Chapitre 1 : Outils mathématiques pour la représentation des signaux (partie 1)

COURS TECHNIQUES DE TRANSMISSION

FILIERE : GL2 - INSAT

RESPONSABLE DU COURS/TD : RIM AMARA

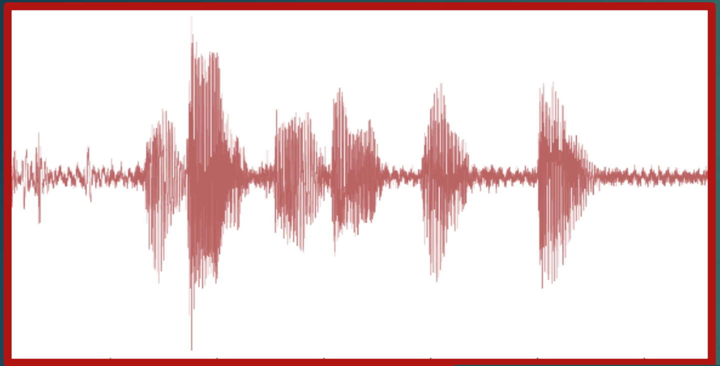
Objectifs

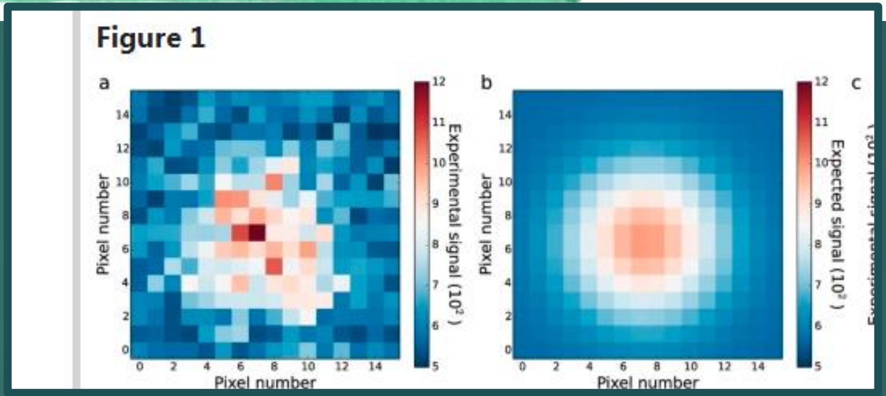
Prise de connaissance des fondements des techniques de transmission aussi bien analogiques que numériques

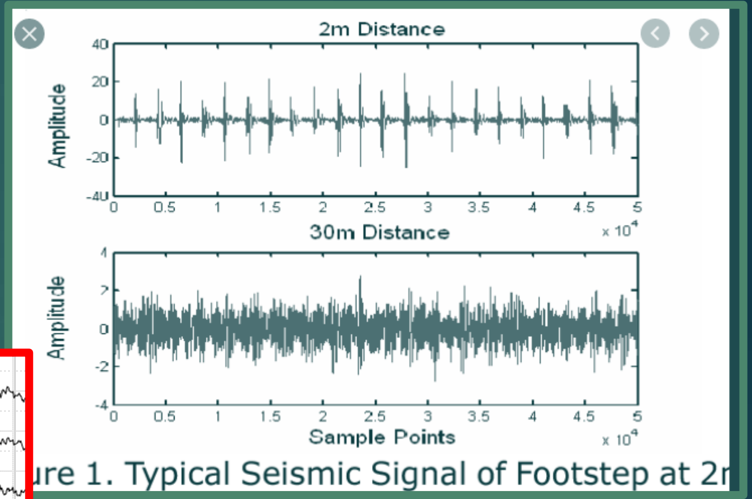
- Qu'est-ce qu'un signal ?
- Classification des signaux ?
- Energie et puissance
- Caractérisation fréquentielle des signaux (série et transformée de Fourier)
- Systèmes de types filtres

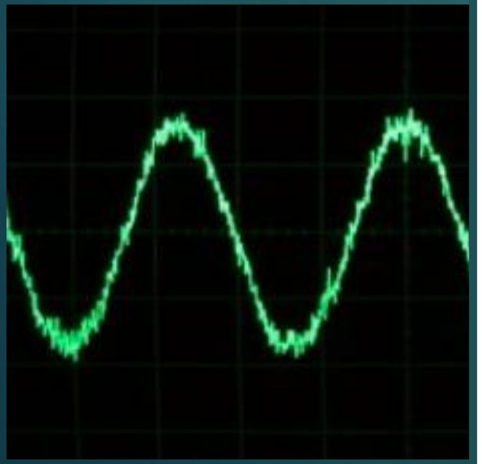
1. Qu'est ce qu'un signal ?

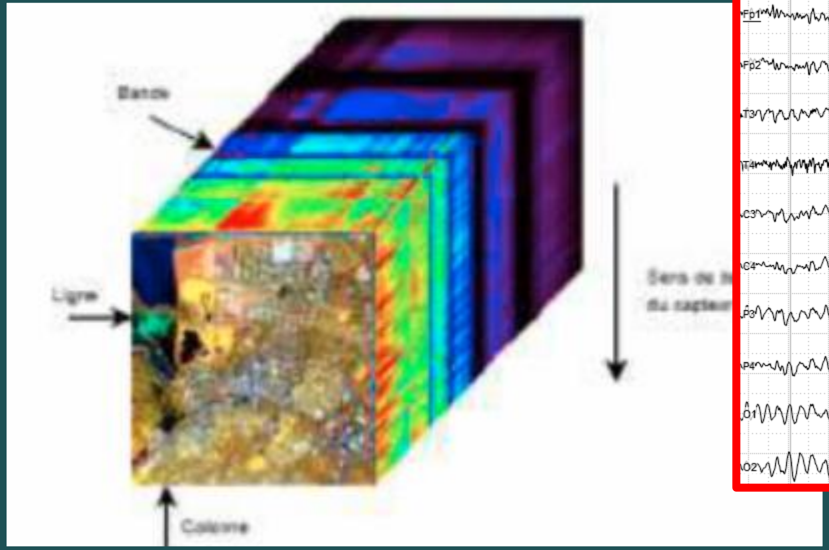
$x(t)$: grandeur variable en fct du temps qui porte une information

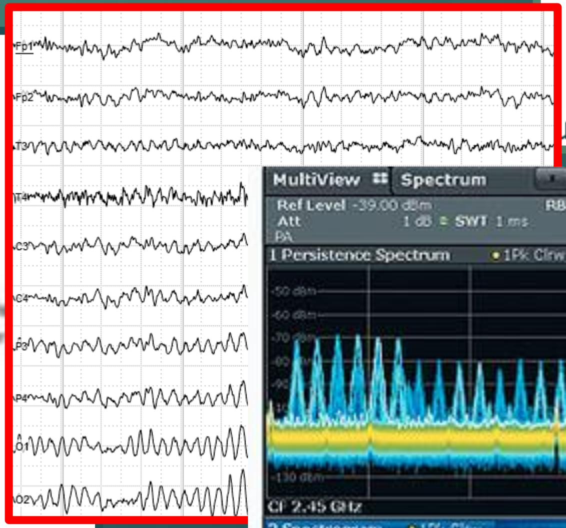












2. Classification de signaux

- Signaux périodiques ≠ signaux non périodiques
- Signaux déterministes ≠ signaux aléatoires
- Signaux analogiques ≠ Signaux numériques
  $x(t)$ ... 0110111 0010..

3. Energie et puissance d'un signal x(t) déterministe

GL2-INSAT
R.Amara

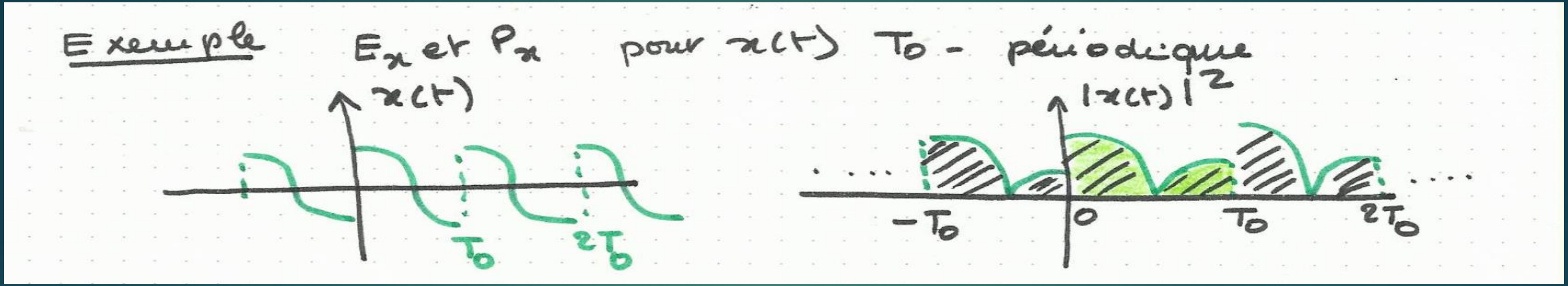
énergie de $x(t)$ $E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt$

si $\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} |x(t)|^2$ CV

Puissance de $x(t)$

$$P_x = \lim_{\Theta \to +\infty} \frac{1}{2\Theta} \int_{-\Theta}^{\Theta} |x(t)|^2 dt$$

Energie d'un signal périodique



$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \lim_{N \to +\infty} \int_{-NT_0}^{NT_0} |x(t)|^2 dt = \lim_{N \to +\infty} 2N \underbrace{\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt}_{\text{fini dans } \mathbb{R}} = +\infty$$

Tous les signaux périodiques ont une énergie

$E_x = +\infty$

Puissance d'un signal périodique

$2\theta = 2NT_0$

$$P_x = \lim_{\theta \to +\infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} |x(t)|^2 dt = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2NT_0} \int_{-NT_0}^{NT_0} |x(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\cancel{2N}T_0} \times \cancel{2N} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{N_0} \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt$$

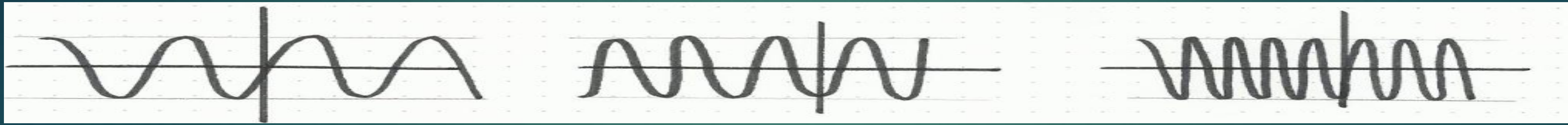
4. Contenu fréquentiel d’un signal analogique déteministe

4.1 Dévelopement en série de Fourier d’un signal périodique

on appelle la fréquence pure f_0 le signal $\boxed{t \rightarrow e^{j2\pi f_0 t}}$
(équivalent complexe d'un signal oscillatoire)

Ce qu'on appelle fréquence

on appelle la fréquence pure f_0 le signal $\boxed{t \to e^{j2\pi f_0 t}}$
(équivalent complexe d'un signal oscillatoire)



plus $T_0 \searrow$, plus $f_0 \nearrow$

f_0 : nbre de périodes /sec
en s^{-1} ou Hz

plus les variations sont rapides , plus $f_0 \nearrow$

Contenu fréquentiel d'un signal

rectifier fréq. f_0 : ~~nbre d'oscillations~~ /sec : $t \rightarrow e^{j2\pi f_0 t}$

Par exemple soit $x(t)$: un signal complexe qui s'écrit comme suit $x(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t}$

$x(t)$: superposition de 2 fréquences pures f_1 et f_2 car il s'écrit comme la somme des signaux $t \rightarrow A_1 e^{j2\pi f_1 t}$ et $t \longrightarrow A_2 e^{j2\pi f_2 t}$.

on dit que $x(t)$ contient 2 fréquences f_1 et f_2, ayant les 2 amplitudes A_1 et A_2, respectivement.

Dévelopement en série de Fourier d'un signal périodique

Thm Soit $x(t)$ un signal T_0 - périodique. Alors $x(t)$ est développable en série de Fourier comme suit

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n e^{j\frac{2\pi n}{T_0}t}$$

$$x(t) \overset{(1)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$ série de Fourier

où $f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$X_n \overset{(2)}{=} \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$: $n^{ième}$ coeff. de Fourier

avec $(T_0) = [\alpha, \alpha + T_0]$: une intervalle de largeur T_0 choisi arbitrairement.

Série de Fourier d'un signal périodique

<u>Rmq</u> on désigne par série de Fourier $S(t) = \sum_n X_n e^{j2\pi n f_0 t}$

- il y a égalité $x(t) = S(t)$ si t pt. de C^0

- si t_0 est un pt de discontinuité $S(t_0) = \frac{1}{2}\left(x(t_0^+) + x(t_0^-)\right)$

- $\lim\limits_{|n| \to +\infty} |X_n| = 0$ (sinon, la série diverge !)

Interprétation physique de ce développement

- $x(t) = \cdots\cdots + X_{-2}e^{j2\pi(-2f_0t)} + X_{-1}e^{-j2\pi f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_2 e^{j2\pi(2f_0)t} + \cdots\cdots$

  fréq. $-2f_0$; fréq $-f_0$; fréq 0 ; fréq f_0 ; fréq. $2f_0$

- $x(t)$ est la superposition d'une infinité discrète (comme $\mathbb{Z}$) de fréquences pures de type nf_0 ; $n \in \mathbb{Z}$, chacune ayant l'amplitude complexe X_n

rectifier : un signal périodique contient une infinité de fréquences pures.

f_0 : fréq. fondamentale nf_0 $(n \neq 1)$ fréq. harmonique

Unicité du développement en série de Fourier

- le développement en série de Fourier est unique par rapport à un signal unique $x(t)$ périodique

i.e à un signal $x(t)$ T_0-périodique correspond une unique série de Coeff. de Fourier $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Domaine temporel — Domaine fréquentiel

$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[r, bend left, "2"] & \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \,;\, f_0 \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

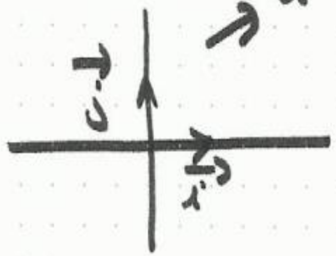
Equivalence entre ces 2 représentations

Espace Hilbertien des signaux périodiques

Espace Euclidien

base $(\vec{i},\vec{j})$

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$



coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

$a = \langle \vec{u}, \vec{i} \rangle$

$b = \langle \vec{u}, \vec{j} \rangle$

Espace Hilbertien des signaux périodiques de $\hat{m}$ période T_0

base $\left(\{e^{j2\pi n f_0 t}\}_{n\in\mathbb{Z}} \right)$

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

Coordonnées de $x(t)$ dans la base X_n

$\{e^{j2\pi n f_0 t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$

produit scalaire

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\, y^*(t)\, dt$$

$$X_n = \langle x(t), e^{j2\pi n f_0 t} \rangle$$

: coordonnée selon le vecteur de la base : fréq. $n f_0$

unicité des coordonnées par rapport au vecteur

Intérêt pour la synthèse de signaux

- on analyse le signal périodique $x(t)$ et on obtient les X_n

- $x(t) = \ldots\ldots \ldots + X_1 e^{j2\pi f_0 t} + \ldots + X_{n_0} e^{j2\pi n_0 f_0 t} + \ldots\ldots$

$|X_{n_0}|$ très important mais la fréquence $n_0 f_0$ est nuisible

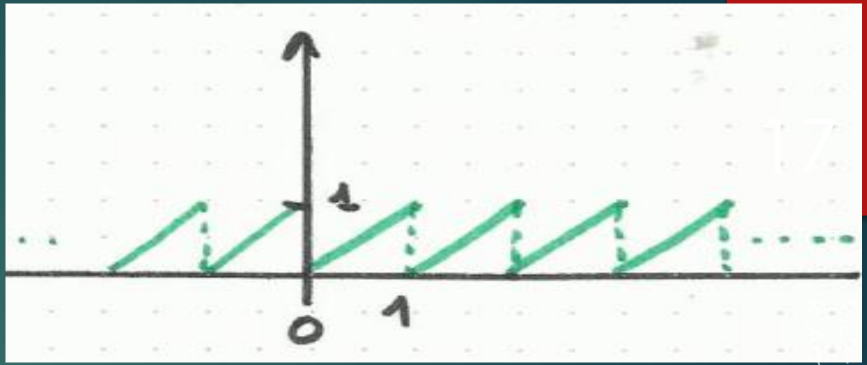
- possibilité de corriger $x(t)$ ou l'améliorer (signal enhancement)

- $X_{n_0} \curvearrowright \frac{X_{n_0}}{\alpha}$ puis resynthétiser le signal en recalculant $s(t)$

$$s(t) = \ldots\ldots + \frac{X_{n_0}}{\alpha} e^{j2\pi n_0 f_0 t} + X_{n_0+1} e^{j2\pi(n_0+1) f_0 t} + \ldots$$

$\tilde{x}(t) = s(t)$: signal corrigé

Exos d'application

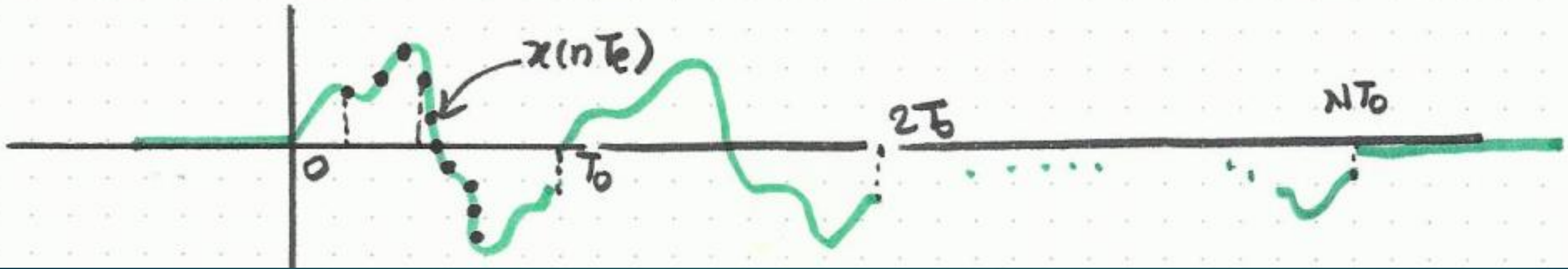


Exercice Développer en série de Fourier

Exercice on considère un signal $x(t)$ sur un intervalle $[0, NT_0]$; $x(t)$ étant T_0 - périodique.

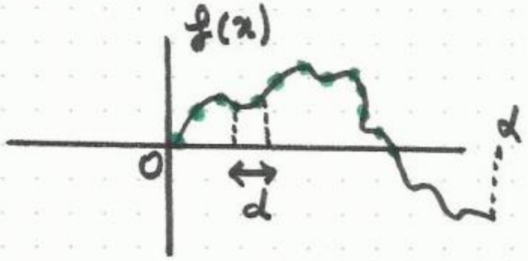
on échantillonne ce signal à une cadence $T_e = \frac{T_0}{100}$ et on récupère ainsi un certain nombre M d'échantillons qu'on note $x(n) \triangleq x(nT_e)$; $n = 0, \dots, M-1$

on suppose que $x(t)$ est nul en dehors de $[0, NT_0]$.



- Donner le nbre d'échantillons du signal $x(n)$, noté M.

- Sachant qu'on peut calculer une intégrale numériquement comme suit



on suppose qu'on Q échantillons de $f(.)$ sur $[0, \alpha]$ notés $f(0)$, $f(d)$ … $f((Q-1)d)$

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \simeq d.\sum_{i=0}^{Q-1} f(i.d)$$

Donner une approximation de la valeur des coeff. de Fourier X_n ; $n \in \mathbb{Z}$, associés à $x(t)$.

- Ecrire un bout d'algorithme calculant les coefficients de Fourier X_n pour $n = 0, \dots, 20$ à partir de $x(n)$; $n = 0, \dots, M-1$

- Ecrire un algorithme calculant la série de Fourier $S(t)$ aux points nT_e ; $n = 0, \dots, M-1$.
  $S(nT_e)$ est supposé approximer quelle valeur?

Exos d'application

- En effet, on se rend compte que l'amplitude complexe X_{11} est de module élevé et correspond à une fréquence nuisible dans $x(t)$. On souhaite ainsi resynthétiser les éch. du signal $x(n)$ en divisant l'amplitude de cette fréq. par 10. Ecrire un alg. de resynthèse des éch. de ce signal, noté $\hat{x}(n)$.