

(1) S_n は図のように,

$$S_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})a_n^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は初項 $\frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{8}$ の無限等比級数であり, $\left|\frac{1}{8}\right| < 1$ より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}$$