

Logique combinatoire

Pour chacun des exercices ci-dessous, faire les questions suivantes :

1. Identifier les entrées et sorties de l'objet.
2. Écrire la table de vérité des sorties.
3. Déterminer à partir de la table de vérité les équations des sorties
4. Établir le tableau de Karnaugh des sorties.
5. En déduire les équations correspondantes.
6. Dessiner le logigramme correspondant aux trois fonctions avec des opérateurs logiques à 1 ou 2 entrées.
7. Dessiner le logigramme correspondant aux trois fonctions avec des opérateurs logiques ET-NON à 2 entrées.

Exercice 1 – Serrure de coffre

Quatre responsables de société (A, B, C, D) peuvent avoir accès à un coffre. Ils possèdent chacun une clé différente (a, b, c, d). L'ouverture 0 du coffre est définie :

- A ne peut ouvrir le coffre que si au moins un des responsables B ou C est présent,
- B, C, D ne peuvent l'ouvrir que si au moins deux des autres responsables sont présents.

Exercice 2 - Comptage de pièce

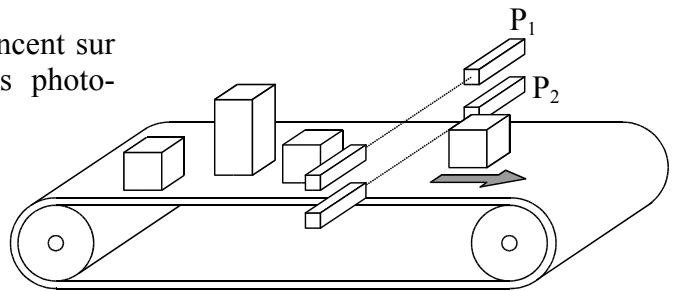
Deux catégories de pièces (des grandes et des petites) avancent sur un tapis roulant. Elles sont détectées par deux cellules photo-électriques P_1 et P_2 .

Le faisceau lumineux inférieur dirigé sur la cellule P_2 , est coupé par toutes les pièces (la variable P_2 prend alors la valeur 1).

Par contre le faisceau lumineux supérieur dirigé sur la cellule P_1 , n'est coupé que par les grandes pièces (la variable P_1 prend alors la valeur 1).

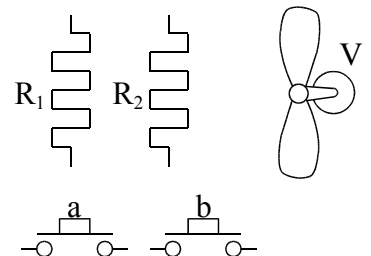
Par l'intermédiaire des amplificateurs A_1 , et A_2 et de relais, ces cellules modifient trois variables :

- C_1 pour les petites pièces,
- C_2 pour les grandes pièces,
- C_3 qui joue le rôle de totalisateur et qui est donc actionné par toutes les pièces.



Exercice 3 – Radiateur électrique

Un radiateur électrique à deux allures de chauffe comporte deux résistances R_1 et R_2 et un ventilateur V. Il est commandé par deux interrupteurs a et b. Par action sur a seul, la résistance R_1 est mise sous-tension. Par action sur b seul ou sur a et b à la fois, les deux -résistances et le ventilateur sont mis sous-tension.



Exercice 4 – Contrôle de tolérances

Pour contrôler l'usinage de la pièce figure 1 on utilise l'appareil figure 2.

- Lorsque les cotes sont à l'intérieur des intervalles aucun des contacts a, b, c, d n'est actionné et le voyant vert V s'allume.
- Lorsque l'une des deux cotes est trop forte, l'autre étant bonne ou lorsque les deux cotes sont trop fortes, le voyant bleu B s'allume. La pièce doit être réusinée.
- Lorsque l'une au moins des deux cotes est trop faible, le voyant rouge R s'allume. La pièce est rebutée.

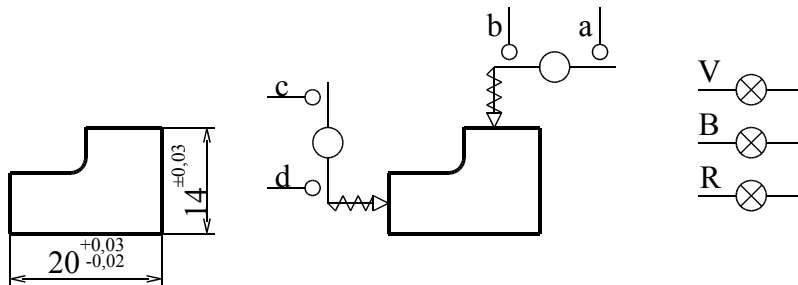


Figure 1

Figure 2

CONTRÔLEUR D'ACCÈS DE PARKING

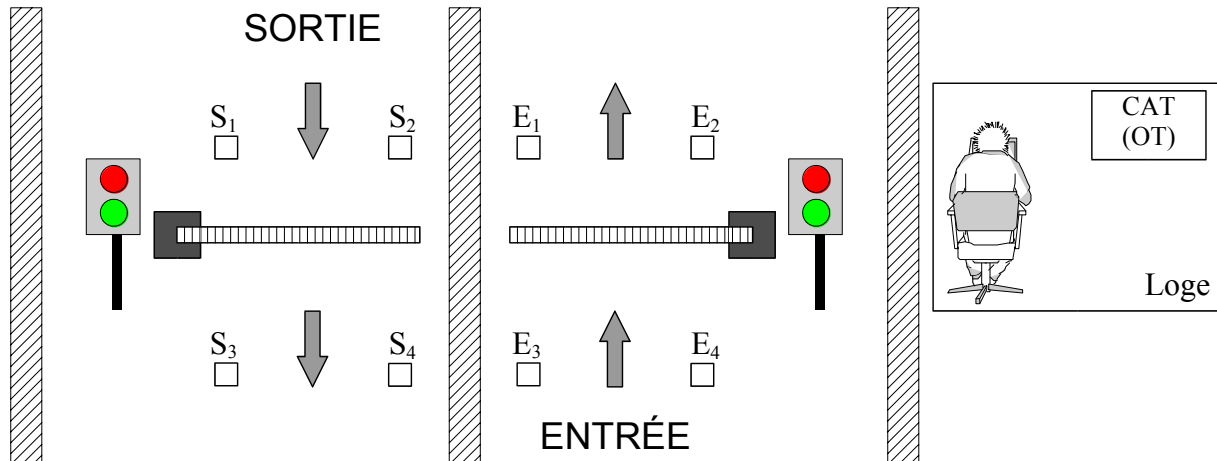
1. Mise en situation du système

Les voitures peuvent entrer et sortir de ce parking tant que le nombre de voitures en stationnement n'est pas supérieur au nombre de places utilisables. Dans ce cas le feu à l'entrée sera vert et la barrière ouverte.

Disposant d'un parking de N places, le gardien programme ce chiffre : ($0 \leq N \leq 99$).

Si le nombre de voitures entrées est égal ou supérieur au nombre de places utilisables, le feu passera au rouge et la barrière se refermera pour interdire l'entrée d'autres voitures.

Le gardien peut à tout moment mettre le feu au rouge et fermer la barrière en actionnant l'interrupteur "feu rouge", même si le nombre maximum des voitures n'est pas atteint. Ceci permet d'interdire l'accès pour cause de travaux, d'accident ou pour réserver des places.

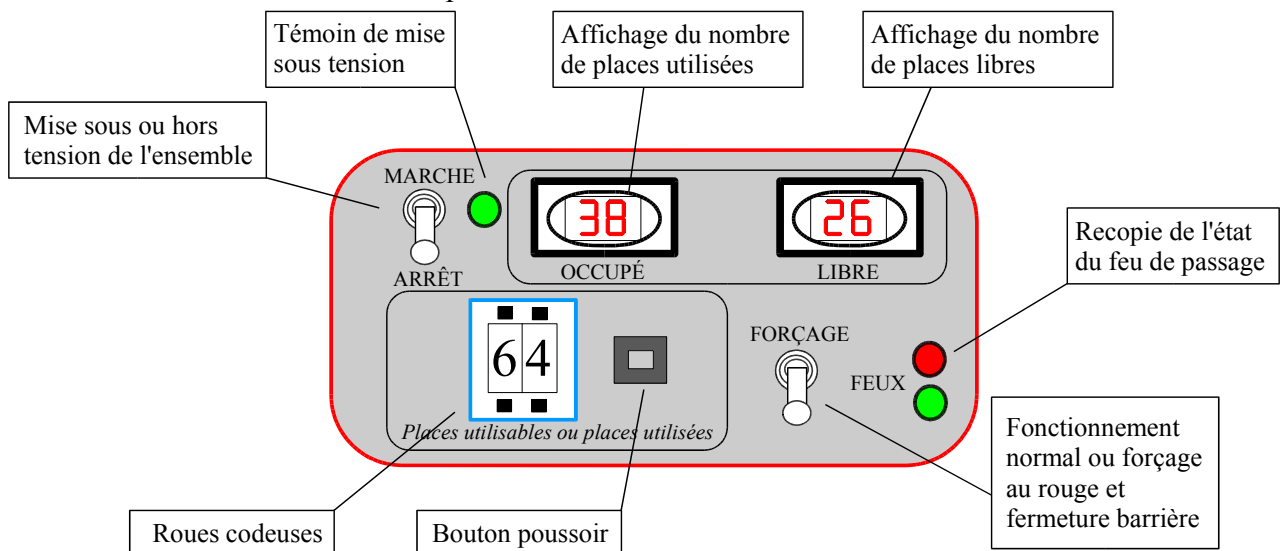


Par ailleurs pour réserver des places libres, le gardien peut à tout moment modifier le nombre de places utilisables "N" dans le parking.

Ce système de contrôle d'accès de parking est relié par réseaux à un central informatique gérant l'ensemble des parking d'une ville et pouvant donner de façon décentralisée le nombre de places disponibles dans chaque parking.

2. Description de la partie commande

La partie commande est constituée d'un boîtier qui permet la gestion du contrôleur d'accès de parking grâce aux informations et aux commandes présentes sur la face avant.



Les roues codeuses permettent de sélectionner le nombre de places utilisables ou le nombre de places utilisées en fonction de l'action du bouton poussoir

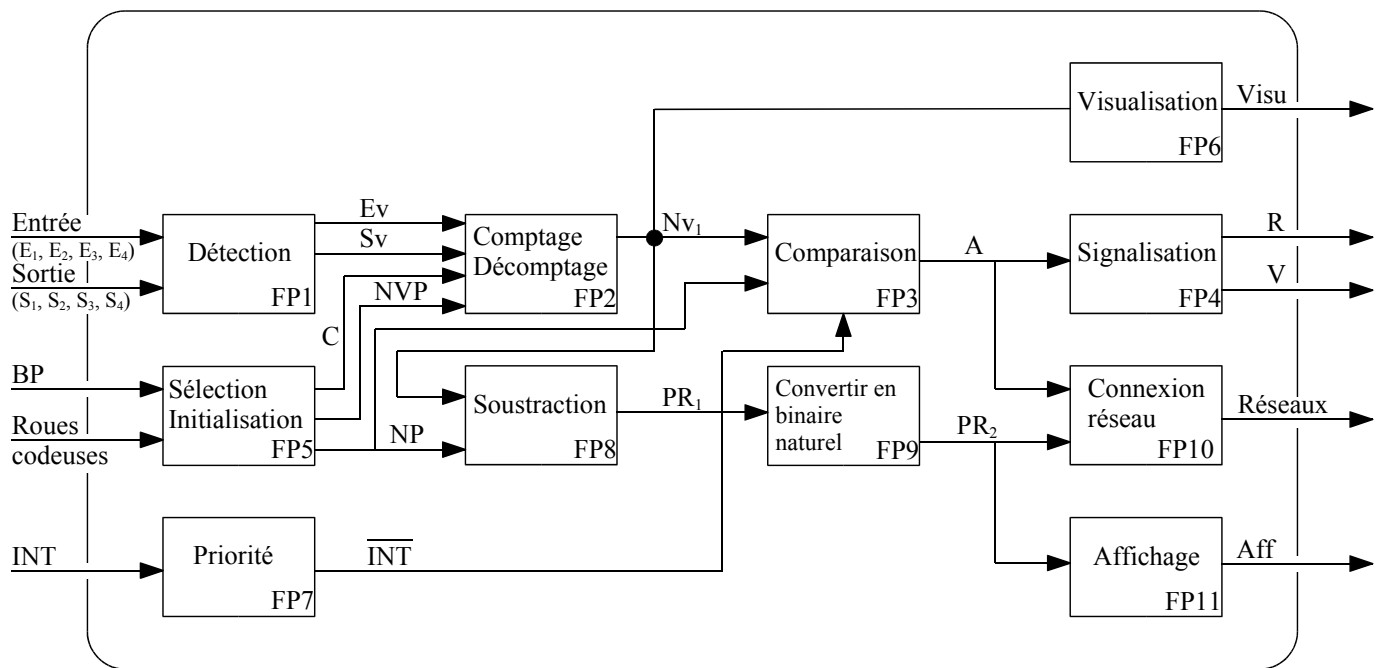
Rôle du bouton poussoir : lorsqu'il est

- relâché, la valeur sélectionnée avec les roues codeuses correspond au nombre de places utilisables,
- appuyé fugitivement, la valeur sélectionnée avec les roues codeuses correspond au nombre de places utilisées et va s'afficher sur les afficheurs,

Cette commande ne sert que pour la mise en fonctionnement du parking, ou lors d'une éventuelle erreur de comptage ou pour réserver des places.

CONTRÔLEUR D'ACCÈS DE PARKING

3. Schéma fonctionnel



C : Ordre de changement du nombre de voitures présentes ($C = 1$)

NVP : Nombre de voitures présentes en DCB

Ev : Entrée d'une voiture ($Ev = 1$)

Sv : Sortie d'une voiture ($Sv = 1$)

BP : Bouton poussoir

Nv_1 : Nombre de voitures présentes codé en DCB

NP : Nombre de places utilisables

INT : Interdiction – Issue de l'interrupteur de forçage

PR_1 : Place restante dans le parking

Aff : Affichage à l'entrée du parking du nombre de places restant en décimal

A : Résultat de la comparaison entre NP et Nv_1

si $NP > Nv_1$ alors $A = 0$ si $NP = Nv_1$ alors $A = 1$

Visu : Affichage, sur la face avant de la partie commande, du nombre de voitures présentes dans le parking en décimal

4. Travail demandé

Question 1

Donner la base des nombres suivants : Roues codeuses, NP, NVP, Nv_1 , PR_1 , PR_2 , Aff et Visu.

Attention : pour la base 2 il faut spécifier si c'est le code binaire naturel, Gray ou DCB.

Question 2

Recopier et compléter le tableau ci-dessous dans les cas suivants :

cas 1 : Roues codeuses : 70 Nv_1 : 0011 1001

cas 2 : Roues codeuses : 83 Nv_1 : 0111 0101

cas 3 : Roues codeuses : 53 Nv_1 : 0101 0011

Roues codeuses	
NP	
Nv_1	
PR_1	
PR_2	
Aff	
Visu	

} →

Valeur de A

Question 3

CONTRÔLEUR D'ACCÈS DE PARKING

Le central informatique d'une ville reçoit le nombre de places disponibles dans chaque parking : $P_1 = 21$, $P_2 = 341$, $P_3 = 43$, $P_4 = 33$, $P_5 = 120$.

Ces valeurs sont reçues en binaire naturel, **convertir** P_1 , P_2 , P_3 , P_4 et P_5 en binaire naturel.

Donner par la méthode que vous voulez le nombre total de places de parking libres en binaire naturel.

Pour afficher cette valeur il est nécessaire de convertir ce nombre en DCB, **faire** cette conversion.

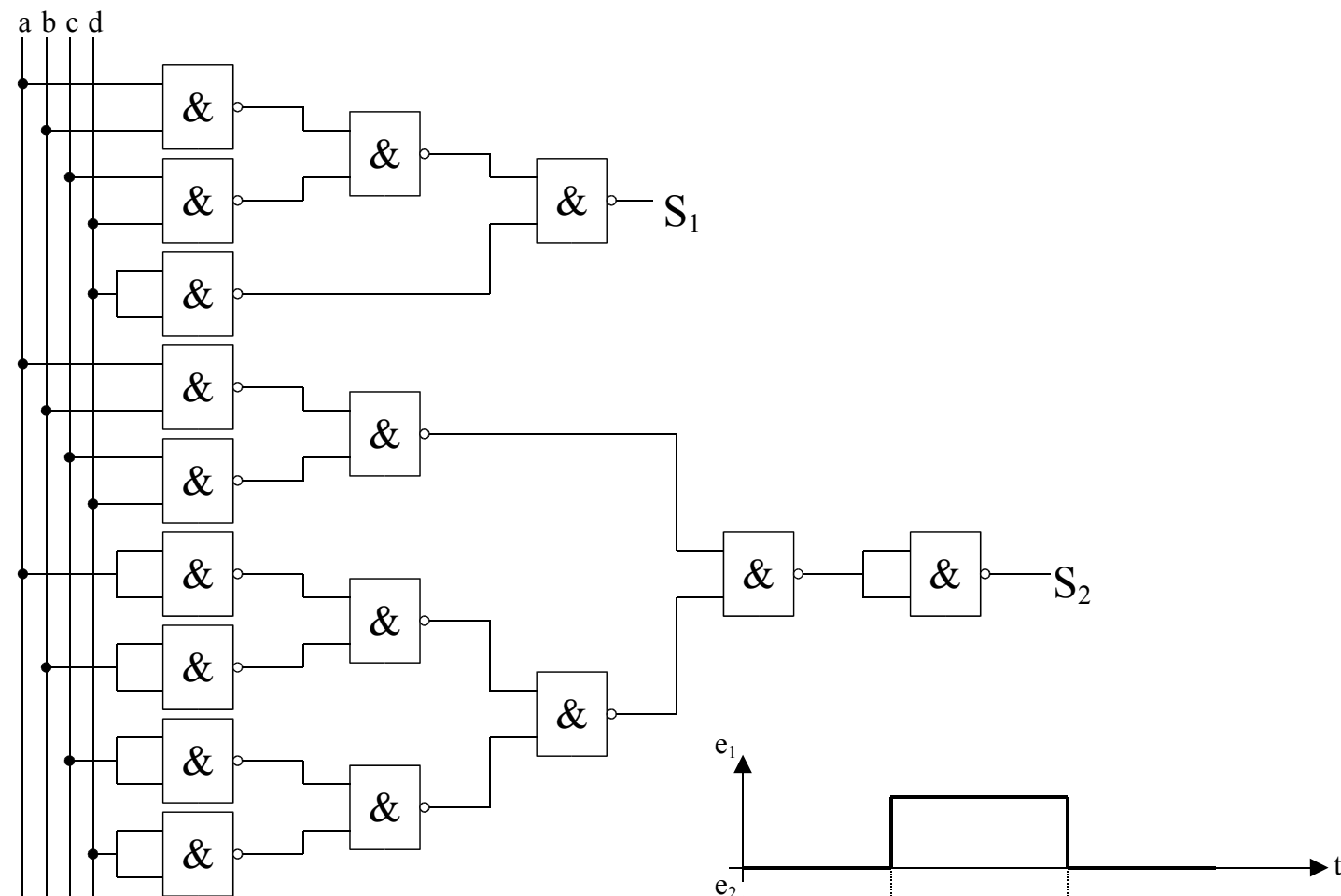
Question 4

La capacité totale des parkings de cette ville est de 2000 places.

Combien faut-il de bit pour coder ce nombre en binaire naturel ? en DCB ?

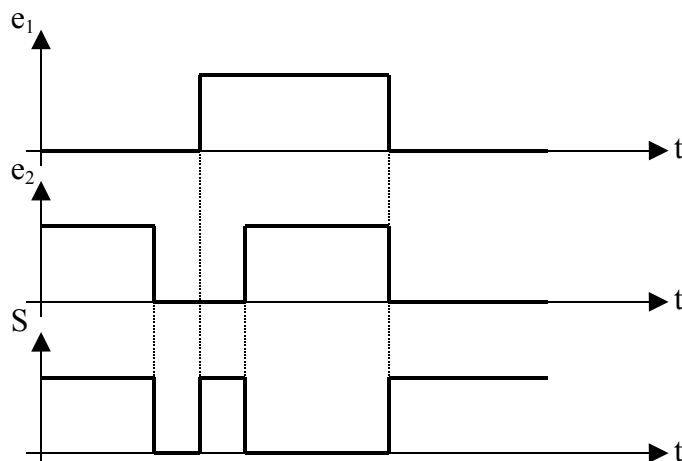
Exercice 1

Trouver les équations de S_1 et S_2 . Puis simplifier les et trouver les nouveaux logigrammes.



Exercice 2

- 1) Déterminer l'équation de la sortie S par rapport aux entrées e_1 et e_2 .
- 2) Identifier l'opérateur logique correspondant.
- 3) Réaliser cette même fonction logique avec des opérateurs NAND à 2 entrées.



Exercice 3

On souhaite réaliser un additionneur binaire de 2 bits a et b. S est le résultat de la somme de a et b, et R est la retenue de l'addition de a et b.

- 1) Donner la table de vérité de cette opération sachant que a et b sont les entrées, R et S sont les sorties de la table de vérité.
- 2) Proposer un logigramme à base de portes NAND réalisant l'addition de 2 bits.

Table de Karnaugh

Exercice 1

A partir des tableaux de Karnaugh suivants donner les équations simplifiées.

$$A_1 \begin{array}{c} c \\ b \\ a \end{array} \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$A_2 \begin{array}{c} c \\ b \\ a \end{array} \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_3 \begin{array}{c} c \\ b \\ a \end{array} \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$A_4 \begin{array}{c} c \\ b \\ a \end{array} \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_5 \begin{array}{c} c \\ b \\ a \end{array} \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$A_6 \begin{array}{c} c \\ b \\ a \end{array} \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$A_7 \begin{array}{c} d \\ c \\ a \ b \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$A_8 \begin{array}{c} d \\ c \\ a \ b \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$A_9 \begin{array}{c} d \\ c \\ a \ b \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Exercice 2

On donne les expressions suivantes :

$$F_1 = a \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c$$

$$F_3 = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d$$

$$F_2 = a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c}$$

$$F_4 = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot \bar{d} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d$$

Pour chacune de ces expressions répondre aux questions suivantes :

- Donner la table de vérité.
- Simplifier algébriquement l'expression.
- Construire le tableau de Karnaugh et vérifier la simplification précédente.
- Construire le logigramme correspondant.

Exercice 3

On définit la fonction s par le logigramme ci-contre :

- Écrire l'expression logique de S.
- Donner la table de vérité de S.
- Simplifier algébriquement S.
- Vérifier la simplification de S grâce au tableau de Karnaugh.
- Construire le logigramme simplifié.

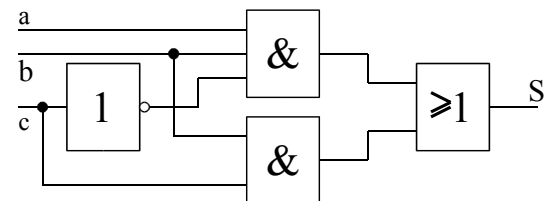


Table de Karnaugh

Exercice 4

On définit l'expression logique V par sa table de vérité :

- a) Écrire l'expression logique de V sous forme de polynôme.
- b) Simplifier algébriquement V.
- c) Vérifier la simplification de V grâce au tableau de Karnaugh
- d) Construire le logigramme de V en utilisant uniquement des opérateurs logiques NAND à deux entrées.
- e) Construire le logigramme de V en utilisant uniquement des opérateurs logiques NOR à deux entrées.

a	b	c	V
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Exercices de logique combinatoire. Méthode de Karnaugh

EXERCICE 1.:

1.1. Simplifier par Karnaugh

$$F_{10} = a.b + \bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.b.c.\bar{d}$$

$$F_8 = \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.b.c.d + a.b.c.d + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.b.c.d$$

EXERCICE 2.: Problème de commande de feux automobiles :

On dispose, sur une automobile, de 4 commandes indépendantes: Cv pour les veilleuses, Cc pour les 2 feux de croisement, Cr pour les feux de route et Ca pour les phares anti-brouillard (valeur 1 au travail, 0 au repos).

On note les états des lumières V pour les veilleuses, C pour les feux de croisement, R pour les feux de route et A pour les feux antibrouillard (valeur 1 à l'allumage, 0 à l'extinction).

Les veilleuses n'étant pas comptées comme des phares, il est précisé que :

- 4 phares ne peuvent être allumés simultanément ;
- les feux de croisement ont priorité sur les feux de route et sur les antibrouillard ;
- les antibrouillard ont priorité sur les feux de route et
- les veilleuses peuvent être allumées seules mais l'allumage des feux de croisement ou des feux de route ou des antibrouillard entraîne obligatoirement l'allumage des veilleuses.

2.1. Donner la table de vérité liant V, C, R, A à Cv, Cc, Cr et Ca.

2.2. Simplifier ces fonctions à l'aide de tableaux de Karnaugh.

2.3. Dessiner le schéma structurel en utilisant 2 couches de portes ET-NON, OU-NON et ET.

On précisera sur le schéma l'équation logique du signal présent à la sortie de chaque porte.

Cv	Cc	Cr	Ca	V	C	R	A
0	0	0	0				
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0				
1	1	1	1				

V	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

C	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

R	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

A	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

EXERCICE 3.: Problème de commande d'un distributeur de boissons

3 boutons commandent 3 électrovannes branchées à 3 cuves contenant des liquides (eau, cassis, menthe).

Le distributeur permet d'obtenir 3 boissons :

- E : eau
- C : cassis
- M : menthe

Si l'on veut un mélange , on appuie sur 2 boutons simultanément (e et c) ou (e et m) et on introduit une pièce (p).

Tous les autres mélanges sont interdits.

L'eau est gratuite.

Pour toute fausse manœuvre (mélange interdit ou eau seule) la pièce est restituée.

- P: pièce restituée

3.1. Exprimer E, C, M et P en fonction de e, c, m et p.

e	c	m	p	E	C	M	P
0	0	0	0				
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0				
1	1	1	1				

E	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

C	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

M	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

P	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

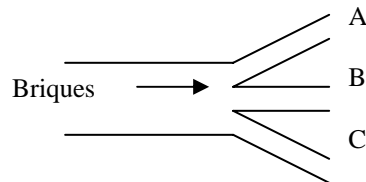
EXERCICE 4.: Contrôle de qualité de fabrication de briques

On dispose de 4 critères pour déterminer si une brique est bonne ou non :

- le poids P
- la longueur L
- la largeur l
- la hauteur H

En fonction de ces critères, les briques sont rangées suivant 3 catégories :

- A- poids et au moins deux dimensions correctes.
- B- seul le poids est incorrect, ou le poids est correct et une dimension est correcte au maximum.
- C- Le poids est incorrect et 2 dimensions sont correctes au maximum.



4.1. Déterminer en fonction des 4 critères qui définissent une brique, dans quelle catégorie vont-elles se ranger.

Remarque :

Un 0 signifie que le critère n'est pas bon, un 1 signifie que la cote est bonne.

L=0 largeur hors norme, l=1 largeur bonne.

P	L	l	H		A	B	C
0	0	0	0				
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0				
1	1	1	1				

A

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

B

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

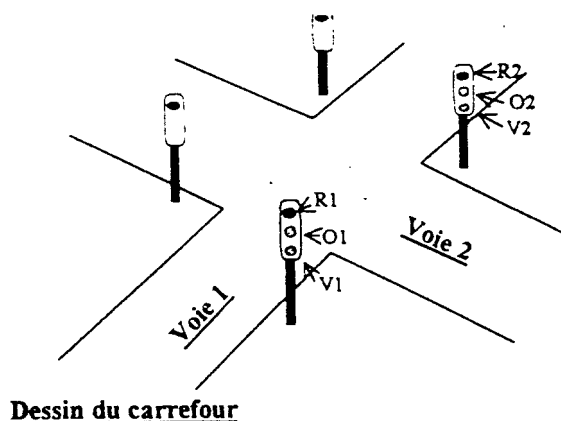
C

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

EXERCICE 5.: Commande de feux tricolores

Présentation:

Nous nous proposons de réaliser, à l'aide de portes NAND à 2, 3 ou 4 entrées, le décodeur d'un montage électronique permettant le fonctionnement des feux tricolores d'un carrefour routier comportant 2 voies (voie 1 et 2. voir le dessin du carrefour ci-contre).



Le principe du montage électronique complet est présenté dans le schéma synoptique ci-dessous :

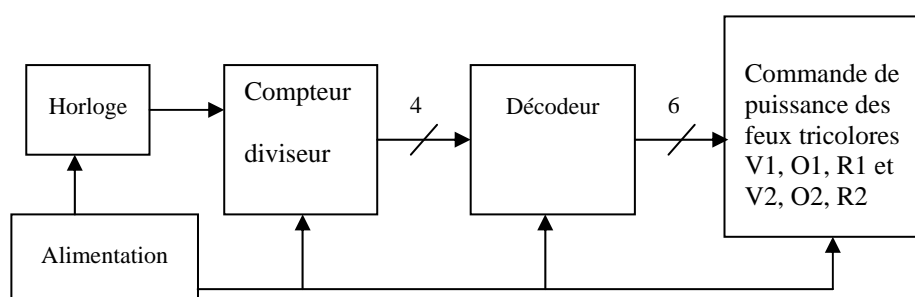


Schéma synoptique

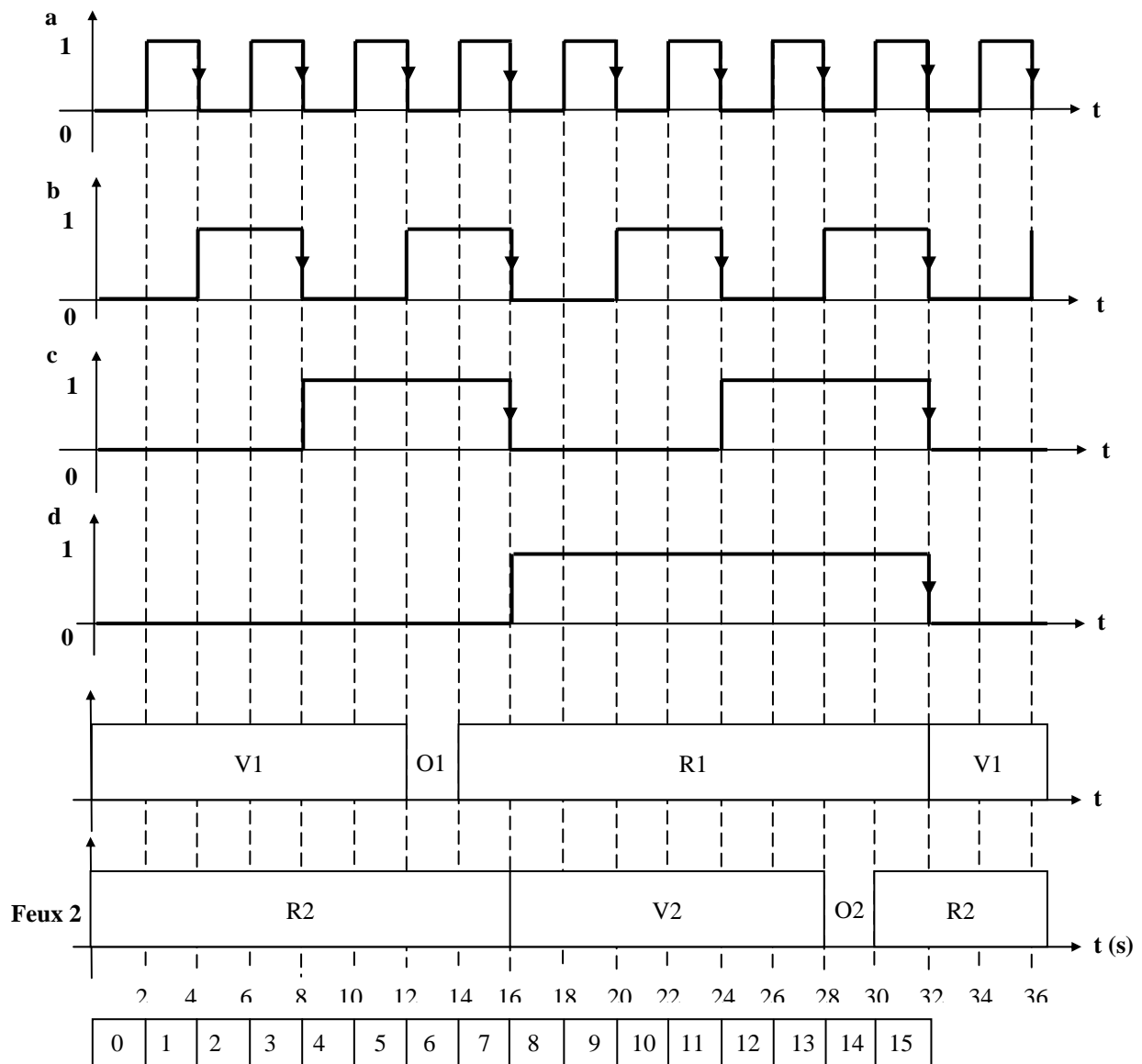
Explication du principe:

- L'horloge délivre une impulsion toutes les 2 secondes.
- Cette impulsion est appliquée à l'entrée d'horloge d'un compteur diviseur par 16.
- Les 4 sorties (a, b, c, d) du compteur délivrent des signaux logiques conformes aux chronogrammes qui suivent, et sont appliqués aux entrées du décodeur (voir chronogrammes).

Travail demandé:

- 5.1. A partir des chronogrammes, remplir les tableaux de KARNAUGH de chaque sortie du décodeur en fonction des sorties du compteur.
- 5.2. En déduire les équations de chaque sortie.
- 5.3. Transformez les équations pour n'utiliser que les portes demandées dans la présentation. (Remarque : on pourra utiliser le fait qu'entre V1, O1 et R1 il n'y a toujours qu'une seule lampe d'allumée. Idem pour V2, O2 et R2).

Chronogrammes:



Remarque : On présentera les tableaux de KARNAUGH de la façon suivante: (variables a et b en haut, c et d sur le coté, dans le sens spécifié dans le tableau ci dessous. Ce sens est préférable pour représenter le codage binaire des nombres en sortie d'un compteur. "d" étant le poids fort, "a" étant le poids faible).

		ba			
dc	00	00	01	11	10
	01				
	11				
	10				

EXERCICE 6.: Vote au directoire

Le comité directeur d'une entreprise est constitué de quatre membres :

- le directeur
- ses trois adjoints A, B, C.

Lors des réunions, les décisions sont prises à la majorité.

Chaque personne dispose d'un interrupteur pour voter sur lequel elle appuie en cas d'accord avec le projet soumis au vote.


En cas d'égalité du nombre de voix, celle du directeur compte double.

On vous demande de réaliser un dispositif logique permettant l'affichage du résultat du vote sur lampe R.

6.1. Donner l'équation logique de R

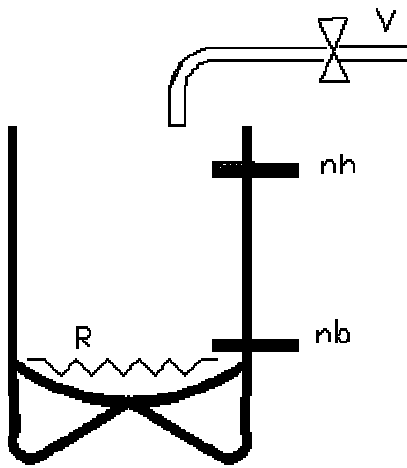
6.2. Réaliser le schéma logique de la sortie R

D	C	B	A	R
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	



	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

EXERCICE 7.: Gestion d'un chauffage



Le niveau d'une cuve est contrôlé par 2 capteurs de niveau (nb, nh) et 2 capteurs de température (th, tb). Une vanne permet le remplissage tant que le niveau haut n'est pas atteint. Une résistance chauffante assure le chauffage jusqu'à la température maximale. Une sécurité de fonctionnement interdit le chauffage si le niveau bas est atteint, de même le remplissage est arrêté si la température minimale est atteinte.

Les capteurs nb, nh sont à l'état 1 si le liquide est présent devant le capteur.

Les capteurs de température th, tb sont à l'état 1 si la température du liquide est supérieure à th, tb.

7.1. Décrire le fonctionnement par une table de vérité.

7.2. Déterminer les équations de fonctionnement par la méthode de votre choix.

Les capteurs de niveau sont à l'état logique 1 lorsque l'eau est présente devant le capteur. Les capteurs de température sont à l'état logique 1 si la température est supérieure à la température à détecter.

EXERCICE 8.: Exercices sur les conditions indifférentes

8.1. Donner les équations logiques simplifiées

ba \ c	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	1	X

S =

ba \ dc	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	X	1
11	0	1	X	0
10	X	1	1	0

S =

S =

ba \ dc	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	X	1	X
10	1	X	1	0

EXERCICE 9.: Problème d'indicateur de niveaux de réservoirs

Soient deux réservoirs R1 et R2 dont le niveau pour chacun est contrôlé par un détecteur de niveau haut (a pour R1, b pour R2) et un détecteur de niveau bas (c pour R1, d pour R2). On écrira a, b, c, d, lorsqu'il y aura du liquide et /a, /b, /c, /d en l'absence de liquide. On dispose de trois voyants V1, V2, V3, qui fonctionnent dans les conditions suivantes:

V1 = 1 si les deux réservoirs sont pleins.

V2 = 1 si les deux réservoirs sont vides.

V3 = 1 dans tous les autres cas (réservoir à moitié plein ou un plein un vide...).

Un certain nombre de combinaisons sont technologiquement impossibles, les sorties V1, V2, V3, prendront dans ces cas là une valeur indifférente (X).

9.1. Etablir la table de vérité de ce système.

9.2. Déterminer les équations logiques simplifiée.

9.3. Réaliser le logigramme de V1, V2, V3 avec des portes NAND.

a	b	c	d	V1	V2	V3
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

V1	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

V2	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

V3	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				