

Exercice 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Diagonaliser $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

2. calculer P^{-1}

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E_1) d'ordre 3

$$x^{(3)}(t) + 2x''(t) - x'(t) - 2x(t) = e^t \quad (E_1)$$

3. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$

Montrer que $X'(t)$ vérifie l'équation $(E_2) : X'(t) = M X(t) + B(t)$ où $B(t) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice à déterminer.

4. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$

(a) que devient l'équation (E_2) en fonction de $Y(t)$

(b) En déduire que $\alpha(t), \beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des solutions d'équations différentielles d'ordre 1 qu'on résoudra

5. En déduire $X(t)$

6. Etant donnée la condition initiale $x(0) = 0, x'(0) = 1$ et $x''(0) = 1$ résoudre (E_1)

[On rappelle que la solution de $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ est $x(t) = e^{A(t)}(c + \int_0^t b(u)e^{-A(u)}du)$ avec $A(t) = \int_0^t a(u)du$]

Exercice 2

On considère f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par sa matrice dans la base canonique:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

1. (a) calculer le rang de A . En déduire que 0 est une valeur propre de A .
(b) Détermine u_1 le vecteur propre associé à 0
2. (a) Montrer que A admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$ et calculer son vecteur propre u_2 .

- (b) La matrice A est-elle pas diagonalisable.
3. Trouver un vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $f(u_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. (a) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_3, u_2)$ forme une base de \mathbb{R}^3
 (b) Donner $T = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$ et exprimer A en fonction de T .
5. (a) Ecrire $T = D + N$ avec D une matrice diagonale et N une matrice à diagonale nulle.
 (b) Montrer que $N^2 = 0$ et que $ND = DN$ (Décomposition de Dunford)
 (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer T^n et en déduire A^n

Exercice 3

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n impaire et soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$
 Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant:

$$g \circ f - f \circ g = \alpha f$$

1. Montrer que g admet au moins une valeur propre réelle λ
2. Soit v un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ

Montrer, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$(g \circ f^k)(v) = (\lambda + \alpha k) f^k(v)$$

avec $f^k = f \circ f \circ f \cdots \circ f$ (k fois)

3. (a) Montrer, par l'absurde, qu'il existe $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $f^{k_0}(v) = 0$
 (b) En déduire que f n'est pas injective
4. On suppose que g est diagonalisable dans \mathbb{R} et soit (v_1, \dots, v_n) une base de E formée de vecteurs propres de g
- (a) Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$; $f^n(v_i) = 0$
 (b) En déduire que l'application f^n est identiquement nulle
5. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$
- (a) Montrer que $\mathfrak{B} = (f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$ est une base de E
 (b) Donner $N = \text{mat}(f, \mathfrak{B})$ la matrice de f dans cette base
 (c) Montrer que n est le plus petit entier tel que $N^n = 0$
6. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que A admet une unique valeur propre
- (b) En déduire que A n'est pas diagonalisable
- (c) Soit $M = A + I_3$. Calculer M^2 et M^3
- (d) Soit $x = (1, 0, 0)$. Vérifier que $M^2 \cdot x \neq 0$
- (e) En déduire une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle

$$M = PNP^{-1} \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (f) Préciser P , calculer son polynôme caractéristique et en déduire P^{-1} .
- (g) En déduire une triangulation de A