第6章 定积分
第1节 定积分的概念
一、实例
二、定积分的几何意义
第2节 定积分的性质，定积分中值定理
一、定积分的性质
二、定积分中值定理
第3节 定积分与原函数的关系
一、变上限的定积分
二、牛顿——莱布尼茨公式
第4节 定积分计算法
一、求定积分的换元积分法
二、定积分的分部积分法
第6节 广义积分、Γ函数
一、无穷限的广义积分
二、无界函数的广义积分
三、Γ函数
第7节 定积分在几何上的应用
一、定积分元素法
二、平面图形的面积
三、求立体的体积

第6章 定积分

第1节 定积分的概念

一、实例

1. 曲边梯形的面积

曲边梯形：$y=f(x)\geq 0, a\leq x\leq b, y=f(x)\in C[a,b]$在$xoy$平面上，由直线$x=a,x=b,y=0$和曲线$y=f(x)$所围成的图形。

求曲边梯形的面积：

1. 在$[a,b]$内插入分点：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$把$[a,b]$分成$n$个小区间：$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，小区间的长度分别为：$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\cdots\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$。过分点$x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1}$作平行于$y$轴的直线，把曲边梯形分割为$n$个窄的曲边梯形，每个窄曲边梯形的面积记为$\Delta s_i,(i=1,2,\cdots,n)$。
2. 在$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i，以$[x_{i-1},x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的矩形面积近似代替Δs_i，即$\Delta s_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$。
3. 整个曲边梯形的面积：$S=\sum_i^n\Delta s_i\approx\sum_i^n f(\xi)\Delta x_i$。
4. 记$\lambda=\max(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$，当$\lambda\to 0$时和式$\sum_i^n f(\xi)\Delta x_i$的极限就定义为曲边梯形的面积。

总结：分割-作乘积-求和-取极限。

二、定积分的几何意义

例子：应用定积分定义：

（1）求极限$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$。

（2）把定积分$\int_0^1\ln(1+x)dx$表示为$n\to\infty$时和式的极限。

解：（1）原式$=\lim_{n\to\infty}\sum_i^n\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_i^n\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n}^2)}}\cdot\frac{1}{n}$，记$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，取$\xi=\frac{i}{n}$，即把$[0,1]$分成$n$等份，在$[0,1]$内插入分点：$x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<\cdots<x_i=\frac{i}{n}<\cdots<\frac{n}{n}=1$，任一子区间长度$\Delta x_i=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}$，$\forall_{\xi_i}=\frac{i}{n}\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],f(\xi_i)=\frac{1}{\sqrt{4-\xi_i^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}$。选取被积函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}},\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_i^n\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_i^n\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n}^2)}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_i^n\frac{1}{\sqrt{4-\xi_i^2}}\Delta x_i=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$。

（2）$\int_0^1\ln(1+x)dx$表示为$n\to\infty$时和式的极限，在$[0,1]$插入分点：$x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<\cdots<x_i=\frac{i}{n}<\cdots<\frac{n}{n}=1$，把$[0,1]$分成$n$个子区间：$[0,\frac{1}{n}],[\frac{1}{n},\frac{2}{n}],\cdots,[\frac{n-1}{n},1]$，每个子区间的长度$\Delta x_i=\frac{1}{n},(i=1,2,\cdots,n),\forall_{\xi_i}=\frac{i}{n}\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\int_0^1\ln(1+x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\ln(1+\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$。

第2节 定积分的性质，定积分中值定理

一、定积分的性质

1. 若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)\pm g(x)$在$[a,b]$上也可积，且有$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$。
2. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，k为常数，则$kf(x)$也在$[a,b]$区间上可积，且$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$。
3. 设$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上可积，常数$a,b,c\in[\alpha,\beta]$（无论a,b,c的相对位置如何）都有：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$。

   证：若$a<c<b,[a,c],[c,b]\subseteq[\alpha,\beta]$，$\because f(x)$在$[\alpha,\beta]$上可积，$\therefore f(x)$在$[a,c],[c,b]$上也可积，选取$c$为一个分点，用$\sum_{[a,b]}$表示$f(x)$在$[a,b]$上的分割求和，$\sum'_{[a,c]}$表示$f(x)$在$[a,c]$上的分割求和，$\sum''_{[c,b]}$表示$f(x)$在$[c,b]$上的分割求和，则有$\sum_{[a,b]}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum'_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum''_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i$，令$\lambda=\max(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n),\lim_{\lambda\to0}\sum_{[a,b]}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum'_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to0}\sum''_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i$，$\therefore\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$。
4. 若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，且$f(x)\le g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx,(a<b)$。

   证：对$[a,b]$进行任意划分，$\forall_{\xi_i}\in(x_{i-1},x_i),(i=1,2,\cdots,n)$都有$f(\xi_i)\le g(\xi_i)$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0\Longrightarrow f(\xi_i)\Delta x_i\le g(\xi_i)\Delta x_i$，$\therefore\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i,\therefore\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\le\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$，即$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$。

   由性质4，可推出以下结论：

   推论1：若$f(x)$在$[a,b],(a<b)$上可积，且$f(x)\ge0$，则$\int_a^b f(x)dx\ge0$，若$a>b$，则$\int_a^b f(x)dx\le0$。类似地，若$f(x)$在$[a,b],(a<b)$上可积，且$f(x)\le0$，则$\int_a^b f(x)dx\le0$，若$a>b$，则$\int_a^b f(x)dx\ge0$。
5. 若$f(x)$在$[a,b],(a<b)$上可积，则$|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx$。

   证：已知$-|a|\le a\le|a|$。由上述绝对值性质，有$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|,(a\le x\le b)$，由性质4，有$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx,\therefore|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx$。
6. 设$f(x)$在$[a,b],(a<b)$上可积，且$\max_{[a,b]}f(x)=M,\min_{[a,b]}f(x)=m$，则$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$（定积分估值定理）。

   证：由假设，有$m\le f(x)\le M,a\le x\le b$，则有$\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx\Longrightarrow m\int_a^b dx\le\int_a^b f(x)dx\le M\int_a^b dx\Longrightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

二、定积分中值定理

定理1：设$f(x),g(x)\in C[a,b]$，且$g(x)$在$[a,b]$上不变号，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。

证：$\because f(x)\in C[a,b],\therefore f(x)$在$[a,b]$上一定有最大值$M$和最小值$m$，即$m\le f(x)\le M,x\in[a,b]$。由假设，不妨设$g(x)\ge 0$，则有
$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x),a\le x\le b,\therefore m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$，
$\because g(x)\ge 0,\therefore\int_a^b g(x)dx\ge 0$。

假若$\int_a^b g(x)dx=0$，则有$m\cdot 0\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\cdot 0,\therefore\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，显然对于任何一点$\xi\in[a,b]$，等式$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$均成立。

假若$\int_a^b g(x)dx>0$，则有$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}<M$，设$\mu=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，则$m\le\mu\le M$，根据闭区间$[a,b]$上连续函数$f(x)$的介值定理，至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\mu=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，故$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$。

定理2：设$f(x)\in C[a,b]$，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$。

例1：设$f(x)\in C[0,1],f(x)\in D(0,1)$，且$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=f(0)$，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$。

证：由命题的结论可知，可用Rolle定理来推证。由题设有$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=f(0)$，$\because[\frac{2}{3},1]\subset[0,1]$，由$f(x)\in C[0,1]\Longrightarrow f(x)\in C[\frac{2}{3},1]$。根据定积分中值定理，至少存在一点$\xi'\in[\frac{2}{3},1]\subset[0,1]$，使$3f(\xi')(1-\frac{2}{3})=f(0)\Longrightarrow f(\xi')=f(0)$，即$f(x)\in C[0,\xi'],f(x)\in D(0,\xi'),f(\xi')=f(0)$，根据Rolle定理，至少存在一点$\xi\in(0,\xi')\subset(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$。

第3节 定积分与原函数的关系

一、变上限的定积分

设$f(x)\in C[a,b],\forall_x\in[a,b]$，考察定积分：$\int_a^x f(x)dx$。

（1）$\because f(x)\in C[a,x],\therefore\int_a^x f(x)dx$存在，在此积分中积分变量和积分上限用同一字母$x$表示，由于可积函数的积分值与积分变量用什么字母表示无关，现在以t表示积分变量，以x表示积分上限，就有$\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(t)dt,a\le t\le x\le b$。

（2）如果让积分上限x在$[a,b]$上变动，对每一个取定的$x\in[a,b]$，通过定积分$\int_a^x f(t)dt$，有一个确定的值与之对应，由函数的定义，可知，变上限的定积分$\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上确定了一个x的函数，记为：$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,x\in[a,b]$，称为积分上限的函数。

定理：设$f(x)\in C[a,b]$，则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上是可导的，且$\frac{d\Phi(x)}{dx}=\frac{d[\int_a^x f(t)dt]}{dx}=f(x),(a\le x\le b)$。

证：$\forall_x\in[a,b]$，x有增量$\Delta x,x+\Delta x\in[a,b]$，$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt$，函数$\Phi(x)$在$x$点处的增量
$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$
$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(\xi)\Delta x$
，其中ξ在$[x,x+\Delta x]$或$[x+\Delta x,x]$之间。求极限$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$，当$\Delta x\to 0$时$\xi\to x$，
$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$，所以$\frac{d[\int_a^x f(t)dt]}{dx}=f(x)$。

由原函数的定义，可知$\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$的原函数，那么有：$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+C$。

若$f(x)\in C[a,b]$，$\frac{d[\int_a^x f(t)dt]}{dx}=f(x)$。

例1：求$\frac{d[\int_1^{x^2} e^{-t^2} dt]}{dx}$。

解：令$u=x^2$，$\frac{d[\int_1^{x^2} e^{-t^2} dt]}{dx}$（其上限为$x$的函数，本质上是复合函数），所以
$\frac{d[\int_1^{x^2} e^{-t^2} dt]}{dx}=\frac{d[\int_1^{u} e^{-t^2} dt]}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^{-u^2}\cdot 2x=2x\cdot e^{-x^4}$。

例2：求$\frac{d[\int_{x^2}^{\sin x} e^{-t^2} dt]}{dx}$。

解：$\int_{x^2}^{\sin x} e^{-t^2} dt=\int_{x^2}^{a} e^{-t^2} dt+\int_{a}^{\sin x} e^{-t^2} dt$，则$\frac{d[\int_{x^2}^{\sin x} e^{-t^2} dt]}{dx}=-2x\cdot e^{-x^4}+e^{-\sin^2 x}\cdot\cos x$。

二、牛顿——莱布尼茨公式

定理：设$f(x)\in C[a,b]$，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

证：由上面的定理知：$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，由题设$F(x)$也是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，于是$F(x)-\Phi(x)=C\Longrightarrow F(x)=\Phi(x)+C$。则有
$F(b)-F(a)=[\Phi(b)+C]-[\Phi(a)+C]=\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$
，即$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

第4节 定积分计算法

一、求定积分的换元积分法

设$f(x)\in C[a,b]$，单值函数$x=\phi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数，当t在$[\alpha,\beta]$上变动时，$\phi(t)$的值在$[a,b]$上变化，并且$\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$，则有$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$。

证：因为$f(x)\in C[a,b],f[\phi(t)]\phi'(t)\in C[\alpha,\beta]$，所以上式两边积分都存在。设$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，由牛顿-莱布尼茨公式，有$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$。

再证明：$F[\phi(t)]$是$f[\phi(t)]\phi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上的原函数：$\frac{dF[\phi(t)]}{dt}=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f[\phi(t)]\phi'(t)$，所以$F[\phi(t)]$是$f[\phi(t)]\phi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上的原函数，因此$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt=F[\phi(t)]|_\alpha^\beta=F[\phi(\beta)]-F[\phi(\alpha)]=F(b)-F(a)$。

所以$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$。

注意：求出$f[\phi(t)]\phi'(t)$的一个原函数$F[\phi(t)]$不必把t换成原来的变量x，只要把新的积分限α,β代入$F[\phi(t)]$中，求差值$F[\phi(\beta)]-F[\phi(\alpha)]$即可。

例1：设$f(x)\in C[-a,a],(a>0)$。证：

（1）若$f(x)$是奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx=0$；

（2）若$f(x)$是偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$。

证：$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$，对$\int_{-a}^0 f(x)dx$，作变换：$x=-t$，当$x=-a$时，$t=a$；当$x=0$时，$t=0$，$\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_a^0 -f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt$，
$\therefore\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a f(-t)dt+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a[f(-x)+f(x)]dx$。

（1）若$f(x)$为奇函数，则$f(-x)=-f(x)\Longrightarrow f(-x)+f(x)=0$，
$\therefore\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a[f(-x)+f(x)]dx=\int_0^a 0dx=0$；

（2）若$f(x)$为偶函数，则$f(-x)=f(x)\Longrightarrow f(-x)+f(x)=2f(x)$，
$\therefore\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a[f(-x)+f(x)]dx=\int_0^a 2f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$。

例2：设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上以T为周期的周期函数，a为任意常数，证明$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$。

证：$\because \int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$。要证明$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$，只须证明$\int_a^0 f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx=0 \Longleftrightarrow -\int_a^0 f(x)dx=\int_T^{a+T} f(x)dx \Longleftrightarrow \int_0^a f(x)dx=\int_T^{a+T} f(x)dx$。

作变换，令$x=t+T$。$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t+T)dt$，
$\because f(t+T)=f(t), \therefore \int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$，$\therefore \int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$。

例3：证$\int_0^{\pi} \sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$。

证：$\int_0^{\pi} \sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n xdx$，对$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n xdx$，作变换$x=\pi-t$，
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n xdx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin^n(\pi-t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$，
$\therefore \int_0^{\pi} \sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$。

二、定积分的分部积分法

设函数$u(x),v(x)$在$[a,b]$上具有连续的导数$u'(x),v'(x)$，则有$\int_a^b u(x)d[v(x)]=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b v(x)d[u(x)]$。

证：据题设，有$d(uv)=udv+vdu, udv=d(uv)-vdu$，等号两边在$[a,b]$上的积分存在，有$\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu$。

例1：证明：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx=\begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n\text{为偶数}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & (n\text{为奇数}) \end{cases}$

证：（1）令$x=\frac{\pi}{2}-t$，
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx$。

（2）设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} xd(-\cos x)$

$$\begin{aligned}
&=[\sin^{n-1} x\cdot(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos xd(\sin^{n-1} x)\\
&=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2} x\cos xdx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx\\
&=(n-1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx]\\
&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n
\end{aligned}$$

即$nI_n=(n-1)I_{n-2}, \therefore I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}I_{n-6}$（递推公式）。

当n为正偶数时，$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\cdots=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0$，当$n$为正奇数时，
$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\cdots=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}I_1$，
$\because I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx, \therefore I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx=\frac{\pi}{2}, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx=(-\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}}=1$，证毕。

例2：设$f(x)$具有连续的二阶导数，$f(\pi)=2, \int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=5$，求$f(0)$。

解：$\int_0^\pi f(x)\sin xdx = \int_0^\pi f(x)d(-\cos x) = [-f(x)\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos xf'(x)dx$
$= f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi f'(x)d(\sin x)$
$= f(\pi) + f(0) + f'(x)\sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\sin xdx$
$= f(\pi) + f(0) + [0 - \int_0^\pi f''(x)\sin xdx]$

$\therefore \int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin xdx = f(\pi) + f(0) = 5$，$\because f(\pi) = 2, \therefore f(0) = 3$。

第6节 广义积分、Γ函数

定积分中规定：（1）积分区间$[a,b]$是有限区间，即a,b是常数；（2）被积函数$f(x)\in C(a,b)$或$f(x)$在$[a,b]$上有界，且至多有有限个间断点。

但是有时积分区间是无限区间、被积函数$f(x)$在$[a,b]$内无界，需要推广积分的概念。

一、无穷限的广义积分

定义：若$f(x)$在$[a,+\infty)$上是连续函数，取$b>a$，如果极限$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在$[a,\infty)$上的广义积分。

类似地，若$f(x)\in C(-\infty,b]$，取$a<b$，如果极限$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在$(-\infty,b]$上的广义积分。

若$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，任取实数$c$，$-\infty<c<+\infty$，两个广义积分$\int_{-\infty}^c f(x)dx$与$\int_c^{+\infty} f(x)dx$都存在，则称$\int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分。

记为：

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

例1：计算广义积分$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$，其中$p>0$为常数。

解：$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-pt}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b td(-\frac{e^{-pt}}{p})$
$= \lim_{b\to+\infty}[-\frac{te^{-pt}}{p}|_0^b - \int_0^b -\frac{e^{-pt}}{p}dt]$
$= -\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^{pb}} - \frac{1}{p^2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-pt}d(-pt) = \frac{1}{p^2}$

例2：验证：$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p},(a>0)$，当$p>1$时，广义积分收敛，$p\le 1$时，广义积分发散。

解：当$p=1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}[\ln x]_a^b = \lim_{b\to+\infty}\ln b - \lim_{b\to+\infty}\ln a = +\infty$
，

当$p<1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty}[\frac{x^{1-p}}{1-p}]|_a^b$
$= \frac{1}{1-p}[\lim_{b\to+\infty}b^{1-p} - \lim_{b\to\infty}a^{1-p}] = +\infty$

当$p>1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty}[\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}]|_a^b$
$= \frac{1}{1-p}[\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{p-1}} - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a^{p-1}}]$
$= \frac{1}{1-p}(0 - \frac{1}{a^{p-1}}) = \frac{1}{p-1}\frac{1}{a^{p-1}}$

这就验证了题目的结论。

例3：计算$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$。

解：$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx$
$= \lim_{a \to -\infty} [\arctan x]|_a^0 + \lim_{b \to +\infty} [\arctan x]|_0^b = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi$

注意：不能写成$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)dx$，若$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)dx$存在，不能保证$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛；但如果此极限值存在，则称此极限值为$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$的柯西主值。

二、无界函数的广义积分

定义：设$f(x) \in C(a, b]$，而在点a的右邻域内无界，任取一个充分小的$\epsilon > 0$，$f(x)$在$[a+\epsilon, b]$上连续，如果极限$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$存在，则称此极限为$f(x)$在$(a, b]$上的广义积分，记为
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$。

类似地，设$f(x) \in C[a, b)$，而在点b的左邻域内无界，任取一个充分小的整数$\eta > 0$，$f(x)$在$[a, b-\eta]$上连续，如果极限$\lim_{\eta \to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)dx$存在，则称此极限为$f(x)$在$[a, b)$上的广义积分，记为
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x)dx$。

设$f(x)$在$[a, b]$上除点$c, (a < c < b)$外连续，而点c的邻域内无界，如果两个广义积分：$\int_a^c f(x)dx, \int_c^b f(x)dx$都收敛，则定义$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$为$f(x)$在$[a, b]$上的广义积分，记为$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$。

例1：求$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$。

解：$\because \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$，$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在点1的左邻域无界。

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\eta \to 0^+} \int_0^{1-\eta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
$= \lim_{\eta \to 0^+} [\arcsin x]|_0^{1-\eta} = \lim_{\eta \to 0^+} \arcsin(1-\eta)$
$= \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

例2：验证广义积分$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$，当$p < 1$时收敛，当$p \geq 1$时发散。

解：当$p = 1$时，
$\int_a^b \frac{1}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} \frac{1}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} [\ln(x-a)]|_{a+\epsilon}^{b} = \lim_{\epsilon \to 0^+} [\ln(b-a) - \ln(\epsilon)] = \infty$

当$p \neq 1$时，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} (x-a)^{-p} dx = \frac{1}{1-p} \lim_{\epsilon \to 0^+} [(x-a)^{1-p}]|_{a+\epsilon}^{b}$
$= \frac{1}{1-p} [(b-a)^{1-p} - \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{1-p}]$

当$p < 1$时，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$；当$p > 1$时，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \infty$。

这就验证了题目的结论。

注意：$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = [-\frac{1}{x}]|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$（错误，当$x = 0$时无界）。

正确的做法是：$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$，其中
$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \to 0^+} \int_{-1}^{0-\eta} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \to 0^+} [-\frac{1}{x}]|_{-1}^{0-\eta} = \lim_{\eta \to 0^+} (\frac{1}{\eta} - 1) = \infty$，所以$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$发散。

三、Γ函数

可以证明广义积分：$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$，当$p>0$时收敛$\forall_p\in(0,+\infty)$，通过广义积分$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$有一个确定的实数与之对应，按照函数的定义，就说$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$定义了一个关于$p$的函数。

定义：当$p>0$时，$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$所定义的函数$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$称为$\Gamma$函数。

性质：

（1）$\Gamma(1)=1$。

证：$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} x^{1-1}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}[-e^{-x}]|_0^b$
$=\lim_{b\to+\infty}(1-e^{-b})=1-\lim_{b\to+\infty}e^{-b}=1-0=1$

（2）$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$。

证：$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} x^{(p+1)-1}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} x^pe^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^pe^{-x}dx$
$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^pd(-e^{-x})=\lim_{b\to+\infty}[-x^pe^{-x}]|_0^b+\lim_{b\to+\infty}p\int_0^b x^{p-1}e^{-x}dx$

$\lim_{b\to+\infty}[-x^pe^{-x}]|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(-b^pe^{-b})=-\lim_{b\to+\infty}\frac{b^p}{e^b}=0$（根据洛必达法则），所以
$\Gamma(p+1)=\lim_{b\to+\infty}[-x^pe^{-x}]|_0^b+\lim_{b\to+\infty}p\int_0^b x^{p-1}e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}p\int_0^b x^{p-1}e^{-x}dx$。
$=p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p)$

（3）$\Gamma(n+1)=n!,(n\in N)$。

Γ函数的其他形式：$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$，现令$x=t^2,(t>0),dx=2tdt$，
$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}(t^2)^{p-1}e^{-t^2}2tdt=2\int_0^{+\infty}t^{2p-1}e^{-t^2}dt=2\int_0^{+\infty}x^{2p-1}e^{-x^2}dx$。

例1：用Γ函数表示积分$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^pdx,(p>0)$。

解：令$\ln\frac{1}{x}=t,\frac{1}{x}=e^t,x=\frac{1}{e^t}$，当$x=1$时，$t=0$，当$x\to0^+$时，$t\to+\infty$，
$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^pdx=\int_{+\infty}^0 t^pd(e^{-t})=\int_0^{+\infty}t^pe^{-t}dt=\int_0^{+\infty}t^{(p+1)-1}e^{-t}dt=\Gamma(p+1)$。

例2：用Γ函数表示$\int_2^{+\infty}e^2xe^{-(x-2)^2}dx$，已知$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，计算此积分值。

解：令$x-2=t,x=t+2$，当$x=2$时，$t=0$，当$x\to+\infty$时，$t\to+\infty$。

$\int_2^{+\infty}e^2xe^{-(x-2)^2}dx=\int_0^{+\infty}e^2(t+2)e^{-t^2}dt$
$=e^2\int_0^{+\infty}te^{-t^2}dt+2e^2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$
$=\frac{1}{2}e^2\cdot2\int_0^{+\infty}t^{2\cdot1-1}e^{-t^2}dt+2e^2\int_0^{+\infty}t^{2\cdot\frac{1}{2}-1}e^{-t^2}dt$
$=\frac{1}{2}e^2\Gamma(1)+e^2\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^2+e^2\sqrt{\pi}$
$=\frac{e^2}{2}(1+2\sqrt{\pi})$

第7节 定积分在几何上的应用

一、定积分元素法

所求量（如面积S）与x变化区间$[a,b]$有关，把$[a,b]$分成一系列部分区间，所求量相应地分成一系列部分量，而且所求量等于部分量的和，称所求量对$[a,b]$具有可加性，ΔS_i与$f(\xi_i)\Delta x$只是差一个高阶无穷小。求部分量的近似值是关键一步。

$\Delta S\approx f(x)dx$，$ds=f(x)dx$——面积元素，则$S=\int_a^b f(x)dx$。

实际问题的所求量u符合：

（1）u与一个变量x的变化区间有关；

（2）u对$[a,b]$具有可加性；

（3）u的部分量$\Delta u=f(x)dx$；

则可以表示为$u=\int_a^b f(x)dx$。

具体求u，先选取积分变量x，确定变化区间，在$[a,b]$内任取部分区间$[x,x+dx]$，求此区间对应的所求量的部分量$du=f(x)dx$（u的元素），最后求出$u=\int_a^b f(x)dx$。

二、平面图形的面积

（1）直角坐标系的情形

例1：求由曲线$y^2=x,y=x^2$所围成图形的面积。

解：求两条曲线的交点：

$$\left\{\begin{array}{ccc} y^2 & = & x \\ y & = & x^2 \end{array}\right. \tag{1}$$

求得交点$O(0,0),A(1,1)$。

取x为积分变量，变化区间$[0,1]$，任取部分区间$[x,x+dx]\subset[0,1]$，$ds=(\sqrt{x}-x^2)dx$（面积元素），则$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$。

一般地，$g(x)\le f(x),x\in[a,b]$，面积元素$ds=[f(x)-g(x)]dx,S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$。

（2）极坐标的情形

求由极坐标系下曲线$\rho=\rho(\theta)$，两条半直线$\theta=\alpha,\theta=\beta,(\alpha<\beta)$所围成的平面图形的面积（$\rho(\theta)$非负且连续）。选取$\theta$作为积分变量，$\alpha\le\theta\le\beta$，在$\theta$和$\theta+d\theta$之间的曲边扇形近似值（面积元素）$ds=\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$，所以$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$。

例3：求心形线$\rho=\alpha(1+\cos\theta),(a>0)$所围成平面图形的面积。

解：心形线关于极轴对称，所以$S=2S_1$。面积元素$ds=\frac{1}{2}\alpha^2(1+\cos\theta)^2d\theta$，面积
$S=2S_1=2\int_0^\pi\frac{1}{2}\alpha^2(1+\cos\theta)^2d\theta=\alpha^2\int_0^\pi(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{3}{2}\pi\alpha^2$。

例4：求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形面积。

解：由图形的对称性：$S=4S_1$，面积元素$ds=y\cdot dx$。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ccc} x & = & a\cos t \\ y & = & b\sin t \end{array}\right. \tag{2}$$

故$ds=y\cdot dx=b\sin t(-a\sin t)dt=-ab\sin^2 tdt$。面积
$S=4S_1=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0-ab\sin^2 tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}ab\sin^2 tdt$

$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\pi ab$

当$a=b$时，得到圆的面积$S=\pi a^2$。

三、求立体的体积

（1）平行截面面积为已知的立体的体积

设有一曲面和过x轴的两点$x=a, x=b, (a<b)$且与x轴垂直的平面围成一个立体，过x轴上任一点作x轴垂直的平面，此平面截此立体，得到一截面，其面积$A(x)$为已知，再求此立体的体积。

取x为积分变量：$a \le x \le b$，取部分区间$[x, x+dx] \subset [a,b]$，对应的薄柱体的体积近似看作是$A(x)$为底，高为dx的柱体体积。体积元素$dv=A(x)dx$，体积$V=\int_a^b A(x)dx$。

例1：设有底面半径为R的圆柱体，现过底圆的一直径作平面，此平面与柱体底面构成二面角为α，求这个平面截此圆柱体所得立体的体积。

（2）旋转体的体积

旋转体：一平面图形绕平面上的一条直线旋转得到的立体，叫做旋转体。

（3）平面曲线的弧长

设有连续曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的方程$y=f(x), a \le x \le b$，其中$f(x)$在$[a,b]$上有连续的一阶导数，求曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的长度。

取x为积分变量，x的变化区间$[a,b]$，先求小区间$[x,x+dx]$对应的弧长元素
$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$，$\overset{\frown}{AB}$的弧长用定积分表示：$S=\int_a^b ds=\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$。

例2：求悬链线$y=a\cosh\frac{x}{a}$在点$A(-b, a\cosh\frac{-b}{a})$与点$B(b, a\cosh\frac{b}{a})$之间的弧长。

解：$y=a\cosh\frac{x}{a}=a\cdot\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}$是偶函数，$y'=a\sinh\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}=\sinh\frac{x}{a}$。代公式
$S=2\int_0^b \sqrt{1+(\sinh\frac{x}{a})^2}dx=2\int_0^b \sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}}dx=2a\sinh\frac{b}{a}$。