

# Ondes et propagation

RT2

# Equations de Maxwell

Maxwell a déduit que toutes les lois régissant les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  de l'électromagnétisme dans le vide pouvaient être résumées à l'aide de quatre relations appelées équations de Maxwell (1865):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (M1) \\ \operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (M2) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (M3) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (M4) \end{array} \right. \quad \text{avec } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

# Introduction

- Considérons les équations de Maxwell (M3) et (M4) en l'absence de sources  $\vec{J} = 0$ , on alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{rot} \vec{E} \sim \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot} \vec{B} \sim \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

- Cela signifie qu'un  $\vec{E}$  (ou  $\vec{B}$ ) variable dans le temps et engendre un champ  $\vec{B}$  (ou  $\vec{E}$ ) tournant.
- Supposons dans un premier temps un champ électrique variable  $\vec{E}_1$ , celui-ci va engendrer un champ d'induction magnétique tournant  $\vec{B}_1$ . Mais comme ce champ  $\vec{B}_1$  s'établit progressivement, il est variable dans le temps. Il va donc à son tour produire un champ électrique  $\vec{E}_2$ , qui en s'établissant dans le temps va produire un champ d'induction magnétique  $\vec{B}_2$  et ainsi de suite.

# Introduction (suite)

- De cette manière, le couple de champs ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) s'auto-entretient dans le temps avec une progression dans le temps avec une progression dans l'espace. Voilà comment expliquer simplement le phénomène de propagation d'une onde électromagnétique,

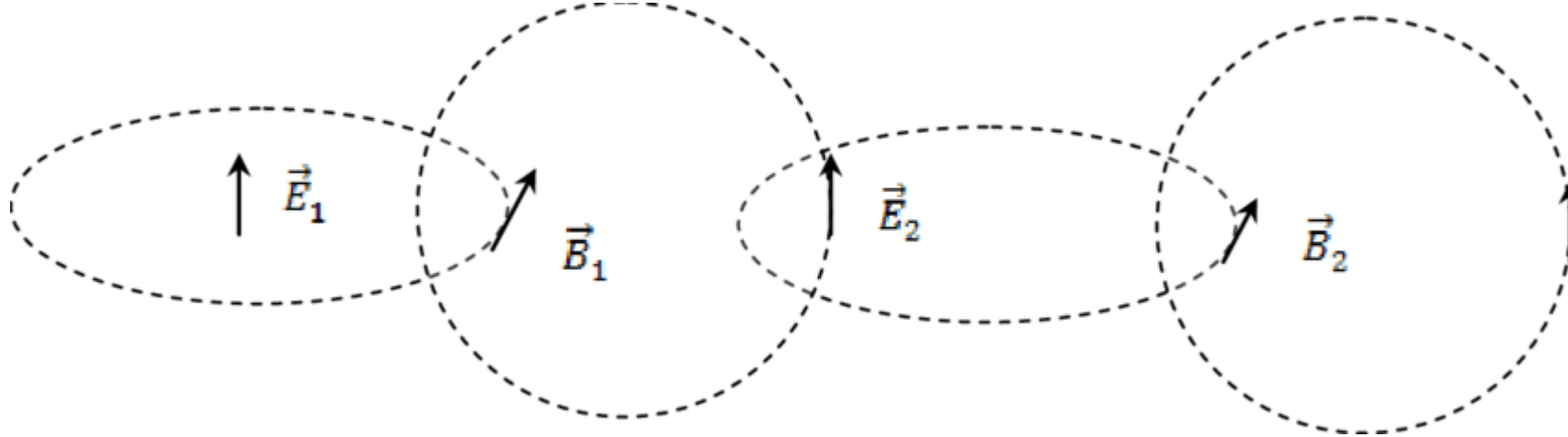


Illustration du phénomène de propagation du champ électromagnétique ( E, B)

# 1. Equations de propagation des champs

- Prenons le rotationnel des équations de Maxwell (M3) et (M4)

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \\ \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \end{cases}$$

- Puis remplaçons  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$  ou  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$  par les résultats des équations (M4) et (M3) dans les deux équations précédentes; et utilisons la propriété  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \Delta$ , où  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  est l'opérateur laplacien:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \end{cases}$$

- En substituant maintenant les termes  $\text{div} \vec{E}$  et  $\text{div} \vec{B}$  données par les équations (M1) et (M2), on obtient:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(0) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \end{cases}$$

# 1. Equations de propagation des champs (suite)

- Après réarrangement des différents termes dans chacune des équations, on trouve les équations de propagation des champs à partir des sources:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{J}) \\ \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J} \end{cases}$$

- Si on se place loin des sources (densités de charges  $\rho$  et de courant  $\vec{J}$ ) qui donnent naissance aux champs électrique et d'induction magnétique, alors on obtient les équations de propagation des champs loin des sources:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

- On remarque que ces deux équations sont du type de l'équation d'Alembert que l'on retrouve pour tout phénomène de propagation en physique (onde sur une corde vibrante, ondes sonores, ...):

$$\Delta S - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

# 1. Equations de propagation des champs (suite)

Où  $S$  est l'amplitude du signal physique considéré ( élongation d'une corde, compression de l'air, ...), et  $v$  la vitesse de propagation du signal.

- Dans ces conditions on identifie immédiatement la vitesse de propagation des champs électrique et d'induction magnétique dans le vide comme étant:

$$v_{em} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 299863380 \cong 3 \times 10^8 m s^{-1}$$

- En d'autres termes les champs électrique et d'induction magnétique dans le vide se propage à la Vitesse de la lumière.
- On admettra donc la relation expérimentale suivante, qui n'a aucun fondement théorique:  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$

## 2. Solutions de l'équations de d'Alembert

- Pour connaître la solution des équations de propagation des champs, il faut résoudre l'équation de d'Alembert. Concentrons-nous sur le problème particulier de propagation dans une seule direction de l'espace, disons z. alors l'équation de propagation de d'Alembert s'écrit:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } S = S(z, t)$$

- Commençons par effectuer les changements de variables suivants:

$$p = t - \frac{z}{v} \text{ et } q = t + \frac{z}{v}$$

- Les dérivés partielles première peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{1}{v} \frac{\partial S}{\partial p} + \frac{1}{v} \frac{\partial S}{\partial q} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \equiv -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right) \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial p} + \frac{\partial S}{\partial q} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right) \end{aligned}$$



## 2. Solutions de l'équations de d'Alembert (suite)

- Les doubles dérivations apparaissant dans l'équation de d'Alembert peuvent se mettre sous une autre forme, puisque:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) S = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial S}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

- On a donc  $\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) S = 0$
- Après avoir remplacé les variables  $z$  et  $t$  initiales par les variables  $p$  et  $q$ , l'équation de propagation peut se réécrire de la manière suivante:

$$\left[-\frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right) - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)\right] \left[-\frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right) + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)\right] S = 0$$

$$\left[-\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q}\right] \left[-\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial q}\right] S = 0$$

$$\left[-\frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial p}\right] \left[-\frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial q}\right] S = 0$$

- D'où  $\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial q} = 0$

## 2. Solutions de l'équations de d'Alembert (suite)

- La solution générale d'une telle équation s'étudie par intégration successives:

- Première intégration

- Par rapport à  $p$   $\frac{\partial S}{\partial q} = G(p),$

- Par rapport à  $q$   $\frac{\partial S}{\partial p} = F(q)$

- Deuxième integration

- $S(p, q) = f(p) + g(q)$  avec  $\frac{\partial f}{\partial p} = F(p)$  et  $\frac{\partial g}{\partial q} = G(q)$

- La solution de l'équation de d'Alembert à une dimension est donc de la forme:

- $S(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right),$

Où  $f$  représente une solution en onde progressive dans le sens des  $z$  positifs et  $g$  une solution en onde progressive dans le sens des  $z$  négatifs. La solution Générale est donc la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens opposé.

### 3. Propriétés de l'onde électromagnétique plane

- Considérons maintenant les champs produits par une source ponctuelle en  $z = 0$ , et étudions la propagation des champs électrique et d'induction magnétique dans le vide et loin de la source.
- S'il n'y a aucun milieu matériel, alors les ondes associées aux champs (ondes électromagnétiques) ne peuvent pas subir de réflexion. Dans ce cas, seule la solution en onde progressive  $f(t - \frac{z}{v})$ , qui représente une onde incidente, a une réalité physique; l'onde réfléchie  $g(t + \frac{z}{v})$  étant inexistante.
- Etudions alors la structure de l'onde associée aux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , sachant que leur forme Générale est :  $S_{em}(z, t) = f(t - \frac{z}{c})$ ,

où  $c$  est la Vitesse de propagation de ses ondes dans le vide, dont les champs ont pour amplitude  $S_{em}(z, t)$  à l'instant  $t$  et la position  $z$ .

- Remarquons que la variable  $t' = t - \frac{z}{c}$  possède la dimension d'un temps. On peut réécrire cette relation en faisant apparaître une différence de temps  $t - t' = \frac{z}{c} \geq 0$ . L'instant  $t'$  est antérieur à l'instant  $t$  où sont considérés les champs à la position  $z$ . La différence de temps  $t - t'$  représente la durée nécessaire aux champs pour se propager sur une distance  $z$ , ce qui n'est autre que la distance séparant la source du point où sont considérés les champs à l'instant  $t$ . Il apparaît ainsi que  $t'$  est l'instant où les champs ont été produits par la source.
- Le fait que l'amplitude des champs  $S_{em}(z, t)$ , c'est-à-dire chacune des composantes de  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  et  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , ne dépende pas de  $x$  et  $y$ , nous donne:
- $\frac{\partial S_{em}}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial S_{em}}{\partial y} = 0$

### 3. Propriétés de l'onde électromagnétique plane (suite)

- Etudions alors chacune des équations de Maxwell successivement pour voir ce qu'elles peuvent nous apporter sur la structure des champs électrique et d'induction magnétique loin de leur source de production:

- (M1)  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$  soit  $E_z = C_{E/z}(t)$ , où  $C_{E/z}(t)$  est une constante d'intégration qui est fonction du temps;

- (M2)  $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$  soit  $B_z = C_{B/z}(t)$ ,

- (M3)  $\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} & (M3-1) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & (M3-2) \\ 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \text{ soit } B_z = C_{B/t}(z) \end{cases}$

Où  $C_{B/t}(z)$  est une constante d'intégration qui est fonction de  $z$ .

- (M4)  $\begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} & (M4-1) \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} & (M4-2) \\ 0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \text{ d'où } E_z = C_{E/t}(z) \end{cases}$

### 3. Propriétés de l'onde électromagnétique plane (suite)

- Si on tient compte du résultat obtenu avec chacune des équations de Maxwell, on doit avoir:

$$E_z = C_{E/t}(z) = C_{E/z}(t)$$

$$B_z = C_{B/t}(z) = C_{B/z}(t)$$

- Ces résultats indiquent que ces constantes d'intégration ne dépendent ni de  $t$ , ni de  $z$ . De plus, si aucune densité de charge et de courant ne sont présentes pas dans un environnement proche, et dans l'hypothèse où le point d'observation est loin des sources initiales, alors il ne peut exister de champs permanents. Ainsi les constantes d'intégration doivent être nulles, ce qui entraîne:

$$E_z = 0 \text{ et } B_z = 0$$

- Finalement, les champs électrique et d'induction magnétique sont perpendiculaire à leur direction de propagation ( $Oz$ ), on dit que l'onde associée aux champs est transversale.

- Utilisons maintenant les équations (M3-1) et M(3-2), les mêmes résultats seraient obtenus respectivement avec (M4-1) et (M4-2):

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

- Une analyse de la dérivée partielle de  $z$  par rapport à  $t$  est nécessaire. Pour cela, considérons à un instant  $t$  donné deux points sur l'axe de propagation distants respectivement de  $z_1$  et  $z_2$  par rapport à la source d'ondes. Comme l'onde se déplace à la vitesse de la lumière  $c$ , les instants d'émission des fronts d'ondes  $t_1$  et  $t_2$  sont tels que:  $z_1 = c(t - t_1)$  et  $z_2 = c(t - t_2)$ ;

$$\text{D'où } dz = z_2 - z_1 = c(t_1 - t_2) = -cdt \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dt} = -c$$

### 3. Propriétés de l'onde électromagnétique plane (suite)

- Il en résulte alors la propriété suivante entre les composantes des champs:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial(-c B_x)}{\partial z} \Rightarrow E_y = -c B_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial(c B_y)}{\partial z} \Rightarrow E_x = c B_y \end{cases}$$

On résume ainsi les composantes des champs électrique et d'induction magnétique par:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  soit  $\vec{E}$  orthogonale à  $\vec{B}$ .

On peut également relier le module de chacun des champs:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \\ B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \frac{1}{c} \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \end{aligned} \Rightarrow E = c B$$

L'onde électromagnétique associée au couple de champs  $(\vec{E}, \vec{B})$  est généralement produite à partir d'une source de courant oscillant à la pulsation  $\omega$ , c'est le principe de fonctionnement d'une antenne émettrice. On définit alors le vecteur d'onde  $\vec{k}$  comme étant le vecteur caractéristique de la direction et du sens de propagation de l'onde, ce vecteur (dont le module est appelé aussi nombre d'onde) est relié à la pulsation et à la vitesse de propagation de l'onde  $v$ , encore appelé vitesse de phase  $v_\phi$  car elle correspond à la propagation de la phase du champs:

### 3. Propriétés de l'onde électromagnétique plane (suite)

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}$  pour une onde électromagnétique libre dans le vide.

Dans le cas de notre étude de la propagation selon l'axe (Oz), on a sous forme vectorielle:

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kE_y \\ kE_x \\ 0 \end{pmatrix} = kc\vec{B}$$

Ce qui permet de résumer les propriétés de l'onde électromagnétique plane par la formule:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Notons que d'une manière générale, une onde plane se caractérise par les propriétés suivantes:

- i. La direction de propagation est unique dans un système de coordonnées donné, z dans notre cas;
- ii. Aucune des composantes des champs (ici  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ ) ne dépend des coordonnées transversales à la direction de propagation, soit x et y dans notre cas;
- iii. Dans le cas d'une onde électromagnétique plane, les vecteurs  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre orthogonal direct.

En associant tous les points précédant le même facteur de phase  $(\omega t - kz)$  à un instant donné, on définit la surface d'onde. Les ondes planes ont alors la propriété de posséder des surfaces d'onde perpendiculaires à leur direction de propagation.



### 3. Propriétés de l'onde électromagnétique plane (suite)

Une solution en onde sinusoïdale des équations de propagation des champs électrique et d'induction magnétique loin des sources, c'est-à-dire ayant les propriétés de l'onde plane, peut s'écrire sous forme exponentielle:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \\ \vec{B} = B_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y \end{cases}$$

Avec les amplitudes des champs constantes et telles que  $E_0 = cB_0$ .

On vérifie aisément que ces champs représentent une solution de l'équation d'Alembert, par exemple pour le champ électrique:

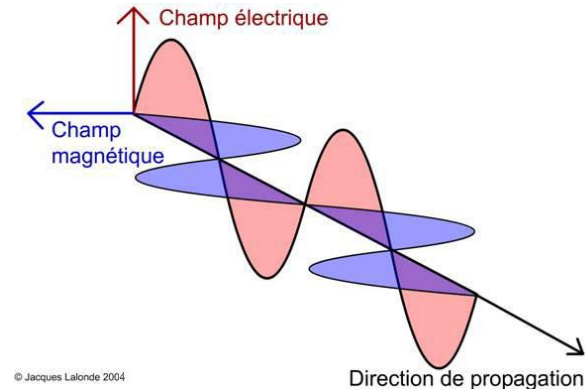
$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = E_0 (-jk)^2 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x - \frac{1}{c^2} E_0 (j\omega)^2 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x = -\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \equiv 0$$

En utilisant la définition du vecteur d'onde.

Si la pulsation de l'onde est unique, on parle alors d'onde plane progressive monochromatique, généralement noté OPPM.

On schématise la propagation d'une onde électromagnétique à l'aide de la variation du couple de champs  $(\vec{E}, \vec{B})$ , comme indiqué dans la figure suivante:

Représentation d'une onde électromagnétique via son couple de champs électrique  $E$  orienté selon l'axe (Ox) et l'induction magnétique  $B$  orienté selon l'axe (Oy), avec  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  formant un trièdre orthogonal direct.



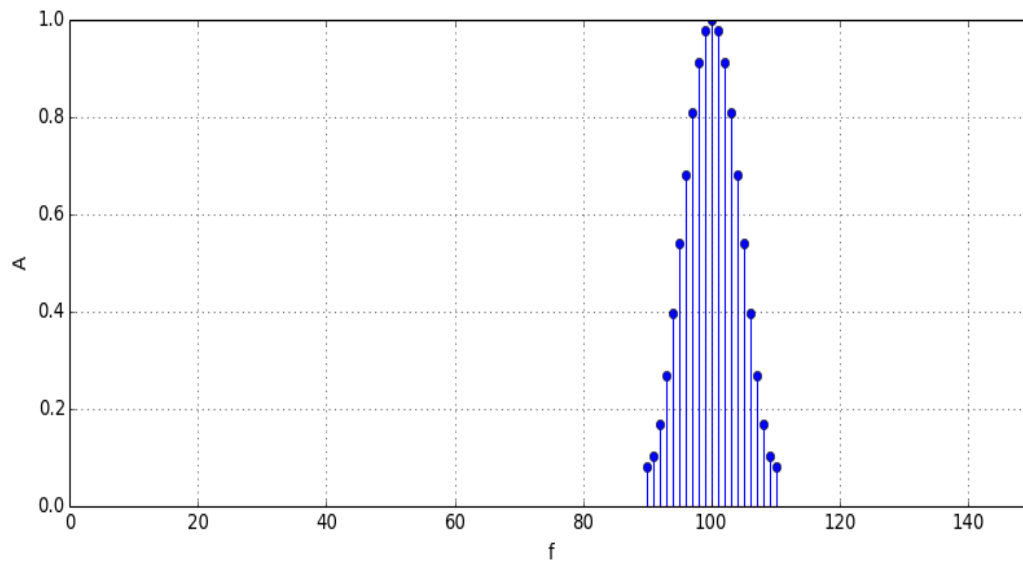
### 3. Propriétés de l'onde électromagnétique plane (suite)

- Cette représentation permet de donner une image du phénomène de propagation des ondes électromagnétique, bien que celui-ci ne soit pas directement visible, comme peut l'être la propagation d'une onde sur une corde ou les vagues à la surface de l'eau.
- L'orientation des vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  définit l'état de polarisation de l'onde. Dans le cas traité, il s'agit d'une onde polarisée linéairement, car les champs vectoriels  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont toujours orientés selon la même direction au cours de la propagation, le champ électrique  $\vec{E}$  selon (Ox) et le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  selon (Oy).
- Il existe des états de polarisation plus compliqués, comme les polarisations circulaires et elliptique. Dans le cas de la polarisation circulaire, les champs tournent dans leur plan de polarisation, par exemple dans le plan (Ox, Oy), en gardant toujours la même amplitude; ils décrivent donc un cercle au cours de leur propagation, ou plus exactement un mouvement hélicoïdal.
- Dans le cas de la polarisation elliptique, le principe est le même, si ce n'est que l'amplitude des champs varie en tournant, et qu'ils décrivent une ellipse.
- Ces états de polarisation s'obtiennent en pratique par superposition de plusieurs ondes, par exemple à l'aide de deux ondes perpendiculaires entre elles.

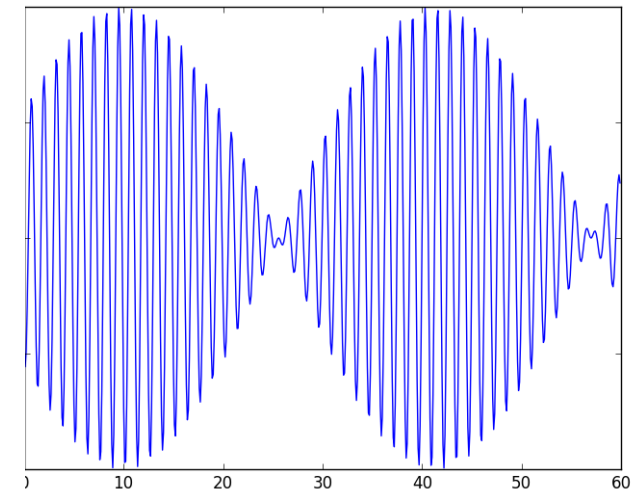
## 4. Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique

- Dans la section 3.5 (chapitre électromagnétisme de 1ere année), il est vu que la puissance électromagnétique rayonnée par un système de charge dynamiques est donnée par le flux du vecteur de Poynting  $\vec{P} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0$ . Mais comme ce dernier correspond à la direction de propagation des ondes électromagnétiques planes, on peut considérer les courbes tangentes en chaque point au vecteur de Poynting  $\vec{P}$  comme les trajectoires de l'énergie. On parle généralement de rayons électromagnétiques, comme les rayons lumineux.
- Toute onde se propageant dans un milieu quelconque, à fortiori dans le vide, est nécessairement limité dans l'espace et dans le temps. De plus, le concept d'onde électromagnétique plane monochromatique est un modèle idéal qui n'est jamais obtenu.
- En pratique, on parle alors de paquet d'ondes, ce qui permet de représenter toute onde réelle comme une superposition d'ondes planes monochromatiques (base de l'analyse des signaux à l'aide de la méthode de Fourier). Ce paquet d'ondes de fréquence moyenne  $f_0$  se caractérise par une bande spectrale, différence de fréquence  $\Delta f$  entre la fréquence la plus grande et la fréquence la plus petite des ondes monochromatiques constituant le paquet, voir figure (4.3 (a)), qui engendre lors de la propagation de l'onde des modulations de l'amplitude dans le temps, via  $\Delta w = 2\pi\Delta f$ , et dans l'espace, via  $\Delta k = \frac{\Delta w}{v}$ .

#### 4. Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique (suite)



(a) Paquet d'ondes de fréquence  $f_0 = 100$  Hz et de largeur  $\Delta f = 20$  Hz



(b) Battement d'ondes produit par un paquet composé de deux ondes planes

Fig 4.3

## 4. Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique

- Afin de rendre la discussion plus concrète, considérons deux ondes électromagnétiques planes monochromatiques (en phase initialement) de pulsation  $w_1$  et  $w_2$  avec  $\Delta w = w_2 - w_1 > 0$  et  $w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2} \gg \Delta w$ , se propageant dans la direction (Oz) positive, possédant une polarisation rectiligne identique, et avec la même amplitude, soit  $\vec{E}_{10} = \vec{E}_{20} = \vec{E}_0$  pour le champ électrique. L'onde totale du paquet sera alors la somme des deux ondes:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{j(w_1 t - k_1 z)} + \vec{E}_0 e^{j(w_2 t - k_2 z)} \\ &= \vec{E}_0 e^{j((w_0 - \frac{\Delta w}{2})t - (k_0 - \frac{\Delta k}{2})z)} + \vec{E}_0 e^{j((w_0 + \frac{\Delta w}{2})t - (k_0 + \frac{\Delta k}{2})z)} \\ &= \vec{E}_0 \left( e^{-j(\frac{\Delta w}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z)} + e^{j(\frac{\Delta w}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z)} \right) e^{j(w_0 t - k_0 z)} \\ &= 2\vec{E}_0 \cos\left(\frac{\Delta w}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) e^{j(w_0 t - k_0 z)}\end{aligned}$$

## 4. Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique (suite)

- L'onde résultante est donc, progressive de vecteur d'onde  $\vec{k}_0$  et de pulsation  $\omega_0$ , polarisé rectilignement comme les deux ondes primaires, mais avec l'amplitude qui varie lentement dans l'espace et le temps. On parle généralement de battement d'ondes dont l'amplitude subit des modulations, comme celles représentées sur la figure 4.3, (b) .
- La modulation d'amplitude se déplace telle que:  $\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z = \text{cte}$ 
$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Cette vitesse est appelée vitesse de groupe et correspond à la vitesse de propagation de l'amplitude des champs constituant l'onde, donc de l'énergie électromagnétique du paquet d'ondes:  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ .

Pour satisfaire à l'un des postulats de la théorie de la relativité d'Einstein, la vitesse de groupe doit nécessairement être telle que:  $v_g < c$ ; ce qui n'empêche pas la vitesse de phase  $v$  (ou  $v_\phi$ ) d'être plus grande que la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ .

# 5. Système d'ondes stationnaires

- Si les sources émettent en permanence, alors les ondes incidentes sont produites sans arrêt. En prenant la partie réelle de l'écriture utilisé précédemment, on les décrira avec des fonctions cosinus:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \\ \vec{B}_i = B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \end{cases}$$

- Si en plus ses ondes se trouvent réfléchies au cours de leur propagation, il coexistera en même temps des ondes progressives incidentes et des ondes progressives réfléchies dont la forme sera (en supposant une réflexion totale):

$$\begin{cases} \vec{E}_r = E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x \\ \vec{B}_r = B_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y \end{cases}$$

Dans ce cas, le champ électromagnétique total sera la somme de champs incidents et réfléchis, ainsi le champ électrique prendra la forme:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x = 2 E_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

On remarque alors que contrairement aux ondes incidente et réfléchie qui sont caractérisées par un facteur de phase  $(\omega t \pm kz)$  propre au phénomène de propagation; l'onde résultante se caractérise par un facteur de phase  $(\omega t)$  complètement décorrélié du terme  $(kz)$ , celui-ci faisant maintenant partie de l'amplitude du champ  $2 E_0 \cos(kz)$ .

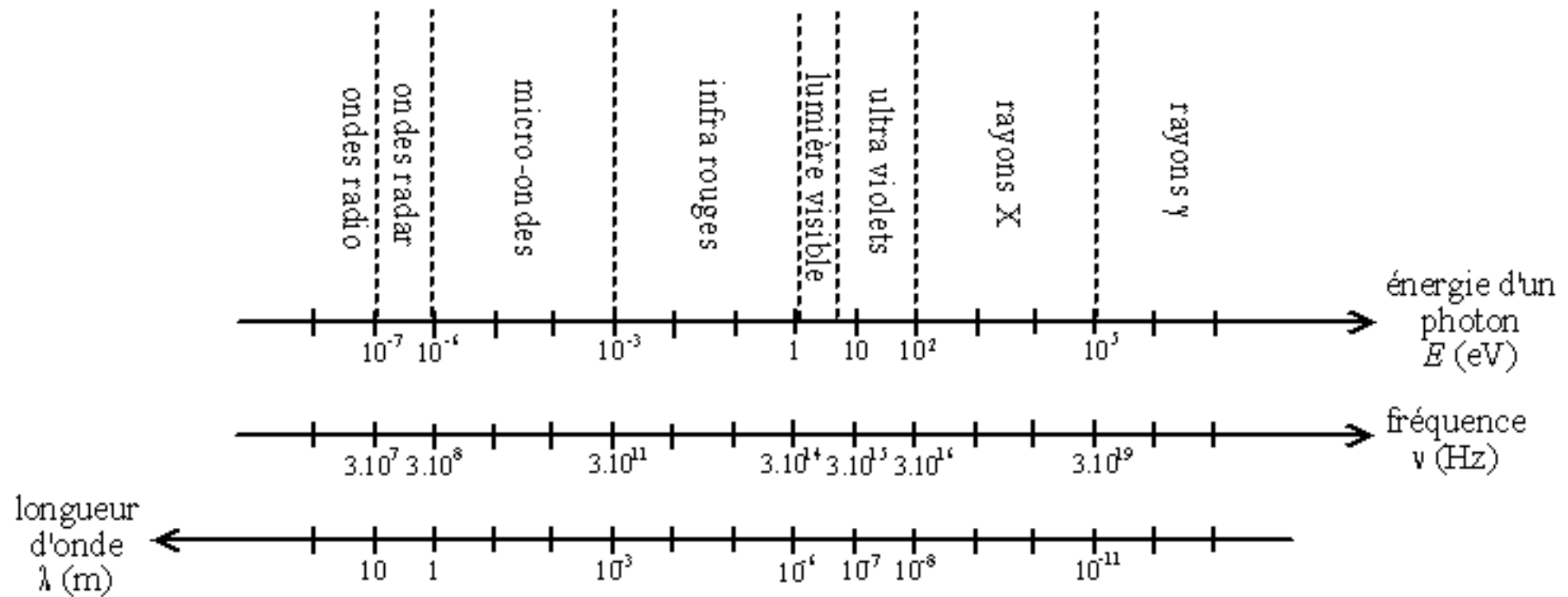
Il n'y a plus de propagation et l'onde formée est dite stationnaire. Ce type d'onde a la propriété de posséder des points de l'espace où l'amplitude est toujours nulle : on les appelle les nœuds lorsque  $\cos(kz) = 0$ , et d'autres où l'amplitude est toujours maximale: les ventres lorsque  $\cos(kz) = \pm 1$ .

# 6. Le spectre électromagnétique

- On se rend compte, après une telle analyse, qu'il existe une très grande variété d'ondes électromagnétiques. En effet, pour chaque valeur de la pulsation, c'est-à-dire de la fréquence  $f$  de la source d'émission,  $\omega = 2\pi f$ , il existe une onde électromagnétique qui aura les mêmes propriétés physiques que les autres, mais avec sa fréquence propre et donc sa longueur d'onde associée:  $\lambda = \frac{c}{f}$ .
- Les ondes électromagnétiques ont un spectre s'étalant des très grandes longueurs d'onde (petites fréquences) jusqu'au très petites longueurs d'onde (grandes fréquences), en passant entre-autre par le domaine de lumière visible comme l'indique la figure 4.5.
- Notons que la lumière visible dont le spectre se situe entre 400nm (violet) et 800nm (rouge) est naturellement non polarisée.
- Cela signifie que le champ électromagnétique associé ne possède aucune propriété bien définie concernant l'orientation des champs électriques et induction magnétique. Dans ce cas on parle également de lumière incohérente.



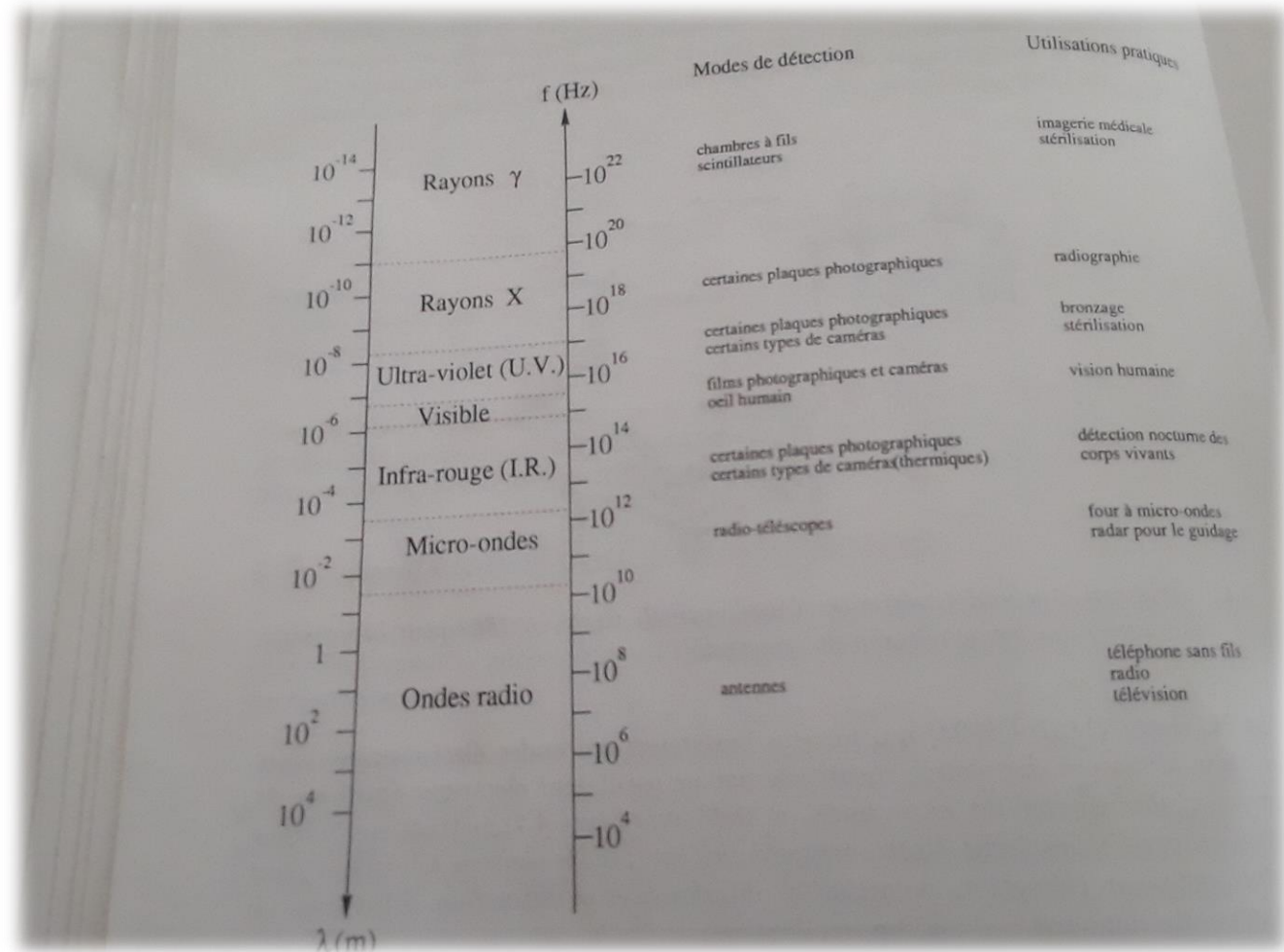
## 6. Le spectre électromagnétique



Spectre électromagnétique en terme de longueur d'onde et de la fréquence

# 6. Le spectre électromagnétique

Spectre électromagnétique en termes de longueur d'onde  $\lambda$  et de fréquence  $f$  avec les différents domaines, leurs modes de détection et leurs applications associées.



## 7. Production et réception des ondes électromagnétiques

- La production d'ondes électromagnétiques, de type radio où décimétrique, s'effectue à l'aide d'une antenne émettrice.
- En apparence, une antenne rectiligne semble être une simple tige métallique. Du point de vue électrique, cette tige est excitée par un circuit inducteur qui engendre alors un courant oscillant (généralement de type sinusoïdal).
- Comme la tige est ouverte à ces deux extrémités, le courant oscillant engendre des accumulations de charges aux extrémités de l'antenne, qui par conservation sont de valeurs opposées, et qui varient dans le temps à la fréquence d'oscillation du courant.
- On peut donc modéliser une antenne à l'aide d'un dipôle oscillant, un dipôle étant l'association de deux charges opposées placées à une certaine distance (celle que définit la longueur d'onde).
- Nous allons voir qu'un tel système permet le rayonnement d'ondes électromagnétiques.
- De telles ondes arrivant sur une antenne réceptrice vont engendrer dans celle-ci des courants de conduction, via la composante électrique de l'onde.
- Ce sont ces courants qui permettent de capter le signal électromagnétique, puis à l'aide d'un circuit électronique adapté de l'amplifier, voir même de le convertir en ondes sonores par le biais d'un haut parleur électrodynamique (membrane vibrante excitée électromagnétiquement).
- De plus nous allons voir que les courants de conduction induits dans l'antenne réceptrice sont superficiels, on parle alors d'épaisseur de peau.

# 7.1 Rayonnement d'une antenne

- On considère une antenne que l'on modélise par un dipôle oscillant possédant des charges  $+q(t)$  en A et  $-q(t)$  en B distantes de  $a$ , voir la figure (6a). Un tel dipôle se caractérise par son moment dipolaire, lequel est un vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive et définie par:
$$\vec{p}(t) = q(t)a \vec{e}_z$$
- Pour établir la forme d'onde électromagnétique rayonnée par une telle antenne, par exemple au point M de la figure où  $r \gg a$ , il faut déterminer les champs électrique  $\vec{E}$  et d'induction magnétique  $\vec{B}$  en ce point.
- Pour cela, il est plus aisé de commencer par déterminer les potentiel scalaire  $V$  et vectoriel  $\vec{A}$ , puis d'en déduire les champs à l'aide des relations associant champs et potentiels.

## 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

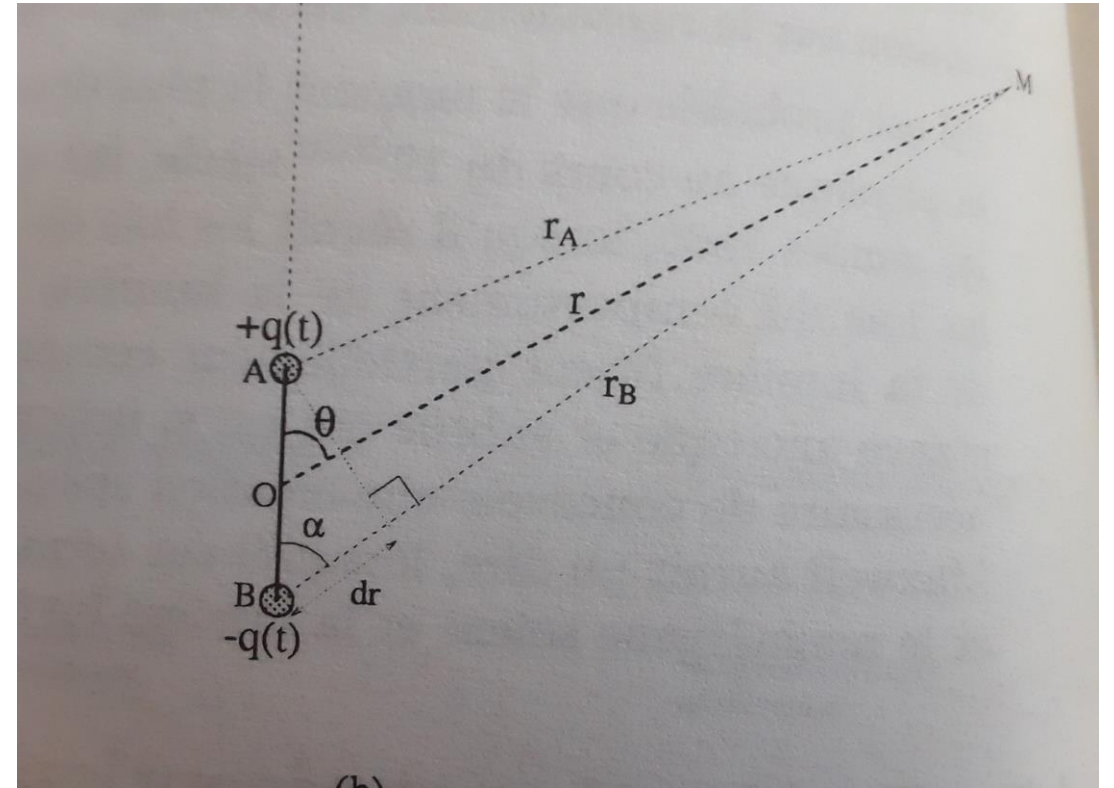
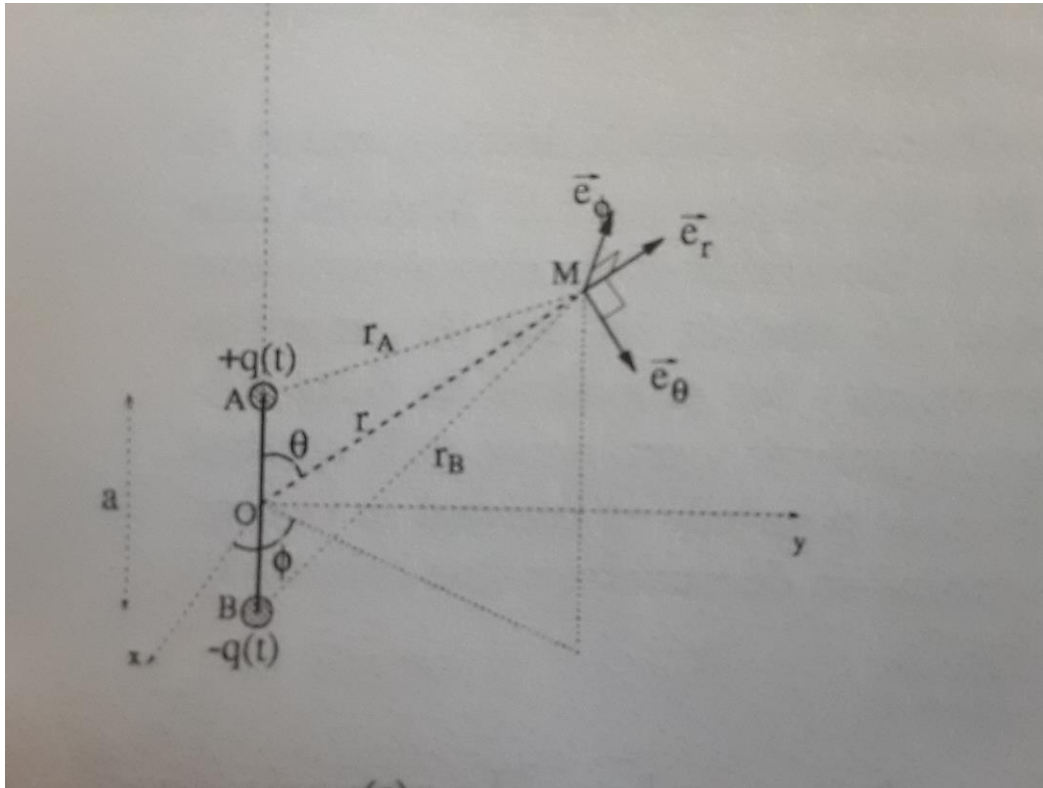


Fig. 6 Modélisation d'une antenne à l'aide d'un dipôle électrique oscillant: (a) dans l'espace, (b) dans le plan  $(AB, OM)$

## 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

a- Commençons par déterminer le potentiel scalaire au point M. Celui-ci est la somme du potentiel créé par la charge en A et le potentiel créé par la charge en B.

A ce stade, il faut tenir compte du fait qu'un signal électromagnétique (ici le potentiel) engendré par une charge à une certaine position (A ou B) agit avec retard en un point M de l'espace du fait de la propagation à vitesse finie du signal électromagnétique ( $c = 10^8$  m/s). Ainsi, pour observer l'effet des charges au même instant  $t$  au point M, il faut considérer leur valeur à un instant antérieur  $q(t - \frac{r_A}{c})$ , où  $r_A$  et  $r_B$  sont respectivement les distances AM et BM:

$$V(\vec{r}, t) = V_A(\vec{r}_A, t) + V_B(\vec{r}_B, t)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} V_A(\vec{r}_A, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t - \frac{r_A}{c})}{r_A} \\ V_B(\vec{r}_B, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q(t - \frac{r_B}{c})}{r_B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q(t - \frac{r_A}{c})}{r_A} - \frac{q(t - \frac{r_B}{c})}{r_B} \right)$$

Posons la fonction suivante:

$$f(r) = \frac{q(t - \frac{r}{c})}{r}$$

# 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

et utilisons le fait  $r_B \approx r_A + dr$ , voir figure 6a, on peut écrire alors:

$$\frac{\frac{q(t-\frac{r_A}{c})}{r_A} - \frac{q(t-\frac{r_B}{c})}{r_B}}{r_B - r_A} = \frac{f(r) - f(r+dr)}{dr} \equiv -\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{q(t-\frac{r_A}{c})}{r_A} - \frac{q(t-\frac{r_B}{c})}{r_B} = -(r_B - r_A) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{q(t-\frac{r}{c})}{r} \right]$$

$$\text{D'où } V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -(r_B - r_A) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{q(t-\frac{r}{c})}{r} \right] \right)$$

Avec  $r \gg a$ , on a  $\alpha \approx \theta$ , mais comme  $\cos(\alpha) = \frac{dr}{a}$  alors  $dr \approx r_B - r_A \approx a \cos(\theta)$ , ce qui donne pour le potentiel :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -(a \cos(\theta)) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{q(t-\frac{r}{c})}{r} \right] \right) = \frac{-(a \cos(\theta))}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{r^2} q\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial q(t-\frac{r}{c})}{\partial r} \right]$$

En posant  $u = t - \frac{r}{c}$ , la dérivée partielle donne:

$$\frac{\partial q(t-\frac{r}{c})}{\partial r} = \frac{\partial q(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{dq(u)}{du} \left( -\frac{1}{c} \right) = -\frac{1}{c} q';$$

Et le potentiel scalaire s'écrit finalement :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2} \left[ p + \frac{r}{c} p' \right] \text{ avec } p' = \frac{dp}{du}$$

# 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

b. Pour le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , on a

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}(t)}{r}$$

Où l'élément de courant est donné par  $q \vec{v}(t) = i(t) \overrightarrow{AB} = i(t) a \vec{e}_z$

On considère ainsi le courant antérieur  $i(t - \frac{r}{c})$  parcourant l'antenne, qui par définition est:

$$i\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\partial q(t - \frac{r}{c})}{\partial t} = \frac{\partial q(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dq(u)}{du};$$

Ce qui donne pour le potentiel vecteur :  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} p' \vec{e}_z$

On peut alors s'assurer que la jauge de Lorentz, celle utilisée pour les phénomènes électrodynamiques, est bien vérifiée:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

c. Dans le cas statique, phénomènes ne dépendant pas du temps  $q(t) = q \Rightarrow p' = 0$ , on retrouve les formules du dipôle constant:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r} \\ \vec{A}(\vec{r}) \equiv 0 \end{array} \right.$$



# 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

d. Le champs électrique rayonnée par un tel dipôle se déduit des potentiels:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Etant donné la symétrie du problème, plutôt de type sphérique, on exprime l'opérateur gradient en coordonnées sphériques:

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

Avec pour chacune des composantes:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2} \left( \frac{-2}{r} \left[ p + \frac{r}{c} p' \right] + \left[ -\frac{1}{c} p' + \frac{1}{c} p' - \frac{r}{c^2} p'' \right] \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2} \left( \frac{2}{r} p + \frac{2}{c} p' + \frac{r}{c^2} p'' \right);$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \left( p + \frac{r}{c} p' \right);$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

## 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} p'' \vec{e}_z;$$

$$\text{Avec } \vec{e}_z = \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta \Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} p'' (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta)$$

En utilisant la relation  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ , on obtient pour la forme générale du champs électrique rayonné par une antenne:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\cos(\theta)}{r^2} \left( \frac{1}{r} p + \frac{1}{c} p' \right) \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \left( \frac{p}{r} + \frac{1}{c} p' + \frac{r p''}{c^2} \right) \\ E_\phi = 0 \end{pmatrix}$$

## 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

e. Le champ d'induction magnétique est donnée par la formule:

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

Avec en coordonnées sphériques:

$$\overrightarrow{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

Procédons une autre fois par étapes, sachant que  $\vec{A} = (A_r, A_\theta, 0)$ :

$$(\overrightarrow{rot} \vec{A})_r = -\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} = 0$$

$$(\overrightarrow{rot} \vec{A})_\theta = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} = 0;$$

$$(\overrightarrow{rot} \vec{A})_\phi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-\sin(\theta)}{r} \left( -\frac{1}{c} p'' \right) - \frac{\mu_0}{4\pi r^2} p' (-\sin(\theta)) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{r} \left( \frac{p'}{r} + \frac{p''}{c} \right)$$

# 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

En résumé, et en effectuant le changement  $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ , seule composante du champ d'induction magnétique rayonné par une antenne est non nulle:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \left( \frac{p'}{c} + \frac{rp''}{c^2} \right) \end{pmatrix};$$

f. Considérons maintenant le cas d'une antenne parcourue par un courant sinusoïdal  $i(t) = I_0 e^{j\omega t}$ , c'est-à-dire pour un dipôle de charge:

$$q(t) = \int i(t) dt = -j \frac{I_0}{\omega} e^{j\omega t}$$

Le moment dipolaire et ses dérivées prendront alors pour valeur (avec  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde associé):

$$\begin{cases} p\left(t - \frac{r}{c}\right) = -j2a \frac{I_0}{\omega} e^{j(\omega t - kr)} = -j2a \frac{I_0 \lambda}{2\pi c} e^{j(\omega t - kr)} \\ p'\left(t - \frac{r}{c}\right) = -j2a \frac{I_0}{\omega} j\omega e^{j(\omega t - kr)} = 2a I_0 e^{j(\omega t - kr)} \\ p''\left(t - \frac{r}{c}\right) = 2a I_0 j\omega e^{j(\omega t - kr)} = j2a \frac{I_0 c}{2\pi \lambda} e^{j(\omega t - kr)} \end{cases}$$

Où  $k = \frac{\omega}{c}$  est le nombre d'onde, c'est-à-dire le module du vecteur d'onde indiquant la direction (et le sens) de propagation des champs. Dans le cas présent on étudie le signal électromagnétique au point M, lequel est issu de O, la direction de propagation est alors (OM), soit  $\vec{k} = (k, 0, 0)$  dans le système de coordonnées sphériques.

# 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

Les champs se propageant dans l'espace auront finalement pour solution:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos(\theta)}{r^2} \frac{2aI_0}{c} \left( -j \frac{\lambda}{2\pi r} + 1 \right) e^{j(\omega t - kr)} \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{2aI_0}{c} \left( -j \frac{\lambda}{2\pi r} + 1 + j \frac{2\pi r}{\lambda} \right) e^{j(\omega t - kr)} \\ E_\phi = 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{2aI_0}{c} \left( 1 + \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{2aI_0}{c} \end{pmatrix}$$

On remarque que la structure de l'onde électromagnétique associée à ces champs n'est pas plane. En outre, le champ électrique n'est pas perpendiculaire à la direction de propagation, il possède une composante  $E_r$  non nulle. En effet l'antenne rayonne des ondes de type sphérique.

## 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

g. A grande distance de l'antenne,  $r \gg a$  et  $r \gg \lambda$ , on remarque que les termes composants des champs ont la hiérarchie suivante:

$$\frac{\lambda}{2\pi r} \ll 1 \ll \frac{2\pi r}{\lambda}.$$

Autrement dit, les champs électrique et d'induction magnétique deviennent:

$$\begin{cases} \vec{E} = j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{4\pi a I_0}{c\lambda} e^{j(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = j \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{4\pi a I_0}{c\lambda} e^{j(\omega t - kr)} \vec{e}_\phi \end{cases}$$

On notera que les vecteurs  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre orthogonal direct. De plus en module les champs ont pour valeur:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{4\pi a I_0}{c\lambda} \\ B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{4\pi a I_0}{c\lambda} \end{cases}$$

Soit  $E = cB$

On conclut donc, qu'à grande distance, l'onde électromagnétique rayonnée par un dipôle oscillant possède les propriétés de l'onde plane.

De plus la forme en  $\sin(\theta)$  des champs montrent que l'émission la plus intense (amplitude maximale) s'effectue dans le plan équatorial de l'antenne  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\theta) = 1$ ;

## 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

Alors qu'au dessus ou au dessous de l'antenne,  $\theta = 0$  ou  $\pi \Rightarrow \sin(\theta) = 0$ , l'amplitude des champs est nulle. Ce constat pour l'antenne émettrice d'ondes électromagnétiques s'applique aussi pour l'antenne réceptrice dont l'orientation devra être judicieusement choisie.

h. Si on revient à la notation utilisant le moment dipolaire, à grande distance, la composante  $p'' = (j\omega)^2 p$  est dominante. Les champs s'écrivent alors:

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2 p \sin(\theta)}{c^2 r} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\omega^2 p \sin(\theta)}{c^2 r} \vec{e}_\phi \end{cases}$$

La puissance électromagnétique rayonnée à travers une surface sphérique, centrée sur l'antenne, est donnée par le vecteur de Poynting:

## 7.1 Rayonnement d'une antenne (suite)

$$\begin{aligned} P &= \oint_{(S)} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S} = \oint_{(S)} \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{w^2 p \sin(\theta)}{c^2 r} \right)^2 \frac{\vec{e}_r}{c} \cdot dS \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{w^2 p}{c^2 r} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin^3(\theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{w^2 p}{c^2 r} \right)^2 r^2 [\phi]_0^{2\pi} \left[ -\cos(\theta) + \frac{\cos^3(\theta)}{3} \right]_0^\pi = \frac{2}{3} \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{w^4}{c^3} \end{aligned}$$

La puissance rayonnée étant proportionnelle à la fréquence à la puissance quatre,  $P \propto f^4$ , ceci explique pourquoi le transport de l'énergie électrique sur de longues distances (lignes haute tension) s'effectue à l'aide de basses fréquences (50-60 Hz selon les pays); ce qui permet de minimiser les pertes par rayonnement.



## 7.2. Effet de peau (Application)

On considère une onde électromagnétique plane  $(\vec{E}, \vec{B})$  arrivant perpendiculairement sur une plaque métallique, voir la figure suivante

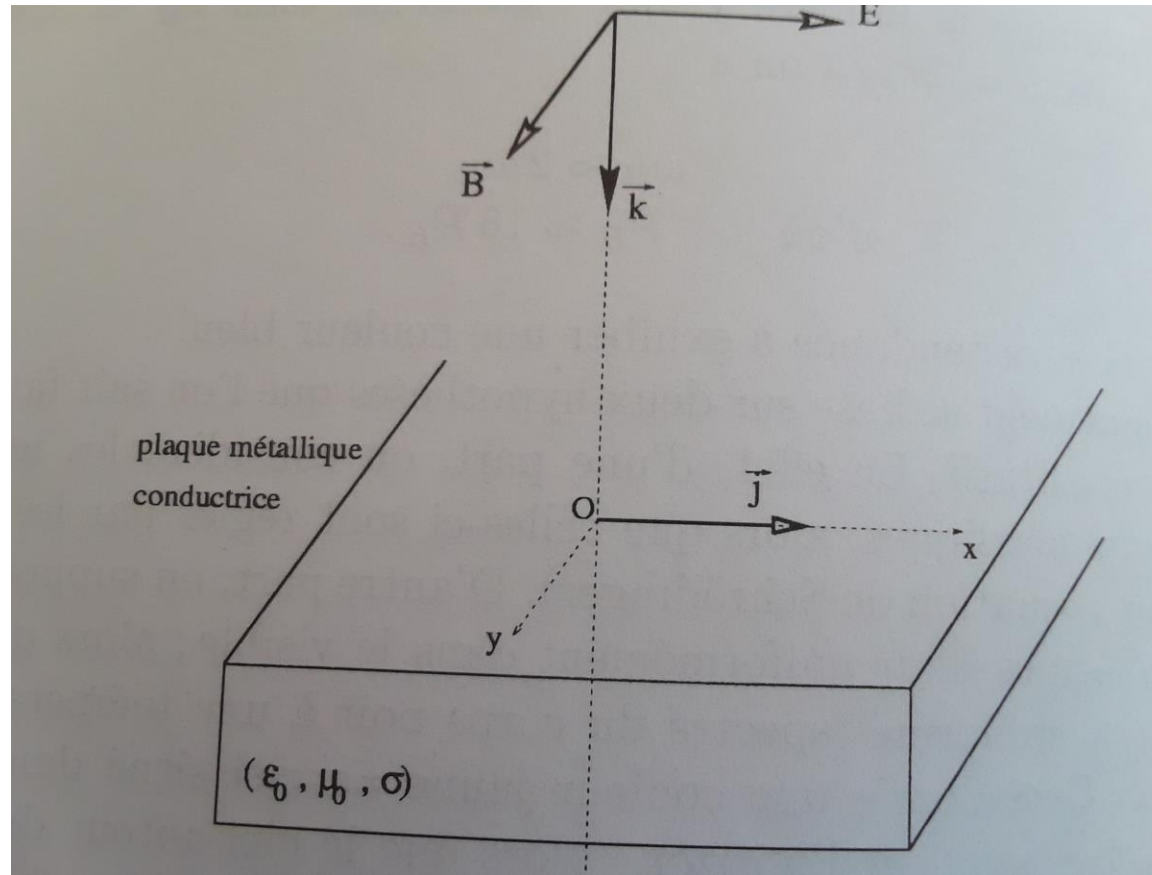


Schéma représentant une onde électromagnétique polarisé rectilignement qui arrive sur une plaque conductrice

## 7.2. Effet de peau (suite)

Cette plaque conductrice se caractérise par une permittivité  $\varepsilon_0$ , une perméabilité  $\mu_0$  et une conductivité  $\sigma$ . De plus, elle est supposée être à l'équilibre électrostatique, ce qui signifie que localement les densités de charge sont nulles  $\rho = 0$  (pas d'accumulation de charges quelque soit l'endroit sur la plaque).

Cette onde est polarisée rectilignement avec un champ électrique de la forme  $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$ , où  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation et  $k$  le module du vecteur d'onde  $\vec{k} = k \vec{e}_z$  (ou nombre d'onde).

a. Si on reprend l'équation générale de propagation du champ électrique de l'onde dans le métal (loi d'Ohm).

L'équation du champ électrique devient alors:

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

Où  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  est la densité de courant provoquée par le champ électrique de l'onde dans le métal (loi d'Ohm).

L'équation de propagation du champ électrique devient alors:

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## 7.2. Effet de peau (suite)

- b. L'expression du Laplacien en coordonnées cartésiennes et des dérivées première et seconde par rapport au temps donnent:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} &= \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z) = E_0 (-jk)^2 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z = -k^2 \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z) = E_0 (j\omega) e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z = j\omega \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= (j\omega)^2 \vec{E} = -\omega^2 \vec{E}\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle de  $\vec{E}$ , avec  $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ , on a:

$$-k^2 \vec{E} - \frac{-\omega^2}{c^2} \vec{E} = \mu_0 \sigma (j\omega) \vec{E}$$

$$\text{D'où } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0 \sigma \omega$$

## 7.2. Effet de peau (suite)

- c. De cette relation, on en déduit que  $k$ , le nombre d'onde, est un nombre complexe que l'on doit déterminer pour connaître la forme du champ électrique dans la plaque conductrice. On peut l'écrire sous la forme :

$$k = \alpha + j\beta$$
$$k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta$$

Par identification entre ces deux relations on obtient:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \frac{w^2}{c^2} \\ 2\alpha\beta = -\mu_0\sigma w \\ \beta = -\frac{\mu_0\sigma w}{2\alpha} \\ \alpha^4 - \frac{w^2}{c^2}\alpha^2 - \left(\frac{\mu_0\sigma w}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \alpha^2 = \frac{w^2}{2c^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\mu_0\sigma c^2}{w} \right)^2} \right)$$

## 7.2. Effet de peau (suite)

d. Si on fait l'approximation suivante:

$$w \ll \mu_0 \sigma c^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ soit } f \ll \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} = f_c$$

Ce qui revient à considérer les basses fréquences, on obtient alors:

$$\alpha^2 \approx \frac{w^2}{2c^2} \frac{\mu_0 \sigma c^2}{w} = \frac{\mu_0 \sigma w}{2} \text{ donc } \alpha \approx \mp \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma w}{2}} \text{ et } \beta \approx \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma w}{2}}$$

Le nombre d'onde sous forme complexe s'écrit finalement:

$$k \approx \pm \gamma(1 - j) \text{ avec } \gamma = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma w}{2}}$$

Voyons l'ordre de grandeur des fréquences pour lesquelles l'approximation effectuée est valable. Pour cela, on considèrera la plaque conductrice en cuivre, c'est-à-dire avec une conductivité  $\sigma_{Cu} = 58 \frac{10^6 S}{m}$ , d'où :

$$f_c = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0} = 18 \cdot 10^9 \sigma \approx 10^{18} Hz$$

On voit ainsi que l'approximation des basses fréquences est toute relative, étant donné que notre approximation est valide pour  $f \ll 10^{18} Hz$ .

En réalité, il y a une restriction: un courant alternatif ne peut s'établir dans un conducteur uniquement si sa fréquence  $f < f_p = 4 \cdot 10^{13} Hz$ , dans le cuivre.

## 7.2. Effet de peau (suite)

Ainsi l'approximation  $f \ll f_c$  doit être vérifiée pour le cuivre si on veut que le courant s'établisse (soit  $f < f_p$ ).

e. Revenons à l'expression du champ électrique de l'onde dans le conducteur, en remplaçant  $k$  par sa valeur:

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t \mp \gamma(1-j)z)} \vec{e}_z = E_0 e^{\pm j^2 \gamma z} e^{j(\omega t \mp \gamma z)} \vec{e}_z$$

Comme l'onde se propage dans le même sens (celui des  $z$  positifs) alors il faut choisir le signe moins, soit:

$$\vec{E} = E_0 e^{-\gamma z} e^{j(\omega t - \gamma z)} \vec{e}_z$$

Ainsi l'amplitude de l'onde électromagnétique subit un amortissement dans le conducteur, le facteur d'amortissement étant:  $e^{-\gamma z}$ , on parle d'une onde évanescence.

On définit l'épaisseur de peau  $\delta$  comme l'épaisseur de conducteur nécessaire pour amortir l'onde initiale d'un facteur  $\exp(-1) = 0,368$ , c'est-à-dire une absorption de 63,2% de l'onde initiale:

$$\gamma \delta = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \pi \sigma f}}$$

## 7.2. Effet de peau (suite)

f. Prenons un fil de cuivre de diamètre  $d = 1\text{mm}$  et de longueur  $l = 1\text{m}$ , sa résistance linéique est alors de la forme:

$$r = \frac{R}{l} = \frac{\frac{l}{\sigma S}}{l} = \frac{1}{\sigma S}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 & \text{si } \delta > \frac{d}{2} \\ S = \pi \left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2\right) & \text{si } \delta \leq \frac{d}{2} \end{cases}$$

Le tableau suivant montre l'évolution de cette résistance linéique en fonction de la fréquence avec  $f < f_p$ .

$f$	$\delta$	$r$
50Hz	9,3mm	0,022 $\Omega/\text{m}$
1kHz	2,1mm	0,022 $\Omega/\text{m}$
1MHz	66 $\mu\text{m}$	0,17 $\Omega/\text{m}$
1GHz	2,1 $\mu\text{m}$	5,2 $\Omega/\text{m}$

Epaisseur de peau dans le cuivre et résistance linéique  $r$  en fonction de la fréquence de courant, pour un fil de diamètre 1mm

## 7.2. Effet de peau (suite)



# Application: 1. Polarisation circulaire

Enoncée: Deux antennes produisent à grande distance des ondes électromagnétiques planes caractérisées respectivement par les champs électriques  $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$  et  $\vec{E}_2 = E_0 \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \vec{e}_y$ . Donner les caractéristiques de ces deux ondes; et montrer que leur superposition donne une onde polarisée circulairement, dont on précisera l'évolution temporelle en un point  $z_0$  à partir d'un temps  $t_0$  tel que:  $\omega t_0 - kz_0 = 0$ .

Solution: Les ondes électromagnétiques associées aux champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  sont monochromatiques planes, de fréquence  $f$  (avec  $\omega = 2\pi f$ ), d'amplitude maximale  $E_0$ , se propageant dans la direction (Oz) selon les  $z$  croissants. Chacune de ces ondes est polarisée rectilignement: le champ  $\vec{E}_1$  selon (Ox) et le champ  $\vec{E}_2$  selon (Oy).

La superposition des deux ondes donne une onde dont le champ électrique est:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y = E_0 [\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y]$$

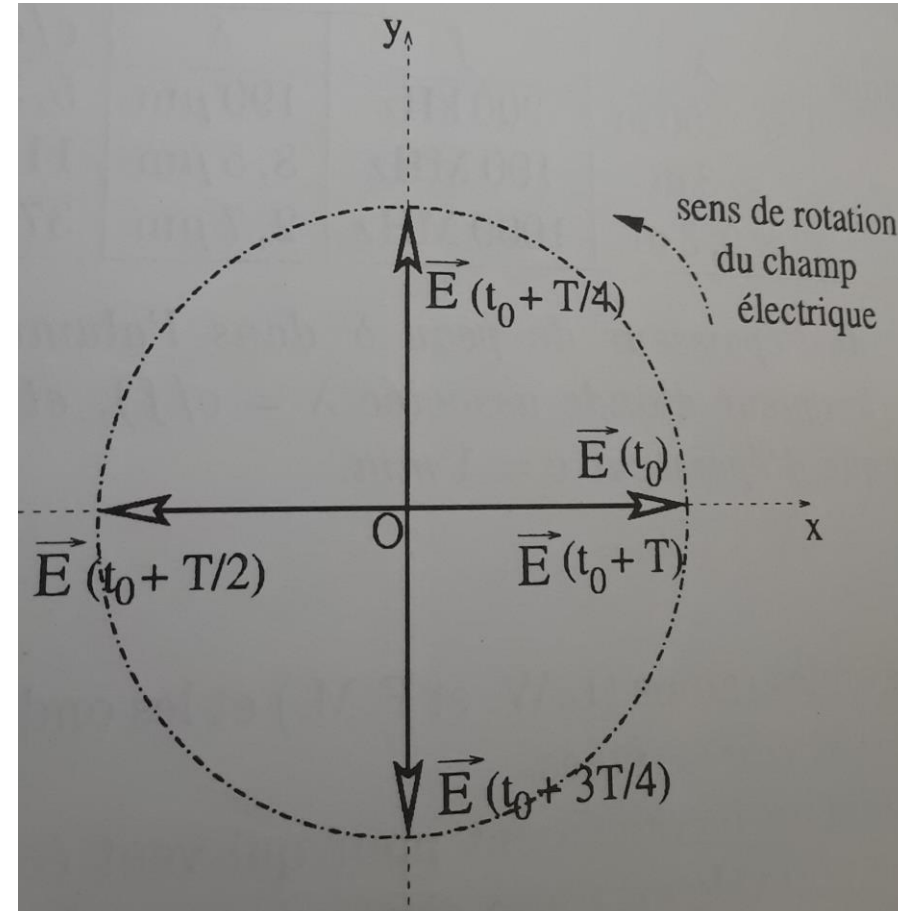
En un point  $z = z_0$ , entre les instants  $t = t_0$  et  $t = t_0 + T$ , on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t_0 \Rightarrow \vec{E} = E_0 \vec{e}_x \\ t = t_0 + \frac{T}{4} \Rightarrow \vec{E} = E_0 \vec{e}_y \\ t = t_0 + \frac{T}{2} \Rightarrow \vec{E} = -E_0 \vec{e}_x \\ t = t_0 + \frac{3T}{4} \Rightarrow \vec{E} = -E_0 \vec{e}_y \\ t = t_0 + T \Rightarrow \vec{E} = E_0 \vec{e}_x \end{array} \right.$$

L'évolution temporelle de l'orientation du champ électrique total de l'onde électromagnétique associée est représentée dans la figure suivante. Ainsi, le champ électrique tourne dans le temps, son extrémité décrivant un cercle, d'où le nom de polarisation circulaire.

# Application: 1. Polarisation circulaire (suite)

Evolution sur une période de l'orientation du champ électrique d'une onde polarisée circulairement.



## Application 2: Interférence d'ondes électromagnétiques

Enoncée: Une source émet isotropiquement des ondes lumineuses ( $\lambda = 0,5\mu m$ ) caractérisées par un champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k \cdot \vec{r})$ . A distance  $d$  de la source est placée un écran percé de deux fentes parallèles distantes de  $a = 0.5\text{cm}$ , tel que la projection de la source sur l'écran soit exactement entre les deux fentes. Un écran est placé à ( $D \gg a$ ), avec lequel est parallèle. Montrer que dans la partie centrale de cet écran se produit un phénomène d'interférences lumineuses (alternance de raies lumineuses et sombres), pour lequel on déduira la distance entre deux franges successives (interfrange).

Solution: les deux fentes F1 et F2 (voir figure), se comportent comme deux sources d'ondes électromagnétiques (type lumineuses), c'est-à-dire caractérisées respectivement par les champs électriques:

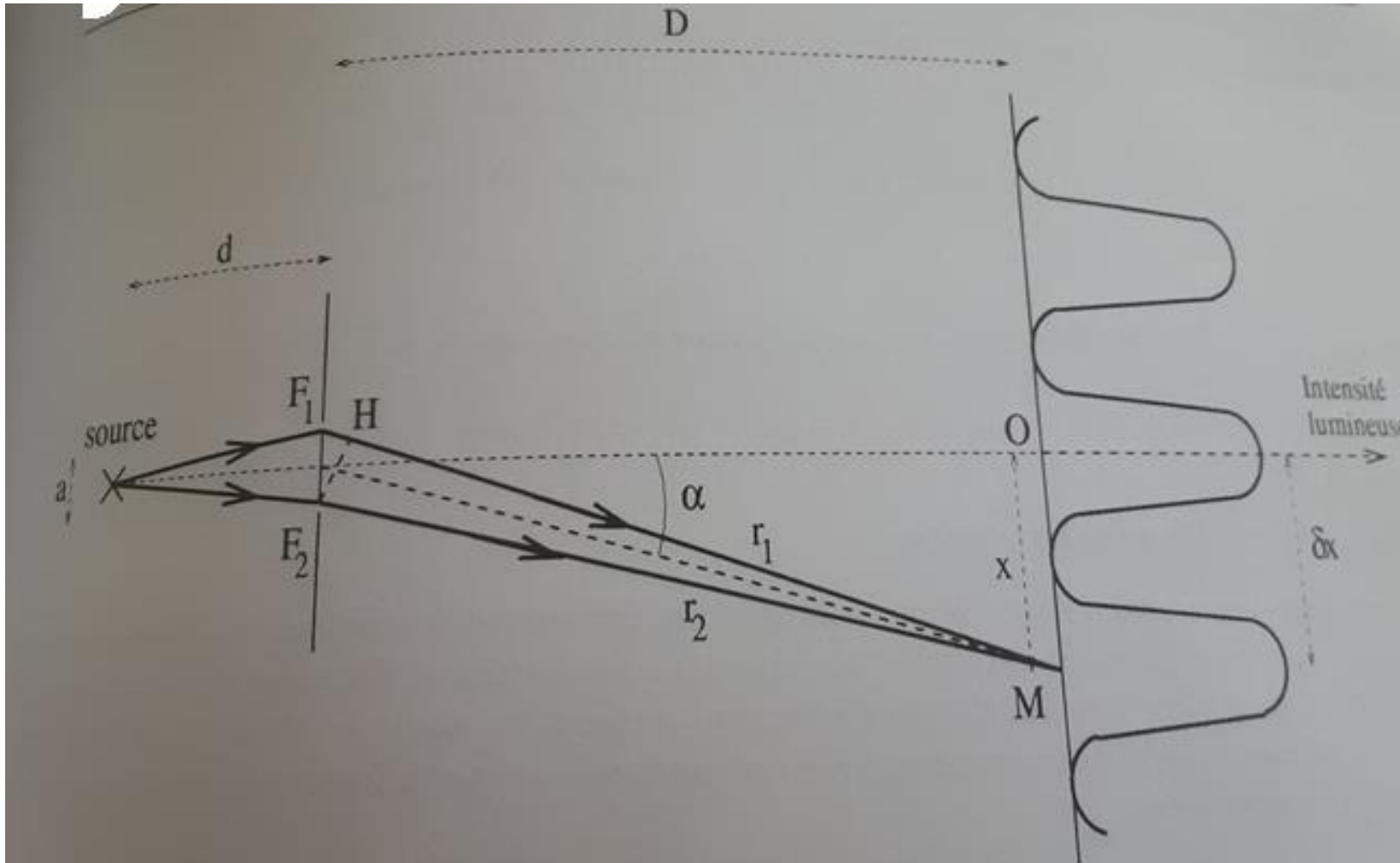
$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kr_1) = \vec{E}_0 \cos(2\pi \left[ \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right]) \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kr_2) = \vec{E}_0 \cos(2\pi \left[ \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right]) \end{cases}$$

En utilisant le fait que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$

Le champs électrique résultant en un point M de l'écran sera :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \left\{ \cos(2\pi \left[ \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right]) + \cos(2\pi \left[ \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right]) \right\} = 2\vec{E}_0 \left\{ \cos(2\pi \left[ \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right]) \cos(\pi \left[ \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right]) \right\}$$

## Application 2: Interférence d'ondes électromagnétiques (suite)



## Application 2: Interférence d'ondes électromagnétiques (suite)

En notation complexe, ce champ résultant s'écrit:

$$\vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos\left(\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right) e^{j2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right]}$$

D'où l'intensité lumineuse sur l'écran d'observation proportionnelle au module du champ électrique au carré (comme l'énergie):

$$I \propto |E|^2 = 4E_0^2 \cos^2\left(\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)$$

Le champ est maximum, ce qui correspond à une onde lumineuse d'amplitude double, lorsque:

$$\cos\left(\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right) = \pm 1, \text{ soit } \pi(r_1 - r_2) = n\pi\lambda, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Soit,  $\Delta r = r_1 - r_2 = n\lambda$

La quantité  $\Delta r$  est appelée différence de chemin optique.

Dans l'approximation  $D \gg a$ , on peut supposer  $(F1M)/(F2M)$ , ce qui permet d'écrire

$$r_1 - r_2 = F_1 H \approx a \sin(\alpha)$$

En ne considérant que ce qui se passe vers le centre,  $x \ll D$ , on a

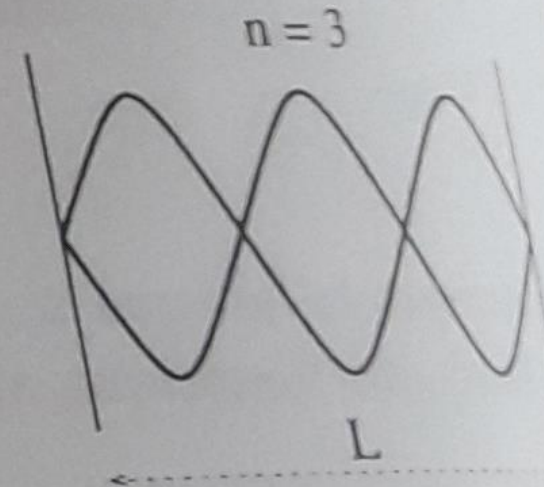
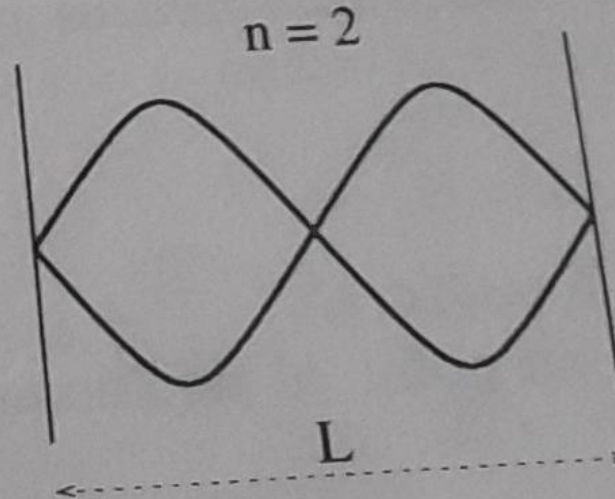
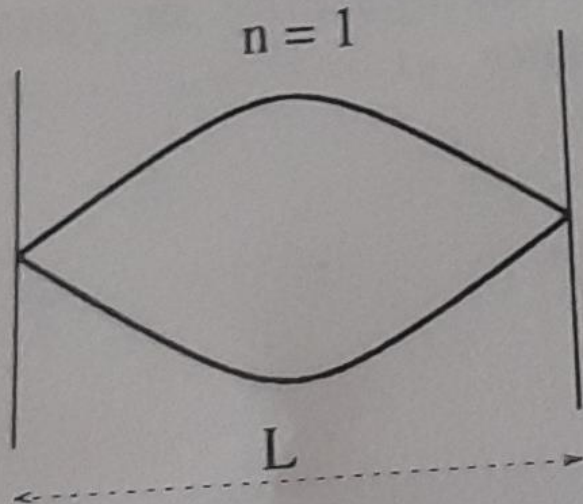
$$\sin(\alpha) \approx \alpha \approx \tan(\alpha) \text{ avec } \tan(\alpha) = \frac{x}{D}$$

D'où la relation donnant la position des franges brillantes lumineuses :  $x_n = n \frac{\lambda D}{a}$

L'interfrange est la distance entre deux franges successives ( $n$  et  $n+1$ ), soit:  $\delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda D}{a} \approx 0,2mm$

# Application 3: Cavité résonnante

Enoncée: Une cavité électromagnétique plane polarisée rectilignement (de pulsation  $\omega$ ) rebondit normalement sur deux plaques parallèles parfaitement conductrices distantes de  $L = 10$  cm. A chaque rebond, la direction du champ électrique tourne d'un angle  $\pi$ . Montrer qu'il se forme alors un système d'ondes stationnaires pour certaines valeurs de la fréquence, dont on donnera trois premiers modes.



# Application 3: Cavité résonnante (suite)

Solution: En notant  $z$  la direction de propagation, l'onde incidente se propageant selon les  $z$  croissants s'écrira:  
 $\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}$  avec  $\vec{E}_0 \perp (Oz)$ .

L'onde réfléchie se propageant selon les  $z$  décroissants sera, en tenant compte de la rotation de  $\pi$  du champ:  
 $\vec{E}_r = -\vec{E}_0 e^{j(\omega t + kz)}$

L'onde totale se caractérisera alors par le champ électrique:

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_0 (e^{j(\omega t - kz)} - e^{j(\omega t + kz)}) = 2j \vec{E}_0 \sin(kz) e^{j\omega t}$$

Mais comme sur une plaque conductrice, le champ électrique doit être nul, c'est-à-dire en  $z = 0$  et  $z = L$ , on a  
 $\sin(kL) = 0$  soit  $kL = n\pi$  avec  $n = 0, 1, 2 \dots$

$$\text{Soit, } f_n = n \frac{c}{2L}$$

Pour les trois premiers modes, les fréquences sont :

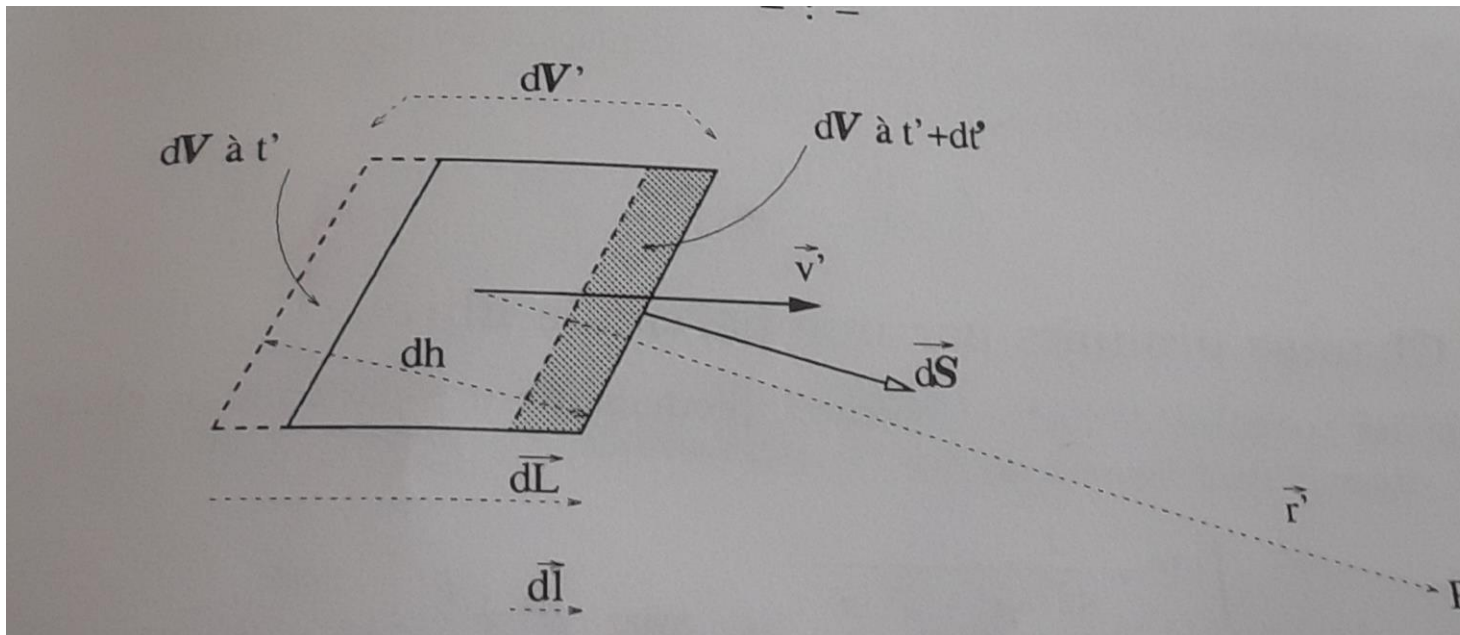
$$\begin{cases} f_1 = 1,5 \text{GHz} \\ f_2 = 3 \text{GHz} \\ f_3 = 4,5 \text{GHz} \end{cases}$$

## Application 4: Potentiel scalaire de Lienard-Wiechert

Enoncée: Le potentiel scalaire électromagnétique produit une densité de charge statique  $\rho$  de volume (V) à l'instant  $t$  en un point P, distant de  $\vec{r}$  de la charge, est donné par:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(V)} \frac{\rho(t - \frac{r}{c})}{r} dV$$

Etablir l'expression du potentiel scalaire produit par une charge quasi ponctuelle  $q$  (de volume infiniment petit, voir figure) se déplaçant à vitesse  $\vec{v}$ , sachant celle-ci se trouvait alors à distance  $\vec{r}'$  du point P lorsque elle a émis le potentiel à l'instant  $t' = t - \frac{r'}{c}$





# Application 4: Potentiel scalaire de Lienard-Wiechert (suite)

Solution: On considère un élément de volume infiniment petit  $dV$ , de densité de charge  $\rho$  homogène, dont la forme parallélépipédique est telle que le vecteur distance  $\vec{r}'$  reliant la charge au point d'observation P soit colinéaire au vecteur unité de surface  $\vec{dS}$ .

On appelle  $t$  l'instant d'observation du potentiel au point P, lequel a été émis précédemment à l'instant  $t'$ , tel que  $t - t' = \frac{r'}{c}$  est la durée nécessaire pour que le potentiel se déplace (à la vitesse  $c$ ) depuis la charge jusqu'au point P.

Lors de l'observation au point P, et à un instant  $t$ , toute la charge contenue dans le volume  $dV'$  (volume  $dV$  étendu par le déplacement de la charge durant  $dt'$ ) contribuera donc au potentiel, où  $dt'$  est la durée nécessaire au signal électromagnétique pour traverser la charge étendue. La charge à prendre en compte est alors:

$$dq' = \rho dV' = \rho (dV + \vec{dS} \cdot \vec{dl}), \text{ avec } \vec{dS} = dS \frac{\vec{r}'}{r'} \text{ et } d\vec{l} = \vec{v}' dt'$$

## Application 4: Potentiel scalaire de Lienard-Wiechert (suite)

En remarquant que  $dt' = \frac{dh}{c}$ , et que  $dh$  est la projection de  $d\vec{L}$  sur  $\vec{r}'$ , soit  $dh = d\vec{L} \cdot \frac{d\vec{S}}{dS}$ , on a alors:

$$\rho dV' = \rho \left( dV + dS \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}'}{r' c} \frac{1}{c} \frac{d\vec{L} \cdot d\vec{S}}{dS} \right) = \rho \left( dV + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}'}{r' c} dV' \right) = \rho dV + \rho \frac{\vec{r}' \cdot \vec{v}'}{r' c} dV'$$

D'où  $\rho dV' = \frac{\rho r' dV}{r' - \vec{r}' \cdot \vec{\beta}'} \text{ avec } \vec{\beta}' = \frac{\vec{v}'}{c}$

Le potentiel observé au point P est donc:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V'} \frac{\rho dV'}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{V'} \frac{\rho dV'}{r' - \vec{r}' \cdot \vec{\beta}'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - \vec{r}' \cdot \vec{\beta}'} \oint_{V'} \rho dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r' - \vec{r}' \cdot \vec{\beta}'}$$

De façon analogue, on montre que le potentiel vecteur électromagnétique produit par une charge quasi ponctuelle (identique à la précédente), se déplaçant à la vitesse  $v'$  au moment où le signal électromagnétique a été émis, est de la forme:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}'}{r' - \vec{r}' \cdot \vec{\beta}'}$$