$$
$$= (f, \psi_1) + \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}(f, x^\alpha\eta(x)) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} C_\alpha(D^\alpha\delta, \varphi),$$

где обозначено

$$C_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}(f, x^\alpha\eta).$$

Докажем единственность представления (7). Пусть

$$f(x)=\sum_{|\alpha|=0}^{m} C'_\alpha D^\alpha\delta(x)$$

— другое представление f, так что

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m}(C_\alpha - C'_\alpha)\,D^\alpha\delta(x)=0.$$

Применяя это равенство к моному x^β, $|\beta|\leqslant m$, получаем

$$0=\sum_{|\alpha|=0}^{m}(C_\alpha - C'_\alpha)\,(D^\alpha\delta,\ x^\beta)=$$
$$=\sum_{|\alpha|=0}^{m}(-1)^{|\alpha|}(C_\alpha - C'_\alpha)\,(\delta,\ D^\alpha x^\beta)=(-1)^{|\beta|}\beta!\,(C_\beta - C'_\beta),$$

т. е. $C_\beta=C'_\beta$. Теорема доказана.

5. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста. Пусть $f(x)\in\mathscr{S}'(R^n)$ и $g(y)\in\mathscr{S}'(R^m)$. Поскольку $\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'$, то прямое произведение $f(x)\cdot g(y)\in\in\mathscr{D}'(R^{n+m})$ (см. § 7.1).

Докажем, что $f(x)\cdot g(y)\in\mathscr{S}'(R^{n+m})$.

По определению функционала $f(x)\cdot g(y)$ (см. § 7.1)

$$(f(x)\cdot g(y),\ \varphi)=(f(x),\ (g(y),\ \varphi(x,\ y))). \tag{11}$$

Докажем, что правая часть равенства (11) есть *линейный непрерывный функционал на* $\mathscr{S}(R^{n+m})$.

Для этого установим следующую лемму, аналогичную лемме § 7.1.

Лемма. *Для любых $g\in\mathscr{S}'(R^m)$ и $\varphi\in\mathscr{S}(R^{n+m})$ функция*

$$\psi(x)=(g(y),\ \varphi(x,\ y))\in\mathscr{S}(R^n)$$

и справедливо равенство

$$D^\alpha\psi(x)=\bigl(g(y),\ D_x^\alpha\varphi(x,\ y)\bigr). \tag{12}$$

Кроме того, если $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}(R^{n+m})$, то

$$\psi_k(x)=(g(y),\ \varphi_k(x,\ y))\to 0,\qquad k\to\infty\ \text{в}\ \mathscr{S}(R^n). \tag{13}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы § 7.1, устанавливаются справедливость равенства (12) при всех α и непрерывность его правой части. Следовательно, $\psi\in C^\infty(R^n)$. Докажем, что $\psi\in\mathscr{S}(R^n)$. Так как $g(y)\in\mathscr{S}'(R^m)$ и при каждом $x\in R^n$ $\varphi(x,\ y)\in\mathscr{S}(R^m)$, то, по теореме Л. Шварца (см. § 8.2), найдутся такие числа $C>0$ и $p\geqslant 0$, что для любых $\varphi\in\mathscr{S}(R^{n+m})$, α и $x\in R^n$ справедливо неравенство

$$\bigl|\bigl(g(y),\ D_x^\alpha\varphi(x,\ y)\bigr)\bigr|\leqslant C\sup_{y\in R^m,\ |\gamma|\leqslant p}(1+|y|)^p\,\bigl|D_y^\gamma D_x^\alpha\varphi(x,\ y)\bigr|.$$

Отсюда, в силу (12), при всех $x\in R^n$ получаем неравенство

$$|x^\beta D^\alpha\psi(x)|\leqslant C\sup_{y\in R^m,\ |\gamma|\leqslant p}(1+|y|^p)\,\bigl|x^\beta D_y^\gamma D_x^\alpha\varphi(x,\ y)\bigr|. \tag{14}$$

Так как $\varphi\in\mathscr{S}(R^{n+m})$, то из неравенства (14) вытекает, что $\psi\in\mathscr{S}(R^n)$.

Докажем теперь предельное соотношение (13). Пусть $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}(R^{n+m})$. Отсюда, применяя неравенство (14) к последовательности φ_k, $k\to\infty$, получаем

$$|x^\beta D^\alpha\psi_k|\leqslant$$
$$\leqslant C\sup_{y\in R^m,\ |\gamma|\leqslant p}(1+|y|)^p\,\bigl|x^\beta D_y^\gamma D_x^\alpha\varphi_k\bigr|\xrightarrow{x\in R^n}0,\qquad k\to\infty,$$

т. е. $\psi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}(R^n)$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что правая часть равенства (11), равная $(f,\ \psi)$, где $\psi(x)=(g(y),\ \varphi(x,\ y))$, есть линейный и непрерывный функционал на $\mathscr{S}(R^{n+m})$, так что $f(x)\cdot g(y)\in\mathscr{S}'(R^{n+m})$ (ср. § 7.1).

Прямое произведение обобщенных функций медленного роста коммутативно и ассоциативно в $\mathscr{S}'$:

$$f(x)\cdot g(y)=g(y)\cdot f(x),\quad f(x)\cdot(g(y)\cdot h(z))=(f(x)\cdot g(y))\cdot h(z).$$

Эти утверждения вытекают из соответствующих свойств прямого произведения в $\mathscr{D}'$ (см. § 7.2 и § 7.3, b)) и из того факта, что $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{S}$ (см. § 8.2).

В частности, равенство $f(x)\cdot 1(y)=1(y)\cdot f(x)$, где $f\in\in\mathscr{S}'(R^n)$, означает, что

$$\Bigl(f,\ \int\varphi(x,\ y)\,dy\Bigr)=\int(f,\ \varphi(x,\ y))\,dy,\qquad \varphi\in\mathscr{S}(R^{n+m}). \tag{15}$$

Наконец, *прямое произведение $f(x)\cdot g(y)$ обобщенных функций $f\in\mathscr{S}'(R^n)$ и $g\in\mathscr{S}'(R^m)$ линейно и непрерывно* *относительно* f (из $\mathscr{S}'(R^n)$ в $\mathscr{S}'(R^{n+m})$) *и относительно* g (из $\mathscr{S}'(R^m)$ в $\mathscr{S}'(R^{n+m})$).

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для пространства $\mathscr{D}'$ (см. § 7.3, а)).

6. Свертка обобщенных функций медленного роста. Пусть $f \in \mathscr{S}'$ и g — финитная обобщенная функция. Тогда свертка $f * g$ существует в $\mathscr{D}'$ (см. § 7.5). Докажем, что *$f * g$ принадлежит $\mathscr{S}'$ и представляется в виде*

$$(f * g,\ \varphi) = (f(x) \cdot g(y),\ \eta(y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \quad (16)$$

где η — любая функция из $\mathscr{D}$, равная 1 в окрестности носителя g.

Действительно, по теореме § 7.6 формула (16) справедлива на основных функциях φ из $\mathscr{D}$. Докажем, что правая часть равенства (16) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$. Тогда, в силу финитности функции η, $\eta(y)\varphi(x+y) \in \mathscr{S}(R^{2n})$, и так как $f(x) \cdot g(y)$ — линейный функционал на $\mathscr{S}(R^{2n})$, то правая часть (16) — линейный функционал на $\mathscr{S}(R^n)$. Докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$. Тогда при любых α, β, γ

$$x^\alpha y^\beta D^\gamma [\eta(y)\varphi_k(x+y)] \overset{x \in R^n,\ y \in R^n}{\rightrightarrows} 0, \quad k \to \infty,$$

и потому

$$\eta(y)\varphi_k(x+y) \to 0, \quad k \to \infty \text{ в } \mathscr{S}(R^{2n}).$$

Поскольку $f(x) \cdot g(y) \in \mathscr{S}'(R^{2n})$ (см. § 8.5), то отсюда следует непрерывность правой части (16) на $\mathscr{S}(R^n)$:

$$(f(x) \cdot g(y),\ \eta(y)\varphi_k(x+y)) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Итак, $f * g \in \mathscr{S}'$.

Обозначим $\mathscr{S}'_+ = \mathscr{D}'_+ \cap \mathscr{S}'$, где $\mathscr{D}'_+$ — сверточная алгебра, определенная в § 7.7. Докажем, что *если f и $g \in \mathscr{S}'_+$, то $f * g \in \mathscr{S}'_+$ и представляется в виде*

$$(f * g,\ \varphi) = \\ = (f(t) \cdot g(\tau),\ \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t+\tau)), \quad \varphi \in \mathscr{S}(R^1), \quad (17)$$

где η_1 и η_2 — любые функции класса $C^\infty(R^1)$, равные 1 в окрестности $[0, \infty)$ и 0 при больших отрицательных t.

Действительно, по теореме § 7.7 формула (17) справедлива на основных функциях φ из $\mathscr{D}(R^1)$. Докажем, что правая часть равенства (17) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}(R^1)$. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(R^1)$. Тогда, в силу свойств функций $\eta_1(t)$ и $\eta_2(\tau)$, $\eta_1(t)\eta_2(\tau) \times \varphi(t+\tau) \in \mathscr{S}(R^2)$ и правая часть (17) — линейный функционал на $\mathscr{S}(R^1)$. Докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}(R^1)$. Тогда, как и выше,

$$\eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi_k(t+\tau) \to 0, \quad k \to \infty \text{ в } \mathscr{S}(R^2).$$

Поскольку $f(t) \cdot g(\tau) \in \mathscr{S}'(R^2)$ (см. § 8.5), то отсюда следует непрерывность правой части (17) на $\mathscr{S}(R^1)$. Итак, $f * g \in \mathscr{S}'(R^1)$.

Мы видим, таким образом, что *совокупность обобщенных функций $\mathscr{S}'_+$ образует сверточную алгебру — подалгебру алгебры $\mathscr{D}'_+$* (см. § 7.7).

§ 9. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Замечательное свойство класса обобщенных функций медленного роста состоит в том, что операция преобразования Фурье не выводит за пределы этого класса.

1. Преобразование Фурье основных функций из $\mathscr{S}$. Поскольку основные функции из $\mathscr{S}$ абсолютно интегрируемы на R^n, то на них определена операция преобразования Фурье F:

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{i(\xi, x)}\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

При этом функция $F[\varphi](\xi)$ — *преобразование Фурье функции* $\varphi(x)$ — ограничена и непрерывна в R^n. Основная функция $\varphi(x)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Поэтому ее преобразование Фурье можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi, x)}\, dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi), \quad (1)$$

откуда ясно, что $F[\varphi] \in C^\infty(R^n)$. Далее, такими же свойствами обладает каждая производная $D^\alpha\varphi$, а потому

$$F[D^\alpha\varphi](\xi) = \int D^\alpha\varphi(x) e^{i(\xi, x)}\, dx = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi). \quad (2)$$

Наконец, из формул (1) и (2) получаем

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = \xi^\beta F[(ix)^\alpha \varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta(x^\alpha\varphi)](\xi). \quad (3)$$

Из равенства (3) вытекает, что при всех α и β величины $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ равномерно ограничены по $\xi \in R^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leqslant \int |D^\beta (x^\alpha \varphi)|\, dx. \tag{4}$$

Это значит, что $F[\varphi] \in \mathscr{S}$ (см. § 8.1). Итак, преобразование Фурье переводит пространство $\mathscr{S}$ в себя.

Отметим, что пространство основных функций $\mathscr{D}$ преобразование Фурье в себя не переводит, поскольку преобразование Фурье финитной функции есть аналитическая функция и, стало быть, либо не финитна, либо нуль.

Так как преобразование Фурье $F[\varphi]$ функции φ из $\mathscr{S}$ есть интегрируемая и непрерывно дифференцируемая функция на R^n, то, как это следует из общей теории преобразования Фурье *), функция $\varphi(x)$ выражается через ее преобразование Фурье $F[\varphi](\xi)$ с помощью операции обратного преобразования Фурье F^{-1}:

$$\varphi(x) = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{5}$$

где

$$F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{-i(\xi, x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-\xi) e^{i(\xi, x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)]. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) следует, что всякая функция φ из $\mathscr{S}$ есть преобразование Фурье функции $\psi = F^{-1}[\varphi]$ из $\mathscr{S}$, $\varphi = F[\psi]$, и если $F[\varphi] = 0$, то и $\varphi = 0$. Это значит, что *преобразование Фурье F преобразует $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$ и притом взаимно однозначно.*

Лемма. *Операция преобразования Фурье F непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$. Тогда, применяя (4) к функциям φ_k, при всех α и β получим

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| \leqslant \int |D^\beta (x^\alpha \varphi_k)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x \in R^n} |D^\beta (x^\alpha \varphi_k)|\, (1 + |x|)^{n+1} \int \frac{dx}{(1 + |x|)^{n+1}},$$

откуда следует, что

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k]| \overset{\xi \in R^n}{\rightrightarrows} 0, \quad k \to \infty,$$

т. е. $F[\varphi_k] \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$ (см. § 8.1). Лемма доказана.

*) См., например, Л. Д. Кудрявцев [1], гл. VII.

Аналогичными свойствами обладает и операция обратного преобразования Фурье F^{-1}.

2. Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathscr{S}'$. Пусть сперва $f(x)$ — (абсолютно) интегрируемая функция на R^n. Тогда ее преобразование Фурье

$$F[f](\xi) = \int f(x) e^{i(\xi, x)}\, dx, \quad |F[f](\xi)| \leqslant \int |f(x)|\, dx < \infty,$$

является непрерывной, ограниченной в R^n функцией и, следовательно, определяет обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$:

$$(F[f], \varphi) = \int F[f](\xi) \varphi(\xi)\, d\xi, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Пользуясь теоремой Фубини (см. § 1.4, h) о перемене порядка интегрирования, преобразуем последний интеграл:

$$\int F[f](\xi) \varphi(\xi)\, d\xi = \int \left[\int f(x) e^{i(\xi, x)}\, dx \right] \varphi(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int f(x) \int \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)}\, d\xi\, dx = \int f(x)\; F[\varphi](x)\, dx,$$

т. е.

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Это равенство мы и примем за определение преобразования Фурье $F[f]$ любой обобщенной функции медленного роста f:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad f \in \mathscr{S}', \; \varphi \in \mathscr{S}. \tag{7}$$

Проверим, что правая часть этого равенства определяет линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$, т. е. что $F[f] \in \mathscr{S}'$. Действительно, так как $F[\varphi] \in \mathscr{S}$ при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ (см. § 9.1), то $(f, F[\varphi])$ есть функционал (очевидно, линейный) на $\mathscr{S}$. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$. По лемме § 9.1 $F[\varphi_k] \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}$, и потому, в силу $f \in \mathscr{S}'$, $(f, F[\varphi_k]) \to 0$, $k \to \infty$, так что функционал $(f, F[\varphi])$ — непрерывный на $\mathscr{S}$.

Таким образом, операция преобразования Фурье F переводит пространство $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$.

Более того, *F — линейная и непрерывная операция из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$.*

Линейность F очевидна. Докажем ее непрерывность. Пусть $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{S}'$. Тогда, в силу (7), при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ получим

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \to 0, \quad k \to \infty,$$

Это и означает, что $F[f_k]\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}'$, т. е. операция F непрерывна из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$.

Введем в $\mathscr{S}'$ еще одну операцию преобразования Фурье, которую обозначим через F^{-1}:

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-x)],\qquad f\in\mathscr{S}'. \tag{8}$$

Докажем, что операция F^{-1} является обратной к операции преобразования Фурье F, т. е.

$$F^{-1}[F[f]]=f,\quad F[F^{-1}[f]]=f,\qquad f\in\mathscr{S}'. \tag{9}$$

Действительно, из (5) — (8) при всех $\varphi\in\mathscr{S}$ получаем равенства

$$\begin{aligned}(F^{-1}[F[f]],\ \varphi)&=\frac{1}{(2\pi)^n}(F[F[f](-\xi)],\ \varphi)=\\ &=\frac{1}{(2\pi)^n}(F[f](-\xi),\ F[\varphi])=\frac{1}{(2\pi)^n}(F[f],\ F[\varphi](-\xi))=\\ &=(F[f],\ F^{-1}[\varphi])=(f,\ F[F^{-1}[\varphi]])=(f,\ \varphi)=\\ &=(f,\ F^{-1}[F[\varphi]])=(F^{-1}[f],\ F[\varphi])=(F[F^{-1}[f]],\ \varphi),\end{aligned}$$

откуда и вытекают формулы (9).

Из формул (9) следует, что всякая обобщенная функция f из $\mathscr{S}'$ есть преобразование Фурье обобщенной функции $g=F^{-1}[f]$ из $\mathscr{S}'$, $f=F[g]$, и если $F[f]=0$, то и $f=0$. Таким образом, мы доказали, что *преобразования Фурье F и F^{-1} преобразуют $\mathscr{S}'$ на $\mathscr{S}'$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.*

Пусть $f(x,\ y)\in\mathscr{S}'(R^{n+m})$, где $x\in R^n$, $y\in R^m$. Введем преобразование Фурье $F_x[f]$ по переменным $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, положив для любой $\varphi(\xi,\ y)\in\mathscr{S}(R^{n+m})$

$$(F_x[f],\ \varphi)=(f,\ F_\xi[\varphi]). \tag{10}$$

Как и в лемме § 9.1, устанавливается, что

$$F_\xi[\varphi](x,\ y)=\int\varphi(\xi,\ y)\,e^{i(\xi,\ x)}\,d\xi\in\mathscr{S}(R^{n+m})$$

и операция $F_\xi[\varphi]$ непрерывна из $\mathscr{S}(R^{n+m})$ в $\mathscr{S}(R^{n+m})$, так что формула (10) действительно определяет обобщенную функцию $F_x[f](\xi,\ y)$ из $\mathscr{S}'(R^{n+m})$.

Пример. Покажем, что

$$F[\delta(x-x_0)]=e^{i(\xi,\ x_0)}. \tag{11}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(F[\delta(x-x_0)],\ \varphi)&=(\delta(x-x_0),\ F[\varphi])=F[\varphi](x_0)=\\ &=\int\varphi(\xi)\,e^{i(\xi,\ x_0)}\,d\xi=(e^{i(\xi,\ x_0)},\ \varphi),\qquad \varphi\in\mathscr{S}.\end{aligned}$$

Полагая в (11) $x_0=0$, получим

$$F[\delta]=1, \tag{12}$$

откуда

$$\delta=F^{-1}[1]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[1],$$

так что

$$F[1]=(2\pi)^n\,\delta(\xi). \tag{13}$$

3. Свойства преобразования Фурье.

a) Дифференцирование преобразования Фурье. Если $f\in\mathscr{S}'$, то

$$D^\alpha F[f]=F[(ix)^\alpha f]. \tag{14}$$

Действительно, пользуясь (2), при всех $\varphi\in\mathscr{S}$ получим

$$\begin{aligned}(D^\alpha F[f],\ \varphi)&=(-1)^{|\alpha|}(F[f],\ D^\alpha\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,\ F[D^\alpha\varphi])=\\ &=(-1)^{|\alpha|}(f,\ (-ix)^\alpha F[\varphi])=((ix)^\alpha f,\ F[\varphi])=(F[(ix)^\alpha f],\ \varphi),\end{aligned}$$

откуда и следует формула (14).

В частности, полагая в (14) $f=1$ и пользуясь формулой (13), имеем

$$F[x^\alpha]=(-i)^{|\alpha|}D^\alpha F[1]=(2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi). \tag{15}$$

b) Преобразования Фурье производной. Если $f\in\mathscr{S}'$, то

$$F[D^\alpha f]=(-i\xi)^\alpha F[f]. \tag{16}$$

В самом деле, пользуясь формулой (1), при всех $\varphi\in\mathscr{S}$ получим

$$\begin{aligned}(F[D^\alpha f],\ \varphi)&=(D^\alpha f,\ F[\varphi])=(-1)^{|\alpha|}(f,\ D^\alpha F[\varphi])=\\ &=(-1)^{|\alpha|}(f,\ F[(i\xi)^\alpha\varphi])=(-1)^{|\alpha|}(F[f],\ (i\xi)^\alpha\varphi)=\\ &=((-i\xi)^\alpha F[f],\ \varphi),\end{aligned}$$

откуда и следует формула (16).

В частности, полагая в (16) $f=\delta$ и пользуясь формулой (12), имеем

$$F[D^\alpha\delta]=(-i\xi)^\alpha F[\delta]=(-i\xi)^\alpha. \tag{17}$$

c) Преобразование Фурье сдвига. Если $f \in \mathscr{S}'$, то

$$F[f(x-x_0)] = e^{i(x_0,\, \xi)} F[f]. \tag{18}$$

Действительно, при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$(F[f(x-x_0)],\ \varphi) = (f(x-x_0),\ F[\varphi]) = (f,\ F[\varphi](x+x_0)) = \\ = (f,\ F[\varphi e^{i(x_0,\, \xi)}]) = (F[f],\ e^{i(x_0,\, \xi)}\varphi) = (e^{i(x_0,\, \xi)} F[f],\ \varphi),$$

откуда и следует формула (18).

d) Сдвиг преобразования Фурье. Если $f \in \mathscr{S}'$, то

$$F[f](\xi+\xi_0) = F[e^{i(\xi_0,\, x)} f](\xi). \tag{19}$$

В самом деле, пользуясь формулой (18), при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ получим

$$(F[f](\xi+\xi_0),\ \varphi) = (F[f],\ \varphi(\xi-\xi_0)) = (f,\ F[\varphi(\xi-\xi_0)]) = \\ = (f,\ e^{i(\xi_0,\, x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0,\, x)} f,\ F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0,\, x)} f],\ \varphi),$$

откуда и следует формула (19).

e) Преобразование Фурье подобия (с отражением). Если $f \in \mathscr{S}'$, то при всех вещественных $c \neq 0$

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \tag{20}$$

поскольку при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем (см. § 5.9)

$$(F[f(cx)],\ \varphi) = (f(cx),\ F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n}\left(f,\ F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right)\right) = \\ = \frac{1}{|c|^n}\left(f,\ \int \varphi(\xi)\, e^{i\left(\frac{x}{c},\, \xi\right)}\, d\xi\right) = \left(f,\ \int \varphi(c\xi')\, e^{i(x,\, \xi')}\, d\xi'\right) = \\ = (f,\ F[\varphi(c\xi)]) = (F[f],\ \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n}\left(F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right),\ \varphi\right).$$

f) Преобразование Фурье прямого произведения. Если $f \in \mathscr{S}'(R^n)$ и $g \in \mathscr{S}'(R^m)$, то

$$F[f(x)\cdot g(y)] = F_x[f(x)\cdot F[g](\eta)] = \\ = F_y[F[f](\xi)\cdot g(y)] = F[f](\xi)\cdot F[g](\eta). \tag{21}$$

Действительно, при всех $\varphi(\xi, \eta) \in \mathscr{S}(R^{n+m})$ имеем

$$(F[f(x)\cdot g(y)],\ \varphi) = (f(x)\cdot g(y),\ F[\varphi]) = \\ = (f(x),\ (g(y),\ F_\eta F_\xi[\varphi])) = (f(x),\ (F[g],\ F_\xi[\varphi])) = \\ = (f(x)\cdot F[g](\eta),\ F_\xi[\varphi]) = (F_x[f(x)\cdot F[g](\eta)],\ \varphi) = \\ = (F[g](\eta),\ (f(x),\ F_\xi[\varphi])) = (F[g](\eta),\ (F[f](\xi),\ \varphi)) = \\ = (F[f](\xi)\cdot F[g](\eta),\ \varphi),$$

откуда и следуют равенства (21).

g) Аналогичные формулы справедливы и для преобразования Фурье F_x, например: если $f(x, y) \in \mathscr{S}'(R^{n+m})$, то

$$\begin{gathered} D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x[f] = F_x\left[(ix)^\alpha D_y^\beta f\right], \\ F_x\left[D_x^\alpha D_y^\beta f\right] = (-i\xi)^\alpha D_y^\beta F_x[f]. \end{gathered} \tag{22}$$

4. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем.

Теорема. *Если f — финитная обобщенная функция, то ее преобразование Фурье принадлежит классу θ_M и представляется формулой*

$$F[f](\xi) = (f(x),\ \eta(x)\, e^{i(\xi,\, x)}), \tag{23}$$

где η — любая функция из $\mathscr{D}$, равная 1 в окрестности носителя f.

Доказательство. Учитывая равенства (6) § 8.3 и (16) § 9.3, при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ получаем

$$(D^\alpha F[f],\ \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F[f],\ D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f,\ F[D^\alpha\varphi]) = \\ = (-1)^{|\alpha|}(f,\ \eta(x)(-ix)^\alpha F[\varphi]) = \\ = \left(f(x),\ \int \eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi)\, e^{i(\xi,\, x)}\, d\xi\right).$$

Замечая теперь, что

$$\eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi)\, e^{i(\xi,\, x)} \in \mathscr{S}(R^{2n}),$$

и пользуясь формулой (15) § 8.5:

$$\left(f(x),\ \int \eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi)\, e^{i(\xi,\, x)}\, d\xi\right) = \int (f,\ \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi,\, x)})\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

из предыдущих равенств выводим равенство

$$(D^\alpha F[f],\ \varphi) = \int (f,\ \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi,\, x)})\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

из которого вытекает, что

$$D^\alpha F[f](\xi) = (f,\ \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi,\, x)}). \tag{24}$$

Отсюда при $\alpha = 0$ следует формула (23).

Из представления (24), как и при доказательстве леммы § 7.1, выводим, что $D^\alpha F[f] \in C(R^n)$, так что $F[f] \in C^\infty(R^n)$. Далее, по теореме Л. Шварца (см. § 8.2) существуют такие числа $C > 0$ и $p \geqslant 0$ (p — целое), при которых справедливо неравенство (3) § 8.2. Применяя это неравенство к правой части равенства (24), получаем оценку

$$|D^\alpha F[f](\xi)| = |(f, \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)})| \leqslant C \|\eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)}\|_p =$$
$$= C \sup_{|\beta| \leqslant p,\ x \in R^n} (1+|x|)^p |D^\beta[\eta(x) x^\alpha e^{i(\xi, x)}]| \leqslant$$
$$\leqslant C_\alpha (1+|\xi|)^p, \qquad \xi \in R^n,$$

из которой и вытекает, что $F[f] \in \theta_M$ (см. § 8.1). Теорема доказана.

5. Преобразование Фурье свертки. *Пусть $f \in \mathscr{S}'$ и g — финитная обобщенная функция. Тогда*

$$F[f * g] = F[g] F[f]. \tag{25}$$

Действительно, в силу § 8.6 свертка $f * g \in \mathscr{S}'$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \eta(y)\varphi(x+y))), \qquad \varphi \in \mathscr{S},$$

где $\eta \in \mathscr{D}$, $\eta = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} g$. Учитывая это представление, при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ получаем

$$(F[f * g], \varphi) = (f * g, F[\varphi]) =$$
$$= \left(f(x), \left(g(y), \eta(y) \int \varphi(\xi) e^{i((x+y), \xi)} d\xi\right)\right).$$

Принимая во внимание, что, по теореме § 9.4, $F[g] \in \theta_M$, и пользуясь формулами (15) § 8.5 и (23), преобразуем полученное равенство:

$$(F[f * g], \varphi) = \left(f, \int (g, \eta(y) e^{i(\xi, y)}) e^{i(\xi, x)} \varphi(\xi) d\xi\right) =$$
$$= \left(f, \int F[g](\xi) \varphi(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi\right) = (f, F[F[g]\varphi]) =$$
$$= (F[f], F[g]\varphi) = (F[g]F[f], \varphi),$$

откуда и вытекает формула (25).

6. Примеры, $n = 1$.

a) $$F[\theta(R - |x|)] = \int_{-R}^{R} e^{ix\xi} dx = 2 \frac{\sin R\xi}{\xi}. \tag{26}$$

b) $$F[e^{-\alpha^2 x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}. \tag{27}$$

Действительно,

$$F[e^{-\alpha^2 x^2}] = \int e^{-\alpha^2 x^2 + i\xi x} dx = \frac{1}{\alpha} \int e^{-\sigma^2 + i\frac{\xi}{\alpha}\sigma} d\sigma =$$
$$= \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}} \int e^{-\left(\sigma + \frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} d\sigma = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}} \int\limits_{\operatorname{Im}\zeta = \frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Осталось доказать, что линия интегрирования $\operatorname{Im}\zeta = \frac{\xi}{2\alpha}$ в последнем интеграле может быть сдвинута на вещественную ось, т. е. что при всех a

$$\int\limits_{\operatorname{Im}\zeta = a} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}. \tag{28}$$

По теореме Коши при любом $R > 0$ имеем

$$\int\limits_{C_R} e^{-\zeta^2} d\zeta = 0, \qquad \zeta = \sigma + i\tau, \tag{29}$$

где контур $C_R = c'_R \cup c''_R \cup l^+_R \cup l^-_R$ изображен на рис. 36.

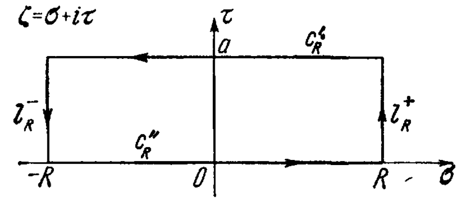

Рис. 36.

Но на отрезках $l^\pm_R = [0 \leqslant \tau \leqslant a,\ \sigma = \pm R]$

$$|e^{-\zeta^2}| = |e^{-\sigma^2 + \tau^2 - 2i\sigma\tau}| = e^{-R^2 + \tau^2} \xrightarrow{\tau \in [0, a]} 0, \qquad R \to \infty,$$

а потому справедливо равенство

$$\lim_{R \to \infty} \left(\int\limits_{l^+_R} + \int\limits_{l^-_R}\right) e^{-\zeta^2} d\zeta = 0,$$

откуда, пользуясь (29), получаем равенство (28):

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{-\zeta^2}d\zeta=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C'_R}+\int_{C''_R}\right)e^{-\zeta^2}d\zeta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma-\int_{\tau=ia}e^{-\zeta^2}d\zeta=0.$$

c) $$F[e^{ix^2}]=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)}. \quad (30)$$

Действительно, из сходимости несобственного интеграла (интеграла Френеля)

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy^2}dy=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$$

вытекает равномерная сходимость по ξ на каждом конечном интервале несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2+ix\xi}dx=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{ix^2+ix\xi}dx=$$

$$=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{i\left(x+\frac{\xi}{2}\right)^2-\frac{i}{4}\xi^2}dx=e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M+\frac{\xi}{2}}^{N+\frac{\xi}{2}}e^{iy^2}dy=$$

$$=e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy^2}dy=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)}.$$

Таким образом, мы доказали равенство (30) поточечно при условии, что преобразование Фурье понимается как несобственный интеграл. Докажем справедливость этого равенства в $\mathscr{S}'$. Пользуясь полученным результатом, при всех $\varphi\in\mathscr{D}$, $\operatorname{supp}\varphi\subset(-R,\ R)$ имеем

$$(F[e^{ix^2}],\ \varphi)=(e^{ix^2},\ F[\varphi])=$$

$$=\int e^{ix^2}F[\varphi](x)\,dx=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{ix^2}\int_{-R}^{R}\varphi(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi\,dx=$$

$$=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-R}^{R}\varphi(\xi)\int_{-M}^{N}e^{ix^2+ix\xi}dx\,d\xi=$$

$$=\int_{-R}^{R}\varphi(\xi)\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M}^{N}e^{iy^2+ix\xi}dx\,d\xi=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\int\varphi(\xi)\,e^{-\frac{i}{4}\xi^2}d\xi,$$

откуда заключаем о справедливости равенства (30) на основных функциях из $\mathscr{D}$. Но $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{S}$ (см. § 8.1). Поэтому это равенство справедливо на основных функциях из $\mathscr{S}$.

d) $$F[\theta]=\pi\delta(\xi)+i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}, \quad (31)$$

$$F[\theta(-x)]=\pi\delta(\xi)-i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}. \quad (31')$$

Действительно, при всех $a>0$ имеем

$$F[\theta(x)\,e^{-ax}]=\int_0^{\infty}e^{-ax+ix\xi}dx=\frac{i}{\xi+ia}. \quad (32)$$

Так как

$$\theta(x)\,e^{-ax}\to\theta(x),\quad a\to+0\quad \text{в}\quad \mathscr{S}',$$

то, переходя к пределу при $a\to+0$ в формуле (32) и пользуясь непрерывностью на $\mathscr{S}'$ преобразования Фурье (см. § 9.2), выводим:

$$F[\theta]=\frac{i}{\xi+i0}. \quad (33)$$

Применяя теперь формулу Сохоцкого (10) § 5.8, получаем равенство (31). Равенство (31′) устанавливается аналогично.

e) $$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|}\right]=-2C-2\ln|\xi|, \quad (34)$$

где C — постоянная Эйлера,

$$C=\int_0^1\frac{1-\cos u}{u}du-\int_1^{\infty}\frac{\cos u}{u}du,$$

и обобщенная функция $\mathscr{P}\frac{1}{|x|}$ определена в § 6.6, b).

Действительно, при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$\left(F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|}\right], \varphi\right) = \left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|}, F[\varphi]\right) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi)\,(e^{ix\xi} - 1)\,d\xi\,dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \int \varphi(\xi)\,\frac{\cos x\xi - 1}{x}\,d\xi\,dx + 2\int_1^\infty \int \varphi(\xi)\,\frac{\cos x\xi}{x}\,d\xi\,dx =$$

$$= 2\int \varphi(\xi) \int_0^1 \frac{\cos x\xi - 1}{x}\,dx\,d\xi - 2\int_1^\infty \int \varphi'(\xi)\,\frac{\sin x}{x^2}\,d\xi\,dx =$$

$$= 2\int \varphi(\xi) \int_0^{|\xi|} \frac{\cos u - 1}{u}\,du\,d\xi - 2\int \varphi'(\xi) \int_1^\infty \frac{\sin x\xi}{x^2}\,dx\,d\xi =$$

$$= 2\int \varphi(\xi) \left[\int_0^{|\xi|} \frac{\cos u - 1}{u}\,du + \frac{d}{d\xi}\int_1^\infty \frac{\sin x\xi}{x^2}\,dx\right] d\xi =$$

$$= -2\int \varphi(\xi)\,(C + \ln|\xi|)\,d\xi,$$

откуда и вытекает формула (34).

f) В § 6.4, d) было установлено равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}. \tag{35}$$

Нетрудно видеть, что ряды в равенстве (35) сходятся в $\mathscr{S}'$. Пользуясь формулой (11), перепишем равенство (35) в виде

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x - k)].$$

Применяя это равенство к $\varphi \in \mathscr{S}$, получим

$$2\pi\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k), \varphi\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x - 2\pi k), \varphi) =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(x - k)], \varphi\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x - k), F[\varphi]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k),$$

т. е.

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k). \tag{36}$$

Равенство (36) называется *формулой суммирования Пуассона.*

Полагая в формуле (36)

$$\varphi(x) = e^{-\frac{tx^2}{4\pi^2}}, \qquad F[\varphi](\xi) = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\xi^2\pi^2}{t}}, \qquad t > 0,$$

получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-tk^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{t}}. \tag{37}$$

Формула (37) применяется в теории эллиптических функций.

7. Примеры, $n \geqslant 2$.

а) Пусть квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = (Ax, x), \quad A = (a_{ij}),$$

вещественна и положительно определена:

$$(Ax, x) \geqslant \sigma|x|^2, \qquad \sigma > 0.$$

Тогда

$$F\left[e^{-(Ax, x)}\right] = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\,e^{-\frac{1}{4}(\xi, A^{-1}\xi)}. \tag{38}$$

Для получения формулы (38) с помощью неособенного вещественного преобразования $x = By$ приведем квадратичную форму (Ax, x) к диагональному виду

$$(Ax, x) = (ABy, By) = (B'ABy, y) = |y|^2,$$

так что

$$A^{-1}=BB', \quad \det A\,(\det B)^2=1.$$

Отсюда, пользуясь формулой (25), получаем

$$F\left[e^{-(Ax,\,x)}\right]=\int e^{-(Ax,\,x)+i(\xi,\,x)}\,dx=$$

$$=|\det B|\int e^{-(ABy,\,By)+i(\xi,\,By)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\int e^{-|y|^2+i(B'\xi,\,y)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\prod_{j=1}^{n}\int e^{-y_j^2-i(B'\xi)_j y_j}\,dy_j=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}|B'\xi|^2}=$$

$$=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}(\xi,\,BB'\xi)}=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}(\xi,\,A^{-1}\xi)}.$$

b) Аналогично, пользуясь формулой (30), получим

$$F\left[e^{i(Ax,\,x)}\right]=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{i\frac{\pi n}{4}}e^{-\frac{i}{4}(\xi,\,A^{-1}\xi)}. \tag{39}$$

c) Пусть $\delta_{S_R}(x)$ — простой слой на сфере S_R в R^3. Тогда

$$F\left[\delta_{S_R}\right]=4\pi R\,\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \tag{40}$$

Действительно, так как δ_{S_R} — финитная обобщенная функция, то, применяя формулу (23), получим

$$F\left[\delta_{S_R}\right]=\left(\delta_{S_R}(x),\ \eta(x)e^{i(\xi,\,x)}\right)=\int_{S_R}\eta(x)e^{i(\xi,\,x)}\,dS_x=$$

$$=R^2\int_{S_1}e^{iR(\xi,\,s)}\,ds=R^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e^{iR|\xi|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=4\pi R\,\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

d) Пусть $n=2$. Введем обобщенную функцию $\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}$ из $\mathscr{S}'$, положив при $\varphi\in\mathscr{S}$

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2},\ \varphi\right)=\int_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2}\,dx+\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|^2}\,dx.$$

Тогда

$$F\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}\right)=-2\pi\ln|\xi|-2\pi C_0, \tag{41}$$

где

$$C_0=\int_0^1\frac{1-J_0(u)}{u}\,du-\int_1^\infty\frac{J_0(u)}{u}\,du$$

и J_0 — функция Бесселя (см. ниже, § 23).

Действительно, при всех $\varphi\in\mathscr{S}$ справедлива цепочка равенств

$$\left(F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2}\right],\ \varphi\right)=\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|^2},\ F[\varphi]\right)=$$

$$=\int_{|x|<1}\frac{F[\varphi](x)-F[\varphi](0)}{|x|^2}\,dx+\int_{|x|>1}\frac{F[\varphi](x)}{|x|^2}\,dx=$$

$$=\int_{|x|<1}\frac{1}{|x|^2}\int\varphi(\xi)\left[e^{i(x,\,\xi)}-1\right]d\xi\,dx+$$

$$+\int_{|x|>1}\frac{1}{|x|^2}\int\varphi(\xi)e^{i(x,\,\xi)}\,d\xi\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{r}\int\varphi(\xi)\int_0^{2\pi}\left(e^{ir|\xi|\cos\theta}-1\right)d\theta\,d\xi\,dr+$$

$$+\int_1^\infty\frac{1}{r}\int\varphi(\xi)\int_0^{2\pi}e^{ir|\xi|\cos\theta}\,d\theta\,d\xi\,dr=$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{1}{r}\int\varphi(\xi)\left[J_0(r|\xi|)-1\right]d\xi\,dr+$$

$$+2\pi\int_1^\infty\frac{1}{r}\int\varphi(\xi)J_0(r|\xi|)\,d\xi\,dr=$$

$$=2\pi\int\varphi(\xi)\left[\int_0^1\frac{J_0(r|\xi|)-1}{r}\,dr+\int_1^\infty\frac{J_0(r|\xi|)}{r}\,dr\right]d\xi=$$

$$=2\pi\int\varphi(\xi)\left[\int_0^{|\xi|}\frac{J_0(u)-1}{u}\,du+\int_{|\xi|}^\infty\frac{J_0(u)}{u}\,du\right]d\xi=$$

$$=-2\pi\int\varphi(\xi)\left(C_0+\ln|\xi|\right)d\xi,$$

откуда и вытекает равенство (41).

e) $$F\left[\frac{1}{z}\right]=\frac{2\pi i}{\zeta},\quad \zeta=\xi+i\eta. \tag{42}$$

Применяя к обеим частям равенства (44) § 6.5 преобразование Фурье, получим

$$F\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{z}\right]=\frac{-i\zeta}{2}F\left[\frac{1}{z}\right]=\pi F[\delta]=\pi.$$

Так как $\frac{1}{\zeta}$ — локально интегрируемая функция в R^2, то последнее равенство можно разделить на ζ в $\mathscr{S}'(R^2)$. В результате получим формулу (42).

f) $$F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right]=2\pi\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|},\quad n=2. \tag{43}$$

Действительно

$$F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right]=\int\limits_{|x|<R}\frac{e^{i(\xi,x)}}{\sqrt{R^2-|x|^2}}dx=$$

$$=\int_0^R\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\int_0^{2\pi}e^{ir|\xi|\cos\varphi}d\varphi\,dr=2\pi\int_0^R\frac{rJ_0(r|\xi|)}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=$$

$$=2\pi R\int_0^1 J_0(R|\xi|u)\frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}}=2\pi\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

Здесь мы воспользовались формулой 6.554, 2) из справочника И. С. Градштейна и И. М. Рыжика [1].

g) $$F\left[\frac{1}{|x|^2}\right]=\frac{2\pi^2}{|\xi|},\qquad n=3. \tag{44}$$

Учитывая, что функция $|x|^{-2}$ локально интегрируема в R^3, при всех $\varphi\in\mathscr{S}$ получаем следующую цепочку

равенств:

$$\left(F\left[\frac{1}{|x^2|}\right],\ \varphi\right)=\left(\frac{1}{|x|^2},\ F[\varphi]\right)=\int\frac{1}{|x|^2}F[\varphi]dx=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|x|<R}\frac{1}{|x|^2}\int\varphi(\xi)e^{i(\xi,x)}d\xi\,dx=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int\varphi(\xi)\int\limits_{|x|<R}\frac{e^{i(\xi,x)}}{|x|^2}dx\,d\xi=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int\varphi(\xi)\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{e^{i|\xi|\rho\cos\theta}}{\rho^2}\rho^2d\psi\sin\theta\,d\theta\,d\rho\,d\xi=$$

$$=2\pi\lim_{R\to\infty}\int\varphi(\xi)\int_0^R\int_{-1}^1 e^{i|\xi|\rho\mu}d\mu\,d\rho\,d\xi=$$

$$=4\pi\lim_{R\to\infty}\int\frac{\varphi(\xi)}{|\xi|}\int_0^R\frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}d\rho\,d\xi. \tag{45}$$

Так как

$$|\xi|\left|\int_R^\infty\frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}d\rho\right|=$$

$$=\left|\frac{\cos|\xi|R}{R}-\int_R^\infty\frac{\cos|\xi|\rho}{\rho^2}d\rho\right|\leqslant\frac{1}{R}+\int_R^\infty\frac{d\rho}{\rho^2}=\frac{2}{R},$$

то возможен предельный переход при $R\to\infty$ под знаком интеграла в последнем члене равенств (45). В результате, учитывая, что

$$\int_0^\infty\frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}d\rho=\frac{\pi}{2},\qquad |\xi|\neq 0,$$

получим

$$\left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right],\ \varphi\right)=4\pi\int\frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2}|\xi|\int_0^\infty\frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}d\rho\,d\xi=2\pi^2\int\frac{\varphi(\xi)}{|\xi|}d\xi,$$

откуда и следует формула (44).

8. Упражнения. Пользуясь формулами (31) и (31′) и равенством $\mathscr{P}\frac{1}{\xi^2}=-\left(\mathscr{P}\frac{1}{\xi}\right)'$ (см. § 6.6 а)), показать, что

a) $F[\operatorname{sign} x] = 2i\,\mathscr{P}\frac{1}{\xi}$, $F\left[\mathscr{P}\frac{1}{x}\right] = i\pi \operatorname{sign}\xi$;

b) $F\left[\mathscr{P}\frac{1}{x^2}\right] = -\pi|\xi|$, $F[|x|] = -2\mathscr{P}\frac{1}{\xi^2}$;

c) $F[\theta(x)\,x] = -i\pi\delta'(\xi) - \mathscr{P}\frac{1}{\xi^2}$.

d) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k), \qquad |a_k| \leqslant c(1+|k|)^m$$

сходится в $\mathscr{S}'(R^1)$ и

$$F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}.$$

e) Пользуясь теоремой § 8.4, доказать: если $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ сферически-симметрична (т. е. $f(Ax) = f(x)$ для всех вращений A в R^n) или лоренцинвариантна (см. § 5.9) и $\operatorname{supp} f = \{0\}$, то соответственно $f(x) = P(\Delta)\,\delta(x)$ или $f(x) = P(\Box)\,\delta(x)$, где P — некоторый полином.

f) Пусть $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ и $\operatorname{supp} f \subset U_a$; пусть далее η — любая функция класса $\mathscr{D}(R^n)$, равная 1 в окрестности носителя f. Доказать, что функция

$$\tilde{f}(z) = (f(\xi), \eta(\xi)\,e^{i(z,\xi)}), \qquad z = (z_1, \ldots, z_n) = x + iy \tag{46}$$

не зависит от η, целая и удовлетворяет при некотором $m \geqslant 0$ и любом $\varepsilon > 0$ оценке

$$|\tilde{f}(x+iy)| \leqslant C_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|y|}(1+|x|)^m. \tag{47}$$

Обратно, если целая функция $\tilde{f}(z)$ удовлетворяет при любом $\varepsilon > 0$ оценке (47), то существует (единственная) $f \in \mathscr{D}'(R^n)$, $\operatorname{supp} f \subset \overline{U}_a$ такая, что имеет место представление (46) (теорема Пейли — Винера — Шварца).

§ 10. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление)

Метод преобразования Лапласа является одним из мощных средств для решения задач математической физики. В приложениях, например в теории электрических цепей, этот метод часто называют *операционным исчислением* (Хевисайда). Основы теории преобразования Лапласа обобщенных функций заложены Л. Шварцем [3] и Лионсом [1]. В целях простоты мы ограничимся здесь изложением теории преобразования Лапласа обобщенных функций с одной независимой переменной. *)

1. Преобразование Лапласа локально интегрируемых функций. Пусть $f(t)$ — локально интегрируемая функция в R^1, $f(t) = 0$, $t < 0$ и

$$|f(t)| \leqslant Ae^{at} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{1}$$

Интеграл

$$\mathscr{F}(p) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt, \quad p = \sigma + i\omega, \tag{2}$$

называется *преобразованием Лапласа* функции f.

Функция $\mathscr{F}(p)$ — *аналитическая в полуплоскости* $\sigma > a$, *причем* $\mathscr{F}(p) \overset{\omega}{\rightrightarrows} 0$, $\sigma \to +\infty$.

Действительно, в полуплоскости $\sigma > a$ подынтегральная функция в (2), в силу (1), имеет оценку

$$|f(t)\,e^{-pt}| \leqslant Ae^{-(\sigma-a)t}, \qquad t \to +\infty,$$

и, следовательно, абсолютно интегрируема. Поэтому интеграл (2) сходится равномерно во всякой замкнутой полуплоскости $\sigma \geqslant a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, определяя тем самым аналитическую функцию $\mathscr{F}(p)$ при $\sigma > a$, стремящуюся к 0 при $\sigma \to +\infty$ равномерно по ω.

Формула (2) в терминах преобразования Фурье принимает вид

$$\mathscr{F}(p) = F[f(t)\,e^{-\sigma t}](-\omega), \qquad \sigma > a.$$

Эту формулу мы и примем за исходную при определении преобразования Лапласа обобщенных функций.

Пример.

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}, \qquad \sigma > 0. \tag{3}$$

2. Преобразование Лапласа обобщенных функций. Обозначим через $\mathscr{D}'_+(a)$ совокупность обобщенных функций $f(t)$ из $\mathscr{D}'_+$ (см. § 7.7), обладающих тем свойством,

*) См. также В. А. Диткин и А. П. Прудников [1] и Ю. А. Брычков и А. П. Прудников [1].

что
$$f(t)\,e^{-\sigma t}\in\mathscr{S}'_+ \quad \text{при всех} \quad \sigma>a\,^{*)}. \tag{4}$$

Определение $\mathscr{S}'_+$ см. в § 8.6; $\mathscr{S}'_+$ — сверточная алгебра. Очевидно, что $\mathscr{D}'_+(a_1)\subset\mathscr{D}'_+(a_2)$, если $a_1\leqslant a_2$.

Справедливо включение: $\mathscr{S}'_+\subset\mathscr{D}'_+(0)$.

Действительно, если $f\in\mathscr{S}'$, $\operatorname{supp} f\subset[0,\infty)$, η — любая функция класса C^∞ со свойствами: $\eta(t)=0$, $t<-\delta$, $\eta(t)=1$, $t>-\delta/2$, $\delta>0$ — любое, то при всех $\sigma>0$ $\eta(t)\,e^{-\sigma t}\in\mathscr{S}$, $f=\eta f$ (см. § 5.10), и поэтому
$$f(t)\,e^{-\sigma t}=f(t)\,\eta(t)\,e^{-\sigma t}\in\mathscr{S}'.$$

Если $f\in\mathscr{D}'_+(a)$, *то* $bf\in\mathscr{D}'_+(a)$, $b\in\theta_M$;
$$f(kt)\in\mathscr{D}'_+(ka),\quad k>0;\quad f(t)\,e^{\lambda t}\in\mathscr{D}'_+(a+\operatorname{Re}\lambda).$$

Эти утверждения непосредственно следуют из определений (см. § 8.3).

Если f *и* $g\in\mathscr{D}'_+(a)$, *то* $f*g\in\mathscr{D}'_+(a)$ *и справедливо равенство*
$$(f*g)\,e^{-\sigma t}=fe^{-\sigma t}*ge^{-\sigma t},\qquad \sigma>a. \tag{5}$$

Действительно, пользуясь формулой (17) § 8.6, при всех $\sigma>a$ и $\varphi\in\mathscr{D}(R^1)$ имеем
$$\begin{aligned}(fe^{-\sigma t}*ge^{-\sigma t},\ \varphi)&=(f(t)\,e^{-\sigma t}\cdot g(\tau)\,e^{-\sigma\tau},\ \eta_1(t)\,\eta_2(\tau)\,\varphi(t+\tau))=\\&=(f(t)\cdot g(\tau),\ \eta_1(t)\,\eta_2(\tau)\,e^{-\sigma(t+\tau)}\,\varphi(t+\tau))=\\&=(f*g,\ \varphi e^{-\sigma t})=(e^{-\sigma t}(f*g),\ \varphi),\end{aligned}$$
откуда и следует равенство (5). Так как $fe^{-\sigma t}$ и $ge^{-\sigma t}\in\mathscr{S}'_+$ и $\mathscr{S}'_+$ — сверточная алгебра (см. § 8.6), то из (5) следует, что $(f*g)\,e^{-\sigma t}\in\mathscr{S}'_+$, $\sigma>a$, т. е. $f*g\in\mathscr{D}'_+(a)$.

Мы доказали, таким образом, что $\mathscr{D}'_+(a)$ — *сверточная алгебра*; она является подалгеброй сверточной алгебры $\mathscr{D}'_+$ (см. § 7.7).

В частности, если $f\in\mathscr{D}'_+(a)$, то $f(t-\tau)=f*\delta(t-\tau)\in\in\mathscr{D}'_+(a)$, $\tau\geqslant 0$; $f^{(m)}=f*\delta^{(m)}\in\mathscr{D}'_+(a)$, $m=1,2,\ldots$; если $a\geqslant 0$, то m-я первообразная $f_{(m)}=\underbrace{\theta*\ldots*\theta}_{m\ \text{раз}}*f\in\mathscr{D}'_+(a)$, $m=1,2,\ldots$ (см. §§ 6.3 и 7.8).

*) Обычно в качестве a берется inf тех σ, для которых имеет место (4).

Пусть $f\in\mathscr{D}'_+(a)$. Из условия (4) вытекает, что при каждом $\sigma>a$ обобщенная функция $f(t)\,e^{-\sigma t}$ обладает преобразованием Фурье, и поэтому
$$\mathscr{F}(p)=F[f(t)\,e^{-\sigma t}](-\omega)=2\pi F^{-1}[f(t)\,e^{-\sigma t}](\omega)\in\mathscr{S}', \tag{6}$$
$$\sigma>a.$$

Фиксируем произвольное число $\sigma_0>a$. Докажем, что
$$\mathscr{F}(p)=(f(t)\,e^{-\sigma_0 t},\ \eta(t)\,e^{-(p-\sigma_0)t}),\qquad \sigma>\sigma_0, \tag{7}$$
где $\eta(t)$ — произвольная вспомогательная функция, введенная выше.

Действительно, пусть $\sigma>\sigma_0>a$ и $\varphi\in\mathscr{S}$. Тогда
$$\begin{aligned}(\mathscr{F}(\sigma+i\omega),\ \varphi)&=(F[f(t)\,e^{-\sigma t}](-\omega),\ \varphi)=\\&=(f(t)\,e^{-\sigma t},\ F[\varphi(-\omega)])=\\&=(\eta(t)\,f(t)\,e^{-\sigma_0 t},\ e^{-(\sigma-\sigma_0)t}F[\varphi](-t))=\\&=\Bigl(f(t)\,e^{-\sigma_0 t},\ \eta(t)\,e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\int\varphi(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega\Bigr).\end{aligned}$$

Но при каждом $\sigma>\sigma_0$
$$\eta(t)\,e^{-(\sigma-\sigma_0)t-i\omega t}\varphi(\omega)\in\mathscr{S}(R^2).$$

Поэтому интеграл в последнем выражении можно вынести за знак функционала (см. (15) § 8.5), и мы получаем
$$(\mathscr{F}(\sigma+i\omega),\ \varphi)=\int(f(t)\,e^{-\sigma_0 t},\ \eta(t)\,e^{-(p-\sigma_0)t})\,\varphi(\omega)\,d\omega,$$
откуда и вытекает формула (7).

$\mathscr{F}(p)$ — *аналитическая функция в полуплоскости* $\sigma>a$ *и в каждой полуплоскости* $\sigma>\sigma_0>a$ *справедлива формула дифференцирования*
$$\mathscr{F}^{(m)}(p)=(f(t)\,e^{-\sigma_0 t},\ \eta(t)\,(-t)^m e^{-(p-\sigma_0)t}),\qquad m=1,2,\ldots \tag{8}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы § 8.4, если учесть, что
$$\eta(t)\,\frac{e^{-(p+\Delta p-\sigma_0)t}-e^{-(p-\sigma_0)t}}{\Delta p}\to -t\eta(t)\,e^{-(p-\sigma_0)t},$$
$$\Delta p\to 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{S}.$$

Функция $\mathscr{F}(p)$ называется *преобразованием Лапласа* обобщенной функции $f(t)$ из $\mathscr{D}'_+(a)$.

В операционном исчислении (обобщенную) функцию $f(t)$ называют *оригиналом*, функцию $\mathscr{F}(p)$ — *изображением* и этот факт записывают так:

$$f(t) \leftrightarrow \mathscr{F}(p), \qquad \sigma > a. \tag{9}$$

Отметим, что между оригиналами $f(t)$ и изображениями $\mathscr{F}(p)$ имеется *взаимно однозначное соответствие* *). Это утверждение вытекает из определения (6) и из взаимной однозначности операции преобразования Фурье (см. § 9.2).

Очевидно, преобразование Лапласа — *линейная* операция: если $f_k(t) \leftrightarrow \mathscr{F}_k(p)$, $\sigma > a_k$, $k = 1, 2$, то и

$$\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) \leftrightarrow \lambda \mathscr{F}_1(p) + \mu \mathscr{F}_2(p), \qquad \sigma > \max(a_1, a_2).$$

Пример.

$$\delta(t-\tau) \leftrightarrow e^{-\tau p}, \quad p \text{ — любое}, \quad \tau \geqslant 0. \tag{10}$$

3. Свойства преобразования Лапласа.

a) Дифференцирование преобразования Лапласа. Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, то

$$(-t)^m f(t) \leftrightarrow \mathscr{F}^{(m)}(p), \qquad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Действительно, $(-t)^m f \in \mathscr{D}'_+(a)$ (см. § 10.2). Применяя формулы (7) и (8) к $(-t)^m f$, при всех $\sigma > \sigma_0 > a$ получим соответствие (11):

$$(-t)^m f(t) \leftrightarrow ((-t)^m f(t) e^{-\sigma_0 t}, \ \eta(t) e^{-(p-\sigma_0)t}) = \\ = (f(t) e^{-\sigma_0 t}, \ \eta(t)(-t)^m e^{-(p-\sigma_0)t}) = \mathscr{F}^{(m)}(p).$$

b) Преобразование Лапласа производной. Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, то

$$f^{(m)}(t) \leftrightarrow p^m \mathscr{F}(p), \qquad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Это соответствие достаточно доказать при $m = 1$. Мы знаем, что $f' \in \mathscr{D}'_+(a)$ (см. § 10.2). Поэтому

$$f'(t) \leftrightarrow F[f'(t) e^{-\sigma t}](-\omega) = F[(f(t) e^{-\sigma t})' + \sigma f(t) e^{-\sigma t}](-\omega) = \\ = (\sigma + i\omega) F[f(t) e^{-\sigma t}](-\omega) = p\mathscr{F}(p),$$

что и требовалось.

c) Сдвиг (смещение) преобразования Лапласа. Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, то

$$f(t) e^{\lambda t} \leftrightarrow \mathscr{F}(p-\lambda), \qquad \sigma > a + \operatorname{Re}\lambda. \tag{13}$$

*) Поэтому соответствие (9) симметрично.

В § 10.2 показано, что $f(t) e^{\lambda t} \in \mathscr{D}'_+(a + \operatorname{Re}\lambda)$; поэтому в силу § 9.3, d),

$$f(t) e^{\lambda t} \leftrightarrow F[f(t) e^{\lambda t} e^{-\sigma t}](-\omega) = \\ = F[f(t) e^{-(\sigma-\lambda)t}](-\omega) = \mathscr{F}(p-\lambda).$$

d) Преобразование Лапласа подобия. Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$ и $k > 0$, то

$$f(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} \mathscr{F}\left(\frac{p}{k}\right), \qquad \sigma > ka. \tag{14}$$

Действительно, $f(kt) \in \mathscr{D}'_+(ka)$ (см. § 10.2) и, в силу § 9.3, e),

$$f(kt) \leftrightarrow F[f(kt) e^{-\sigma t}](-\omega) = F\left[f(kt) e^{-\frac{\sigma}{k} kt}\right](-\omega) = \\ = \frac{1}{k} F\left[f(t) e^{-\frac{\sigma}{k} t}\right]\left(-\frac{\omega}{k}\right) = \frac{1}{k} \mathscr{F}\left(\frac{p}{k}\right).$$

e) Преобразование Лапласа свертки. Если f и $g \in \mathscr{D}'_+(a)$, $f \leftrightarrow \mathscr{F}$ и $g \leftrightarrow \mathscr{G}$, $\sigma > a$, то

$$(f * g)(t) \leftrightarrow \mathscr{F}(p) \mathscr{G}(p), \qquad \sigma > a, \tag{15}$$

так что преобразование Лапласа мультипликативно.

Мы имеем $f * g \in \mathscr{D}'_+(a)$ (см. § 10.2) и, пользуясь формулами (5) и (7), при всех $\sigma > \sigma_0 > a$ получаем

$$(f * g)(t) \leftrightarrow ((f * g)(t) e^{-\sigma_0 t}, \ \eta(t) e^{-(p-\sigma_0)t}) = \\ = (f e^{-\sigma_0 t} * g e^{-\sigma_0 t}, \ \eta(t) e^{-(p-\sigma_0)t}).$$

Но $\eta(t) e^{-(p-\sigma_0)t} \in \mathscr{S}$, и поэтому по формуле (17) § 8.6 будем иметь

$$(f * g)(t) \leftrightarrow (f(t) e^{-\sigma_0 t} \cdot g(\tau) e^{-\sigma_0 \tau}, \ \eta_1(t) \eta_2(\tau) \eta(t+\tau) e^{-(p-\sigma_0)(t+\tau)}).$$

Учитывая теперь, что при некотором выборе вспомогательных функций η_1, η_2 и η справедливо тождество (рис. 37)

$$\eta_1(t) \eta_2(\tau) \eta(t+\tau) = \eta_1(t) \eta_2(\tau),$$

и пользуясь определением прямого произведения в $\mathscr{S}'$ (см. § 8.5), получаем формулу (15):

$$(f * g)(t) \leftrightarrow (f(t) e^{-\sigma_0 t} \cdot g(\tau) e^{-\sigma_0 \tau}, \quad \eta_1(t) \eta_2(\tau) e^{-(p-\sigma_0)(t+\tau)}) = \\ = (f(t) e^{-\sigma_0 t}, \ \eta_1(t) e^{-(p-\sigma_0)t} (g(\tau) e^{-\sigma_0 \tau}, \ \eta_2(\tau) e^{-(p-\sigma_0)\tau}) = \\ = \mathscr{F}(p) \mathscr{G}(p),$$

если еще раз учесть формулу (7).

f) Преобразование Лапласа сдвига (запаздывания). Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$ и $\tau \geqslant 0$, то

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-\tau p}\mathscr{F}(p), \qquad \sigma > a. \tag{16}$$

В самом деле, $f(t-\tau) \in \mathscr{D}'_+(a)$ (см. § 10.2) и, в силу (15) и (10),

$$f(t-\tau) = f * \delta(t-\tau) \leftrightarrow e^{-\tau p}\mathscr{F}(p).$$

g) Преобразование Лапласа первообразной. Если $f \in \mathscr{D}'_+(a)$, $a \geqslant 0$, то

$$f^{(-m)}(t) \leftrightarrow \frac{\mathscr{F}(p)}{p^m}, \qquad \sigma > a, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Действительно, $f^{(-m)} \in \mathscr{D}'_+(a)$ (см. § 10.2) и, в силу (15) и (3),

$$f^{(-m)}(t) = \underbrace{\theta * \ldots * \theta}_{m \text{ раз}} * f \leftrightarrow \frac{1}{p^m}\mathscr{F}(p).$$

4. Обратное преобразование Лапласа. Возникают задачи: 1) дать внутреннее описание изображений алгебры $\mathscr{D}'_+(a)$ и 2) как по данному изображению восстановить (единственный) оригинал? Ответы на эти вопросы содержатся в следующей основной теореме.

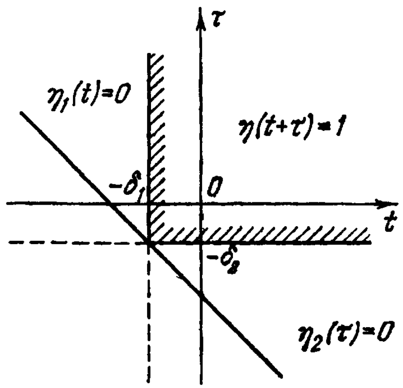

Рис. 37.

Предварительно введем класс $H(a)$ — совокупность функций $\mathscr{F}(p)$, аналитических в полуплоскости $\sigma > a$ и удовлетворяющих следующему условию роста: для любых $\varepsilon > 0$ и $\sigma_0 > a$ существуют числа $C_\varepsilon(\sigma_0) \geqslant 0$ и $m = m(\sigma_0) \geqslant 0$ такие, что

$$|\mathscr{F}(p)| \leqslant C_\varepsilon(\sigma_0)e^{\varepsilon\sigma}(1+|p|^m), \qquad \sigma > \sigma_0. \tag{18}$$

Очевидно, $H(a)$ — алгебра с обычным умножением аналитических функций.

Основная теорема. *Для того чтобы $f(t)$ принадлежала $\mathscr{D}'_+(a)$, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Лапласа $\mathscr{F}(p)$ принадлежало $H(a)$. При этом*

Рассмотрим теперь общий случай. Фиксируем произвольные $b \leqslant a$, $\sigma_0 > a$ и целое $k > m(\sigma_0)+1$ и введем функцию

$$\mathscr{F}_1(p) = \frac{\mathscr{F}(p)}{(p-b)^k},$$

аналитическую в полуплоскости $\sigma > a$ и удовлетворяющую при всех $\sigma > \sigma_0$ оценке типа (20):

$$|\mathscr{F}_1(p)| = \frac{|\mathscr{F}(p)|}{|p-b|^k} \leqslant \frac{C_\varepsilon(\sigma_0)e^{\varepsilon\sigma}(1+|p|^m)}{|p-a|^k} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_\varepsilon(\sigma_0)e^{\varepsilon\sigma}}{|p-a|^{k-m}}\frac{1+|p|^m}{|p-a|^m} \leqslant \frac{C'_\varepsilon(\sigma_0)e^{\varepsilon\sigma}}{|p-a|^{k-m}}, \qquad k-m > 1.$$

По доказанному существует непрерывная функция f_1 из $\mathscr{D}'_+(\sigma_0)$ такая, что

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathscr{F}_1(p)e^{pt}\,dp \leftrightarrow \mathscr{F}_1(p), \qquad \sigma > \sigma_0. \tag{24}$$

Отсюда, пользуясь формулой (12), выводим

$$\left(\frac{d}{dt}-b\right)^k f_1(t) \leftrightarrow (p-b)^k\mathscr{F}_1(p) = \mathscr{F}(p), \qquad \sigma > \sigma_0.$$

Обозначая

$$f(t) = \left(\frac{d}{dt}-b\right)^k f_1(t),$$

заключаем, что $f \in \mathscr{D}'_+(\sigma_0)$ (см. § 10.2), $f(t) \leftrightarrow \mathscr{F}(p)$, $\sigma > \sigma_0$ и, в силу (24), справедливо представление (19). Осталось заметить, что построенная обобщенная функция f из $\mathscr{D}'_+(\sigma_0)$ (для любого $\sigma_0 > a$) единственна и поэтому она не зависит от выбора вспомогательных параметров $b \leqslant a$, $\sigma_0 > a$ и $k > m(\sigma_0)+1$. Но тогда $f \in \mathscr{D}'_+(a)$ и $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $\sigma > a$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция $\mathscr{F}(\sigma+i\omega)$ абсолютно интегрируема по ω на R^1 при некотором $\sigma > a$. Тогда справедлива классическая формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathscr{F}(p)e^{pt}\,dp.$$

Для доказательства достаточно заметить, что в формуле (19) возможно дифференцирование под знаком интеграла k раз (см. § 1.5), и далее воспользоваться равенством

$$\left(\frac{d}{dt}-b\right)^k e^{pt}=(p-b)^k e^{pt}.$$

Доказанная теорема устанавливает взаимно однозначное соответствие $\leftrightarrow$ между алгебрами $\mathscr{D}'_+(a)$ и $H(a)$, причем это соответствие линейно и мультипликативно. Такие алгебры называются *изоморфными.*

Замечание. Пользуясь техникой обобщенных функций, можно доказать *), что всякая функция $\mathscr{F}$ из алгебры $H(a)$ удовлетворяет более сильному, чем (18), ограничению роста: для любого $\sigma_0>a$ существуют числа $C(\sigma_0)\geqslant 0$ и $M=M(\sigma_0)\geqslant 0$ такие, что

$$|\mathscr{F}(p)|\leqslant C(\sigma_0)(1+|p|^M),\qquad \sigma>\sigma_0.$$

5. Примеры и применения.

a) $\delta^{(m)}(t-\tau)\leftrightarrow p^m e^{-\tau p}$, p — любое, $\tau\geqslant 0$, $m=0, 1, \ldots$ (25)

Вытекает из формул (10) и (12).

b) $\dfrac{\theta(t)\,t^{m-1}}{\Gamma(m)}e^{\lambda t}\leftrightarrow\dfrac{1}{(p-\lambda)^m}$, $\sigma>\operatorname{Re}\lambda$, $m=0, 1, \ldots$ **). (26)

Вытекает из формул (3), (11) и (13).

c) Пусть f — функция из $\mathscr{D}'_+(a)$, $f\in C^n(t\geqslant 0)$ и $f\leftrightarrow\mathscr{F}$, $\sigma>a$. Тогда

$$\{f^{(n)}(t)\}\leftrightarrow p^n\mathscr{F}(p)-\sum_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(+0)\,p^{n-k-1},\quad \sigma>a. \tag{27}$$

Действительно, пользуясь формулой (14) § 6.4 n раз и учитывая при этом, что $f(t)=0$, $t<0$, получим

$$\{f^{(n)}(t)\}=f^{(n)}-\sum_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(+0)\,\delta^{(n-k-1)}(t),$$

откуда, в силу (12) и (25), следует формула (27).

d) Пусть f и g — локально интегрируемые функции из $\mathscr{D}'_+(a)$, $g\in C^1(t\geqslant 0)$ и $f\leftrightarrow\mathscr{F}$, $g\leftrightarrow\mathscr{G}$, $\sigma>a$. Тогда

$$\int_0^t f(\tau)\{g'(t-\tau)\}\,d\tau\leftrightarrow p\mathscr{F}(p)\,\mathscr{G}(p)-g(+0)\,\mathscr{F}(p), \tag{28}$$

$$\sigma>a.$$

---

*) См. В. С. Владимиров [2], § 26.

**) Соотношение $\theta(t)\leftrightarrow\frac{1}{p}$ часто записывают так: $1\leftrightarrow\frac{1}{p}$, что представляется не совсем удачным.

при всех $b\leqslant a$, $\sigma>\sigma_0>a$ *и целых* $k>m(\sigma_0)+1$ *справедливо представление*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{d}{dt}-b\right)^k\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\mathscr{F}(p)\,e^{pt}}{(p-b)^k}\,dp, \tag{19}$$

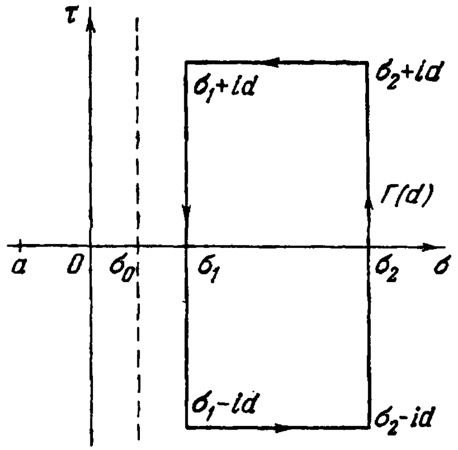

Рис. 38.

причем правая часть (19) *не зависит от* b, σ *и* k.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in\mathscr{D}'_+(a)$. Тогда ее преобразование Лапласа $\mathscr{F}(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\sigma>a$ (см. § 10.2) и при любом $\sigma_0>a$ в полуплоскости $\sigma>\sigma_0$ имеет место представление (7). Применяя к этому представлению теорему Л. Шварца (см. § 8.2), при любом $\varepsilon>0$ и некоторых $C_\varepsilon(\sigma_0)\geqslant 0$ и $m=m(\sigma_0)\geqslant 0$ получим оценку (18)

$$|\mathscr{F}(p)|\leqslant C(\sigma_0)\sup_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant m\\ t\geqslant-\varepsilon}}|(\eta(t)\,e^{-(p-\sigma_0)t})^{(\alpha)}|\leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon(\sigma_0)\,e^{\varepsilon\sigma}(1+|p|^m),\qquad \sigma>\sigma_0,$$

так что $\mathscr{F}\in H(a)$.

Достаточность. Пусть $\mathscr{F}\in H(a)$. Нужно доказать, что функция $\mathscr{F}(p)$ есть преобразование Лапласа обобщенной функции f из $\mathscr{D}'_+(a)$, представимой формулой (19). Рассмотрим сперва случай, когда функция $\mathscr{F}(p)$ при всех $\sigma>\sigma_0>a$ удовлетворяет оценке

$$|\mathscr{F}(p)|\leqslant\frac{C_\varepsilon(\sigma_0)\,e^{\varepsilon\sigma}}{|p-a|^\alpha},\qquad \alpha>1. \tag{20}$$

Тогда интеграл

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathscr{F}(p)\,e^{pt}\,dp\qquad(\sigma>a) \tag{21}$$

сходится равномерно по t на каждом конечном промежутке, определяя непрерывную функцию $f(t)$, $-\infty<t<\infty$.

Докажем, что $f(t)$ не зависит от $\sigma>a$. Пусть $\sigma_2>\sigma_1>a$. По теореме Коши имеем

$$\int_{\Gamma(d)} \mathscr{F}(p)\,e^{pt}\,dp=0, \tag{22}$$

где контур $\Gamma(d)$ изображен на рис. 38. Учитывая, что в силу (20),

$$\left|\int_{\sigma_1+id}^{\sigma_2+id} \mathscr{F}(p)\,e^{pt}\,dp\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|\mathscr{F}(\sigma+id)|\,e^{\sigma t}\,d\sigma\leqslant C_\varepsilon(\sigma_1)\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{e^{\sigma(\varepsilon+t)}\,d\sigma}{[(\sigma-a)^2+d^2]^{\alpha/2}}\to 0,$$

и переходя к пределу в равенстве (22) при $d\to+\infty$, получим

$$\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathscr{F}(p)\,e^{pt}\,dp=\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\mathscr{F}(p)\,e^{pt}\,dp,$$

что и требовалось установить.

Перепишем равенство (21) в эквивалентной форме:

$$f(t)=\frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}(\sigma+i\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega,\qquad \sigma>a. \tag{23}$$

Пользуясь оценкой (20) и считая $\sigma>\sigma_0>a$, оценим $f(t)$:

$$|f(t)|\leqslant\frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{F}(\sigma+i\omega)|\,d\omega\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C_\varepsilon(\sigma_0)}{2\pi}e^{\sigma(\varepsilon+t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{[(\sigma-a)^2+\omega^2]^{\alpha/2}}\leqslant C'_\varepsilon(\sigma_0)\,e^{\sigma(\varepsilon+t)}.$$

Пусть $t<-\varepsilon$. Устремляя в полученной оценке σ к $+\infty$, выводим $f(t)=0$. Отсюда, ввиду произвольности $\varepsilon>0$, заключаем, что $f(t)=0$, $t<0$. Из (23) следует также, что $f(t)\,e^{-\sigma t}\in\mathscr{S}'$ и

$$\mathscr{F}(p)=2\pi F^{-1}[f(t)\,e^{-\sigma t}](\omega),\qquad \sigma>a.$$

Итак, $f\in\mathscr{D}'_+(a)$, $f(t)\leftrightarrow\mathscr{F}(p)$, $\sigma>a$.

В силу (25) имеем

$$q(t)\leftrightarrow Q(p)=p^m+a_1p^{m-1}+\ldots+a_m=$$
$$=(p-\lambda_1)^{k_1}\ldots(p-\lambda_n)^{k_n},$$

и поэтому, в силу e)

$$\mathscr{E}(t)\leftrightarrow\frac{1}{Q(p)},\qquad \sigma>a=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname{Re}\lambda_j. \tag{33}$$

Разлагая $\frac{1}{Q(p)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{Q(p)}=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{c_{j,k_j}}{(p-\lambda_j)^{k_j}}+\ldots+\frac{c_{j,1}}{p-\lambda_j}\right],$$

и пользуясь (26), из (33) получаем

$$\mathscr{E}(t)=\theta(t)\sum_{j=1}^{n}\left[c_{j,k_j}\frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}+\ldots+c_{j,1}\right]e^{\lambda_j t}. \tag{34}$$

В силу единственности фундаментального решения оператора $q*$ в алгебре $\mathscr{D}'_+$ (см. § 7.8), функция $\mathscr{E}(t)$ совпадает с фундаментальным решением, построенным в § 6.4, f) (в случае постоянных коэффициентов).

6. **Упражнения.** а) Пусть $f_\alpha(t)$, $-\infty<\alpha<\infty$ — обобщенная функция, введенная в § 7.8. Доказать что

$$f_\alpha(t)\leftrightarrow\frac{1}{p^\alpha},\qquad \sigma>0,$$

где за p^α принимается та ее ветвь в полуплоскости $\sigma>0$, для которой $p^\alpha>0$ при положительных p;

b) $f_\alpha(t)\,e^{\lambda t}\leftrightarrow\frac{1}{(p-\lambda)^\alpha}$, $\quad\sigma>\operatorname{Re}\lambda$;

c) $\theta(t)\,e^{i\omega t}\leftrightarrow\frac{1}{p-i\omega}$, $\quad\theta(t)\,e^{-i\omega t}\leftrightarrow\frac{1}{p+i\omega}$, $\quad\sigma>0$;

d) $\theta(t)\cos\omega t\leftrightarrow\frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\quad\theta(t)\sin\omega t\leftrightarrow\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\quad\sigma>0$.

e) Пусть $|a_k|\leqslant c(1+k)^m$, $k=0,1,\ldots$. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\delta(t-k)\leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}a_ke^{-kp},\qquad \sigma>0.$$

f) Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом T (абсолютно) интегрируемая на периоде (рис. 40). Доказать:

$$\theta(t)f(t)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}\,dt,\qquad \sigma>0.$$

g) Проверить, что

1) $(\theta\cos t)*\mathscr{E}=\delta(t)$, $\mathscr{E}(t)=\delta'(t)+\theta(t)$;
2) $(\theta t\cos t)*\mathscr{E}=\delta(t)$, $\mathscr{E}(t)=\delta''(t)+3\delta(t)+4\theta(t)\operatorname{sh}t$;
3) $\mathscr{E}+2(\theta\cos t)*\mathscr{E}=\delta(t)$, $\mathscr{E}(t)=\delta(t)-2\theta(t)e^t(1-t)$;
4) $\theta*u_1+\delta'*u_2=\delta(t)$, $\delta*u_1+\delta'*u_2=0$,

$$u_1(t)=-\delta(t)-\theta(t)e^t,\quad u_2(t)=\theta(t)e^t.$$

h) Пользуясь формулой (27), показать, что

1) $u'+au=f(t)$, $u(0)=u_0$,

$$u(t)=\int_0^t f(\tau)e^{-a(t-\tau)}\,d\tau+u_0e^{-at};$$

2) $u''+\omega^2u=f(t)$, $u(0)=u_0$, $u'(0)=u_1$,

$$u(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau+u_0\cos\omega t+u_1\frac{\sin\omega t}{\omega};$$

при этом предполагается, что $f\in C(t\geqslant 0)\cap\mathscr{D}'_+(a)$.

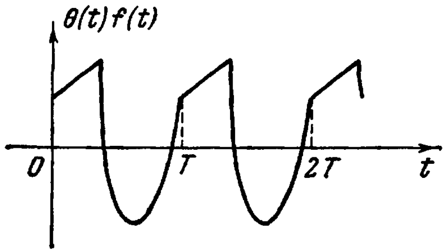

Рис. 40.

i) Пусть $\mathscr{E}_1$ — решение уравнения $g*\mathscr{E}_1=\theta$ в алгебре $\mathscr{D}'_+(a)$, причем $\mathscr{E}_1\in C^1(t\geqslant 0)$. Пользуясь интегралом Дюамеля (28), показать, что решение в алгебре $\mathscr{D}'_+(a)$ уравнения $g*u=f$, где f — локально интегрируемая функция из $\mathscr{D}'_+(a)$, выражается формулой

$$u(t)=\mathscr{E}_1(+0)f(t)+\int_0^t f(\tau)\{\mathscr{E}_1'(t-\tau)\}\,d\tau.$$

j) Доказать, что

$$\theta(t)J_0(t)\leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\qquad\sigma>0.$$

k) Пользуясь j), доказать равенство

$$\sin t=\int_0^t J_0(t-\tau)J_0(\tau)\,d\tau.$$

В самом деле,

$$g'=\{g'(t)\}+g(+0)\delta(t),\quad f*g\leftrightarrow\mathscr{F}\mathscr{G},\quad\sigma>a,$$

и поэтому

$$\int_0^t f(\tau)\{g'(t-\tau)\}\,d\tau=f*\{g'\}=f*[g'-g(+0)\delta]=$$
$$=f*g'-g(+0)f*\delta=(f*g)'(t)-g(+0)f(t)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow p\mathscr{F}(p)\mathscr{G}(p)-g(+0)\mathscr{F}(p),\quad\sigma>a.$$

Формула (28) называется *интегралом Дюамеля*. Она широко используется в теории электрических цепей.

e) Уравнения в алгебре $\mathscr{D}'_+(a)$ имеют вид

$$g*u=f,\tag{29}$$

где g и f — известные и u — неизвестный элементы из $\mathscr{D}'_+(a)$. Все сказанное в § 7.8 относительно алгебры $\mathscr{D}'_+$ остается справедливым и для алгебры $\mathscr{D}'_+(a)$. В дополнение к § 7.8 отметим следующий результат:

Для того чтобы оператор $g*$ имел обратный $g^{-1}*$ в алгебре $\mathscr{D}'_+(a)$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\mathscr{G}(p)}\in H(a)$, где $g(t)\leftrightarrow\mathscr{G}(p)$, $\sigma>a$; при этом $g^{-1}(t)\leftrightarrow\frac{1}{\mathscr{G}(p)}$, $\sigma>a$.

Это утверждение непосредственно следует из эквивалентных, в силу (15), равенств $g*g^{-1}=\delta$, $\mathscr{G}(p)\frac{1}{\mathscr{G}(p)}=1$, $\sigma>a$, и из установленного в основной теореме взаимно однозначного соответствия между элементами алгебр $\mathscr{D}'_+(a)$ и $H(a)$.

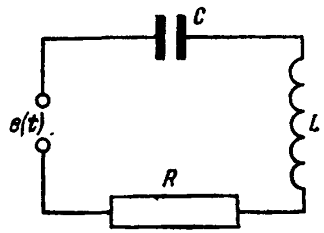

Рис. 39

f) Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из сопротивления R, самоиндукции L, емкости C и источника э. д. с. $e(t)$, включаемого в момент времени $t=0$ (рис. 39). Тогда в соответствии с законами Кирхгофа сила тока в цепи $i(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau=e(t),$$

или

$$g * i = e, \tag{30}$$

где

$$g(t) = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\theta(t) \in \mathscr{D}'_+(0).$$

Найдем обратный оператор $a* = g^{-1}*$. Имеем

$$g(t) \leftrightarrow Lp + R + \frac{1}{Cp}, \quad \sigma > 0,$$

и поэтому, в силу e) и b),

$$a(t) \leftrightarrow \frac{1}{Lp + R + \dfrac{1}{Cp}} = \frac{p}{L(p-p_+)(p-p_-)} =$$

$$= \frac{1}{L(p_+ - p_-)}\left(\frac{p_+}{p-p_+} - \frac{p_-}{p-p_-}\right) \leftrightarrow \frac{\theta(t)}{2L\omega i}(p_+e^{p_+t} - p_-e^{p_-t}),$$

$$p_\pm = -\frac{R}{2L} \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Таким образом,

$$a(t) = \frac{\theta(t)}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\omega\cos\omega t - \frac{R}{2L}\sin\omega t\right),$$

и решение уравнения (30) выражается формулой (см. § 7.8)

$$i(t) = a * e =$$

$$= \frac{1}{L\omega}\int_0^t e^{-\frac{R}{2L}(t-\tau)}\left[\omega\cos\omega(t-\tau) - \frac{R}{2L}\sin\omega(t-\tau)\right]e(\tau)\,d\tau. \tag{31}$$

Формула (31) в явном виде выражает *реакцию*, или *отклик*, $i(t)$ цепи на входной сигнал $e(t)$. В теории электрических цепей $g(t)$ называется *импедансом* (обобщенное сопротивление) цепи, а $a(t)$ — *адмитансом* (обобщенная проводимость). Нетрудно видеть, что $a * \theta = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$ есть отклик цепи на «единичную ступеньку» θ (функцию включения).

g) Найдем обратный оператор $\mathscr{E}*$ к оператору $q*$, где

$$q(t) = \delta^{(m)}(t) + a_1\delta^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m\delta(t), \tag{32}$$

то есть

$$\mathscr{E}^{(m)} + a_1\mathscr{E}^{(m-1)} + \ldots + a_m\mathscr{E} = \delta.$$

ГЛАВА III

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И ЗАДАЧА КОШИ

В этой главе теория обобщенных функций применяется к построению фундаментальных решений и к решению задачи Коши для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности. При этом задача Коши рассматривается в обобщенной постановке, что позволяет включить начальные условия в мгновенно действующие источники (типа простого и двойного слоя на поверхности $t = 0$). Таким путем задача Коши сводится к задаче о нахождении такого (обобщенного) решения данного уравнения (с измененной правой частью), которое обращается в нуль при $t < 0$. Последняя задача решается стандартным методом — методом суммирования возмущений, порождаемых каждой точкой источника, так что решение ее представляется в виде свертки фундаментального решения с правой частью.

Исследуется также задача Коши для гиперболического уравнения с двумя переменными (метод Римана).

§ 11. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов

Для построения фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами применяется метод преобразования Фурье. Этим методом, естественно, могут быть получены только фундаментальные решения медленного роста.

1. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. Пусть

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad f \in \mathscr{D}', \tag{1}$$

— линейное дифференциальное уравнение порядка m с коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(R^n)$. Вводя дифференциальный