第一章 函数

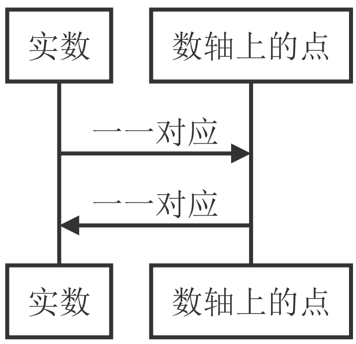
第1节 函数的概念

一、区间与邻域

常用数集：

- 自然数集：N；
- 整数集：Z；
- 有理数集：Q；
- 实数集：R。

建立数轴后：



建立某一实数集A与数轴上某一区间的对应：

- 开区间：设有数a，b，$a<b$，称实数集$\{x|a<x<b\}$为开区间，记为(a,b)。即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，a称为(a,b)的左端点，b称为(a,b)的右端点，$a\notin(a,b),b\notin(a,b)$。
- 闭区间：$[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$，$a\in[a,b],b\in[a,b]$。
- 半开区间：$[a,b)=\{x|a\le x<b\}$，$a\in[a,b),b\notin[a,b)$；$(a,b]=\{x|a<x\le b\}$，$a\notin(a,b],b\in(a,b]$。

其中，a，b都是实数，称(a,b)，$[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$为有限区间，称$b-a$为区间长度。

记号：“$+\infty$”表示正无穷大；“$-\infty$”表示负无穷大（仅仅是一个记号而已）

区间:$[a,+\infty)=\{x|a\le x\},(a,+\infty)=\{x|a<x\},(-\infty,b]=\{x|x\le b\},(-\infty,b)=\{x|x<b\}$。

- 邻域：设有两个数，a，$\delta, (\delta>0)$, 则称实数集$\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$为点a的$\delta$邻域， 记作$N(a,\delta)$，称$\delta>0$为邻域$N(a,\delta)$的半径，a为$N(a,\delta)$的中心。
- 去心邻域：把$N(a,\delta)$的中心点a去掉，称为点a的去心邻域，记作$N(\hat{a},\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}=N(a,\delta)\backslash\{a\}$

二、 函数的概念

例1、设圆的半径为$x(x>0)$，它的面积$A=\pi x^2$，当x在$(0,+\infty)$内任取一个数值$\forall x\in(0,+\infty)$，由关系式$A=\pi x^2$就可以确定A的对应数值。

例2、设有半径为r的圆，作圆的内接正n边形，每一边对应的圆心角$\alpha=\frac{2\pi}{n}$，周长$S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$ （正内接n边形的边数为n，周长为S_n），当边数n在自然数集$N(n\geq 3)$，任取一个数，通过关系式$S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$就会有一个对应的S_n数值。

- 函数的定义：设有数集X， Y, f是一个确定对应法则， $\forall x\in X$，通过对应法则f都有唯一的$y\in Y$与x对应，记为$f(x)=y$，称f为定义在X上的函数，其中X称为f的定义域，常记为D_f，x记为自变量，y记为因变量。当x遍取X中的一切数时，那么与之对应的y值构成一个数集：$V_f=\{y|y=f(x),x\in X\}$，称V_f为函数f的值域。

注意：

1. 一个函数由x与y的对应法则f与x的取值范围X所确定，把“对应法则f”，“定义域”称为函数定义的两个要素。
2. 函数值域是定义域和对应法则确定的。
3. 确定函数定义域时，注意函数如果有实际意义，依据实际问题是否有意义来确定。函数不代表某实际问题时，函数定义域为自变量所能取得的使得函数$y=f(x)$成立的一切实数构成的数集。

- 函数的几何意义：设函数$y=f(x)$，定义域为D_f，$\forall x\in D_f$，对应函数值$y=f(x)$在xoy平面上得点（x，y），当x遍取D_f中的一切实数时，就得到点集$P=\{(x,y)|y=f(x),x\in D_f\}$，点集P称为函数$y=f(x)$的图形。

三、函数的几个简单性质

1. 函数的有界性

若$\exists M>0$，使得$|f(x)|\leq M,x\in I$，则称$y=f(x)$在区间I上有界，否则，则称$f(x)$在I上无界，即对于任何正数$M>0$（无论多么大），总$\exists x_1\in I,s.t.|f(x_1)|>M$。例如：$y=\sin(x)$在$I=(-\infty,+\infty)$上有界（$\because|\sin(x)|\leq 1,x\in(-\infty,+\infty)$）；又例如：$y=\frac{1}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界。

证明：$y=\frac{1}{x}$在(0, 1)内无界。

证：对给定M > 0（不妨设M > 1），无论M多么大，必存在$x_1=\frac{1}{2M}\in(0,1)$使$f(x_1)=\frac{1}{\frac{1}{2M}}=2M>M$。

函数的上界、下界的定义：若$\exists M$（不局限为正数），$s.t.\ f(x)\leq M,\forall x\in I$，称$f(x)$在区间$I$上有上界，任何一个数$N>M$，N也是$f(x)$的一个上界。若$\exists P$，$s.t.\ f(x)\geq P,\forall x\in I$，称$f(x)$在区间$I$上有下界，任何一个数$Q<P$，Q也是f(x)的一个下界。

证明：若$f(x)$在I上有界$\iff f(x)$在I上既有上界，也有下界。

证：设$f(x)$在I上有界，根据定义$\exists M>0,s.t.|f(x)|\leq M,\forall x\in I$，即$-M\leq f(x)\leq M$，因此，$f(x)$既有下界$-M$，也有上界$M$。

设$f(x)$在I上既有下界m，也有上界n，即$m \leq f(x) \leq n$。如果
$m=n=0 \Longrightarrow f(x) \equiv 0, \forall x \in I, \therefore f(x)$在$I$上有界；如果$m,n$不同时为零，取$M=\max\{|m|,|n|\}$
，则有$-M \leq -|m| \leq m \leq f(x) \leq n \leq |n| \leq M$，即
$-M \leq f(x) \leq M, |f(x| \leq M, \forall(x) \in I, \therefore f(x)$在$I$上有界。

2. 函数的单调性

若$f(x)$在区间I上对任何$x_1, x_2 \in I$，且$x_1 < x_2$，恒有$f(x_1) < f(x_2)$，则称$f(x)$在区间I上是严格单调增的；若$x_1 < x_2$，恒有$f(x_1) \leq f(x_2)$，则称$f(x)$在区间I上是广义单调增的（或称单调增，非减的）；

若$x_1 < x_2$，恒有$f(x_1) > f(x_2)$，则称$f(x)$在区间I上是严格单调减的；类似地，有广义单调减（或称单调减，非增的）。

例1、设有函数$y=x^2, D_f=(-\infty,+\infty)$。在$(0,+\infty)$上单增， 在$(-\infty,0)$上单减。

例2、取整函数 $y=[x]$为非减函数（广义单增、单调增）。

3. 函数的奇偶性

若函数$f(x)$在关于原点对称的区间I上满足$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；满足$f(-x)=-f(x)$
，则称$f(x)$为奇函数。偶函数图形关于y轴对称，奇函数图形关于原点对称。

4. 函数的周期性

   设函数$f(x)$的定义域为D_f，如果存在非零常数T，$s.t.$对任意的$x \in D_f$，有$(x \pm T) \in D_f$，且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，T为$f(x)$的周期。

四、复合函数与反函数

1. 复合函数

例1、设函数$y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$，把$u=1-x^2$代入$y=\sqrt{u}$中，得到$y=\sqrt{1-x^2}$，称为由函数$y=\sqrt{u}$与函数$u=1-x^2$复合而成的复合函数。

一般定义:

设函数$y=f(u)$是数集Y上的函数（Y是$y=f(u)$的定义域），$u=\varphi(x)$的定义域为X，值域为Y_φ，且$Y_\varphi \neq \phi, Y_\varphi \subseteq Y$，这时$\forall x \in X$，通过$u$都有唯一的$y$值与之对应，从而在数集$X$上产生一个新函数，用$f \circ \varphi$表示，称$f \circ \varphi$为 X上的复合函数。

$$y=f[\varphi(x)] \tag{1}$$

$y=f[\varphi(x)]$的定义域由$u=\varphi(x)$的定义域中使函数$u=\varphi(x)$的值域Y_φ满足$Y_\varphi \subseteq Y$的那一部分实数构成的。

例2、设$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$，$\varphi(x)=\frac{1}{1+x}$，求$f[\varphi(x)]$，并确定定义域。

解：$f[\varphi(x)]=\frac{[\varphi(x)]^2+1}{[\varphi(x)]^2-1}=\frac{(\frac{1}{1+x})^2+1}{(\frac{1}{1+x})^2-1}=-\frac{x^2+2x+2}{x(x+2)}$，当$x \neq -1$，且$x \neq 0, x \neq -2$时，$f[\varphi(x)]$有定义，$f[\varphi(x)]$的定义域为：$(-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$。

2. 反函数

设有函数$y=f(x)$，定义域为D_f，值域为V_f，$\forall y \in V_f$，至少可以确定一个$x \in D_f$，$s.t.\ f(x)=y$。如果把y看作自变量，把x看作因变量，由函数的概念，可以得到一个新函数，记为$x=f^{-1}(y)$，称为$y=f(x)$的反函数。反函数的定义域为V_f，值域为D_f，把$y=f(x)$称为直接函数。

注意:

1. 虽然直接函数$y=f(x)$是单值的，但反函数$x=f^{-1}(y)$不一定是单值的。

例如：$y=x^2,D_f=(-\infty,+\infty),V_f=[0,+\infty],x=f^{-1}(y)$不是单值的。$\forall y\in[0,+\infty),y\geq 0$，得到$x=\pm\sqrt{y}$有两个值$-\sqrt{y}$和$+\sqrt{y}$的双值函数，可取单值支$x=\sqrt{y}$。

2. 如果直接函数$y=f(x)$严格单调， 则其反函数$x=f^{-1}(y)$ 也是单值单调。
3. 直接函数$y=f(x)$与反函数$x=f^{-1}(y)$图形相同。习惯上以x表示自变量，y表示因变量，则反函数记为$y=f^{-1}(x)$。这时，$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称。

例3、设

$$y=f(x)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{x}{2} & -2<x<1 \\ x^2 & 1\leq x\leq 2\end{array}\right\} \tag{2}$$

求反函数$y=f^{-1}(x)$。

解：当$-2\leq x<1$时，$y=\frac{x}{2},-1<y<\frac{1}{2},x=2y$，定义域$-1<y<\frac{1}{2}$；当$1\leq x\leq 2$时，$y=x^2,1\leq y\leq 4,x=\pm\sqrt{y}$，定义域$-1<y<\frac{1}{2}$，定义域$1\leq y\leq 4$。故反函数：

$$y=f^{-1}(x)=\left\{\begin{array}{cc}2x & -1<x<\frac{1}{2} \\ \sqrt{x} & 1\leq x\leq 4\end{array}\right\} \tag{3}$$

第2节 初等函数

一、基本初等函数

6类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及常量

二、初等函数

由基本初等函数经过有限次的`四则运算`和有限次的`复合步骤`所构成的能够用一个数学式子表达的函数，称为初等函数。

例如：$\arcsin\sqrt{1-x^2}$，$y=\ln(x+e^x)$

例1、分析$y=\ln(1+\sqrt{x})$的结构。

解：$y=\ln u,u=1+\sqrt{x}=1+x^{\frac{1}{2}}$，令$u=1+x^{\frac{1}{2}},v=1,w=x^{\frac{1}{2}},\therefore y=\ln u,u=v+w,v=1,w=x^{\frac{1}{2}}$。

三、双曲函数

双曲正弦函数：$sh\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数：$ch\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，双曲正切函数：$th\ x=\frac{sh\ x}{ch\ x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$。

以上函数与三角函数有类似的性质：

$$ch^2\ x-sh^2\ x=1 \tag{4}$$

$$sh\ 2x=2sh\ x\ ch\ x \tag{5}$$

$$ch\ 2x=ch^2\ x+sh^2\ x \tag{6}$$

反双曲函数及其推导：

反双曲正弦函数：$arsh\ x$；反双曲余弦函数：$arch\ x$；反双曲正切函数$arth\ x$。

反双曲正弦函数的推导：

解：已知反双曲正弦函数的表达式为$y = arsh\ x$，则$x = sh\ y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$，令$u = e^y$，则有$2x = u - \frac{1}{u}$，将等式两边同乘$u$可得：$u^2 - 2ux - 1 = 0$，由二次方程求根公式，得：$u = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$，即
$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}, \because e^y > 0, \therefore e^y = x + \sqrt{x^2+1}, \therefore y = arsh\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

类似方法可以推出：

$$arch\ x = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \tag{7}$$

$$arth\ x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{8}$$