Feuille d'exercices 1

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES - TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. — *Normes usuelles et boules unités.*

On définit sur $\mathbb{R}^n$ les trois applications suivantes :

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= |x_1| + \cdots + |x_n| \\ \|x\|_2 &:= \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2} \\ \|x\|_\infty &:= \max(|x_1|, \cdots, |x_n|) \end{aligned}$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. Calculer $\|(1,-2,0)\|_p$ pour $p \in \{1, 2, \infty\}$.
3. Montrer que les trois normes définies ci-dessus sont équivalentes. [On pourra montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$.]
4. Dessiner les boules unités de $\mathbb{R}^2$ associées à ces normes.

Exercice 2. — *Ouverts et fermés.*

Dire si les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 1,\ |y| \leqslant 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 4\}$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - e^{\sin y} \leqslant 12\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \ln(x^2+1) > 0\}.$$

Exercice 3. — *Intérieur, adhérence et frontière.*

1. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x > y + 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 2 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geqslant 4\} \cap \mathbb{Z}^2.$$

2. Déterminer la frontière des sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x^2 + y^2 < 2\} \qquad F =]-2, 1[\times [0, 1].$$

Exercice 4. — *Prolongement par continuité.*

On considère la fonction f définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$ par $f(x,y) = \frac{x + \sqrt[3]{y}}{x}$.

1. Déterminer la plus grande partie A de D telle que la restriction $f_{|A}$ de f à A soit la fonction constante égale à 2.
2. Quelle est la nature toplogique de A ?
3. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de A.
4. Peut-on prolonger la fonction f par continuité au point $(0,0)$?

Exercice 5. — *Prolongement par continuité (Bis).*
On considère la fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

1. Déterminer et représenter l'ensemble de définition D de f.
2. L'ensemble D est-il ouvert ou fermé ? Déterminer alors l'intérieur, l'adhérence ainsi que la frontière de D.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in D$, on a : $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
   Peut-on prolonger la fonction f par continuité sur l'adhérence de D ?

Exercice 6. — *Un compact de* $\mathbb{R}^3$*.*
On considère l'ensemble $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 2,\, y = x^2\,,\, z = 0\}$.

1. Écrire C comme l'image directe dans $\mathbb{R}^3$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une application continue γ.
2. En déduire que C est un compact de $\mathbb{R}^3$.