Chapitre 1 : Outils mathématiques pour la représentation des signaux (partie 2)

COURS TECHNIQUES DE TRANSMISSION

FILIERE : GL2 - INSAT

RESPONSABLE DU COURS/TD : RIM AMARA

Rappel

Rappel • soit $t \to f(t) \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int \underbrace{f(t)}_{f_R(t)+j\,f_I(t)}\,dt = \int f_R(t)\,dt + j\int f_I(t)\,dt$

• $\displaystyle\int e^{st}\,dt = \frac{1}{s}\,e^{st} + cte$; $s \in \mathbb{C}$

• le spectre $X(f)$ est une fct à valeurs dans $\mathbb{C}$.

4.2 Transformée de Fourier d'un signal déterministe quelconque

Soit $x(t)$ un signal déterministe quelconque d'énergie finie.
on appelle transformée de Fourier ou spectre

(1) $X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \quad ; f \in \mathbb{R}$

- la TF est inversible, c.à.d, $\exists$ un opérateur TF^{-1} /

(2) $x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{\mathbb{R}} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$

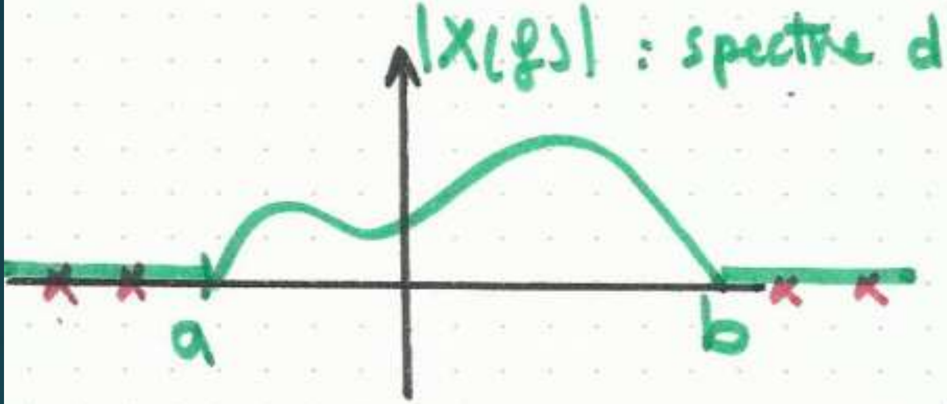
Interprétation

- la relation (2') nous dit que $x(t)$ est une somme C^{o} de fréquences pures $t \rightarrow e^{j2\pi ft}$, où chaque fréq. pure a l'amplitude complexe $X(f)$.

- $\Rightarrow$ $X(f)$: amplitude de la fréq. f contenue dans $x(t)$

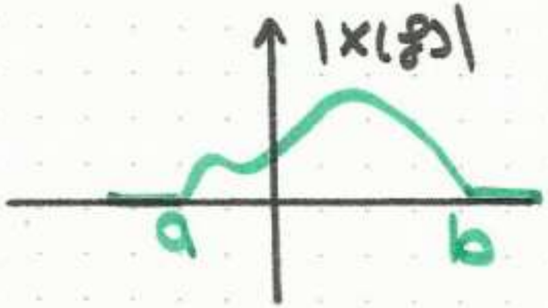
- si $X(f_1) = 0$ pour une certaine fréq. f_1
  $\Rightarrow$ la fréq. f_1 ne contribue pas dans $x(t)$.

(a) Bande fréquentielle d'un signal



- toute fréquence $f \in [a, b]$ existe dans la composition de $x(t)$ (car $X(f) \neq 0$)
- si $f > b$ ou $f < a$, $X(f) = 0$

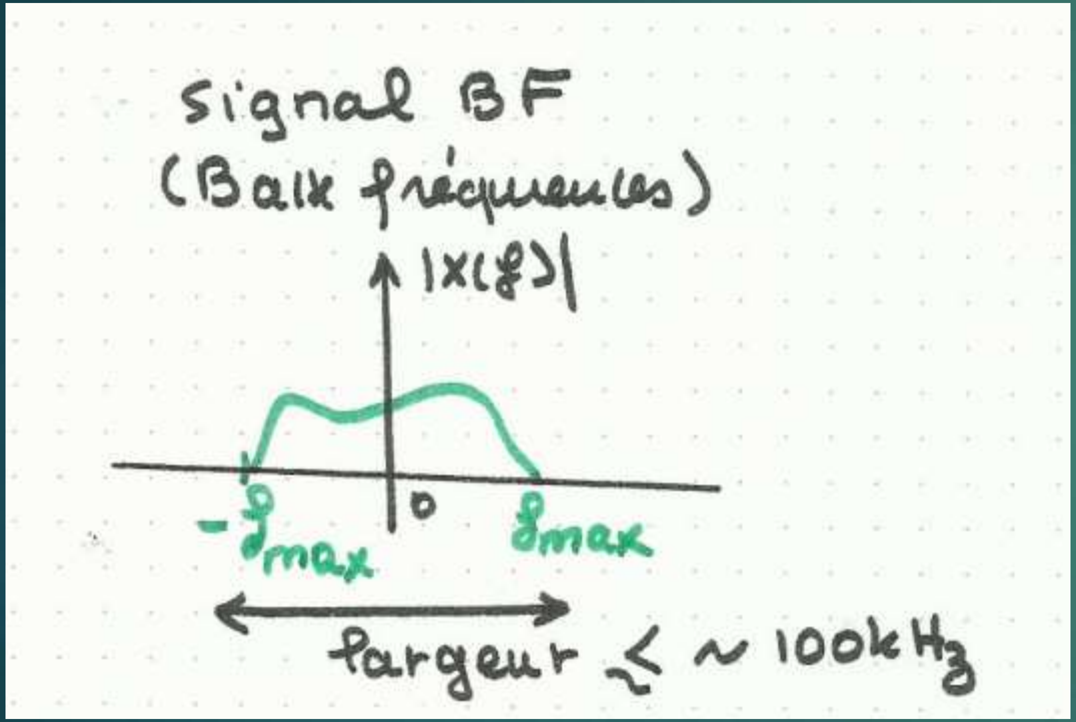
$\Rightarrow$ ces fréq. n'existent pas dans $x(t)$

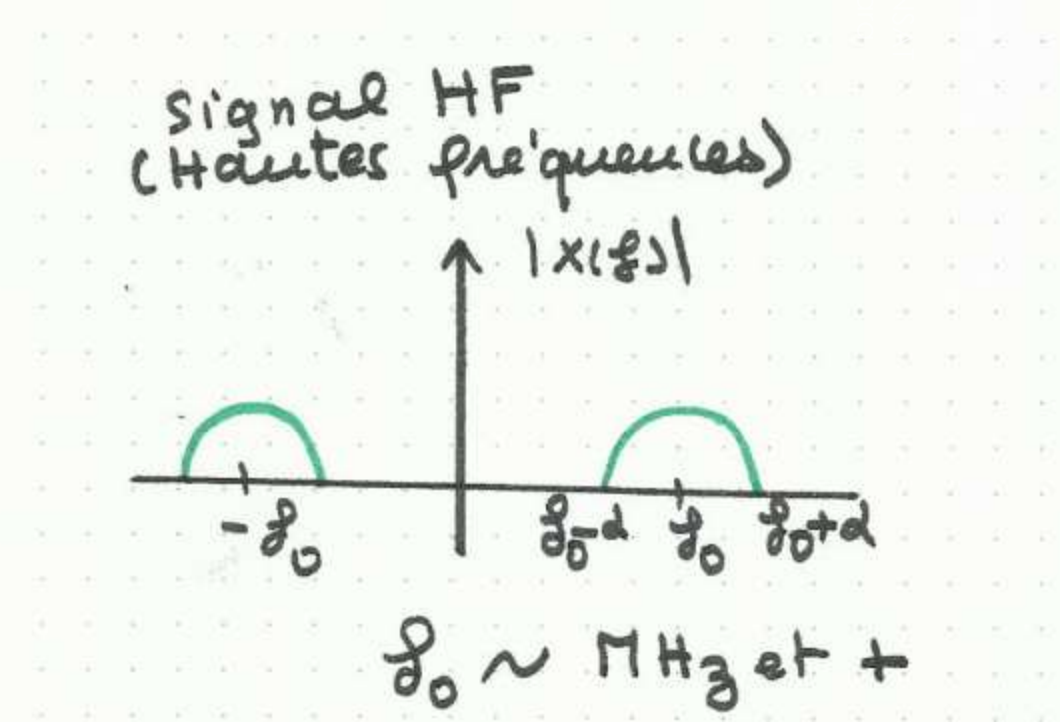


Bande de $x(t) = [a, b]$ / $X(f) = 0 \ \forall f \notin [a, b]$

$= \text{support}(X(f))$

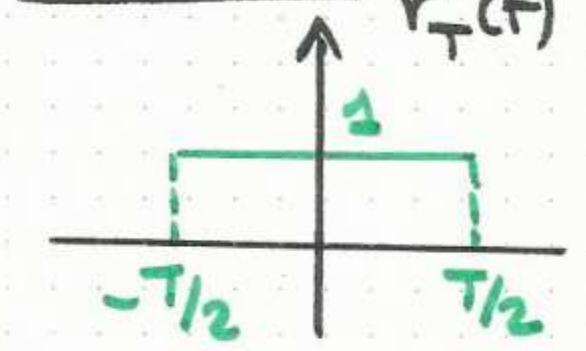
Signal BF -- signal HF





Signal rectangulaire (porte)

Exemple



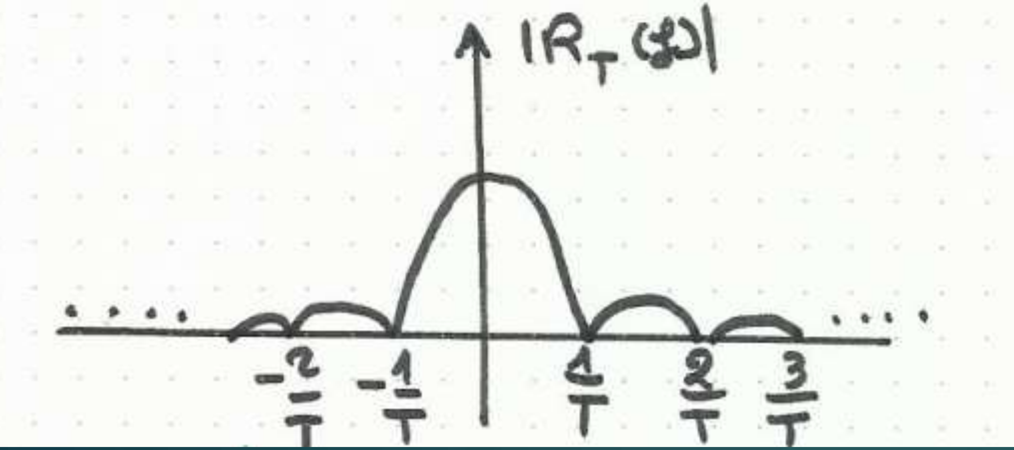
$$R_T(f) = \int_{\mathbb{R}} r_T(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2j}\pi f}\underbrace{\left(e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}\right)}_{-\cancel{2j}\sin(\pi f T)}$$

$$= \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$\boxed{= T\,\mathrm{sinc}(fT)} \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

Sinus Cardinal



(b) Propriétés de la transformée de Fourier (TF)

P_1 - Linéarité $TF\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$

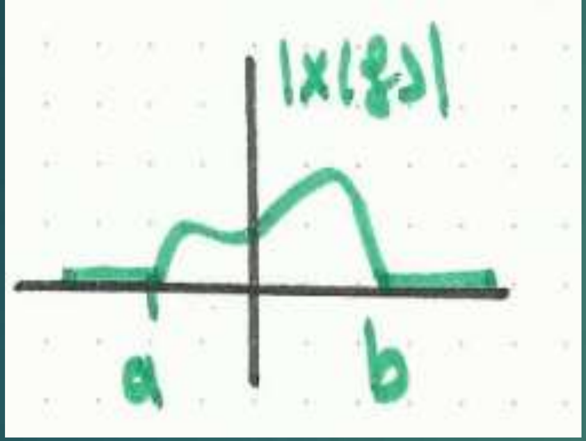
$$TF\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \int_{\mathbb{R}} (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) e^{-j2\pi f t} dt$$
$$= \alpha_1 \int x_1(t) e^{-j2\pi f t} dt + \alpha_2 \int x_2(t) e^{-j2\pi f t} dt$$
$$= \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$$

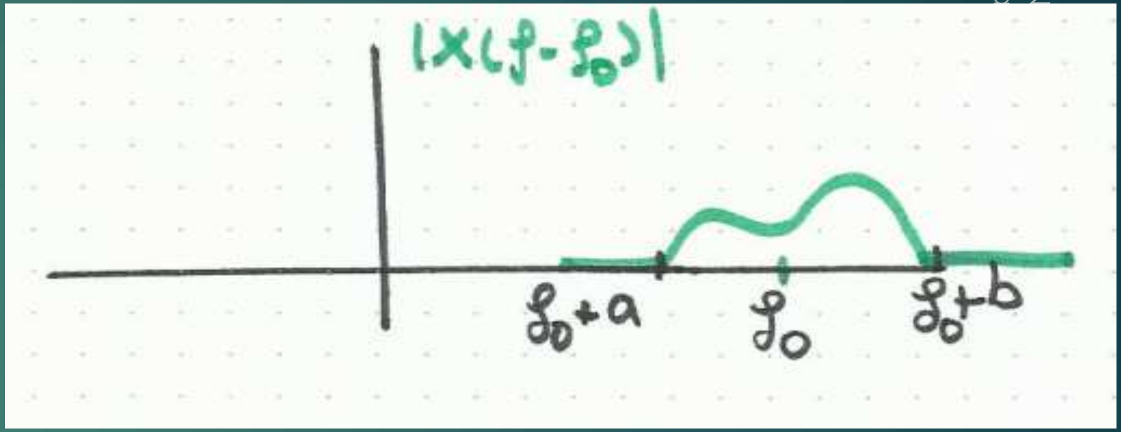
P_2 - $TF\{x(t-t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$

$$\hookrightarrow TF\{x(t-t_0)\} = \int_{\mathbb{R}} x(\underbrace{t-t_0}_{t'}) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{\mathbb{R}} x(t') e^{-j2\pi f (t'+t_0)} dt'$$
$$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{\mathbb{R}} x(t') e^{-j2\pi f t'} dt' = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

(b) Propriétés de la TF

P_3 - $TF\{x(t)\,e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f-f_0)$





P_4 - $TF\{x(-t)\} = X(-f)$

P_5 - $TF\{x^*(t)\} = X^*(-f)$

(b) Propriétés de la TF

P6 - $TF\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$

P7 - $TF\{x'(t)\} = 2j\pi f \cdot X(f)$

$\Rightarrow \quad TF\{x^{(n)}(t)\} = (2j\pi f)^n X(f)$

P8 - Dualité

si $X(f) = TF\{x(t)\}$ alors $TF\{X(t)\} = x(-f)$

(c) Notion de filtrage et produit de convolution

Déf on appelle filtre tout système dont la relation entrée sortie s'écrit comme suit

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Filtre de Réponse Impulsionnelle (RI) $h(t)$

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(u)\, x(t-u)\, du$$

$$= h(t) * x(t)$$

produit de convolution

Propriétés du produit de convolution

- **Commutativité** $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- **Associativité** $x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t)$
- **Distributivité** $x(t) * (\alpha\, y(t) + \beta\, z(t)) = \alpha . x(t) * y(t) + \beta\, x(t) * z(t)$
- la relation (*) tel un simple produit admet un élément neutre

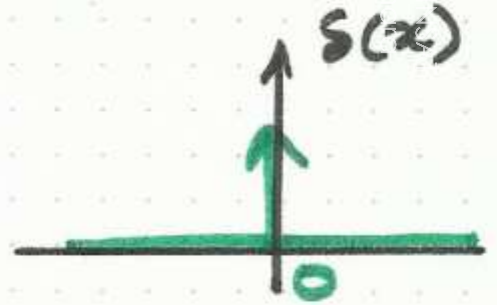
la distribution de Dirac $\delta(t)$

$$\delta(t) * x(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

(d) La distribution de Dirac

- "$\delta(t)$" est ce qui on appelle distribution ou fct généralisé

- $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$
- $\delta(x) \cdot f(x) = f(0) \cdot \delta(x)$
- $\delta(x - x_0) \cdot f(x) = f(x_0) \cdot \delta(x - x_0)$
- $\delta(x - x_0) * f(x) = f(x - x_0)$



Représentation mathématique d'une impulsion

- $h(t)$: la réponse impulsionnelle d'un filtre

$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow ?$ la sortie est $h(t) * \delta(t) = h(t)$

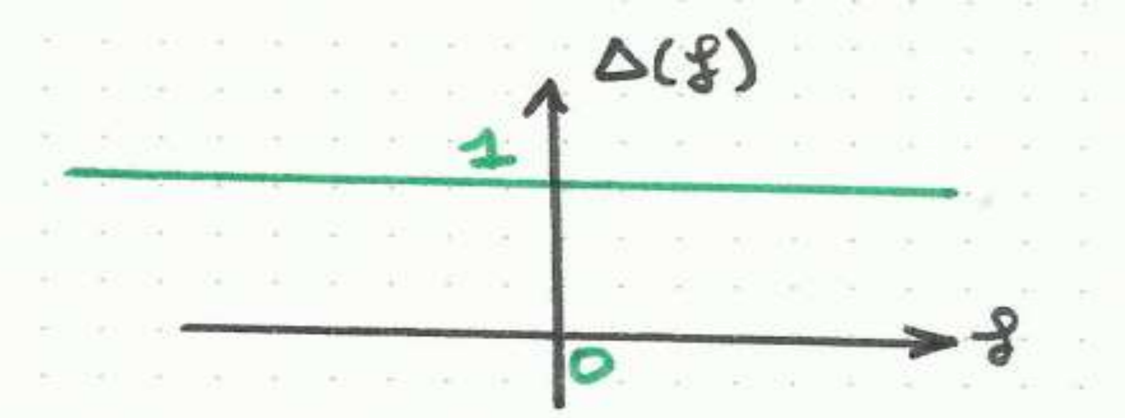
$h(t)$: la réponse d'un filtre à une entrée de type impulsion.

Spectre de l'impulsion de Dirac

$$\Delta(f) = TF\{\delta(t)\}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\delta(t)\, e^{-j2\pi f t}}_{\delta(t)\,.\,e^{-j2\pi f 0}} dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$$



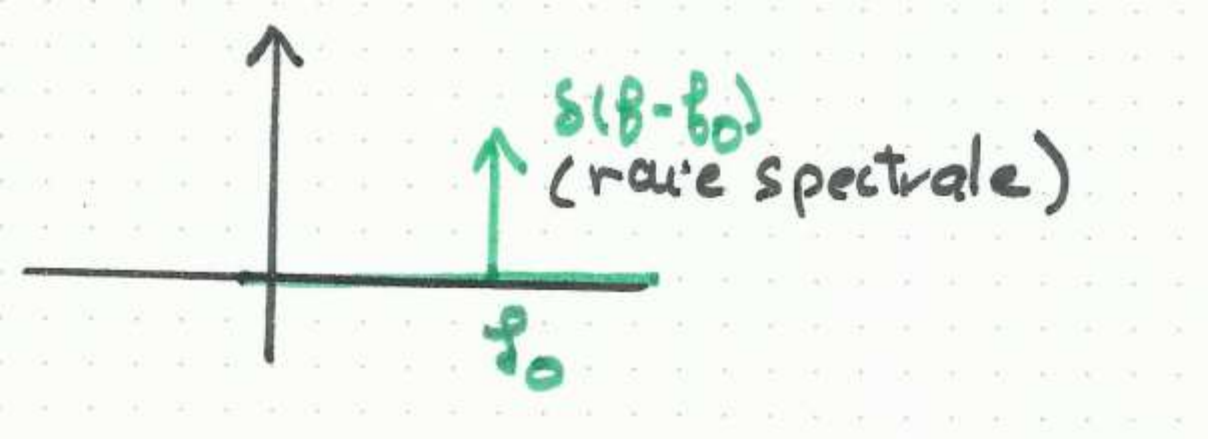
$$TF\{\delta(t)\} = 1 = \Delta(f)$$

une impulsion est un signal large bande car il contient toutes les fréquences

Spectre de la fréquence pure

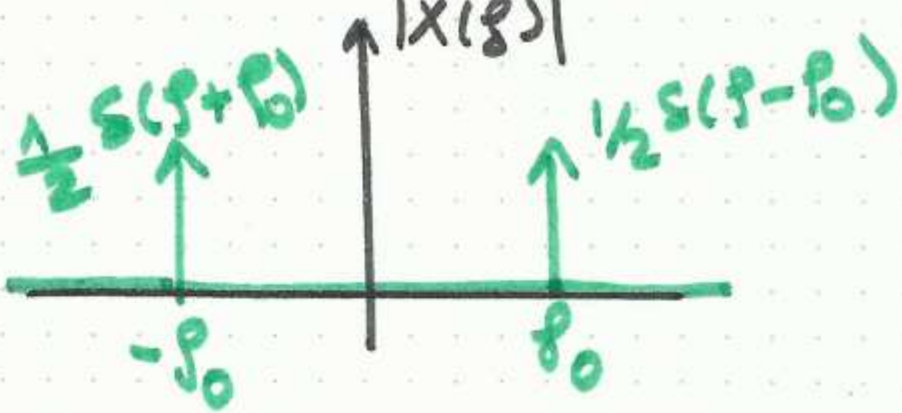
$$TF\left\{ e^{j2\pi f_0 t} \right\} = TF\left\{ e^{j2\pi f_0 t} \cdot \underbrace{1}_{\Delta(t)} \right\} = \delta(f - f_0)$$

d'après P_3.



Spectre d'un signal sinusoidal

- $$TF\{\underbrace{\cos(2\pi f_0 t)}_{x(t)}\} = TF\{\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\}$$
$$= \frac{1}{2}TF\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2}TF\{e^{-j2\pi f_0 t}\}$$
$$= \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$



(e) Propriétés importantes

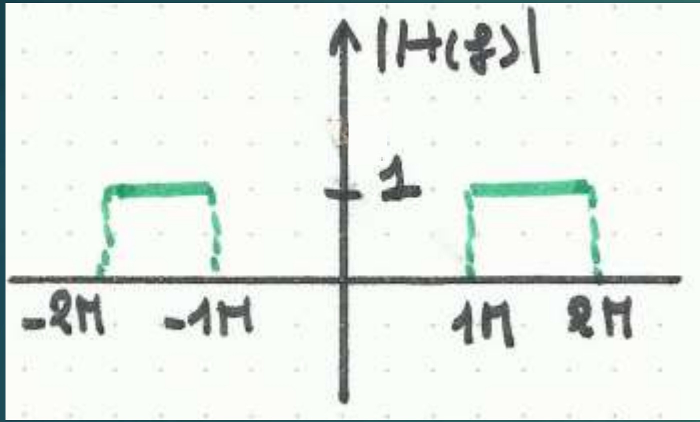
P9- $TF\{x(t) * y(t)\} = X(f) \cdot Y(f)$

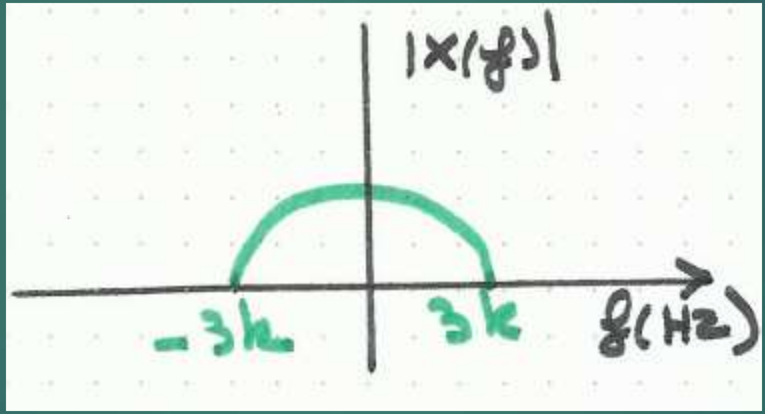
P10- $TF\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f)$

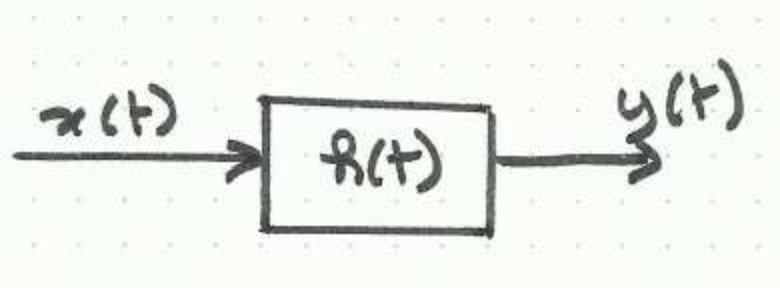
relations "." et "*" sont duales.

Application : Qu’est-ce que la modulation ?

un signal $x(t)$ BF de fréquence maximale $f_{max} = 3\,kHz$ attaque un filtre de réponse fréquentielle suivante







Que vaut $y(t)$?

Application

$Y(f) = H(f).X(f) = 0$ → $y(t)$ est nul => signal atténué

Cette situation correspond à la transmission d'une onde EM de type BF à travers un canal de TX HF (le canal Radio agit, en effet, par filtrage des signaux émis).

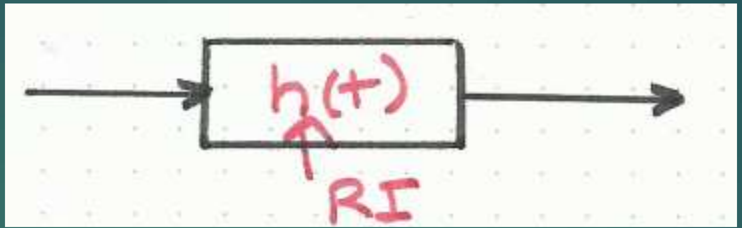
Question : Comment transmettre de tels signaux ?

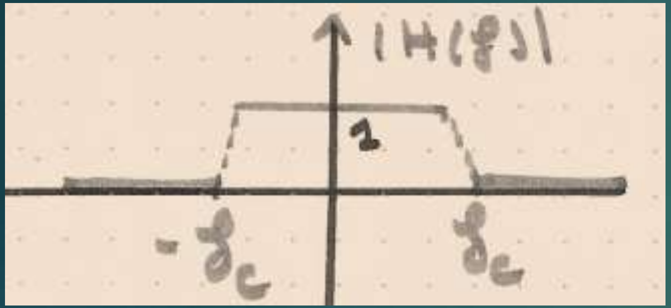
Idée : Provoquer une translation du spectre du signal à émettre vers la bande du canal

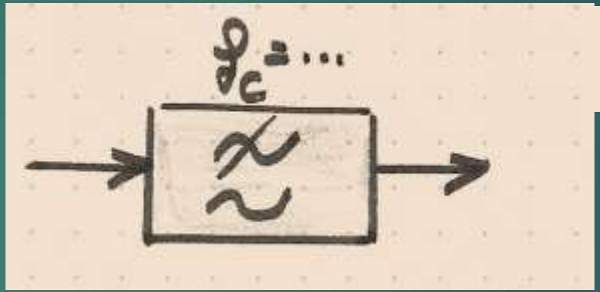
multiplier $x(t)$ par $e^{j2\pi f_0 t}$, avant émission

(f) Réponse fréquentielle (RF) de filtres

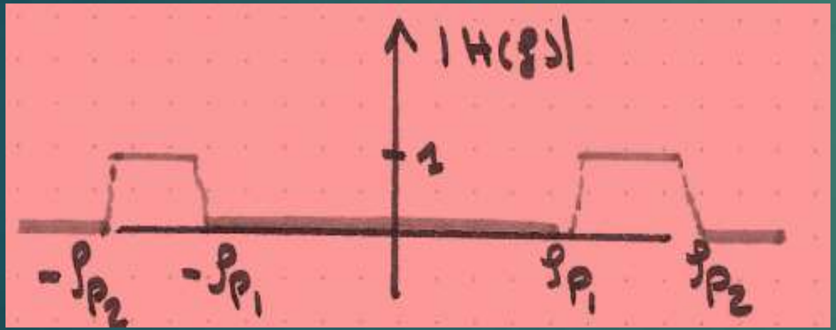
$$H(f) = TF\{h(t)\}$$

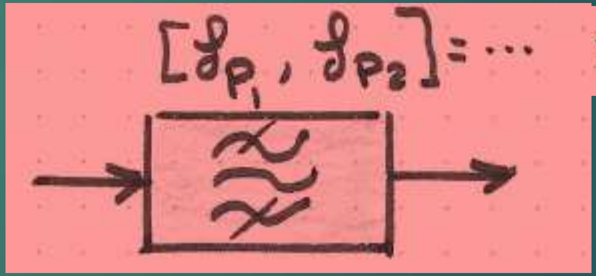




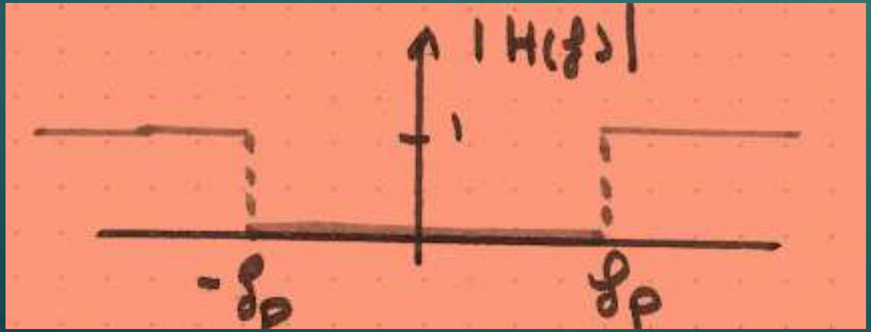


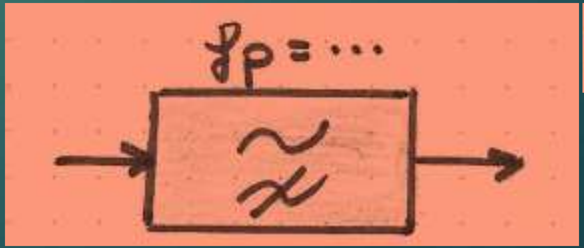
Filtre passe_bas





Filtre passe_bande





Filtre passe_haut