第二章 极限

第1节 数列的极限

一、数列极限的定义

`数列`：设有定义在自然数集N上的函数$U_n=f(n)$，称为整标函数，把函数值u_n依照自然数n的顺序排列出来的无穷数串：$u_1,u_2,u_3,\dots,u_n,\dots$称为数列（序列），简记为$\{u_n\}$。第$n$项$u_n$称为**一般项**。

$$\{u_n\}:\ u_1,u_2,u_3,\dots,u_n,\dots \tag{1}$$

例如：

$$\{\frac{n}{n+1}\}:\ \frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots \tag{2}$$

$$\{\frac{1}{2^n}\}:\ \frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\dots,\frac{1}{2^n},\dots \tag{3}$$

$$\{\frac{1+(-1)^n}{2}\}:\ 0,1,0,\dots,\frac{1+(-1)^n}{2},\dots \tag{4}$$

$$\{\frac{2n+(-1)^{n-1}}{n}\}:\ 3,\frac{3}{2},\frac{7}{3},\dots,\frac{2n+(-1)^{n-1}}{n},\dots \tag{5}$$

设 $U_n=\frac{2n+(-1)^{n-1}}{n}$, 在数学上如何描述当$n\to\infty$时，$u_n$的变化趋势如何?

那么，一般来说，对于两个常数：a,b，描述a,b两数的接近程度时用$|a-b|$。

讨论：$u_n=\frac{2n+(-1)^{n-1}}{n}=2+\frac{(-1)^{n-1}}{n},u_n-2=\frac{(-1)^{n-1}}{n},|u_n-2|=\frac{1}{n}$。当$n$越大，$\frac{1}{n}$越小，$u_n$与2越接近。给定一个很小的正数$\frac{1}{100}$，则由$|u_n-2|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，只要$n>100$，$|u_n-2|<\frac{1}{100}$。即：

$$|u_n-2|<\frac{1}{100}\Leftrightarrow 2-\frac{1}{100}<u_n<2+\frac{1}{100}\Leftrightarrow(2-\frac{1}{100},2+\frac{1}{100})=N(2,\frac{1}{100}) \tag{6}$$

亦即当$n>100$时，$|u_n-2|<\frac{1}{100}$说明$u_{101},u_{102},u_{103},\dots$都落在$N(2,\frac{1}{100})$邻域内。当给定很小的正数如$\frac{1}{1000}$，同理可推出当$n>1000$时，$|u_n-2|<\frac{1}{1000}$，即$u_{1001},u_{1002},u_{1003},\dots$都落在$N(2,\frac{1}{1000})$邻域内。

几何观点：无论给定多么小的正数$\epsilon>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时的一切u_n满足$|u_n-2|<\epsilon$。从几何上看，给定邻域$N(2,\epsilon)$，无论ϵ多么小，总存在N，使得当$n>N$时，$u_{N+1},u_{N+2},u_{N+3},\dots$都落在$N(2,\epsilon)$邻域内。

`数列极限的定义`：已知数列$\{u_n\}$和常数A，如果对任意给定的**正数ϵ**，都存在正整数N，使得对于$n>N$的一切u_n，不等式$|u_n-A|<\epsilon$恒成立，则称当$n\to+\infty$时，$\{u_n\}$以A为极限，或$\{u_n\}$**收敛于A**，记为$\lim_{n\to\infty}u_n=A$或$u_n\to A\ (n\to+\infty)$。如果$\{u_n\}$无极限，则称$\{u_n\}$**发散**$(n\to+\infty)$。

说明：

1. 定义中的ϵ是任意给定的，只有任意给定$\epsilon>0$，不等式$|u_n-A|<\epsilon$才能表达u_n与A无限接近；
2. 定义中存在的N与ϵ有关，记为$N(\epsilon)$，随着ϵ的给定而选定N，且不唯一；
3. 定义只描述了$n\to+\infty$时，$u_n\to A$，并**没有提供**求A的方法，**但可以**利用定义证明某常数A是否为某数列u_n的极限；

4. 几何意义：任意给定邻域$N(A,\epsilon)$，则必存在N，使$u_{N+1},u_{N+2},...$落在$N(A,\epsilon)$内。

例1、证明$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^{n-1}}{n}=2$。

证：$u_n=\frac{2n+(-1)^{n-1}}{n}=2+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，$|u_n-2|=|\frac{(-1)^{n-1}}{n}|=\frac{1}{n}$，对于任意给定$\epsilon>0$，为了使$|u_n-2|<\epsilon$，只须$\frac{1}{n}<\epsilon$就可以了。或者说$n>\frac{1}{\epsilon}$就可以了。所以对于任意给定的$\epsilon>0$，取正整数$N=[\frac{1}{\epsilon}]$，则当$n>N$时，恒有不等式$|u_n-2|=|\frac{2n+(-1)^{n-1}}{n}-2|=\frac{1}{n}<\epsilon$。按照数列极限的定义，可知$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^{n-1}}{n}=2$。

例2、证明当$n\to\infty$时，$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\to\frac{1}{3}$。

证：$u_n=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$，$|u_n-\frac{1}{3}|=|-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}|=|\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}|=\frac{1}{2n}|1-\frac{1}{3n}|<\frac{1}{2n}$，对任意给定的$\epsilon>0$，由$\frac{1}{2n}<\epsilon$，可得$n>\frac{1}{2\epsilon}$，即取$N=[\frac{1}{2\epsilon}]$，当$n>N$时，恒有$|u_n-\frac{1}{3}|<\frac{1}{2n}<\epsilon$。按照数列极限的定义，由$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$。

注意：利用数列极限定义验证$lim_{n\to\infty}u_n=A$，关键步骤是指明定义中N确实存在，N是不唯一的。比如已知：$|u_n-A|<\varphi(n)$，那么由$\varphi(n)<\epsilon$，求出N，这样当$n>N$时，$\varphi(n)<\epsilon$，从而$|u_n-A|<\varphi(n)<\epsilon$。

例3、证明$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$。

证：$|u_n-0|=|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n}$，令$\varphi(n)=\frac{1}{n}$，对于任意给定$\epsilon>0$，只要$\varphi(n)=\frac{1}{n}<\epsilon$，即$n>\frac{1}{\epsilon}$时，$|u_n-0|<\frac{1}{n}<\epsilon$，所以对于任意给定的$\epsilon>0$，取正整数$N=[\frac{1}{\epsilon}]$，则当$n>N$时，恒有不等式$|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0|<\epsilon$。按极限的定义，$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$。

二、收敛数列的两个性质

收敛数列的两个性质：

1. 唯一性
2. 有界性（先给出有界数列的定义，再证明收敛数列的有界性）

定理1：如果一数列的极限存在，则极限值是唯一的。

证：使用反证法。假若数列$\{u_n\}$收敛且极限不唯一，即同时有：$\lim_{n\to\infty}u_n=a$，$\lim_{n\to\infty}u_n=b$，且$a<b$。

由$\lim_{n\to\infty}u_n$存在，根据定义，对于任意给定的$\epsilon=\frac{b-a}{4}>0$，因为$\lim_{n\to\infty}u_n=a$，必存在正整数N_1，使得当$n>N_1$时，恒有$|u_n-a|<\frac{b-a}{4}$；又因为$\lim_{n\to\infty}u_n=b$，必存在正整数N_2，使得当$n>N_2$时，恒有$|u_n-b|<\frac{b-a}{4}$。取$N=\max(N_1,N_2)$，则当$n>N$时，上面两个不等式同时成立。则$b-a=b-u_n+u_n-a\le|b-u_n|+|u_n-a|<\frac{b-a}{4}+\frac{b-a}{4}=\frac{b-a}{2}$，而$b-a<\frac{b-a}{2}$是不可能的，即$\lim_{n\to\infty}u_n$是唯一的。

例1、证明数列$\{u_n\}=(-1)^n\frac{n}{n+1}$是发散的。

证：分析：$\{u_n\}:-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},...$，当$n$取奇数$2m-1(m\in N)$，得数列$-\frac{1}{2},-\frac{3}{4},-\frac{5}{6},...,-\frac{2m-1}{2m},...$，数列$\{u_{2m-1}\}$从$-\frac{1}{2}$开始单调减；当$n$取偶数$2m(m\in N)$，得数列$\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{6}{7},...,\frac{2m}{2m+1},...$，数列$\{u_{2m}\}$从$\frac{2}{3}$开始单调增。
$u_2-u_1=\frac{2}{3}-(-\frac{1}{2})=\frac{7}{6}>1$。

使用反证法。假若$u_n\to A\ (n\to\infty)$，（A是唯一的）。由极限的定义：给定正数$\epsilon=\frac{1}{2}>0$，必存在正整数N，当$n>N$时，恒有$|u_n-A|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow A-\frac{1}{2}<u_n<A+\frac{1}{2}$，即$u_n\in(A-\frac{1}{2},A+\frac{1}{2}),(n>N)$，亦即$u_{N+1},u_{N+2},u_{N+3},...\in(A-\frac{1}{2},A+\frac{1}{2})$，区间$(A-\frac{1}{2},A+\frac{1}{2})$的长度为1，$u_{N+1},u_{N+2},u_{N+3},...$落在长度为1的区间$(A-\frac{1}{2},A+\frac{1}{2})$内是不可能的，所以数列$\{u_n\}=(-1)^n\frac{n}{n+1}$是发散的。

有界数列的定义：对于数列$\{u_n\}$，如果存在一个正数M，使得对于一切u_n，都有$|u_n|\le M$，则称$\{u_n\}$有界。

定理2：如果数列$\{u_n\}$收敛，则$\{u_n\}$一定是有界的。

证：因为数列$\{u_n\}$收敛，设$\lim_{n\to\infty}u_n=A$，有极限的定义，对于给定正数$\epsilon=1$，必存在正整数N，使得当$n>N$时，恒有$|u_n-A|<1\Leftrightarrow A-1<u_n<A+1$。而$|u_n|=|u_n-A+A|\le|u_n-A|+|A|<1+|A|\ (n>N)$，现取$M=\max(|u_1|,|u_2|,|u_3|,...,|u_N|,1+|A|)$，于是$|u_n|\le M\ (n=1,2,3,...)$，所以$\{u_n\}$是有界的。

第2节 函数的极限

讨论：x为连续自变量时，函数$y=f(x)$的极限：

1. 自变量x任意地接近于定值x_0或x趋向于x_0（记为$(x\to x_0)$）时对应的函数值$f(x)$的变化趋势；
2. 自变量x的绝对值$|x|$无限增大（记为$(x\to\infty)$）时对应的函数值$f(x)$的变化趋势。

一、自变量x趋向于定值x_0时$f(x)$的极限

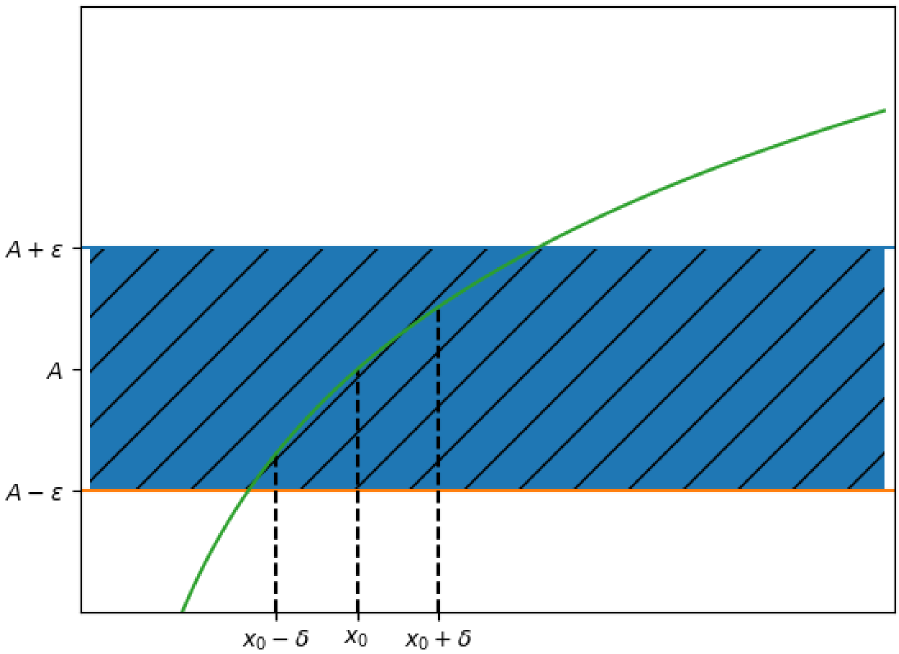
设函数$f(x)$在x_0点的某邻域内有定义（在x_0点$f(x)$可以无定义），当x任意地趋近于x_0时，即$x \to x_0$时，对应函数值$f(x)$是否无限接近于常数A?

分析：在$x \to x_0$的过程中，对应的函数值$f(x)$无限接近于常数A⇔在$x \to x_0$的过程中，$|f(x)-A|$能任意的小⇔在$x \to x_0$的过程中，对于任意给定的正数$\epsilon > 0, |f(x)-A| < \epsilon$。

在$x \to x_0$的过程中，只有充分接近x_0的那些x才能使$|f(x)-A| < \epsilon$。"充分接近x_0的x"即存在一个很小的正数$\delta > 0, 0 < |x-x_0| < \delta$描述了充分接近$x_0$的$x$。

定义：设有函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义，A为一常数。如果对于任意给定的$\epsilon > 0$，都存在一个正数$\delta > 0$，使适合不等式$0 < |x-x_0| < \delta$的一切x所对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x)-A| < \epsilon$。则称当$x \to x_0$时，$f(x)$以A为极限，记为$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A\ (x \to x_0)$。

几何意义：对常数$A, \epsilon > 0$，作图：在xoy平面上作直线$y = A+\epsilon, y = A-\epsilon$，对$\delta > 0$，得邻域$N(\hat{x_0}, \delta)$，当$x \in N(\hat{x_0}, \delta)\ (x \neq x_0)$时，由定义可知，点$M(x, f(x))$一定在$y = A+\epsilon$与$y = A-\epsilon$之间的区域内。



下面将用极限的定义来证明一些函数极限的等式。

例1、证明$\lim_{x \to x_0} C = C$（C为常数）。

证：已知$f(x) \equiv C$，x_0为定值，$A = C$。$|f(x)-A| = |C-C| \equiv 0$，因此，对任意给定的$\epsilon > 0$，都有任意一个正数$\delta > 0$，凡是适合$0 < |x-x_0| < \delta$的一切$x$，都使$|f(x)-A| = 0 < \epsilon$，按照极限的定义，$\lim_{x \to x_0} C = C$。

例2、证明$\lim_{x \to x_0} x = x_0$。

证：已知$f(x) = x, A = x_0$。$|f(x)-A| = |x-x_0|$，因此对于任意给定的$\epsilon > 0$，取$\delta = \epsilon$，当$0 < |x-x_0| < \delta = \epsilon$时，都能使$|f(x)-A| = |x-x_0| < \epsilon$，按照极限的定义，$\lim_{x \to x_0} x = x_0$。

例3、证明$\lim_{x \to 1} (3x-5) = -2$。

证：已知$f(x) = 3x-5, x_0 = 1, A = -2$。$|f(x)-A| = |(3x-5)-(-2)| = |3x-3| = 3|x-1|$，对于任意给定的正数$\epsilon > 0$，为了使$|f(x)-A| < \epsilon$，也就是$3|x-1| < \epsilon$，即$|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$。因此对于任意给定的$\epsilon > 0$，取$\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$，则适合不等式$0 < |x-1| < \delta$的一切$x$，都能使$|f(x)-A| = 3|x-1| < 3 * \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$，按照极限的定义，有$\lim_{x \to 1}(3x-5) = 2$。

例4、证明$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$。

证：已知$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, x_0 = 1, A = \frac{1}{2}$。$|f(x)-A| = |\frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{2}| = |\frac{1-\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})}| = |\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(1+\sqrt{x})^2}| = \frac{|x-1|}{2(1+\sqrt{x})^2} < \frac{|x-1|}{2} < \epsilon$，则当$|x-1| < 2\epsilon$时，就有$|f(x)-A| < \epsilon$。因此，对任意给定的$\epsilon > 0$，取$\delta = 2\epsilon$，则适合不等式$0 < |x-1| < \delta$的一切$x$，都能使得$|f(x)-A| = |\frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{2}| < \epsilon$，按照极限的定义，有$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$。

补充：当x从x_0的左侧趋于x_0（$x < x_0$），记为$x \to x_0^-$，或$x \to x_0 - 0$；当x从x_0的右侧趋于x_0（$x > x_0$），记为$x \to x_0^+$，或$x \to x_0 + 0$。

左极限：对于任意给定$\epsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，凡适合不等式$x_0 - \delta < x < x_0$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x) - A| < \epsilon$，则称A为$f(x)$的左极限，记为：

$$f(x_0 - 0) = A \iff \begin{Bmatrix} \lim_{x \to x_0^-} f(x) & = A \\ \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) & = A \end{Bmatrix} \tag{7}$$

右极限：把极限的定义中的$0 < |x - x_0| < \delta$改为$x_0 < x < x_0 + \delta$即可得到右极限的定义。

$$f(x_0 + 0) = A \iff \begin{Bmatrix} \lim_{x \to x_0^+} f(x) & = A \\ \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) & = A \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$**都存在且极限值都等于**$A$**。**（由定义即可得证）

二、自变量x趋向无穷大（记为$x \to \infty$）函数$f(x)$的极限

当$n \to \infty$时数列$U_n = f(n)$的极限，可以看作是函数$f(x)$在$x \to \infty$时极限的特殊情形。仿照数列极限的定义，给出$f(x)$在$x \to \infty$时极限的定义。

定义：设一函数$f(x)$在$|x|$充分大时有定义，A为常数，如果对于任意给定的$\epsilon > 0$，都存在正数N，使得凡是适合不等式$|x| > N$的一切x所对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x) - A| < \epsilon$，则称$x \to \infty$时，$f(x)$以A为极限，记为$\lim_{x \to \infty} f(x) = A, f(x) \to A \ (x \to \infty)$。

如果只考虑$x > 0$，且无限增大（记为$x \to +\infty$）的情况，上面的定义中把$|x| > N$改为$x > N$就得到了$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$的定义；如果只考虑$x < 0$，而$|x|$无限增大（记为$x \to -\infty$）的情况，上面的定义中把$|x| > N$改为$x < -N$就得到了$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$的定义。

$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \iff \lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)$**都存在且都等于**$A$**。**

例1、证明$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$。

解：$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, A = 0, |f(x) - A| = |\frac{1}{1+x^2} - 0| = \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} < \epsilon$，对于任意给定的$\epsilon > 0$，为了使得$|f(x) - A| < \epsilon$，只需$\frac{1}{x^2} < \epsilon$，即$x^2 > \frac{1}{\epsilon}, |x| > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$，因此对于任意给定的$\epsilon > 0$，取$N = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$，凡是适合$|x| > N$的一切$x$，对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x) - A| = |\frac{1}{1+x^2} - 0| < \epsilon$。按定义，有$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$。

三、无穷小量与无穷大量

1、无穷小（量）：如果：$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$或$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$，则称$x \to x_0$时（或$x \to \infty$时），$f(x)$是无穷小（量）。

2、无穷大（量）：如果当$x \to x_0$（或$x \to \infty$）时对应的函数值$f(x)$的绝对值$|f(x)|$无限增大，则称当$x \to x_0$（或$x \to \infty$）时$f(x)$是无穷大（量）。

若对于任意给定的正数$M > 0$，无论M多么大，总存在正数δ，凡是适合$0 < |x - x_0| < \delta$的一切x，对应函数值满足$|f(x)| > M$，称当$x \to x_0$时，$f(x)$是无穷大。记为$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$。

注意：

1. 不能把无穷大与一个很大的常数混为一谈；
2. 无穷大一定是无界函数，无界函数不一定是无穷大。

证明2：设$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$，（或$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$），即$x \to x_0$（或$x \to \infty$）时$f(x)$是无穷大，对于任意给定的$M > 0$（无论多么大），一定存在$\delta > 0$（存在$N > 0$），使得$|f(x)| > M, \forall_x \in N(\hat{x_0}, \delta)$，$(|x| > N)$。在$N(\hat{x_0}, \delta)$内，（$|x| > N$），$f(x)$无界。

证明2第二部分的反例：

例如：证明：$f(x) = x \cdot \sin x$在$(0, +\infty)$内是无界函数，当$x \to \infty$时，$f(x)$不是无穷大。

先证：$f(x) = x \cdot \sin x$在$(0, +\infty)$内是无界函数，对任何正数$M > 0$（无论多么大），现取足够大的正整数n，使$2n\pi + \frac{\pi}{2} > M = x_n$，$f(x_n) = x_n \cdot \sin(x_n) = (2n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = (2n\pi + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 > M$。可见$f(x)$在$(0, +\infty)$内是无界的。

再证：$x \to +\infty$时，$f(x) = x \sin x$不是无穷大。给定正数$M = 1$，则无论多么大的正数N，当$n > N$，$x_n = n\pi > N, f(x_n) = x_n \sin(x_n) = n\pi \sin(n\pi) = 0 < M$，$\therefore f(x)$不是无穷大。

3、无穷小与无穷大的关系

定理：假若当$x \to x_0$（或$x \to \infty$）$f(x)$是无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小；如果当$x \to x_0$（或$x \to \infty$）$f(x)$是无穷小，且$f(x) \neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大。

证：只证$x \to x_0$的情形。

设$x \to x_0$时$f(x)$是无穷大，即$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$，任意给定$\epsilon > 0$，因为$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$，对于正数$M = \frac{1}{\epsilon}$，一定存在正数$\delta > 0$，使适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$的一切$x$所对应的$f(x)$，满足$|f(x)| > M = \frac{1}{\epsilon}, \therefore |\frac{1}{f(x)}| < \epsilon$，即$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$，即当$x \to x_0$时，$\frac{1}{f(x)}$是无穷小。

设当$x \to x_0$时，$f(x)$是无穷小，且$f(x) \neq 0$，任给正数$M > 0$，无论多么大，因为$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$，对于$\epsilon = \frac{1}{M} > 0$，一定存在$\delta > 0$，使适合$0 < |x - x_0| < \delta$的一切$x$所对应的$f(x)$，满足$|f(x)| < \epsilon = \frac{1}{M}$，即$|\frac{1}{f(x)}| > M$，即当$x \to x_0$时，$\frac{1}{f(x)}$是无穷大。

四、海涅定理

连续自变量x的函数$f(x)$的极限$\lim_{x \to x_0} f(x)$（或$\lim_{x \to \infty} f(x)$）存在$\Longleftrightarrow$对于任选的数列$\{x_n | x_n \to x_0\}$且$x_n \neq x_0$（或$x_n \to \infty$）其对应的数列$\{f(x_n)\}$有同一极限。即：

$x_n \to x_0, \{f(x_n)\} \to A$

$x'_n \to x_0, \{f(x'_n)\} \to B$

若$A \neq B$，则$f(x)$极限不存在。

例如：证明：当$x \to 0$时，$f(x) = \sin \frac{1}{x}$极限不存在。

证：取$x_n = \frac{1}{n\pi}$，$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\pi} = 0 \ (x_0 = 0), f(x_n) = \sin \frac{1}{n\pi} = \sin(n\pi) = 0, \{f(x_n)\} = \{0\}, \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$；取$x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0 \ (x_0 = 0), f(x'_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1, \{f(x'_n)\} = \{1\}, \lim_{n \to \infty} f(x'_n) = 1$。因为$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(x'_n)$，所以$\lim_{x \to 0} f(x)$的极限不存在。

第3节 函数极限的性质和极限的运算

一、极限值与函数值的关系

1. （极限值的唯一性）如果$\lim_{x \to x_0} f(x)$或（$\lim_{x \to \infty} f(x)$）存在，则其极限值是唯一的。

   证：设$\lim_{x \to x_0} f(x)$存在且不唯一（反证法）。

   即$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} f(x) = B$，且$A < B$。记$r = B - A > 0$，对于给定正数$\epsilon = \frac{B-A}{4} > 0$，
   $\because \lim_{x \to x_0} f(x) = A$，由极限的定义，对于$\epsilon = \frac{B-A}{4}$，一定存在$\delta_1 > 0$，使适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta_1$的一切$x$所对应的$f(x)$恒有$|f(x) - A| < \frac{B-A}{4}$。由$\lim_{x \to x_0} f(x) = B$，对于$\epsilon = \frac{B-A}{4}$，一定存在$\delta_2 > 0$，使适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta_2$的一切$x$所对应的$f(x)$恒有$|f(x) - B| < \frac{B-A}{4}$。取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则凡是适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$的一切$x$，使不等式$|f(x) - A| < \frac{B-A}{4}$和$|f(x) - B| < \frac{B-A}{4}$同时成立，从而有
   $B - A = |B - f(x) + f(x) - A| \leq |B - f(x)| + |f(x) - A| < \frac{B-A}{4} + \frac{B-A}{4} = \frac{B-A}{2}$，而$B - A < \frac{B-A}{2}$不可能成立。
   $\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = A$是唯一的。

2. （极限值与函数值的同号性）
   1. 设$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，且$A > 0$（或$A < 0$），则必存在$N(\hat{x_0})$，使得$\forall_x \in N(\hat{x_0})$都有$f(x) > 0$（或$f(x) < 0$）。

      证：$A > 0$，由$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，根据定义，对于这样的正数$\epsilon$，$0 < \epsilon \leq A$，一定存在$\delta > 0$，使得适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$（即$x \in N(\hat{x_0}, \delta)$），恒有$|f(x) - A| < \epsilon$，$|f(x) - A| < \epsilon \Longleftrightarrow A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$，
      $\because 0 < \epsilon \leq A$，$\therefore A - \epsilon \geq 0$，即$0 \leq A - \epsilon < f(x)$，其中$x \in N(\hat{x_0}, \delta)$。
   2. 设$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，且$N(\hat{x_0})$内$f(x) \geq 0$，则$A \geq 0$。

      证：反证法：假若$A < 0$，又有$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，由已证明的结论1，一定存在$x_0$的某个邻域$N(\hat{x_0})$，使得$f(x) < 0$，这与$f(x) \geq 0$的假设矛盾，所以结论2成立。

   例1、设$f(x)$在x_0点的某邻域$N(\hat{x_0})$内有定义，且$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = -1$，则必存在某邻域$N(x_0, \delta)$，使得：(A) $f(x) > f(x_0)$ (B)$f(x) < f(x_0)$ (C)$f(x) = f(x_0)$ (D)不能判断$f(x)$与$f(x_0)$的大小

   解：令$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2}$，有$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = -1 < 0$，由前面所证结论1，可知存在$N(x_0, \delta)$，使得$F(x) < 0$，$x \in N(x_0, \delta)$。由$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} < 0, (x - x_0)^2 > 0$，$\therefore f(x) - f(x_0) < 0, f(x) < f(x_0)$，故应选B。

3. （有界性）如果当$x \to x_0$（或$x \to \infty$）时$f(x) \to A$（常数），则一定存在x_0的某邻域$N(\hat{x_0})$（或存在$N > 0, |x| > N$）$f(x)$是有界的。

   证：已知$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，由定义，对给定的$\epsilon = 1$，一定存在$\delta > 0$使得适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$（$x \in N(\hat{x_0}, \delta)$）的一切$x$所定对应的函数值$f(x)$恒有$|f(x) - A| < 1$，即$A - 1 < f(x) < A + 1$。即函数$f(x)$在$N(\hat{x_0}, \delta)$内既有上界，也有下界$\Longleftrightarrow f(x)$在$N(\hat{x_0}, \delta)$内有界。

二、函数极限与无穷小的关系

定理：$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$（或$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$）（A为常数）$\Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，且$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$（或$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$）。

证："$\Longrightarrow$"，设$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，根据函数极限的定义，对于任意给定$\epsilon > 0$，一定存在$\delta > 0$，使得适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$的一切$x$所对应的函数值恒有$|f(x) - A| < \epsilon$，令$\alpha(x) = f(x) - A$，就有$|\alpha(x)| < \epsilon$，从而有$f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$。

"$\Longleftarrow$"，设$f(x) = A + \alpha(x)$，$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$，根据极限定义，对于任意给定的$\epsilon > 0$，一定存在$\delta > 0$，使得凡是适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$的一切$x$所对应的$\alpha(x)$恒有$|\alpha(x)| < \epsilon$。由$f(x) = A + \alpha(x) \Longrightarrow \alpha(x) = f(x) - A$，由$|\alpha(x)| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon$，故$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$。

三、无穷小的性质

1. 有限个无穷小的代数和仍是无穷小。

   证：只证两个无穷小的情形。即设有$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$，$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$，证$\lim_{x \to x_0} [\alpha(x) + \beta(x)] = 0$。由极限的定义，对于任意给定的$\epsilon > 0$，对于$\frac{\epsilon}{2} > 0$，一定存在$\delta_1$，使凡是适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta_1$的一切$x$，所对应的$\alpha(x)$恒有$|\alpha(x)| < \frac{\epsilon}{2}$；对于$\frac{\epsilon}{2} > 0$，一定存在$\delta_2$，使凡是适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta_2$的一切$x$，所对应的$\beta(x)$恒有$|\beta(x)| < \frac{\epsilon}{2}$。取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，这些$x$所对应的$\alpha(x), \beta(x)$同时满足$|\alpha(x)| < \frac{\epsilon}{2}$，$|\beta(x)| < \frac{\epsilon}{2}$，从而有$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \epsilon$，所以$\lim_{x \to x_0} [\alpha(x) + \beta(x)] = 0$。即当$x \to x_0$时，$\alpha(x) + \beta(x)$是无穷小。
2. 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小

   证：设$f(x)$在$N(\hat{x_0}, \delta_1)(\delta_1 > 0)$内有界，即存在$M > 0, \delta_1 > 0$，使得$|f(x)| \le M, x \in N(\hat{x_0}, \delta_1)$，又设$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$（当$x \to x_0$时$\alpha(x)$是无穷小）。要证当$x \to x_0$时，$f(x)\alpha(x)$是无穷小，即证$\lim_{x \to x_0} [f(x)\alpha(x)] = 0$。根据极限的定义，任给$\epsilon > 0$，对于$\frac{\epsilon}{M} > 0$，一定存在$\delta_2 > 0$，使得凡是适合$0 < |x - x_0| < \delta_2$的一切$x$所对应的$\alpha(x)$恒有$|\alpha(x)| < \frac{\epsilon}{M}$，取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$，凡是适合$0 < |x - x_0| < \delta$的一切$x$都会使得$|f(x)| \le M$，$|\alpha(x)| < \frac{\epsilon}{M}$同时成立。而$|f(x)\alpha(x)| = |f(x)||\alpha(x)| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$，即$\lim_{x \to x_0} [f(x)\alpha(x)] = 0$。

对于一个常数C，$f(x) \equiv C$为有界函数。对于$\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$，在$N(\hat{x_0})$内，$r(x)$是有界函数，所以有：

1. 常数与无穷小的乘积仍是无穷小
2. 两个无穷小的乘积仍是无穷小（有限个无穷小的乘积仍是无穷小）

3. 设$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \ne 0$（或$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \ne 0$），$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$或（$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$），则$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0$（或$\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0$）

   证：$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$，要证$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0$，只须证明$\frac{1}{f(x)}$是有界函数，再利用性质2，就可以得到性质3的结论。因为$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \ne 0$，由极限的定义，对任意给定的$\epsilon = \frac{|A|}{2} > 0$，一定存在$\delta > 0$，使适合$0 < |x - x_0| < \delta$的一切$x$所对应的$f(x)$恒有$|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$，由于$|A| - |f(x)| \le |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$，由$|A| - |f(x)| < \frac{|A|}{2}$，$|A| - \frac{|A|}{2} < |f(x)|$，$0 < \frac{|A|}{2} < |f(x)|$，所以$|\frac{1}{f(x)}| < \frac{2}{|A|}$，故$\frac{1}{f(x)}$在$N(\hat{x_0}, \delta)$内有界。

四、极限的四则运算公式

注意：以下公式中，自变量同是$x \to x_0$（或同是$x \to \infty$），设$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则有：

1. $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
2. $\lim[f(x)g(x)] = AB = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$。若$C$为常数，则$\lim[Cf(x)] = CA = C \cdot \lim f(x)$；$\lim[f(x)]^n$（$n$为正整数）$= \lim[f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)] = A^n = [\lim f(x)]^n$。
3. 若$B \ne 0, \lim[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$。

   证明：只证2和3。

   证2：由函数极限与无穷小的关系，有：$\lim f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim \alpha(x) = 0$，
   $\lim g(x) = B \Longleftrightarrow g(x) = B + \beta(x), \lim \beta(x) = 0$，
   $f(x)g(x) = [A + \alpha(x)][B + \beta(x)] = AB + [A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)] = A \cdot B + r(x), (r(x) = [A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)])$，由无穷小的性质知$r(x)$是无穷小，所以$f(x)g(x) = A \cdot B + r(x), \lim r(x) = 0$，所以

$\lim[f(x)g(x)]=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$。

证3：$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B[B+\beta(x)]}$，$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}+r(x),r(x)=\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B[B+\beta(x)]}$。因为$B\alpha(x),A\beta(X)$是无穷小，所以$\lim[B\alpha(x)-A\beta(x)]=0$。而$\lim B[B+\beta(x)]=\lim[B^2+B\beta(x)]=B^2\neq 0$，由无穷小的性质3可知$\lim r(x)=0$，因此3成立。

4. 设$f(x)\geq g(x)$，而$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则必有$A\geq B$。

   证：令$F(x)=f(x)-g(x)\geq 0$，$\lim F(x)=\lim[f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x)=A-B$，根据函数值与极限值的同号性定理，可知$\lim F(x)=A-B\geq 0\Longrightarrow A\geq B$。

例1、求$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x-4}{3x^2+2}$。

解：$\lim_{x\to-1}(3x^2+2)=\lim_{x\to-1}3x^2+\lim_{x\to-1}2=3\lim_{x\to-1}x^2+2=3[\lim_{x\to-1}x]^2+2=3+2=5\neq 0$，$\lim_{x\to-1}(2x^2+x-4)=\lim_{x\to-1}2x^2+\lim_{x\to-1}x-\lim_{x\to-1}4=2[\lim_{x\to-1}x]^2-1-4=2\cdot(-1)^2-5=-3$,故原式$=\frac{\lim_{x\to-1}(2x^2+x-4)}{\lim_{x\to-1}(3x^2+2)}=\frac{-3}{5}$。

一般地有$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$，其中$\lim_{x\to x_0}(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m)=\lim_{x\to x_0}\sum_{j=0}^{m}b_jx^{m-j}=\sum_{j=0}^{m}[\lim_{x\to x_0}b_jx^{m-j}]=\sum_{j=0}^{m}b_jx_0^{m-j}$，$\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)=\lim_{x\to x_0}\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}[\lim_{x\to x_0}a_ix^{n-i}]=\sum_{i=0}^{n}a_ix_0^{n-i}$。若分母极限$\sum_{j=0}^{m}b_jx_0^{m-j}\neq 0$，则$\lim_{x\to x_0}R(x)=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_ix_0^{n-i}}{\sum_{j=0}^{m}b_jx_0^{m-j}}=R(x_0)$。

例2、求$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$。

解：$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+6)=4-10+6=0$，不能用极限四则运算公式。正确的解法：原式$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x-3)}=\frac{1}{-1}=-1$。

例3、求$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$。

解：$\lim_{x\to1}(x^2+1)=(\lim_{x\to1}x)^2+1=2\neq 0$，$\lim_{x\to1}(x-1)=\lim_{x\to1}x-1=1-1=0$，因为$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{\lim_{x\to1}(x-1)}{\lim_{x\to1}(x^2+1)}=\frac{0}{2}=0$，所以当$x\to 1$时$\frac{1}{\frac{x^2+1}{x-1}}$是无穷小，由无穷小与无穷大的关系知，$\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x-1}=\infty$。

例4、求$\lim_{x\to1}[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}]$。

解：当$x\to 1$时，$\frac{1}{x-1}\to\infty,\frac{2}{x^2-1}\to\infty$，不能直接用极限四则运算公式。正确的解法：$\lim_{x\to1}[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}]=\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$。

例5、求$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+1}{x^2-4x-8}$。

解：分子、分母同时除以x^2，得：

原式$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}2+5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x})^2}{\lim_{x\to\infty}1-4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-8(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x})^2}=\frac{2+0+0}{1-0-0}=2$。

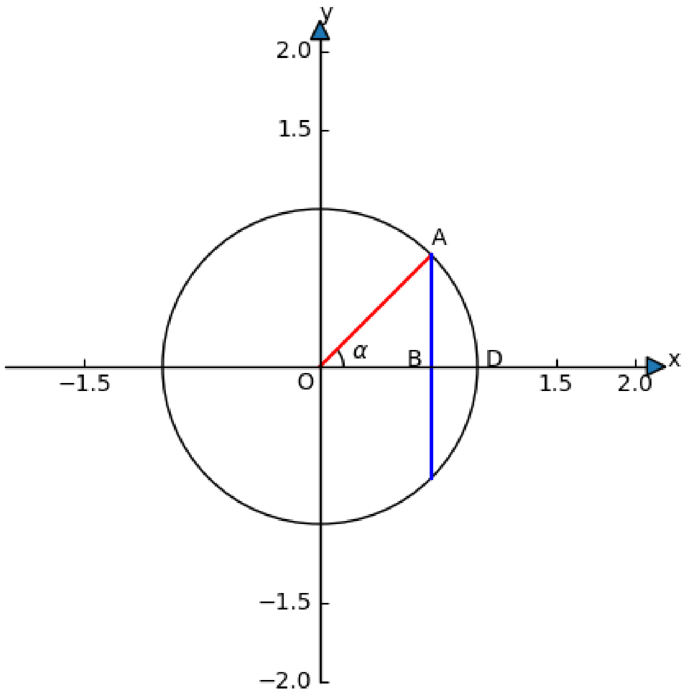
第4节 极限存在准则与两个重要极限

一、准则1：夹挤准则 -- 若在$N(x_0,\delta_0),(\delta_0>0)$内有$F(x)\leq f(x)\leq G(x)$成立，而且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}G(x)=A$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}f(x)=A$。

证明：因为$\lim_{x\to x_0}F(x)=A$，对任给的$\epsilon>0,\exists\delta_1>0$，使适合不等式$0<|x-x_0|<\delta_1$的一切$x$所对应的$F(x)$恒有$|F(x)-A|<\epsilon$；再由$\lim_{x\to x_0}G(x)=A$，对上述的$\epsilon>0,\exists\delta_2>0$，使适合不等式$0<|x-x_0|<\delta_2$的一切$x$所对应的$G(x)$恒有$|G(x)-A|<\epsilon$。现取$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$，则适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切$x$所对应的$F(x),f(x),G(x)$满足$F(x)\leq f(x)\leq G(x)$，其中$|F(x)-A|<\epsilon\Longleftrightarrow A-\epsilon<F(x)<A+\epsilon$，$|G(x)-A|<\epsilon\Longleftrightarrow A-\epsilon<G(x)<A+\epsilon$，则$A-\epsilon<F(x)\leq f(x)\leq G(x)<A+\epsilon\Longleftrightarrow|f(x)-A|<\epsilon$，根据极限的定义：$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$。

例1、证明$\lim_{\alpha\to 0}\sin\alpha=0,\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1$。

解：作单位圆（圆心在原点）：

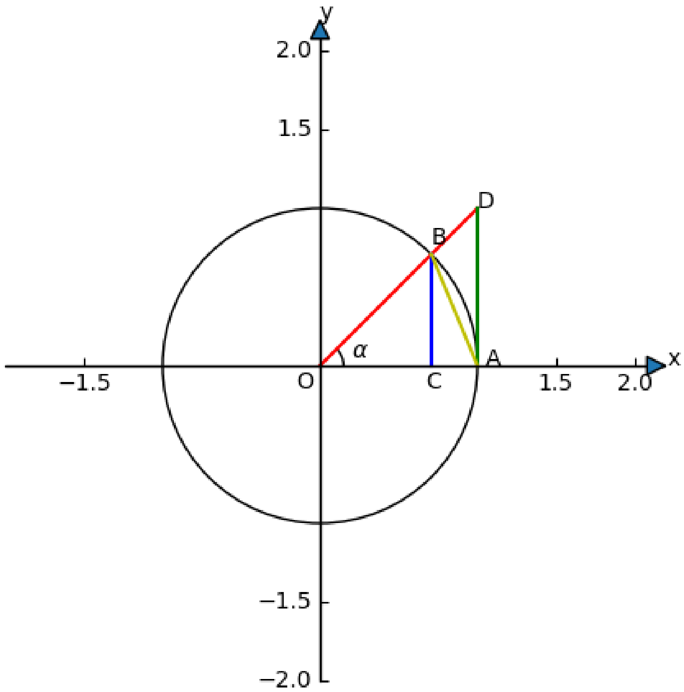


先证：$\lim_{\alpha\to 0}\sin\alpha=0$。若$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，圆心角$\alpha$对应的圆弧$\overset{\frown}{AD}=1\cdot\alpha=\alpha$，$AB=\sin\alpha$（在直角三角形$AOB$中）。因为$0<AB<\overset{\frown}{AD}\Longleftrightarrow 0<\sin\alpha<\alpha$，又因为$\lim_{\alpha\to 0^+}0=0,\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha=0$，根据准则1，知$\lim_{\alpha\to 0^+}\sin\alpha=0$。若$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，令$t=-\alpha$，当$\alpha\to 0^-$时，$t\to 0^+$，$\lim_{\alpha\to 0^-}\sin\alpha=\lim_{t\to 0^+}\sin(-t)=-\lim_{t\to 0^+}\sin(t)=0$，即$\lim_{\alpha\to 0^+}\sin\alpha=\lim_{\alpha\to 0^-}\sin\alpha=0\Longleftrightarrow\lim_{\alpha\to 0}\sin\alpha=0$。

再证：$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1$。在直角三角形$AOB$中，$OA-AB<OB<1\Longleftrightarrow 1-AB<OB<1$。因为$AB=\sin\alpha,OB=\cos\alpha$，所以$1-\sin\alpha<\cos\alpha<1$，而$\lim_{\alpha\to 0}(1-\sin\alpha)=1-\lim_{\alpha\to 0}\sin\alpha=1-0=1,\lim_{\alpha\to 0}1=1$，由准则1可知$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1$。

重要极限之一：$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$。

证：作单位圆（圆心在原点）：



在单位圆内，若$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$BC=\sin\alpha, \overset{\frown}{AB}=1\cdot\alpha=\alpha, AD=\tan\alpha$，有不等式$\triangle AOB$的面积<圆扇形$AOB$的面积$<\triangle AOD$的面积，即$\frac{1}{2}AO\cdot BC<\frac{1}{2}AO\cdot\overset{\frown}{AB}<\frac{1}{2}AO\cdot AD$，即$BC<\overset{\frown}{AB}<AD$，所以$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$，因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\alpha>0$，不等式同除$\sin\alpha$，得$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}$，即$\cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1$；若$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，令$t=-\alpha, \cos\alpha=\cos(-t)=\cos t, \frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{\sin(-t)}{-t}=\frac{-\sin t}{-t}=\frac{\sin t}{t}$，所以上述不等式对$\alpha>0,\alpha<0$都正确。因为$\lim_{\alpha\to0}1=1, \lim_{\alpha\to0}\cos\alpha=1$，根据准则1，得到$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$。

例2、求$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}(\alpha\neq0,\beta\neq0)$。

解：原式$=\lim_{x\to0}[\frac{\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}}{\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}]=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$。

例3、求$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{x}$。

解：原式$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{sin(2x)}{cos(2x)}}{x}=\lim_{x\to0}[\frac{\sin(2x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(2x)}]=2\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos(2x)}=2\cdot1\cdot1=2$。

例4、$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解：原式$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x}]$ 。

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}[\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}]$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to0}[\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}]^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot1=\frac{1}{2}$

二、准则2：单调有界准则

定义：如果数列$\{u_n\}$满足$u_1\leq u_2\leq u_3\leq\cdots\leq u_n\leq\cdots$，则称$\{u_n\}$为单调增数列；若满足$u_1\geq u_2\geq u_3\geq\cdots\geq u_n\geq\cdots$，则称$\{u_n\}$为单调减数列。

极限存在的单调有界准则：若单调数列$\{u_n\}$是有界的，则$\lim_{n\to\infty}u_n$存在。

重要极限之二：$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

先证：$x=n(n\in N),u_n=(1+\frac{1}{n})^n$单调增且有界。设$a>b>0,a\in R,b\in R$，则
$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n)<(a-b)(a^n+a^n+a^n+\cdots+a^n)=(a-b)(n+1)a^n$或
$a^n[(n+1)b-na]<b^{n+1}$。取$a=1+\frac{1}{n},b=1+\frac{1}{n+1},(a>b>0)$，代入上面不等式得
$(1+\frac{1}{n})^n[(n+1)(1+\frac{1}{n+1})-n(1+\frac{1}{n})]<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$，化简得$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$，即$u_n<u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，故数列$\{u_n\}$是单调增数列。再设$a=1+\frac{1}{2n},b=1$，满足$a>b>0$，代入上面不等式
$(1+\frac{1}{2n})^n[(n+1)\cdot 1-n(1+\frac{1}{2n})]<1^{n+1}$，化简得$(1+\frac{1}{2n})^n<2$，不等式两边同时平方，
$(1+\frac{1}{2n})^{2n}<4,u_{2n}<4,U_{2n-1}<u_{2n}<4$，即$u_n<4,(n=1,2,3,\cdots)$，所有数列$\{u_n\}$有界。因为$\{u_n\}$单调增且有界，根据准则2，有$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$（只证明了极限存在）。

当x为连续自变量时，$\forall_x>0$，谈论$x\to+\infty$时的情形，对任意$x>0$，存在$n,n\in N$，使得$n\le x\le n+1\Longrightarrow\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{n+1}$，因为$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}\ge 1+\frac{1}{n+1}$，所以$(1+\frac{1}{n})^{n+1}\ge(1+\frac{1}{x})^x\ge(1+\frac{1}{n+1})^n$，其中
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e\cdot 1=e$，$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\frac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})}=\frac{e}{1}=e$，当$n\to\infty$时，必有$x\to+\infty$，由准则1得$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。$\forall_x<0$，令$x=-(t+1)$，当$x\to-\infty$时，$t\to+\infty$，
$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t+1})^{-(t+1)}$
$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t\cdot\lim_{t\to+\infty}(1+t)=e\cdot 1=e$

，所以$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

重要极限之二的另一种形式：$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。

例5、求$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$。

解：把原式子与重要极限比较，令$x=-2t$，当$x\to\infty$时$t\to\infty$，原式
$=\lim_{t\to\infty}(1-\frac{2}{(-2t)})^{(-2t)}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{(-2t)}=\frac{1}{[\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})]^2}=\frac{1}{e^2}$。

例6、求$\lim_{x\to 1}x^{(\frac{1}{1-x})}$。

解：原式$=\lim_{x\to 1}(1+(x-1))^{-\frac{1}{x-1}}$，令$t=(x-1)$，$\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\frac{1}{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{e}$。

例7、设$a>0,u_1=\sqrt{a},u_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,u_n=\sqrt{a+u_{n-1}},\cdots$,

（1）证明$\lim_{n\to\infty}u_n$存在；

（2）求$\lim_{n\to\infty}u_n$。

证（1）：先证$\{u_n\}$单调增。用数学归纳法，$u_1=\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}=u_2$，假设$u_{n-1}<u_n$，则有
$u_{n+1}-u_n=\sqrt{a+u_n}-\sqrt{a+u_{n-1}}=\frac{u_n-u_{n-1}}{\sqrt{a+u_n}+\sqrt{a+u_{n-1}}}$，由归纳假设$u_n-u_{n-1}>0$，所以$u_{n+1}-u_n>0,u_{n+1}>u_n$，数列$\{u_n\}$单调增。再证$\{u_n\}$有界。$u_1=\sqrt{a}<1+\sqrt{a}$，假设$u_{n-1}<1+\sqrt{a}$，
$u_n=\sqrt{a+u_{n-1}}<\sqrt{a+1+\sqrt{a}}<\sqrt{a+1+2\sqrt{a}}=\sqrt{(1+\sqrt{a})^2}=1+\sqrt{a}$，所以$\{u_n\}$有界，由准则2可知$\lim_{n\to\infty}u_n$存在。

（2）：已知$u_n=\sqrt{a+u_{n-1}},(u_n)^2-u_{n-1}-a=0$，上式两边同时取极限（$n\to\infty$），得$A^2-A-a=0$（令$\lim_{n\to\infty}u_n=A$），由二次方程求根公式得$A=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$，因为$u_n>0$，根据数列值与极限值的同号性定理，由$A\ge 0$，所以$A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4a}}{2}$。

第5节 无穷小量的比较

当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时$\alpha(x)\to 0$，则称当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时$\alpha(x)$是无穷小。例如：当$x\to 0$时，
$\alpha(x)=x,\beta(x)=3x^2,r(x)=\sin x$都是无穷小，$\alpha(x),\beta(x),r(x)$都趋于0。由$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to 0}3x=0$（$\beta(x)$比$\alpha(x)$趋于0的速度更快）；$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$（$\alpha(x)$比$\beta(x)$趋于0的速度慢一些）；$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{\alpha(x)}=1$（$r(x)$与$\alpha(x)$趋于0的速度相仿）。

数学概念：讨论的α,β都是同一个自变量作同一变化过程中的无穷小，且α与β之比也是同一个变化过程中的极限。

定义：设α,β是两个无穷小，如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记为$\beta=O(a)$；如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\ne 0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小。特例：若$C=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$。

例如：当$x\to 0, x, x^2, \frac{1}{2}x^2, 1-\cos x, \tan x$都是无穷小，$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$，所以当$x\to 0$时，$1-\cos x$与$x^2$是同阶无穷小。显然$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1$，当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$。
$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$，当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$。

等价无穷小代换定理：设$\alpha\sim\alpha', \beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim\frac{\beta}{\alpha}$存在，且$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$。

证：因为$\alpha\sim\alpha'\Longrightarrow\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=1$，$\beta\sim\beta'\Longrightarrow\lim\frac{\beta}{\beta'}=1$，所以
$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha})=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=1\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot 1=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$。

例1、求$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2+x^3}$。

解：原式$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\cdot 1=1$。

例2、求$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2(2x)}$。

解：原式$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{(2x)^2}=\frac{1}{8}$。

例3、求$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解：原式$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$。

当$u\to 0$时，有
$\sin u\sim u, \tan u\sim u, \arcsin u\sim u, \arctan u\sim u, \ln(1+u)\sim u, e^u-1\sim u, 1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2, \sqrt{1+u}-1\sim\frac{1}{2}u,$
$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3, x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3, x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3$。

第6节 连续函数

一、函数连续性的定义

变量u的增量（或改变量）Δu：设变量u由初始值u_1变化到u_2，则称u_2-u_1为变量u在u_1处的增量（改变量），记为$\Delta u=u_2-u_1$。

函数$y=f(x)$的增量Δy：设函数$y=f(x)$在$N(x_0)$内有定义，自变量x从x_0变化到$x_0+\Delta x\in N(x_0)$，函数$y=f(x)$相应地从$f(x_0)$变化到$f(x_0+\Delta x)$，因此$y=f(x)$在x_0点处的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。

函数$y=f(x)$在一点处x_0连续的定义：设$y=f(x)$在$N(x_0)$内有定义，$x\in N(x_0)$，如果当$\Delta x\to 0$时，对应的函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$，则称$y=f(x)$在$x_0$点连续，即：$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，称$y=f(x)$在$x_0$点连续。

由$\Delta x=x-x_0\Longrightarrow x=x_0+\Delta x$，则当$\Delta x\to 0$时有$x\to x_0$，
$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)\Longrightarrow f(x)=f(x_0)+\Delta y$，由$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

设$y=f(x)$在$N(x_0)$内有定义，$x\in N(x_0)$，如果$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$y=f(x)$在$x_0$点处连续。如果$y=f(x)$在$(a,b)$内每一点处都连续，则称$y=f(x)$在开区间$(a,b)$内连续，记为$f(x)\in C(a,b)$，$(a,b)$称为$y=f(x)$的连续区间。

左连续、右连续：如果$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称$y=f(x)$在点$x_0$左连续；如果$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称$y=f(x)$在点$x_0$右连续；

如果$y=f(x)$在(a,b)内连续，且在点a处右连续，在点b处左连续，则称$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，记为$f(x)\in C[a,b]$。

例1、证明$y=\sqrt{x}$在$(0+\infty)$内处处连续。

证：$\forall_x\in(0,+\infty)$，设有增量$\Delta x, x+\Delta x\in(0,+\infty)$，$|\Delta y|=|\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}|=\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}<\frac{|\Delta x|}{\sqrt{x}}$，即
$0\le|\Delta y|\le\frac{|\Delta x|}{\sqrt{x}}$，$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\sqrt{x}}=0$，由夹挤准则，得$\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta y|=0\Longrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，所以函数$y=\sqrt{x}$在$(0,+\infty)$内连续。

二、函数的间断点

间断点：若一函数$y=f(x)$在x_0点不连续，则称x_0为$y=f(x)$的间断点。

函数$y=f(x)$在x_0点处连续$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。要求：（1）$f(x)$在$x_0$点有定义；（2）$\lim_{x\to x_0} f(x)$存在，即$\lim_{x\to x_0^-}, \lim_{x\to x_0^+}$均存在；（3）$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，当三个条件之一不满足时，$f(x)$在$x_0$点间断。

间断点可分为两类：

第一类间断点：若$f(x_0-0), f(x_0+0)$都存在，但$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，或$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$（或$f(x)$在$x_0$点无定义），称$x_0$是$f(x)$的第一类间断点。

例1、设函数：

$$y=f(x)=\left\{\begin{array}{cc} x+1 & x<1 \\ x^2 & x\geq 1 \end{array}\right\} \tag{9}$$

解：$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2, f(1+0)=\lim_{x\to 1^+} x^2=1 \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$不存在，所以$x=1$是$y=f(x)$的第一类间断点。

例2、$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

解：$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$，即$g(1-0)=g(1+0)=2$，因为$g(x)$在$x=1$点无定义，所以$x=1$是$g(x)$的第一类间断点。

例3、设函数：

$$\phi(x)=\left\{\begin{array}{cc} x\cdot\sin x & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{array}\right\} \tag{10}$$

解：$\lim_{x\to 0}\phi(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=0\cdot 0=0$，即$\lim_{x\to 0^-}\phi(x)=\lim_{x\to x^+}\phi(x)=0\neq\phi(0)=1$，所以$x=0$是函数$\phi(x)$的第一类间断点。

对$g(x)$补充定义：$g(x)=2$，$g(x)$在$x=1$点连续；对$\phi(x)$改变定义，$\phi(0)=0$，$\phi(x)$在$x=0$点连续。

在第一类间断点中，把$f(x_0+0)=f(x_0-0)$的间断点称为可去间断点。

第二类间断点：不是第一类间断点，就统称为第二类间断点。即$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$至少有一个不存在。

例4、$f(x)=\frac{1}{x-1}, \lim_{x\to 1} f(x)=\infty$，所以$x=1$是第二类间断点；$g(x)=\sin(\frac{1}{x})$，$\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$不存在（由海涅定理证明），$x=0$是第二类间断点。

三、初等函数的连续性

1. 连续函数的和、积、商的连续性
    1. 有限个在某点连续的函数的代数和仍是在该点连续的函数；
    2. 有限个在某点连续的函数的乘积仍是在该点连续的函数；
    3. 两个在某点连续的函数的商仍然是在该点连续的函数，只要分母在该点处的函数值不为零。

    只证明第3点：设$f(x), g(x)$在x_0点处连续，则有$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)\neq 0, \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}, (g(x_0)\neq 0)$，故函数$\frac{f(x)}{g(x)}$在$x_0$点连续。

例1、证明：$y=\sin x, y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上处处连续；$y=\tan x, y=\cot x$在其定义域内连续。

解：先证$y=\sin x$连续：$\forall_x\in(-\infty,+\infty)$，$x$有增量$\Delta x$，则$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin(x)=2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$，$|\Delta y|=2|\sin(\frac{\Delta x}{2})||\cos(x+\frac{\Delta x}{2})|\le 2|\sin(\frac{\Delta x}{2})|\le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|,(|\sin\alpha|<|\alpha|)$，得$0<|\Delta y|\le|\Delta x|$，因为$\lim_{\Delta x\to0}|\Delta x|=0$，由夹挤准则得$\lim_{\Delta x\to0}|\Delta y|=0\Longrightarrow\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0$。由$x$的任意性，可知$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内处处连续。

对于$y=\cos x$，x有增量Δx，则
$|\Delta y|=|\cos(x+\Delta x)-\cos(x)|=|-2\sin(\frac{\Delta x}{2})\sin(x+\frac{\Delta x}{2})|=2|\sin(\frac{\Delta x}{2})||\sin(x+\frac{\Delta x}{2})|\le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}\cdot1=|\Delta x|$，得$0<|\Delta y|\le|\Delta x|$，因为$\lim_{\Delta x\to0}|\Delta x|=0$，由夹挤准则得$\lim_{\Delta x\to0}|\Delta y|=0\Longrightarrow\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0$。由$x$的任意性，可知$y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内处处连续。

因为$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，利用连续函数商的连续性可知$\tan x,\cot x$在定义域内连续。

2. 反函数与复合函数的连续性

   1. 如果函数$y=f(x)$在区间I_x上单调增加（减少）且连续，则其反函数$x=\phi(y)$也在对应区间$I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$上单调增加（减少）且连续（不要求证明）。

      例如：$y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增且连续，因此其反函数$y=\arcsin x$在$[-1,1]$上也是单调增且连续；$y=\cos x$在$[0,\pi]$上单调递减且连续，因此其反函数$y=\arccos x$在$[-1,1]$上也是单调减且连续；$y=\tan x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$内单调增且连续，因此其反函数$y=\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$内单调增且连续；$y=\cot x$在$(0,\pi)$内单调减且连续，其反函数$y=arccotx$在$(-\infty,+\infty)$内单调减且连续。

   2. 设当$x\to x_0$时，$u=\phi(x)$的极限存在，且$\lim_{x\to x_0}\phi(x)=a$，而$y=f(u)$在对应点$u=a$点处连续，则当$x\to x_0$时，复合函数$f[\phi(x)]$的极限存在，且$\lim_{x\to x_0}f[\phi(x)]=f(a)$。

      证：$y=f(u)$在$u=a$点处连续，$\forall_\epsilon>0$，存在$\eta>0$，使得适合不等式$0<|u-a|<\eta$（$u-a$在$(0,\eta)$之间）的一切u所对应的$f(u)$恒有$|f(u)-f(a)|<\epsilon$，又因为$\lim_{x\to x_0}\phi(x)=a$，对于上述正数$\eta>0$，存在$\delta>0$，使得适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x所对应的$\phi(x)$恒有$|\phi(x)-a|<\eta$（$\phi(x)-a$也在(0, \eta)之间，所以可以用$\phi(x)$代替上述的u，而u正好等于$\phi(x)$），综合上面的结果，对$\epsilon>0,\exists_\delta>0$，使得适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切$x$所对应的$f(u)$恒有$|f(u)-f(a)|<\epsilon\Longrightarrow|f[\phi(x)]-f(a)|<\epsilon$，由极限的定义，有$\lim_{x\to x_0}f[\phi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\phi(x)]$。交换记号现象：“$\lim_{x\to x_0}$”与“$f$”。

      例如：求$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$。

      解：原式$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$。复合函数：
      $y=f(u)=\ln u,u=(1+x)^{\frac{1}{x}},f[\phi(x)]=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$。因为$\lim_{x\to0}\phi(x)=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，而$y=f(u)$在$u=e$点连续（先借用结论，后续证明），所以
      $\lim_{x\to0}f[\phi(x)]=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$。同时由结论可知当$x\to0$时，$\ln(1+x)\sim x$。

   3. 复合函数的连续性：设$u=\phi(x)$在x_0点处连续，$\phi(x_0)=u_0$，而$y=f(u)$在u_0处连续，则复合函数$f[\phi(x)]$在x_0点处连续。

      证：因为$u=\phi(x)$在x_0点处连续，按照定义，有$\lim_{x\to x_0}u=\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\phi(x_0)=u_0$，在复合函数的极限中，令$a=\phi(x_0)=u_0$，可推出：$\lim_{x\to x_0}f[\phi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\phi(x)]=f(a)=f[\phi(x_0)]$，所以$f[\phi(x)]$在$x_0$点处连续。

   小结：复合函数极限：里有极限，外连续；复合函数连续性：里连续，外连续。

3. 初等函数的连续性

   首先说明基本初等函数的连续性：已知三角函数、反三角函数在定义域内是连续的。

   指数函数$y=a^x(a>0,a\ne1)$在定义域$(-\infty,+\infty)$单调，值域$(0,+\infty)$。为了证明$y=a^x$是连续函数，先证明$\lim_{x\to0}a^x=1$。

   证：假设$a>1$，对$\forall_\epsilon>0$，为了使得
   $|a^x-1|<\epsilon\Longleftrightarrow1-\epsilon<a^x<1+\epsilon\Longleftrightarrow ln(1-\epsilon)<x\ln a<\ln(1+\epsilon)\Longleftrightarrow\frac{\ln(1-\epsilon)}{\ln a}<x<\frac{\ln(1+\epsilon)}{\ln a}$。不妨设$0<\epsilon<1\Longrightarrow0<1-\epsilon^2<1\Longrightarrow0<(1+\epsilon)(1-\epsilon)<1$，所以$\ln(1-\epsilon)+\ln(1+\epsilon)<0,\ln(1-\epsilon)<-\ln(1+\epsilon)$，对于任意给定的$0<\epsilon<1$，取$\delta=\frac{\ln(1+\epsilon)}{\ln a}>0$，则当$|x|<\delta$时有$-\delta<x<\delta\Longleftrightarrow-\frac{\ln(1+\epsilon)}{\ln a}<x<\frac{\ln(1+\epsilon)}{\ln a}$，则有$\frac{\ln(1-\epsilon)}{\ln a}<-\frac{\ln(1+\epsilon)}{\ln a}<x<\frac{\ln(1+\epsilon)}{\ln a}$，即$\frac{\ln(1-\epsilon)}{\ln a}<x<\frac{\ln(1+\epsilon)}{\ln a}\Longrightarrow|a^x-1|<\epsilon$，所以$\lim_{x\to0}a^x=1$。

   假设$a>1$，证a^x在$(-\infty,+\infty)$内连续。

   证：$\forall_x\in(-\infty,+\infty)$，设$x$有增量$\Delta x$，$a^x$对应的增量$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$。
   $\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta\to0}a^x(a^{\Delta x}-1)=a^x\lim_{\Delta x\to0}(a^{\Delta x}-1)=a^x(1-1)=0$，根据连续性定义，$y=a^x$在$x$点处连续。

   当$a<1$时，令$b=\frac{1}{a}>1$，$a^x=\frac{1}{b^x}$，b^x在$(-\infty,+\infty)$内连续，$b^x\ne0$，由连续函数商的连续性，可知$y=a^x=\frac{1}{b^x}$在$(-\infty,+\infty)$内连续。

   对数函数的连续性：$y=\log_a x(a=1,a>0)$可看作是$y=a^x$的反函数，利用反函数的连续性，可知$y=\log_a x$在$(0,+\infty)$是连续的。

幂函数：$y = x^a$，无论a为任何实常数，当$x > 0$时，幂函数有定义，$y = x^a$的定义域为$(0, +\infty)$。由$y = x^a$取对数得$\log_a y = a\log_a x \Longrightarrow y = a^{a\log_a x}$，得复合函数$y = a^u, u = a\log_a x$，由复合函数得连续性，可知$y = x^a$在$(0, +\infty)$连续。

综上所述，基本初等函数在定义域内是连续的，再根据连续函数的和、积、商所构成的函数的连续性以及复合函数的连续性可知，初等函数在其定义域内处处连续。

四、连续函数在闭区间上的性质

函数在区间I上的最大最小值定义：设函数$f(x)$在区间I上有定义，如果$x_0 \in I$，使得$\forall_x \in I, f(x) \le f(x_0)$（或$f(x) \ge f(x_0)$），则称$f(x_0)$是$f(x)$在区间$I$上的最大值（最小值），记为：$\max_{x\in I} f(x) = f(x_0)$（$\min_{x\in I} f(x) = f(x_0)$）。

1. 最大最小值定理：闭区间上的连续函数在该区间上一定有最大值和最小值，即若$f(x)$在$[a, b]$上连续（或称$f(x) \in C[a, b]$），必存在$\xi, \eta \in [a, b]$，使得$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(\xi), \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\eta)$，即$f(\xi) \le f(x) \le f(\eta), x \in [a, b]$。注意："闭区间"、"连续"必不可少。例如：

   $y = \frac{1}{x}$在$(0, 1)$内连续，无最大值也无最小值；再如：

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} -x & -1 \le x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x & 0 < x \le 1 \end{array} \right\} \tag{11}$$

   则$f(x)$在$[-1, 1]$上，$x = 0$点不连续，$f(x)$在$[-1, 1]$内无最小值。

2. 有界性定理：闭区间上连续的函数在该区间上一定有界。

   证：设$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，由最大最小值定理，一定存在最大值M和最小值m，使得$m \le f(x) \le M, x \in [a, b]$，即$f(x)$在$[a, b]$上既有上界也有下界，即$f(x)$在$[a, b]$上有界。

3. 零值点定理（使得函数$f(x)$的函数值等于零的点x_0即$f(x_0) = 0$，称x_0为$f(x)$的零值点）。设$f(x)$在$[a, b]$上连续且$f(a)$与$f(b)$异号（$f(a) \cdot f(b) < 0$），则至少存在一点ξ，使得$f(\xi) = 0$。

4. 介值定理：设$f(x) \in C[a, b]$，且$f(a) = A, f(b) = B$，且$A \ne B$，对于C介于A, B之间，则至少存在一点ξ使得$f(\xi) = C$。

   推论：设$f(x) \in C[a, b]$，令$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) < \max_{x\in[a,b] f(x) = M}$，而数$u$满足$m < u < M$，则至少存在一点$\xi$使得$f(\xi) = u$。

   例子：设$f(x) \in C(a, b), x_i \in (a, b), (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$，证：至少存在一点$\xi \in (a, b)$使得$f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$。

   证：令$c = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, d = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则$[c, d] \subset (a, b)$，且$f(x) \in C[c, d]$，由最大值最小值定理，一定存在$m = \min_{x\in[c,d]} f(x), M = \max_{x\in[c,d]} f(x)$，从而有：

$$\begin{gathered} m \le f(x_1) \le M \\ m \le f(x_2) \le M \\ \vdots \\ m \le f(x_n) \le M \end{gathered} \tag{12}$$

   将n各不等式相加得$nm \le f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \le nM \Longleftrightarrow m \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \le M$，由介值定理得推论，可知结论成立。