第五章 不定积分

在微分学中要解决：已知$F(x)$，求$F'(x)=f(x)$或求$dF(x)=F'(x)dx$；在不定积分中要解决：已知$F'(x)=f(x)$，求$F(x)$。

第1节 不定积分的概念

一、原函数与不定积分

原函数的定义：若$F(x),f(x)$在区间I上均有$F'(x)=f(x)$（或$dF(x)=f(x)dx$），则称$F(x)$为$f(x)$在I上的原函数。

由微分学可知：$F(x)\in D(a,b)$，则$F'(x)=f(x)$是唯一的（因为导数是极限，而极限是唯一的）。

定理1：若$f(x)$在区间I上有一个原函数，则$f(x)$必有无穷多个原函数。对于任何常数C，形如$F(x)+C$函数族包括了$f(x)$的全体原函数。

证：（1）先证$F(x)+C$是$f(x)$在I上的原函数；（2）再证对$f(x)$的任一个原函数$G(x)$，都有$G(x)=F(x)+C$。

（1）已知$F(x)$是$f(x)$在I上的原函数，有$F'(x)=f(x),\forall_x\in I$。则$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$，所以$F(x)+C$是$f(x)$的原函数，由$C$的任意性可知$f(x)$有无穷多个原函数。

（2）假设$G(x)$是$f(x)$在区间I上的任意原函数，有$G'(x)=f(x),\forall_x\in I$，$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,\forall_x\in I$，所以$G(x)-F(x)=C,\forall_x\in I$，所以$G(x)=F(x)+C$。

不定积分：函数$f(x)$的全体原函数叫做$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$。其中$f(x)$是被积函数，$f(x)dx$是被积表达式，$\int$为积分号，x为积分变量，C为积分常数。

例1：求$\int x^2dx$。

解：$\because (x^3)'=3x^2,(\frac{1}{3}x^3)'=x^2,\therefore \int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$。

例2：求$\int \frac{1}{x}dx$。

解：当$x>0$时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，$\ln x$是$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上的一个原函数，则有$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C,x\in(0,+\infty)$。当$x<0$时，在$(-\infty,0)$上，$[\ln(-x)]'=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}$，则$\ln(-x)$是$\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)$上的一个原函数，即$\int\frac{1}{x}dx=\ln(-x)+C,x\in(-\infty,0)$。所以$\int\frac{1}{x}dx=\ln(|x|)+C$。

二、不定积分的几何意义

在xoy平面上，$f(x)$的一个原函数$F(x)$，$y=F(x)$的图形（曲线）称为$f(x)$的一条积分曲线。由不定积分：$\int f(x)dx=F(x)+C$，得曲线族：$y=F(x)+C$。由$[F(x)+C]'=f(x)$，可知积分曲线上横坐标为x的点处的切线平行，切线斜率为$k=f(x)$。

三、不定积分的性质

性质1：$f(x)\in[a,b]$，如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$[\int f(x)dx]'=f(x)$（$d[\int f(x)dx]=f(x)dx,\int F'(x)dx=F(x)+C,\int dF(x)=F(x)+C$）。

证：假设有$F'(x)=f(x)$，则$[\int f(x)dx]'=[F(x)+C]'=f(x),\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$。

性质2：若常数$k\neq 0$，则$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$。

证：先证：$k\int f(x)dx$是$kf(x)$的原函数。因为$[k\int f(x)dx]'=kf(x)$，$k\int f(x)dx$含有任意常数，所以$k\int f(x)dx$是$kf(x)$的全体原函数，所以$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$。

性质3：$\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$。

证：$\because[\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx]'=[\int f_1(x)dx]'\pm[\int f_2(x)dx]'=f_1(x)\pm f_2(x)$，又$\because\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$含有任意常数，$\therefore\int[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$。

四、基本积分表

根据求导数运算与求不定积分运算是互逆运算，由导数公式可得到相应的积分公式。

1. $\int kdx=kx+c$
2. $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$
3. $\int\frac{1}{x}dx=\ln(|x|)+C$
4. $\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$

$\vdots$

例1：求$\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$。

解：原式$=\int\frac{1-2x+x^2}{x\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{3}{2}}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}-2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$$

例2：求$\int(e^{\frac{x}{2}}+2^x)^2dx$。

解：原式$=\int(e^x+2e^{\frac{x}{2}}2^x+2^{2x})dx=\int e^xdx+2\int(2e^{\frac{1}{2}})^xdx+\int 4^xdx=e^x+\frac{4e^{\frac{x}{2}}2^x}{1+2\ln 2}+\frac{4^x}{2\ln 2}+C$。

例3：求$\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$。

解：原式$=\int\frac{(1+x^2)+x}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx+\int\frac{x}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=\ln(|x|)+\arctan x+C$。

例4：求$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$。

解：原式$=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx-\int\frac{\sin^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{1}{\sin^2x}dx-\int\frac{1}{\cos^2x}dx=-\cot x-\tan x+C$。

例5：求$\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx$。

解：原式$=\int\frac{4}{(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2}dx=4\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-4\cot x+C$。

例6：已知$F'(x)=(2^x+2^{-x})^2$，且$F(0)=0$，求$F(x)$。

解：$F'(x)=(2^x)^2+2\cdot2^x\cdot2^{-x}+(2^{-x})^2=4^x+2+(\frac{1}{4})^x$，
$F(x)=\int4^xdx+\int2dx+\int(\frac{1}{4})^xdx=\frac{4^x}{2\ln2}+2x+\frac{4^{-x}}{-2\ln2}+C$。$F(0)=\frac{1}{2\ln2}+0+\frac{1}{-2\ln2}+C=0$，所以$C=0$
，于是$F(x)=\frac{4^x}{2\ln2}+2x+\frac{4^{-x}}{-2\ln2}$。

第2节 换元积分法

基本积分方法：

1. 换元积分法
    1. 第一换元法
    2. 第二换元法
2. 分部积分法

一、第一换元积分法

基本原理：$F(u)$是$f(u)$的一个原函数，$u=u(x)$有连续的一阶导数$u'(x)$，则$\int f[u(x)]u'(x)dx=F[u(x)]+C$。（本质上是复合函数求导的逆运算）

证明：由题设$F'(u)=f(u)\Longrightarrow\int f(u)du=F(u)+C$，由复合函数微分法，有
$dF[u(x)]=F'(u)u'(x)dx=f(u)u'(x)dx=f[u(x)]d[u(x)]$。故
$\int f[u(x)]u'(x)dx=\int f[u(x)]d[u(x)]=[\int f(u)du]_{u=u(x)}=[F(u)+C]_{u=u(x)}=F[u(x)]+C$。

怎样利用基本原理来求$\int g(x)dx$?

答：考虑把被积函数$g(x)$化为$g(x)=f[u(x)]u'(x)$形式，那么$\int g(x)dx=\int f[u(x)]u'(x)dx=[\int f(u)du]_{u=u(x)}$。检查$\int f(u)du$是不是基本积分表中的积分，如果有$\int f(u)du=F(u)+C$，则有
$\int g(x)dx=[\int f(u)du]_{u=u(x)}=[F(u)+C]_{u=u(x)}=F[u(x)]+C$。

例1：求$\int\cos(3x)dx$。

解：令$u=3x,u'=3$，被积式中缺少常数3，现解决如下：
$\int\cos(3x)dx=\frac{1}{3}\int\cos(3x)\cdot3dx=\frac{1}{3}\int\cos(3x)d(3x)=\frac{1}{3}\sin(3x)+C$。

例2：求$\int\frac{1}{3+2x}dx$。

解：令$\frac{1}{3+3x}=\frac{1}{u},u=3+2x,u'(x)=2$。原式$=\frac{1}{2}\int\frac{2}{3+2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln(|u|)+C=\frac{1}{2}\ln(|3+2x|)+C$。

例3：求$\int x\sqrt{1-x^2}dx$。

解：$\sqrt{1-x^2}=u^{\frac{1}{2}},u=1-x^2,u'(x)=-2x$。被积式中有因式$x$，缺少常数$-2$。原式
$=\int-(\frac{1}{2})\cdot(-2x)\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)\overset{u=1-x^2}{\Longrightarrow}-\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$
$=-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

例4：求$\int \tan x dx$。

解：原式$= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x dx = -\int \frac{1}{\cos x}(\cos x)'dx \overset{u=\cos x}{\Longrightarrow} \int \frac{1}{u}du = -\ln(|\cos x|)+C$。

例5：求$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$。

解：原式$= \int \frac{1}{a^2}\cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx$，令$u=\frac{x}{a}, u'(x)=\frac{1}{a}$。则原式

$= \int \frac{1}{a}\cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\cdot \frac{1}{a}dx \overset{u=\frac{x}{a}}{\Longrightarrow} \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a}+C$。

例6：求$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$。

解：$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = (\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a})\cdot \frac{1}{2a}$。

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\int [\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}]dx = \frac{1}{2a}[\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx]$
$= \frac{1}{2a}[\ln(|x-a|)-\ln(|x+a|)]+C = \frac{1}{2a}\ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$

例7：求$\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx$。

解：原式$= \int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4}d(x+2) = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+2}{2})+C$（参照例5结论）。

例8：求$\int \csc x dx$。

解：原式$= \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot \cos^2\frac{x}{2}}dx$

$= \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}d(\frac{x}{2}) = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d(\tan\frac{x}{2}) = \ln(|\tan\frac{x}{2}|)+C$

$\because \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$，所以$\int \csc x dx = \ln(|\csc x - \cot x|)+C$。

例9： 求$\int \sec x dx$。

解：
$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}dx = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}d(x+\frac{\pi}{2}) = \ln(|\csc(x+\frac{\pi}{2})-\cot(x+\frac{\pi}{2})|)+C = \ln(|\sec x + \tan x|)+C$
。

例10：求$\int \sin^2(x)dx$。

解：原式$= \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos(2x)d(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)+C$。

例11：求$\int \sin^3(x)dx$。

解：原式$= \int \sin x \sin^2(x)dx = -\int \sin^2(x)d(\cos x)$
$= -\int [1-\cos^2(x)]d(\cos x) = -\int d(\cos x) + \int \cos^2(x)d(\cos x)$
$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3(x)+C$

例12：求$\int \sin^2(x)\cos^3(x)dx$。

解：原式$= \int \sin^2(x)\cos^2(x)\cos(x)dx = \int \sin^2(x)\cos^2(x)d(\sin x)$
$= \int [\sin^2(x)(1-\sin^2(x)]d(\sin x) = \int \sin^2(x)d(\sin x) - \int \sin^4(x)d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) - \frac{1}{5}\sin^5(x)+C$

例13：求$\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx$。

解：原式$=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2(x)dx=\int \frac{1}{4}\sin^2(2x)(\frac{1+\cos(2x)}{2})dx$
$$=\frac{1}{8}\int \sin^2(2x)dx+\frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)dx$$
$$=\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos(4x)}{2}dx+\frac{1}{16}\int \sin^2(2x)\cos(2x)d(2x)$$
$$=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int \cos(4x)dx+\frac{1}{16}\int \sin^2(2x)d[\sin(2x)]$$
$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin(4x)+\frac{1}{48}\sin^3(2x)+C$$

例4：求$\int \sec^6 xdx$。

解：原式$=\int \sec^4 x\sec^2 xdx=\int \sec^4 xd(\tan x)=\int(\sec^2 x)^2d(\tan x)=\int(1+\tan^2 x)^2d(\tan x)$
$$=\int[1+2\tan^2 x+\tan^4 x]d(\tan x)=\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C$$

二、第二换元积分法

第一换元法：通过变量$u=u(x),\int f[u(x)]u'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F[u(x)]+C$，有时候$\int f(x)dx$不易求出，用变量替换，即用$x=\phi(t)$代入原式。而$\int f(x)dx=\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt$容易求出（第二换元）

基本原理：设$x=\phi(t)$是单调的，有连续的导数，且$\phi'(t)\neq 0$，$f[\phi(t)]\phi'(t)$有原函数$F(t)$，则有
$\int f(x)dx=\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt=F(t)+C=F[\phi^{-1}(x)]+C$。其中$t=\phi^{-1}(x)$是$x=\phi(t)$的反函数。

证：只须验证$\frac{d(F[\phi^{-1}(x)])}{dx}=f(x)$。因为$x=\phi(t)$单调且连续，所以$x=\phi(t)$的反函数$t=\phi^{-1}(x)$存在且连续，根据复合函数微分法与反函数微分法，令$t=\phi^{-1}(x)$，有
$\frac{d(F[\phi^{-1}(x)])}{dx}=\frac{dF(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=f[\phi(t)]\phi'(t)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=f[\phi(t)]\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)}=f[\phi(t)]=f(x)$。所以$F[\phi^{-1}(x)]$是$f(x)$的一个原函数，于是$\int f(x)dx=F[\phi^{-1}(x)]+C$。

例1：求$\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}dx$。

解：令$\sqrt{1+x}=t,\Longrightarrow x=t^2-1,dx=2tdt$，原式$=\int \frac{1}{1+t}\cdot 2tdt=2\int \frac{t}{1+t}dt=2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt=2[\int dt-\int \frac{1}{t+1}dt]$
$$=2[t-\ln(|t+1|)]+C=2[\sqrt{1+x}-\ln(|1+\sqrt{1+x}|)]+C$$

例2：求$\int \sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$。

解：$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$。根据三角公式：$1-\sin^2 t=\cos^2 t$，令$\frac{x}{a}=\sin t$，即
$x=a\sin t,(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$。于是有
$\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a|\cos t|=a\cos t,(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$,
$dx=d(a\sin t)=a\cos tdt$。所以$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\cdot a\cos tdt=a^2\int \cos^2 tdt=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$
$$=\frac{a^2}{2}[t+\frac{1}{2}\int \cos(2t)d(2t)]=\frac{a^2}{2}[t+\frac{1}{2}\sin(2t)]+C$$

其中，换变量t为变量x，有两种方法：

1. 利用三角公式：

   $\because x=a\sin t\Longrightarrow \sin t=\frac{x}{a},t=\arcsin\frac{x}{a},\frac{1}{2}\sin(2t)=\frac{1}{2}\cdot 2\sin t\cos t=\sin t\cos t,$

   $\because \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

   $\therefore \frac{1}{2}\sin(2t)=\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

   于是$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}[\arcsin\frac{x}{\alpha}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}]+C$。

2. 利用直角三角形法：

   $\because x=a\sin t,\sin t=\frac{x}{a}\Longrightarrow t=\arcsin\frac{x}{a}$，由直角三角形，得$\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$,

   $\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}[t+\sin t\cos t]+C=\frac{a^2}{2}[\arctan\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}]+C$。

例3：求$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx,(a>0)$。

解：$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})}=a\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}$，由三角公式，$1+\tan^2 t=\sec^2 t$，若令
$\frac{x}{a}=\tan t\Longrightarrow x=a\tan t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，
$\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}=a\sqrt{1+\tan^2 t}=a\sqrt{\sec^2 t}=a|\sec t|=a|\frac{1}{\cos t}|=a\sec t,(\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$，

$dx=d(a\tan t)=a\sec^2 tdt$，原式$=\int\frac{1}{a\sec t}a\sec^2 tdt=\int\sec tdt=\ln(|\sec t+\tan t|)+C$，由$\tan t=\frac{x}{a}$，则原式
$=\ln(|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}|)+C=\ln(|\sqrt{a^2+x^2}+x|)+C_1,(C_1=C+\ln a)$。

例4：求$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$。

解：注意被积函数$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$的定义域为$|x|>a$。即$x>a>0$或$x<-a<0$。

当$x>a>0$时，$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\frac{x^2}{a^2}-1)}=a\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}$。由三角公式：
$1+\tan^2 t=\sec^2 t\Longrightarrow\tan^2 t=\sec^2 t-1$。令$\frac{x}{a}=\sec t$，即$x=a\sec t,(0<t<\frac{\pi}{2})$，
$\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\sec^2 t-1}=a\sqrt{\tan^2 t}=a\tan t$，$dx=d(a\sec t)=a\sec t\tan tdt$，
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{1}{a\tan t}a\sec t\tan tdt=\int\sec tdt=\ln(\sec t+\tan t)+C$
$=\ln(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a})+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C-\ln a=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1$

，其中$C_1=C+\ln a$。

当$x<-a<0$时，令$u=-x>0$，$dx=-du$，
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{-1}{\sqrt{u^2-a^2}}du=-\int\frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}du,$ ，其
$\because u=-x>a>0,\therefore -\int\frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}dx=-\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+C$
$=-\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+C=\ln(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}})+C=\ln(\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2})+C=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})-2\ln a+C$
$=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C_1$
中$C_1=C-2\ln a$。

以上两个结果综合在一起，得到：$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$。

小结：为了去掉被积函数中的根式，作换元。

1. $\sqrt{1+x}$，令$\sqrt{1+x}=t,x=t^2-1$;
2. $\sqrt{a^2-x^2}$，令$x=a\sin t$;
3. $\sqrt{x^2+a^2}$，令$x=a\tan t$;
4. $\sqrt{x^2-a^2}$，令$x=a\sec t$。

例5：求$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$。

解：$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}}d(x+1)$，令$x+1=\sqrt{2}\tan t,dx=\sqrt{2}\sec^2 tdt$。原式
$=\int\frac{1}{\sqrt{2\tan^2 t+2}}\sqrt{2}\sec^2 tdt=\int\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\tan^2 t+1}}\sqrt{2}\sec^2 tdt=\int\frac{1}{\sec t}\sec^2 tdt$
$=\int\sec tdt=\ln(|\sec t+\tan t|)+C$

因为$\tan t=\frac{x+1}{\sqrt{2}}$，作直角三角形，原式$=\ln(|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt{2}}+\frac{x+1}{\sqrt{2}}|)+C=\ln(|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|)+C_1$，其中
$C_1=C-\frac{1}{2}\ln 2$。

例6：求$\int\frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$。

解：$\int\frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-(\frac{1}{4}-x+x^2)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx$

$$=\int\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}})^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}})^2}}d(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}})$$

令$u=\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$，原式$=\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\arcsin u+C=\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$。

小结：三项的话先进行配方，再看具体形式使用上述根式中对应的换元规则。

第3节 分部积分法

基本原理：设$u=u(x),v=v(x)$具有连续的一阶导数，则$\int u(x)v'(x)dx=u(v)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$。即$\int udv$（难）$=uv-\int vdu$（易）。

证明：根据两个函数乘积的导数公式，
$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\Longrightarrow u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'-u'(x)v(x)$，作积分
$\int u(x)v'(x)dx=\int[u(x)v(x)]'dx-\int u'(x)v(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$，即$\int udv=uv-\int vdu$。

例1：求$\int xe^x dx$。

解：令$u=x,dv=e^x dx,du=dx,v=e^x,\int xe^x dx=\int xd(e^x)=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C$

注意：选择u和dv：

1. 由dv求v比较容易；
2. 求$\int vdu$比求$\int udv$容易。

例2：求$\int x\cos xdx$。

解：令$u=x,dv=\cos xdx,du=dx,v=\sin x$,
$\int x\cos xdx=\int xd(\sin x)=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$。

例3：求$\int\arctan xdx$。

解：$\int\arctan xdx=\arctan x\cdot x-\int xd(\arctan x)=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$
$\quad=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}2xdx=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

例4：求$\int(x+1)^2\sin xdx$。

解：$\int(x+1)^2\sin xdx=\int(x+1)^2d(-\cos x)=-(x+1)^2\cos x+\int\cos xd[(x+1)^2]$
$\quad=-(x+1)^2\cos x+\int 2(x+1)\cos xdx=-(x+1)^2\cos x+2\int(x+1)d(\sin x)$
$\quad=-(x+1)^2\cos x+2[(x+1)\sin x-\int\sin xdx]$
$\quad=-(x+1)^2\cos x+2(x+1)\sin x+2\cos x+C$

有些不定积分，经过两次分部积分后又回到原来的积分，且不能消去，通过解方程法，求出不定积分。

例5：$\int\sec^3 xdx$。

解：$\int\sec^3 xdx=\int\sec x\sec^2 xdx=\int\sec xd(\tan x)$
$\quad=\sec x\tan x-\int\tan xd(\sec x)=\sec x\tan x-\int\tan x\sec x\tan xdx$
$\quad=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)dx=\sec x\tan x-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx$

即$2\int\sec^3 xdx=\sec x\tan x+\int\sec xdx=\sec x\tan x+\ln(|\sec x+\tan x|)+C$，即
$\int\sec^3 xdx=\frac{1}{2}[\sec x\tan x+\ln(|\sec x+\tan x|)]+C$。

例6：$\int e^{ax}\sin bxdx$。

解：$\int e^{ax}\sin bxdx=\int e^{ax}d(-\frac{\cos bx}{b})=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\int\frac{\cos bx}{b}d(e^{ax})$

$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}d(\frac{\sin bx}{b})$

$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}[\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\int\frac{\sin bx}{b}d(e^{ax})]$

$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx$

移项后，得：$(1+\frac{a^2}{b^2})\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx+C$，所以

$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{b^2}{a^2+b^2}[-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx+C]$

$=[-\frac{b}{a^2+b^2}\cos bx+\frac{a}{a^2+b^2}\sin bx]e^{ax}+\frac{b^2C}{a^2+b^2}$

$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx-b\cos bx]+C_1$

其中$C_1=\frac{b^2C}{a^2+b^2}$。

小结：设n为正整数：

1. $\int x^ne^{ax}dx,\int x^n\sin bxdx,\int x^n\cos bxdx$，可以令$u=x^n,dv=e^{ax}dx$或$dv=\sin bxdx$或$dv=\cos bxdx$；
2. $\int x^n\ln xdx,\int x^n\arcsin xdx,\int x^n\arctan dx$，可以令$u=\ln x,dv=x^ndx$或$u=\arcsin x,dv=x^ndx$或$u=\arctan x,dv=x^ndx$；

第4节 几类函数的积分法

一、有理函数的积分

有理函数：由两个多项式的商所表示的函数，记为$R(x)$。

$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$，其中$m,n$是非负的整数，$a_i(i=0,1,\cdots,m),b_j(j=0,1,\cdots,n)$为常数，$a_0\neq0,b_0\neq0$，且$P_m(x)$与$Q_n(x)$没有公因式。

当$m\geq n$，称$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$为有理假分式；当$m<n$，称$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$为有理真分式。通过多项式除法（长除法），可以把有理假分式化为多项式+有理真分式的形式。

讨论有理真分式的分解问题：

$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$是有理真分式，1. 分母$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$在实数范围内总可以分解为一次因式与二次因式的乘积，即$Q_n(x)=(x-a)^\alpha\cdots(x-b)^\beta(x^2+px+q)^\lambda\cdots(x^2+\gamma x+s)^\mu$，其中$p^2-4q<0;\cdots;\gamma^2-4s<0,\alpha+\cdots+\beta+2\lambda+\cdots+2\mu=n$，$\alpha,\cdots,\beta,\cdots,\lambda,\cdots,\mu$是正整数；2. 若$Q_n(x)$有上述的分解式，真分式$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$可以分解为以下的"部分分式"之和：

$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_\alpha}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_\beta}{x-b}$

$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\lambda}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{x^2+px+q}+\cdots$

$+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+\gamma x+s)^\mu}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+\gamma x+s)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{M_\mu x+N_\mu}{x^2+\gamma x+s}$

上式右端的分式叫做有理函数的部分分式。

具体分解时，要注意：

1. 在分母$Q_n(x)$的分解式中，如果有因式$(x-a)^k$（$k\geq1$的正整数），在$R(x)$的分解式中有k个部分分式：$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)}$；
2. 在分母$Q_n(x)$的分解式中，如果有因式$(x^2+px+q)^k$（$p^2-4q<0$，$k\geq1$正整数），在$R(x)$的分解式中有k个部分分式：$\frac{M_1x-N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x-N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx-N_k}{x^2+px+q}$

例1：把$\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}$分解为部分分式之和。

解：$x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$，$\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}=\frac{x+2}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)}=\frac{A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)}{x(x-1)^2}$，去分母后得：$x+2=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)=(A+C)x^2+(-2A+B-C)x+A$，恒等式两边$x$的同次幂的系数要相等：

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ -2A+B-C &= 1 \\ A &= 2 \end{cases} \tag{1}$$

解得$A=2,B=3,C=-2$，所以$\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}=\frac{2}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)}$。

也可以根据恒等式：$x+2=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$，令$x=0\Longrightarrow A=2$，令$x=1\Longrightarrow B=3$，将$A=2,B=3$代入恒等式，得：$x+2=2(x-1)^2+3x+Cx(x-1)$，令$x=2\Longrightarrow C=-2$。

例2：把$\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}$分解为部分分式之和。

解：$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$，$\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，上式两边去分母，得$2x=A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)=(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)$，比较恒等式$x$的同次幂的系数：

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ C-B &= 2 \\ A-C &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

解得$A=1,B=-1,C=1$。所以$\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+1}$。

有理函数$R(x)$的积分：$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ = （多项式）+（有理真分式）=（多项式）+（部分分式之和）

作$\int R(x)dx$= 多项式积分与部分分式的积分之和。

求部分分式的积分：$\int\frac{A}{x-a}dx,\int\frac{A}{(x-a)^n}dx,\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx,\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx$。

1. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{1}{x-a}dx=A\ln(|x-a|)+C$。
2. $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1}+C=\frac{A}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$。
3. $\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2Bx+2C}{x^2+px+q}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2Bx+Bp)+(2C-Bp)}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$
   $=\frac{B}{2}\int\frac{1}{x^2+px+q}d(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2})^2}$
   $=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}+C_1$
   $=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_1,(p^2+4q<0)$
4. $\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx,(p^2-4q<0)$：

$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2Bx+Bp+2C-Bp}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$
$=\frac{B}{2}\int(x^2+px+q)^{-n}d(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{1}{[(x+\frac{p}{2})^2+(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2})^2]^n}dx$
$=\frac{B}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+C_1+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{1}{[(x+\frac{p}{2})^2+(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2})^2]^n}dx$

令$u=(x+\frac{p}{2}), dx=du, a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$，

$I_n=\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}du=\frac{1}{a^2}\int\frac{(u^2+a^2)-u^2}{(u^2+a^2)^n}du=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}du+\frac{1}{a^2}\int\frac{u^2}{(u^2+a^2)^n}du$

$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int u\frac{1}{(u^2+a^2)^n}udu=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\int u\frac{1}{(u^2+a^2)^n}d(u^2+a^2)$

$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{1}{1-n}ud[(u^2+a^2)^{1-n}]=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2(1-n)}\int ud[(u^2+a^2)^{1-n}]$

$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2(1-n)}[u(u^2+a^2)^{1-n}-\int(u^2+a^2)^{1-n}du]$

$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2(1-n)}[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}-\int\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}du]$

$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2(1-n)}\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2a^2(1-n)}I_{n-1}=\frac{3-2n}{2a^2(1-n)}I_{n-1}-\frac{u}{2a^2(1-n)(u^2+a^2)^{n-1}}$

当$n=1$时，$I_1=\int\frac{1}{u^2+a^2}du=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$。

例3：求$\int\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}dx$。

解：$\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+1}$，$\int\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}dx=\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{x-1}{x^2+1}dx=\ln(|x-1|)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+C$
。

二、三角函数的有理式

三角函数的有理式：由三角函数（$\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$）及常数经过有限次四则运算所构成的数学表达式。

注意到：$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\sec=\frac{1}{\cos x},\csc x=\frac{1}{\sin x}$，因此，三角函数有理式可以用正弦函数、余弦函数及常数经过有限次四则运算来表达。

1. 三角函数有理式可表达为$R(\sin x,\cos x)$，其不定积分为$\int R(\sin x,\cos x)dx$。其中的$\sin x,\cos x$都可以用$\tan\frac{x}{2}$的有理式来表达，即$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$，

   $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}})=\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}}(1-\tan^2\frac{x}{2})=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$，

   如果作变换：$u=\tan\frac{x}{2}, x=2\arctan u, dx=\frac{2}{1+u^2}du, \sin x=\frac{2u}{1+u^2}, \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，

   $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2})\frac{2}{1+u^2}du$为有理函数的积分。

例1：求$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$。

解：令$u=\tan\frac{x}{2}$，原式$=\int\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})}\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{u^2+2u+1}{2u}du=\int\frac{u}{2}du+\int du+\int\frac{1}{2u}du$

$$=\frac{1}{4}u^2+u+\frac{1}{2}\ln(|u|)+C=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(|\tan\frac{x}{2}|)+C$$

2. $\int R(\tan x)dx$，包括$\int R(\tan x)dx,\int R(\sin^2x,\cos^2x)dx,\int R(\sin 2x\cos 2x)dx$。用代换 $u=\tan x, x=\arctan u, dx=\frac{1}{1+u^2}du$，$\sin^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\cdot\cos^2x=\tan^2x\cdot\frac{1}{1+\tan^2x}=\frac{u^2}{1+u^2}$，
   $\cos^2x=1-\sin^2x=1-\frac{u^2}{1+u^2}=\frac{1}{1+u^2}$，$\sin 2x=\frac{2u}{1+u^2},\cos 2x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$。

例2：$\int\frac{\tan^2x}{5+4\cos 2x}dx$。

解：令$u=\tan x$，原式$=\int\frac{u^2}{5+4\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{1}{1+u^2}du=\int\frac{u^2}{9+u^2}du=\int(1-\frac{9}{9+u^2})du=u-9\int\frac{1}{3^2+u^2}du$

$$=u-9\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{u}{3}+C=\tan x-3\arctan(\frac{\tan x}{3})+C$$

三、两种无理函数的积分

1. $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}})dx, n\geq 2, a,b,c,h$为常数，$ac\neq 0$。当$c=0,h=1$时，$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$。令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\Longrightarrow t^n=\frac{ax+b}{cx+h}\Longrightarrow t^n(cx+h)=ax+b\Longrightarrow ht^n-b=(a-t^nc)x$，$\therefore x=\frac{ht^n-b}{a-ct^n}=\phi(t)$（为有理函数），$dx=\phi'(t)dt$，$\phi'(t)$仍为有理函数。

   $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}})dx=\int R[\phi(t),t]\phi'(t)dt$（有理函数积分）

例1：求$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$。

解：令$t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}, t^2=\frac{x+1}{x}, t^2x=x+1, x=\frac{1}{t^2-1}, dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$。所以

$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx=\int(t^2-1)t\frac{(-2t)}{(t^2-1)^2}dt=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=-2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt$

$=-2t+\ln(|\frac{t-1}{t+1}|)+C=-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\ln(|x(\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1)^2|)+C$

2. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx, (a\neq 0)$。

思路：先对ax^2+bx+c进行配方，然后对根式选择适当的三角变换去掉根式（第二换元法），化为三角函数有理式的积分。

例2：$\int\frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}dx$。

解：原式$=\int\frac{1}{1+\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$，令$x+1=\tan t, dx=\sec^2 tdt$。原式

$=\int\frac{1}{1+\sqrt{\tan^2 t+1}}\sec^2 tdt=\int\frac{\sec^2 t}{1+\sec t}dt=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{1+\frac{1}{\cos t}}dt$

$=\int\frac{1}{\cos t(1+\cos t)}dt=\int(\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{1+\cos t})dt=\int\sec tdt-\int\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt$

$=\ln(|\sec t+\tan t|)-\int\sec^2\frac{t}{2}d(\frac{t}{2})=\ln(|\sec t+\tan t|)-\tan\frac{t}{2}+C$

由$x+1=\tan t$，画直角三角形，可得$\sec t=\sqrt{x^2+2x+2}, \tan t=x+1, \tan\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}$，所以原式$=\ln(|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|)-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}+C$。