球対称ブラックホールの像

Jean-Pierre Luminet

0.1 image of bare black hole

シュバルツシルト時空

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

この時空を動く光子の軌道を考える。

0.1.1 光の測地線方程式

時空上での光の軌道を表現する式である「光の測地線方程式」を、粒子の場を表す方程式である「クラインゴルドン方程式」から導出する。

クラインゴルドン方程式

$$0 = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi(\boldsymbol{x}, t)$$

質量のない粒子である光では、項がひとつ減って

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi(\boldsymbol{x}, t) \\ &= \Box\phi(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned}$$

これを一般の時空に拡張すると

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j\phi = 0$$

ここで、

$$\phi = Ce^{i\frac{s}{\epsilon}}$$

と書くと

$$\begin{aligned} \nabla_j\phi &= \nabla\left(Ce^{\frac{is}{\epsilon}}\right) \\ &= (\nabla_j C)\, e^{\frac{is}{\epsilon}} + \frac{iC}{\epsilon}e^{\frac{is}{\epsilon}}\,(\nabla_j S) \\ \nabla_i\nabla_j\phi &= \nabla_i\left((\nabla_j C)\, e^{\frac{is}{\epsilon}} + \frac{iC}{\epsilon}e^{\frac{is}{\epsilon}}\,(\nabla_j S)\right) \\ &= (\nabla_i\nabla_j C)\, e^{\frac{is}{\epsilon}} + (\nabla_i S)(\nabla_j C)\frac{2i}{\epsilon}e^{\frac{is}{\epsilon}} + (\nabla_i\nabla_j S)\frac{iC}{\epsilon}e^{\frac{is}{\epsilon}} - (\nabla_i S)(\nabla_j S)\frac{1}{\epsilon^2}e^{\frac{2is}{\epsilon}} \\ g^{ij}\nabla_i\nabla_j\phi &= g^{ij}(\nabla_i\nabla_j C)\, e^{\frac{is}{\epsilon}} + g^{ij}(\nabla_i S)(\nabla_j C)\frac{2i}{\epsilon}e^{\frac{is}{\epsilon}} + g^{ij}(\nabla_i\nabla_j S)\frac{iC}{\epsilon}e^{\frac{is}{\epsilon}} - g^{ij}(\nabla_i S)(\nabla_j S)\frac{1}{\epsilon^2}e^{\frac{2is}{\epsilon}} \\ &= (\Box C)\, e^{\frac{is}{\epsilon}} + (\nabla_i S)\left(\nabla^i C\right)\frac{2i}{\epsilon}e^{\frac{is}{\epsilon}} + (\Box S)\frac{iC}{\epsilon}e^{\frac{is}{\epsilon}} - (\nabla_i S)\left(\nabla^i S\right)\frac{1}{\epsilon^2}e^{\frac{2is}{\epsilon}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} O(\epsilon^{-2}) : (\nabla_i S)\left(\nabla^i S\right) = 0 \\ O(\epsilon^{-1}) : 2\,(\nabla_i S)\left(\nabla^i C\right) + C\,(\Box S) = 0 \\ \quad O(0) : \Box C = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで、

$$(\nabla_i S)\left(\nabla^i S\right) = 0$$

は光の測地線方程式を表している。

$$\nabla_i S = k_i$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_i S)\left(\nabla^i S\right) \\
&= k_i k^i \\
&= \nabla_j (k_i k^i) \\
&= \nabla_j (k_i g^{ij} k_l) \\
&= g^{il} (\nabla_j k_l) k_i + g^{il} (\nabla_j k_i) k_l \\
&= 2(\nabla_j k_i) k^i \\
&= 2 g^{lj} (\nabla_j \nabla_i S) k^i \\
&= 2(\nabla_i g^{lj} k_j) k^i \\
&= 2(\nabla_i k^l) k^i \\
&= 2\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{dx^l}{d\lambda}\right) + {\Gamma^l}_{im}\left(\frac{dx^m}{d\lambda}\right)\right)\frac{dx^i}{d\lambda}
\end{aligned}
$$

光の測地線方程式

$$
0 = \left(\frac{d^2 x^l}{d\lambda^2}\right) + {\Gamma^l}_{im}\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^m}{d\lambda}\right)
$$

//
//

$$
\bar{w}_j = () \int
$$

メモ用

$$
1 = 1
$$

$$
\begin{cases} 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \tag{2}
$$

(1)