TD 1

A.U. 2022-2023

Nadia HMIDA

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$

1. Montrer que f est linéaire
2. Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$
3. Donner $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$
4. Soient
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   (b) Donner $A_1 = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_1)$
5. Exprimer A_1 en fonction de A
6. diagonaliser A et A_1

Exercice 2

On se propose de résoudre le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) - 4y(t) + 12z(t) \\ z'(t) = x(t) - 2y(t) + 5z(t) \end{cases}$$

1. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

   Ecrire le système différentiel sous la forme
$$U'(t) = MU(t)$$
   Avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à préciser.
2. Diagonaliser $M = PDP^{-1}$ (Préciser P et D)
3. On pose $V(t) = P^{-1}U(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que $V'(t) = DV(t)$

(b) En déduire $\alpha(t), \beta(t)$ et $\gamma(t)$

4. en déduire $x(t), y(t)$ et $z(t)$ sachant que $x(0) = 1,\ y(0) = 0$ et $z(0) = -1$

Exercice 3

Soit α un réel donné et A_α la matrice carré suivante:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3-\alpha & -5+\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α admet deux valeurs propres 3 et -2
   (b) En déduire qu'il existe une unique valeur de α pour laquelle A_α est diagonalisable
   (c) Déterminer, dans ce cas, les puissances successives $(A_\alpha)^n$ pour tout $n \geq 1$
   On suppose que A_α est non diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice Q_α inversible tel que

$$Q_\alpha^{-1} A_\alpha Q_\alpha = T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) On note $J = T + 2I_3$. Calculer J^n et en déduire $(A_\alpha)^n$ pour tout $n \geq 1$

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(A - 4I_3)^3 = 0$ et que $(A - 4I_3)^2 \neq 0$
2. En déduire $m_A(X)$ le polynome minimal de A
3. En déduire que 4 est l'unique valeur propre de A et que A n'est pas diagonalisable
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 4id) \subset \mathrm{Ker}(f - 4id)^2 \subset \mathrm{Ker}(f - 4id)^3$ et que $\mathrm{Ker}(f - 4id)^n = \mathrm{Ker}(f - 4id)^3$ pour tout $n \geq 3$
5. Soient $u = (0, 0, 1)$, $\quad v = (A - 4I_3)u$ et $w = (A - 4I_3)v$. Montrer, sans calculer v et w, que :
   (a) $w \in \mathrm{Ker}(f - 4id)$
   (b) $v \in \mathrm{Ker}(f - 4id)^2$ et $v \notin \mathrm{Ker}(f - 4id)$
   (c) $u \in \mathrm{Ker}(f - 4id)^3$ et $u \notin \mathrm{Ker}(f - 4id)^2$
6. En déduire que
   (a) $\mathrm{dimKer}(f - 4id) = 1$ et $\mathrm{dimKer}(f - 4id)^2 = 2$
   (b) $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

7. Donner la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I_3$
2. Montrer que $B^2 = B + 2I_3$
3. Déterminer $m_B(X)$ le polynome minimal de B
4. En déduire que B est diagonalisable
5. (a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de B
   (b) en déduire son polynome caractéristique $P_B(X)$
6. (a) Vérifier que si λ est une valeur propre de A alors $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de B
   (b) En déduire que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$
7. En effectuant la division eclidienne de X^n par $m_B(X)$, Calculer B^n