Nadia HMIDA

## Exercice 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Diagonaliser $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

2. calculer $P^{-1}$

   On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E_1)$ d'ordre 3

$$x^{(3)}(t) + 2x''(t) - x'(t) - 2x(t) = e^t \ (E_1)$$

3. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$

   Montrer que $X'(t)$ vérifie l'équation $(E_2) : X'(t) = M\, X(t) + B(t)$ où $B(t) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice à déterminer.

4. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$

   (a) que devient l'équation $(E_2)$ en fonction de $Y(t)$

   (b) En déduire que $\alpha(t), \beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des solutions d'équations différentielles d'ordre 1 qu'on résoudera

5. En déduire $X(t)$

6. Etant donnée la condition initiale $x(0) = 0, x'(0) = 1$ et $x''(0) = 1$ résoudre $(E_1)$

   [ On rappelle que la solution de $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ est $x(t) = e^{A(t)}(c + \int_0^t b(u)e^{-A(u)}du)$ avec $A(t) = \int_0^t a(u)du$]

## Exercice 2

On considère $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

1. (a) calculer le rang de $A$. En déduire que 0 est une valeur propre de $A$.

   (b) Détemine $u_1$ le vecteur propre associé à 0

2. (a) Montrer que $A$ admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$ et calculer son vecteur propre $u_2$.

(b) La matrice $A$ est-elle pas diagonalisable.

3. Trouver un vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $f(u_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

4. (a) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_3, u_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$
   (b) Donner $T = Mat(f, \mathcal{B})$ et exprimer $A$ en fonction de $T$.

5. (a) Ecrire $T = D + N$ avec $D$ une matrice diagonale et $N$ une matrice à diagonale nulle.
   (b) Montrer que $N^2 = 0$ et que $ND = DN$ ( Décomposition de Dunford)
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $T^n$ et en déduire $A^n$

## Exercice 3

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ impaire et soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$
Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ vérifiant:

$$gof - fog = \alpha\, f$$

1. Montrer que $g$ admet au moins une valeur propre réelle $\lambda$

2. Soit $v$ un vecteur propre de $g$ associé à la valeur propre $\lambda$
   Montrer, par réccurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$(gof^k)(v) = (\lambda + \alpha\, k)f^k(v)$$

   avec $f^k = fofof \cdots of(k \text{ fois})$

3. (a) Montrer, par l'absurde, qu'il existe $k_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que $f^{k_0}(v) = 0$
   (b) En déduire que $f$ n'est pas injective

4. On suppose que $g$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une base de $E$ formée de vecteurs propres de $g$
   (a) Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n;\ f^n(v_i) = 0$
   (b) En déduire que l'application $f^n$ est identiquement nulle

5. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$
   (a) Montrer que $\mathfrak{B} = (f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \cdots, f(x), x)$ est une base de $E$
   (b) Donner $N = mat(f, \mathfrak{B})$ la matrice de $f$ dans cette base
   (c) Montrer que $n$ est le plus petit entier tel que $N^n = 0$

6. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que $A$ admet un unique valeur propre

(b) En déduire que $A$ n'est pas diagonalisable

(c) Soit $M = A + I_3$. Calculer $M^2$ et $M^3$

(d) Soit $x = (1, 0, 0)$. Vérifier que $M^2.x \neq 0$

(e) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle

$$M = PNP^{-1} \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) Préciser $P$, calculer son polynôme caractéristique et en déduire $P^{-1}$.

(g) En déduire une triangulation de $A$