Feuille d'exercices 2

Différentiabilité - Dérivées partielles - Classe C^1

Exercice 1. — *Études de continuité et du caractère C^1.*

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. $f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. $f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. $f_4(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

Les fonctions f_3 et f_4 sont-elles de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. — *Dérivées partielles et différentiabilité.*

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent.
   (c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2. Mêmes questions pour la fonction g définie par $g(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Exercice 3. — *Dérivées partielles et différentiabilité (Bis).*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 \ln(1+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les dérivées partielles premières de f existent sur $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4. — *Différentiabilité et classe C^1.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2 \sin\frac{1}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. En déduire que f est différentiable en $(0,0)$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. — *Matrices jacobiennes.*

Pour chacune des fonctions f et g et des points a ci-dessous, prouver que f et g sont différentiables, écrire la matrice jacobienne de f en a et celle de g en $f(a)$, puis en déduire la différentielle de $g \circ f$ au point a.

1. $f(x,y,z) = (x+y, z-x)$, $g(x,y) = x^3 + y^5 + (3-x-y)^2$ et $a = (1,0,0)$.
2. $f(x,y,z) = (x^2+y-z, xy, z^2)$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ et $a = (1,0,-1)$.

Exercice 6. — *Une fonction dont les dérivées partielles secondes croisées diffèrent.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premires.
3. Montrer que les dérivées partielles secondes de f existent sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
4. La fonction f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?