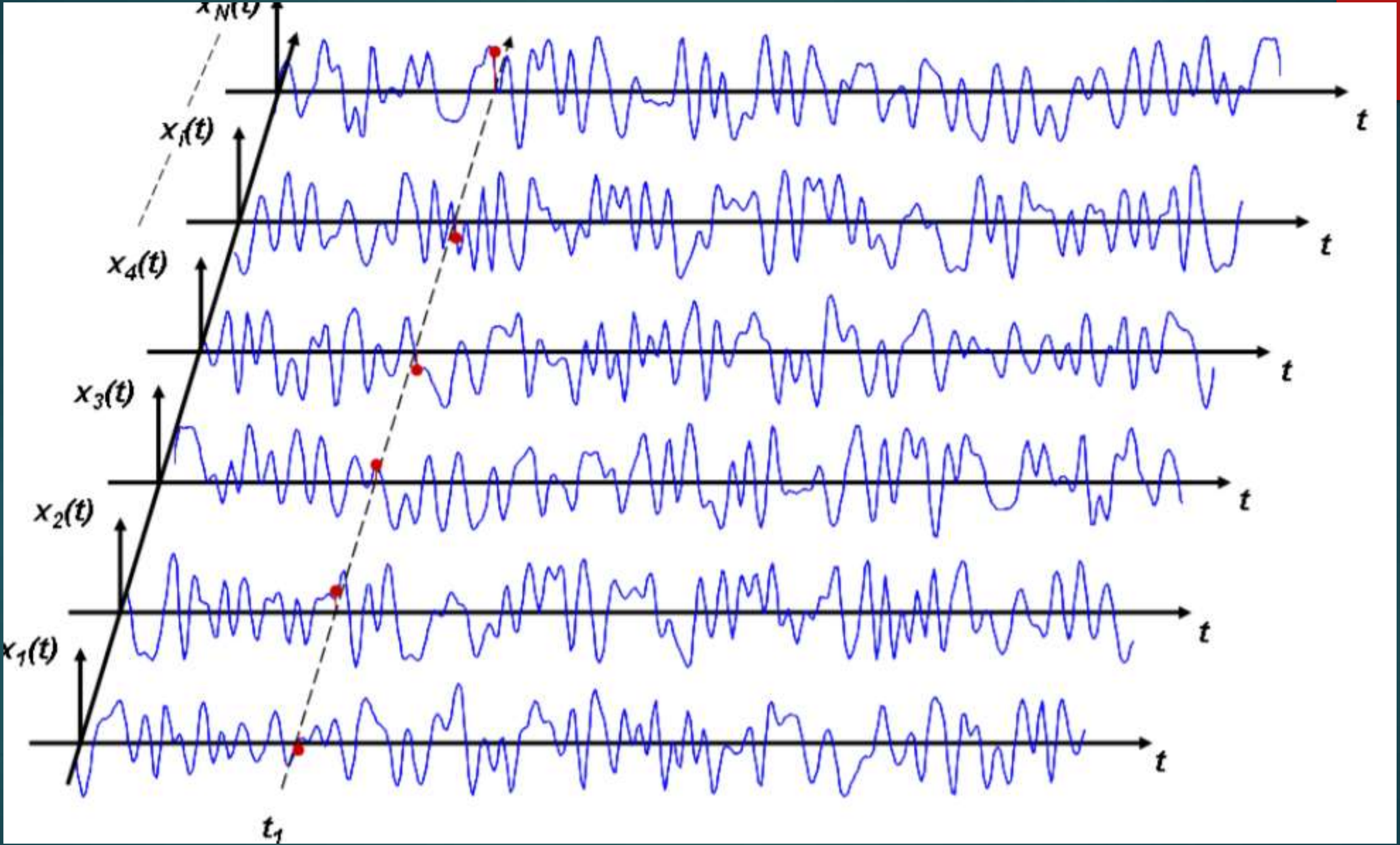
Chapitre 4 : Analyse spectrale des signaux aléatoires

COURS TECHNIQUES DE TRANSMISSION

FILIERE : GL2 - INSAT

RESPONSABLE DU COURS/TD : RIM AMARA

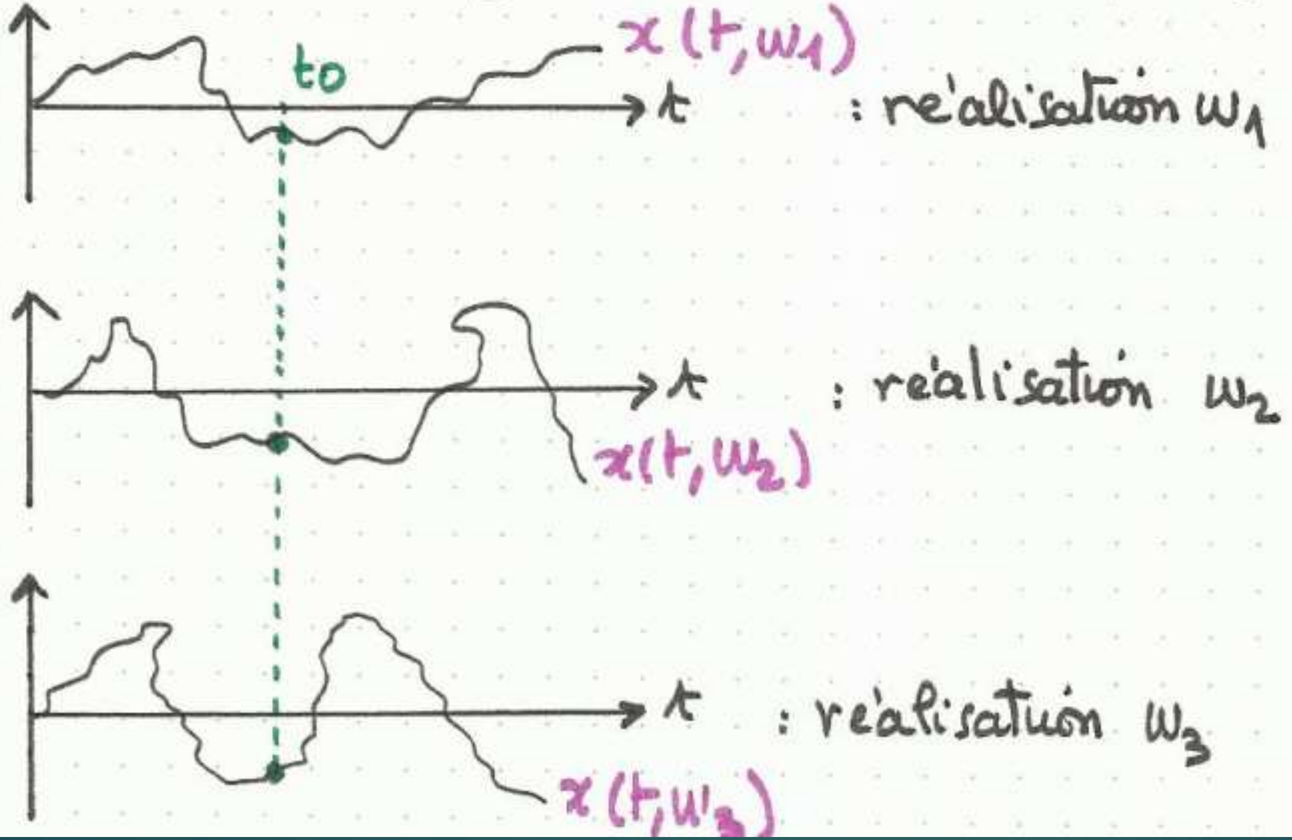


$x_N(t)$
$x_i(t)$
$x_4(t)$
$x_3(t)$
$x_2(t)$
$x_1(t)$
t
t
t
t
t
t
t_1

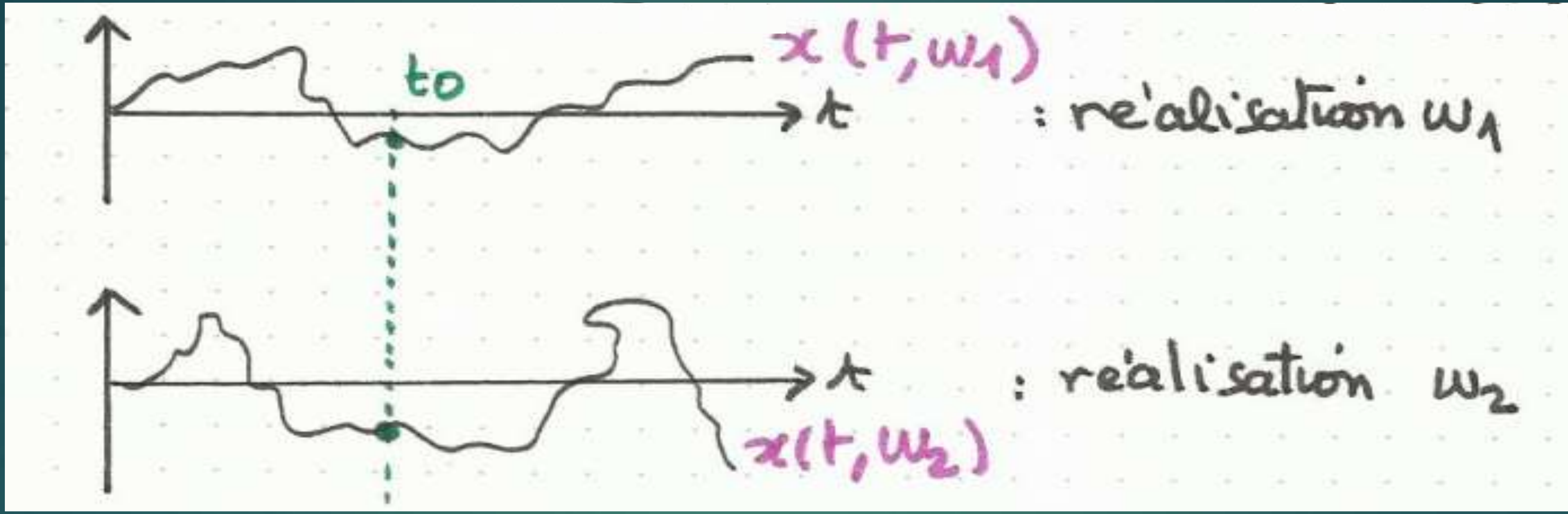
Qu’est ce qu’un signal aléatoire ?

Soit $x(t)$ un signal aléatoire (s.a) $x(t) \triangleq x(t,\omega)$

réalisation



Qu’est ce qu’un signal aléatoire ?



à $t = t_0$ $\quad$ $x(t_0)$ se comporte comme une variable aléatoire (v.a)

pour $\omega = \omega_i$ $\quad$ $x(t, \omega_i)$ est une réalisation ou trajectoire du s.a $x(t)$

$x(t)$; $t \in \mathbb{R}$ est une famille de v.a indexées par le temps t

Distribution au premier ordre d'un signal aléatoire

un s.a est caractérisé par sa distribution au 1er ordre

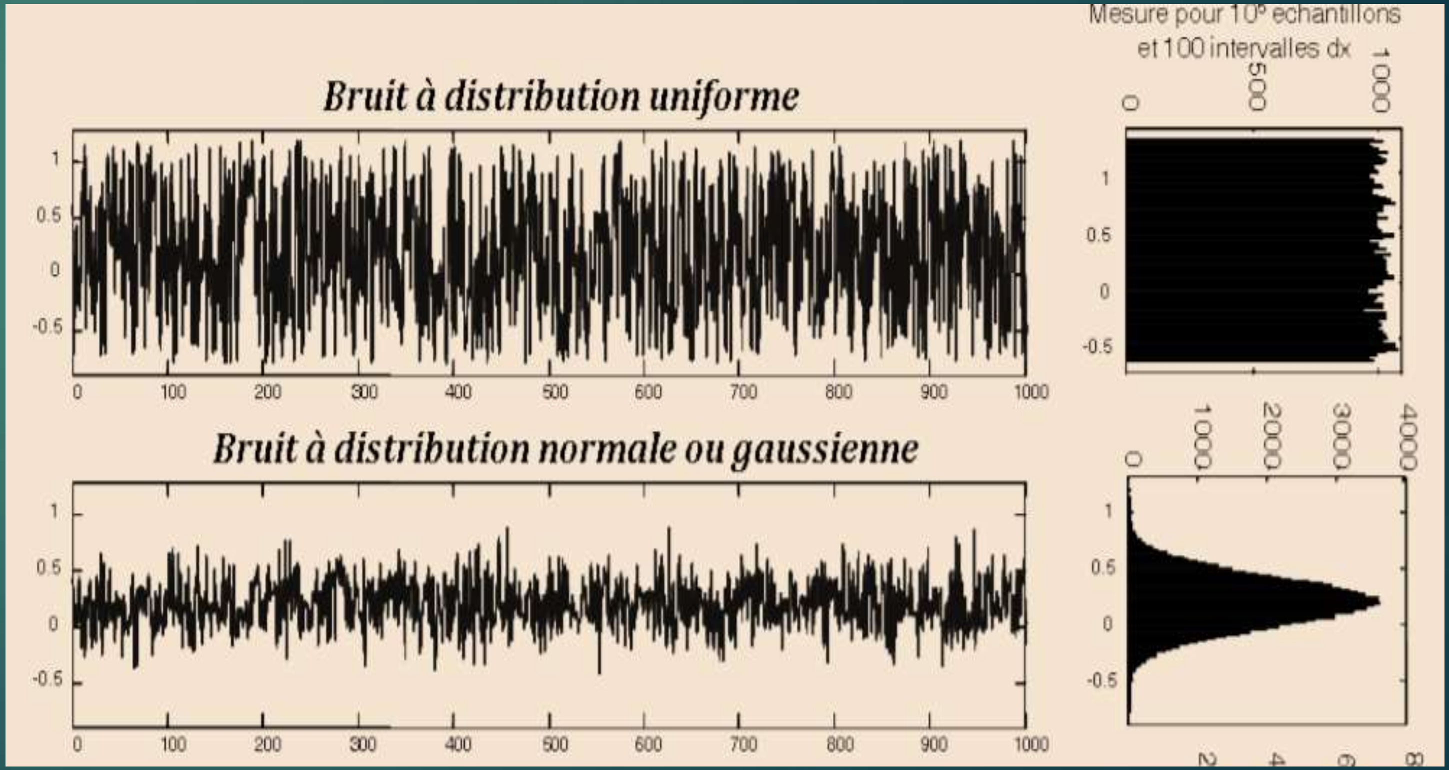
$$F_{x(t)}(\alpha) = P\{x(t) \leq \alpha\}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$\forall t \in \mathbb{R}$

Fonction de répartition

$$f_{x(t)}(\alpha) = \frac{d F_{x(t)}(\alpha)}{d\alpha}$$

densité de probabilité (d.d.p)



Distribution conjointe d'un signal aléatoire

de façon plus complète, un s.a est caractérisé par sa distribution conjointe

$$F_{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = P\{x(t_1) \leq \alpha_1, x(t_2) \leq \alpha_2, \ldots, x(t_n) \leq \alpha_n\}$$

$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$
$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$
$\forall n$

$\Rightarrow$ on montre la corrélation temporelle entre $x(t_1), \ldots, x(t_n)$

$\Rightarrow$ évolution aléatoire du signal.

Statiques d'un s.a

- $E[x(t)] = m_x(t)$: Moyenne statistique

- $E[x^2(t)]$: $P_x(t)$: Puissance moyenne instantanée

en dB $\quad P_x(t)|_{dB} = 10 \log_{10}(P_x(t)|_{lin})$

- variance d'un s.a $\quad \sigma_x^2(t) = E[(x(t) - m_x(t))^2]$

$$= E[x^2(t)] - m_x^2(t)$$

Rmq pour un signal $x(t)$ complexe

$$P_x(t) = E[|x(t)|^2] \qquad \sigma_x^2(t) = E[|x(t)|^2] - |m_x^2(t)|$$

<u>Rappel</u> , X v.a. $\rightsquigarrow f_X(\cdot)$: ddp

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} \alpha\, f_X(\alpha)\, d\alpha \qquad E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} \alpha^2 f_X(\alpha)\, d\alpha \qquad E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(\alpha) f_X^2(\alpha)\, d\alpha$$

<u>Exemple</u> déterminer la moyenne de $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$

ϕ : v.a uniforme $\rightsquigarrow U([0, 2\pi])$

$$X \rightsquigarrow U([a,b]) \qquad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$\bullet\ E(x(t)) = E[A_0 \cos(\omega_0 t + \phi)] = A_0 E[\underbrace{\cos(\omega_0 t + \phi)}_{g(\phi)}] = A_0 \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega_0 t + \alpha) f_\phi(\alpha)\, d\alpha$$

$$= A_0 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega_0 t + \alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{A_0}{2\pi} \Big[\sin(\omega_0 t + \alpha)\Big]_0^{2\pi} = 0$$

$\Rightarrow$ signal centré à chaque t

$$\bullet\; E\left[x^2(t)\right] = A_0^2\, E\left[\cos^2(\omega_0 t + \phi)\right] = A_0^2\, E\left[\frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\omega_0 t + 2\phi)\right)\right]$$

$$= A_0^2\left(E\left(\frac{1}{2}\right) + E\left(\cos(2\omega_0 t + 2\phi)\right)\right) = A_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(2\omega_0 t + 2x)\,dx}_{\left[\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t + 2x)\right]_0^{2\pi} = 0}\right)$$

$$= \frac{A_0^2}{2}$$

s.a stationnaires au sens large (SSL)

$x(t)$ s.a est dit stationnaire au sens large (SSL) s'il vérifie

C1. $E[x(t)] = m_x$ (ne dépend pas de t)

C2. $R_x(t, t-\tau) = E[x(t)\, x^*(t-\tau)] = R_x(\tau)$ (ne dépend que de τ)

fct. d'autocorrélation

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t'_1, t'_2)$$

$P_x = E[x(t)x^*(t)] = R_x(0)$
$= cte$
puissance constante

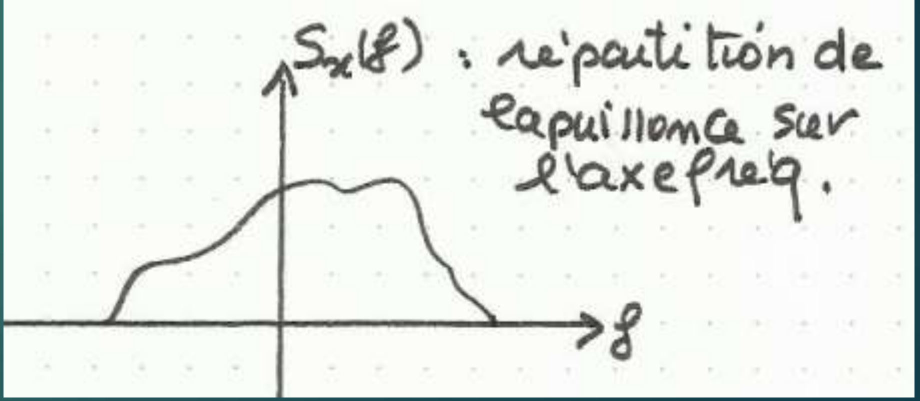
s.a stationnaires au sens large (SSL)

pour les signaux SSL, on définit le spectre de puissance de $x(t)$ par

$$S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = \int_{\mathbb{R}} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

densité spectrale de puissance (dsp)
ou spectre de puissance

$$R_x(\tau) = TF^{-1}\{S_x(f)\} = \int_{\mathbb{R}} S_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$



$$P_x = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} S_x(f)\, df$$

Cas déterministe

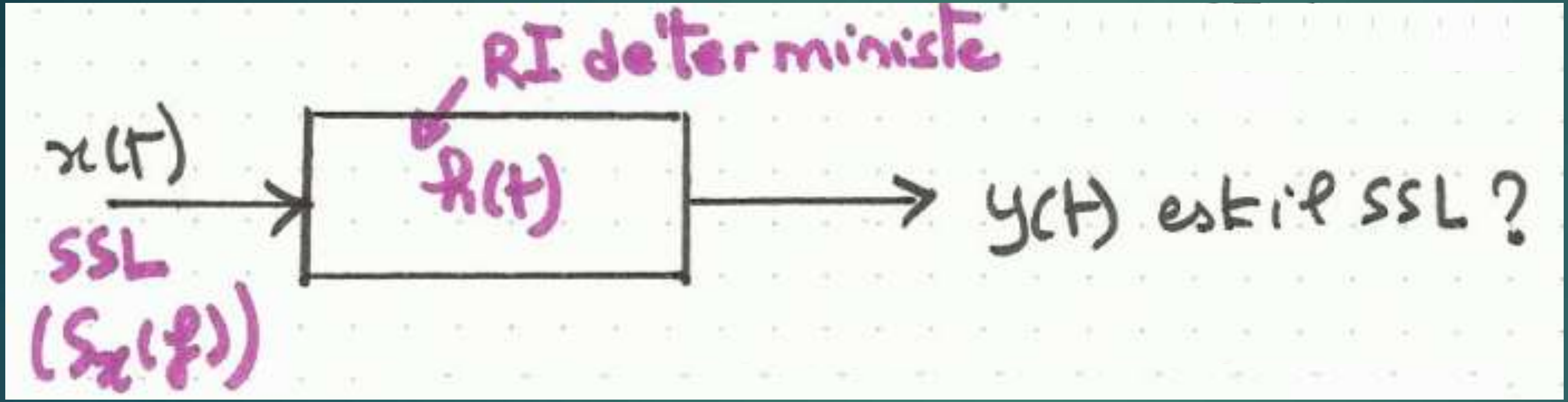
$$x(t) \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftarrows}} X(f)$$

Cas aléatoire

$$x(t) \xrightarrow[x(t)\ SSL\ ?]{} R_x(\tau) \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftarrows}} S_x(f)$$

si $S_x(f) = S_y(f)$ alors $x(t) = y(t)$ "presque partout

Filtrage des signaux s.a stationnaires au sens large

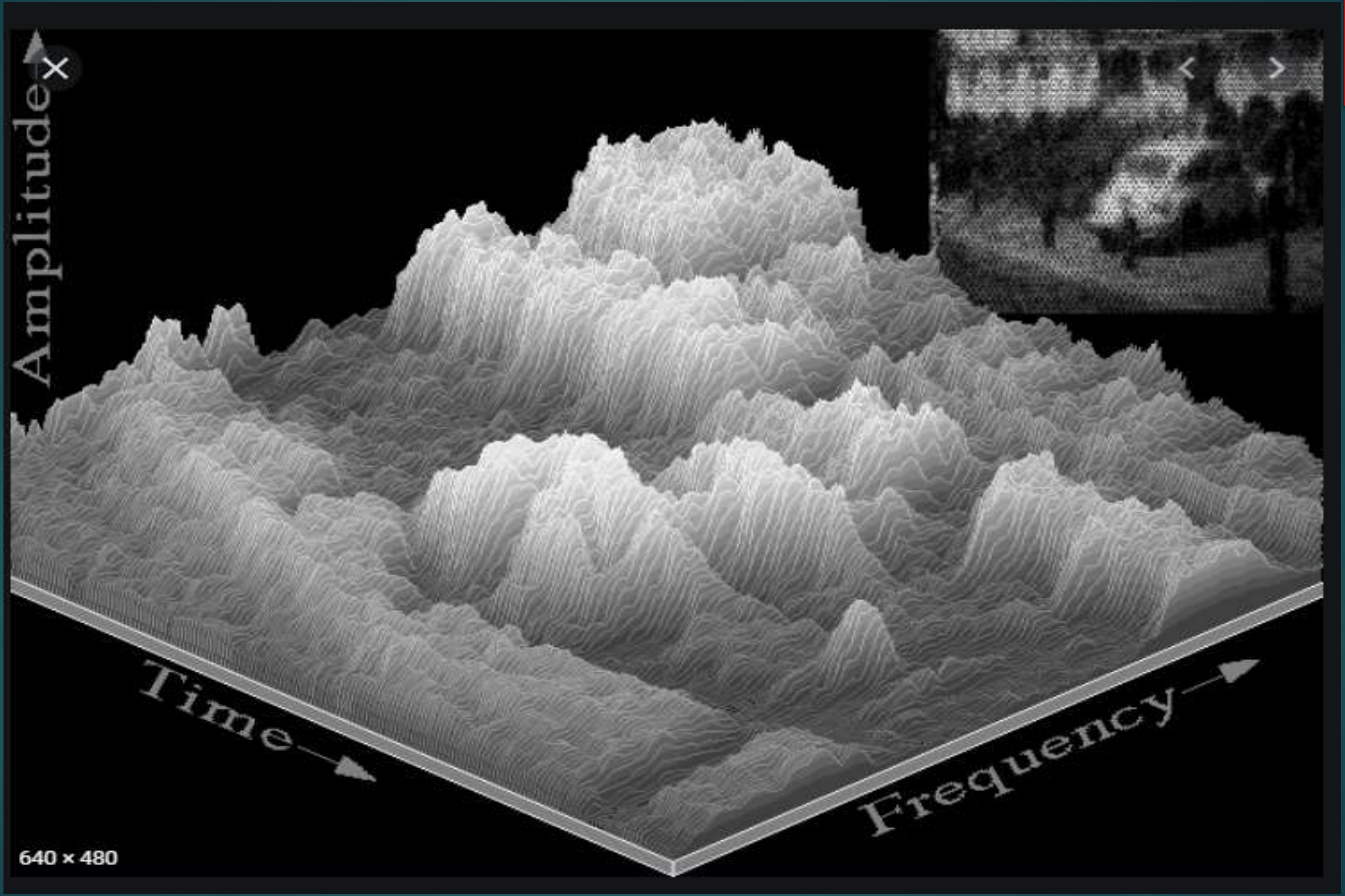


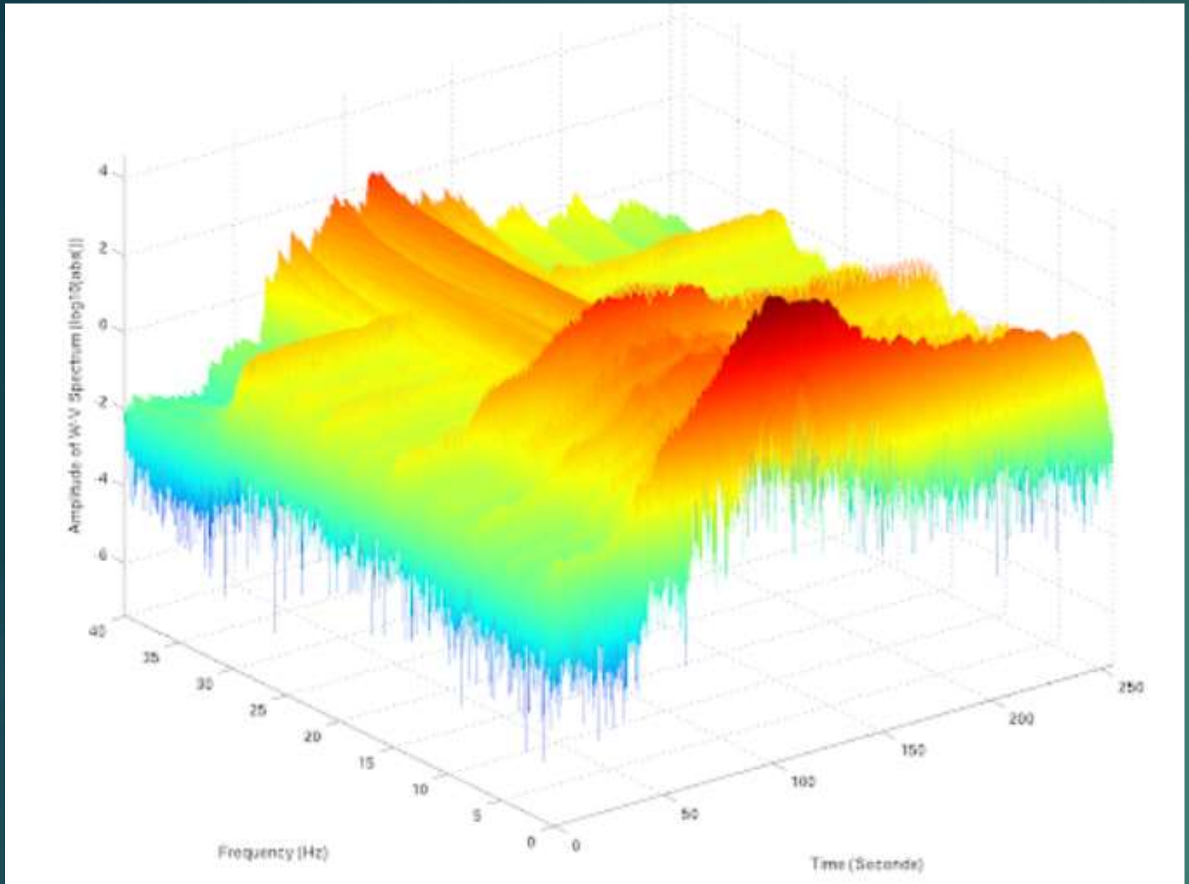
$y(t) = x(t) * h(t)$

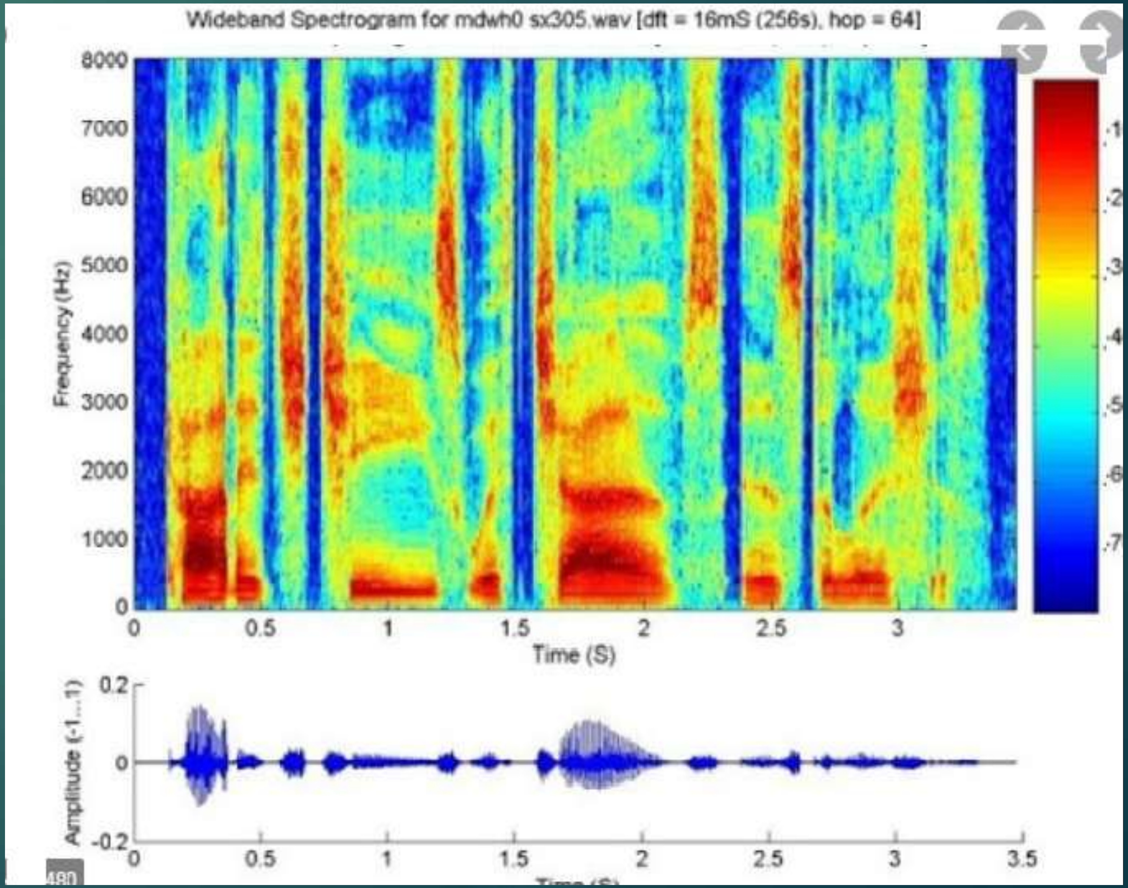
si x(t) SSL alors y(t) est aussi SSL et on a

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$$

$H(f) = TF\{h(t)\}$


Amplitude
Time
Frequency
640 × 480


Frequency (Hz)
Time (Seconds)


Wideband Spectrogram for mdwh0 sx305.wav [dft = 16mS (256s), hop = 64]
Frequency (Hz)
Time (S)
Amplitude (-1...1)