Série TD1
Techniques de transmission
(manipulation de signaux aléatoires pour la transmission)

Filière RT2 – INSAT

Responsable Cours/TD : R. Amara

- Si X et Y sont deux VA indépendantes alors toute transformation de la VA X est indépendante de toute transformation de la VA Y
- Si $X = X_r + jX_i$ VA complexe alors $E(X^*) = (E(X))^*$
- Deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ sont décorrélés si $E\{x(t)y(t')\} = E\{x(t)\}E\{y(t')\}\ \ \forall t, t'$

Exercice 1

1. Rappeler comment écrire un signal FM en fonction de son enveloppe complexe $x(t)$.

On considère un signal modulé selon la FM $s(t)$ correspondant au modulant $m(t) = \alpha_1 m_1(t) + \alpha_2 m_2(t)$ combinaison linéaire des modulants $m_1(t)$ et $m_2(t)$: deux signaux **aléatoires statistiquement indépendants**. A_0 et f_0 étant les paramètres de la porteuse et k_{FM} la constante de modulation. On désigne par $x_1(t) = e^{j\alpha_1\varphi_1(t)}$ et $x_2(t) = e^{j\alpha_2\varphi_2(t)}$ les enveloppes complexes correspondant à respectivement $\alpha_1 m_1(t)$ et $\alpha_2 m_2(t)$.

2. Exprimer $s(t)$ en fonction de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et f_0.
3. En supposant que $\int_0^t m_i(u)du$ est assimilée à une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\alpha_i k_{FM}}\right]$ pour $i = 1, 2$, montrer que la moyenne statistique (ou encore espérance) de chacune des enveloppes complexes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est nulle.
4. Y-a-t-il une dépendance statistique entre les enveloppes $x_1(t)$ et $x_2(t)$? Justifier votre réponse.
5. En déduire la moyenne du signal FM $s(t)$.
6. Déterminer l'expression de l'autocorrélation du signal FM $s(t)$ en fonction des autocorrélations de $x_1(t)$ $x_2(t)$.
   Indication : On utilisera l'hypothèse suivante $E\left\{x_1(t)x_1\left(t'\right)x_2(t)x_2\left(t'\right)\right\} = 0 \quad \forall t, t'$.
   $s(t)$ est-il stationnaire au sens large ?
7. Sachant que $\int_{t-\tau}^t m_2(u)du$ suit la loi uniforme sur $[0, \tau]$, identifier la fonction d'autocorrélation de $x_2(t)$.
   Indication : On pourra écrire $e^{j\theta} - 1 = e^{j\theta/2}\left(e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}\right)$ et faire apparaître un $sinc$.
8. Sachant que $R_{x_1}(\tau)$ est constante et vaut A_1, déterminer l'expression de la DSP de $s(t)$ et tracer son allure (f_0 très grand). Quelle est la puissance du signal FM.

Exercice 2 (part. A et B)

Soit un signal $x(t)$ déterministe, périodique , de période T_m.
A.1 Ecrire le développement en série de Fourier de $x(t)$ en fonction des fréquences harmoniques $e^{j2\pi n f_m t}$. On notera X_n, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier correspondant et $f_m = 1/T_m$ la fréquence fondamentale de $x(t)$.
A.2 En déduire l'expression du spectre de $x(t)$ en fonction des X_n et tracer l'allure du spectre d'amplitude correspondant (on rappelle que $\lim\limits_{|n| \longrightarrow +\infty} |X_n| = 0$).
A.3 $x(t)$ est-il à bande limitée, théoriquement ?
A.4 Soit un signal $x(t)$ périodique de période $T_m = 5.10^{-3}$ de coefficients de Fourier correspondant

$$X_n = \frac{\alpha}{1+n^2}, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ avec } \alpha = 100$$

Dans la représentation spectrale de $x(t)$, on décide de négliger les coefficients de Fourier X_n tels que $|X_n| \leq 10^{-4}$. Identifier alors la bande fréquentielle $[-B, B]$ de $x(t)$ (on fera l'approximation $10^6 \gg 1$).
A.5 Tracer l'allure du spectre d'amplitude du signal modulé DBSP, noté $y(t)$, correspondant à $x(t)$, les paramètres de la porteuse sont $A_0 = 4$ et $f_0 = 1MHz$. quel est son occupation spectrale ?

B. Soit $x(t)$ un signal aléatoire issu du mélange de N harmoniques de fréquences nf_m tel que

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n e^{j2\pi n f_m t}$$

où $A_n, \quad n = 1, \ldots, N$ sont les amplitudes des harmoniques assimilées à des **variables aléatoires, réelles, centrées et indépendantes 2 à 2** (autrement dit A_n et A_k sont des v.a indépendantes pour $n \neq k$). On suppose que les amplitudes aléatoires A_n ont la même variance σ_A^2.

B.1 Rappeler ce que sont deux v.a X et Y indépendantes.
Quelle est la valeur de $E\{A_n A_k\}$ pour $n \neq k$.
B.2 Trouver la moyenne de $x(t)$.
B.3 Déterminer l'autocorrélation de $x(t)$. Est-il stationnaire au sens large ?
N.B : $\sum_i a_i \sum_i b_i = \sum_i \sum_j a_i b_j$
B.4 Déterminer ainsi la dsp (densité spectrale de puissance) de $x(t)$ et tracer son allure.
B.5 Trouver la puissance du signal $x(t)$.
B.6 $x(t)$ est modulé en DBSP avec une porteuse de paramètres A_0 et f_0 fixés, le signal modulé est noté $y(t)$. Sachant que la dsp de $y(t)$ s'écrit en fonction de celle de $x(t)$ comme suit

$$S_y(f) = \frac{A_0^2}{2}(S_x(f - f_0) + S_x(f + f_0)$$

déterminer l'expression de la puissance de $y(t)$ en fonction de A_0, σ_A^2 et N.

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les réponses fréquentielles des filtres à utiliser sont supposées réelles et de pente à la coupure infinie (autrement dit, les RF ont des allures rectangulaires de gain unité).

on considère la modulation DBSP d'un signal modulant aléatoire $m(t)$ réel, centré et stationnaire au sens large (SSL) de dsp (densité spectrale de puissance) $S_m(f) = TF\{R_m(\tau)\}$, représenté ci-contre, où $R_m(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de $m(t)$. On note $x(t)$ le signal modulé selon la DBSP correspondant à $m(t)$.

1. Donner l'expression de $x(t)$; A_0 et f_0 sont les paramètres de la porteuse de phase nulle puis montrer que $E\{x(t)\} = 0$.

2. Déterminer la fonction d'autocorrélation de $x(t)$, qu'on notera $R_x(t, t-\tau)$. S'agit-il d'un signal SSL ?

3. En effet, on montre que la fonction d'autocorrélation $R_x(t, t-\tau)$ est périodique, de période $T_0/2$, ainsi, on définit la Fonction d'Autocorélation Moyennée (FAM) de $x(t)$ par $\overline{R_x}(\tau) = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} R_x(t, t-\tau)dt$, la dsp de $x(t)$ sera alors donnée par $S_x(f) = TF\{\overline{R_x}(\tau)\}$. Donner l'expression de la FAM de $x(t)$ ainsi que sa dsp, puis tracer son allure.

4. Le démodulateur de la DBSP préconisé dans le cas de modulant aléatoire a en fait la même structure que dans le cas déterministe. Rappeler cette structure.

5. Déterminer la moyenne et l'autocorrélation de $r(t)$, la sortie du multiplieur dans le démodulateur. $r(t)$ est-il SSL ?

6. Déterminer de suite la FAM de $r(t)$ (la FAM étant définie comme ci-dessus) puis tracer l'allure de sa dsp.

7. Dans un cas général, si $x(t)$ est un signal de dsp $S_x(f)$ comment doit s'écrire la dsp de $\alpha.x(t)$?

8. Sachant que la sortie d'un filtre de réponse Impulsionnelle (RI) $g(t)$ correspondant à une entrée SSL $x(t)$ de dsp $S_x(f)$ est un signal aléatoire, noté $y(t)$, de dsp $S_y(f) = S_x(f).|G(f)|^2$ ($G(f) = TF\{g(t)\}$), identifier le signal de sortie du filtre passe-bas du démodulateur DBSP.

9. En effet, l'entrée du démodulateur correspond au signal modulé transmis dans l'air libre et subissant ainsi une opération de filtrage à la suite de la superposition de plusieurs répliques du signal. Ainsi, on suppose dans cette partie que l'entrée du démodulateur s'écrit plutôt

$$z(t) = \underbrace{\alpha_1 x(t-T_1)}_{z_1(t)} + \underbrace{\alpha_2 x(t-T_2)}_{z_2(t)}$$

T_1 et T_2 sont deux temps de retard de l'onde transmise sur deux trajets différents et α_1 et α_2 sont des coefficients d'atténuation de parcours affectant l'onde sur ses deux trajets. Ces deux coefficients sont supposés réels et connus. Déterminer la moyenne et la FAM de $z_1(t)$ en fonction de celle de $x(t)$ (on pourra faire le changement de variable adéquat dans l'intégrale exprimant la FAM). En déduire la dsp de $z_1(t)$.

10. En supposant les signaux retardés $x(t-T_1)$ et $x(t-T_2)$ décorrélés (ceci est effectivement vrai si les retards T_1 et T_2 sont distants), déterminer la FAM du signal reçu $z(t)$ ainsi que sa dsp puis tracer son allure.

On rappelle que deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ sont décorrélés si $E\{x(t)y(t')\} = E\{x(t)\}E\{y(t')\}\ \ \forall t, t'$.

11. le signal reçu $z(t)$ attaque le démodulateur cohérent de la DBSP. En identifiant le type les signaux mis en jeu (type BF ou HF), identifier le signal démodulé, $s_1(t)$, obtenu à la sortie du filtre passe-bas. L'opération de démodulation est-elle assurée.