微分方程

微分方程

要找变量x,y之间的函数关系：$y=f(x)$，实际问题往往不能够直接找出$y=f(x)$，但是可以找到$x,y,y',\cdots,y^{(n)}$之间的关系。表示这个关系的方程——微分方程，解这个方程得到$y=f(x)$。

第1节 微分方程的基本概念

例1：已知曲线上任一点$M(x,y)$处切线的斜率等于该点横坐标的2倍，且曲线过点$(2,2)$，求曲线的方程。

解：根据函数导数的几何意义可知：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} & = & 2x & (a) \\ y|_{x=2} & = & 2 & (b) \end{cases} \tag{1}$$

由(a)得：$dy=2xdx$，两边积分$y=x^2+C$，把(b)代入，得$2=2^2+C\Longrightarrow C=-2$。

最终得到曲线方程$y=x^2-2$。

例2：设初速度为v_0，质量为m的物体自由下落，不计空气阻力，求物体的运动规律。

解：设$s=s(t),\frac{ds}{dt}=s'(t),\frac{d^2s}{dt^2}=s''(t)$，所以有：

$$\begin{cases} \frac{d^2s}{dt^2} & = & g & (a) \\ s|_{t=0} & = & 0 & (b) \\ \frac{ds}{dt}|_{t=0} & = & v_0 & (c) \end{cases} \tag{2}$$

由(a)式两边积分得$\frac{ds}{dt}=gt+C_1$，再作积分，得$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$。分别把$(b),(c)$二式代入，得$C_1=v_0,C_2=0$。所以$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$。

微分方程：含有自变量，一元未知函数及其导数（或微分）的方程称为（常）微分方程。

微分方程的阶：在微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。

隐式微分方程：$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$

显式微分方程：$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$

微分方程的解：设$y=\phi(x)$定义在区间I上，且有直至n阶导数，使得$F[x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x)]\equiv 0$。则称$y=\phi(x)$为微分方程$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$的解（在区间$I$上）。

通解：如果微分方程的解中含有独立的任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相等，称这个解称为通解。隐函数形式的通解称为通积分。

微分方程的定解条件：当自变量取特定值时，未知函数及其导数取对应确定值，称为微分方程的定解条件。

初始条件：自变量都取同一特定值时的定解条件称为初始条件（如例2中的$t=0$），条件个数应与阶数相等。

特解：通过定解条件，确定了通解中的任意常数后的解，称为特解。如例1、例2。

微分方程的初值问题：求微分方程满足初始条件的特解，称为微分方程的初值问题。

例3：验证$y=xe^x$是$y''-2y'+y=0$的解。

解：$y=xe^x,y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x,y''=e^x+e^x+xe^x=(2+x)e^x$，方程左端：$(2+x)e^x-2(1+x)e^x+xe^x=e^x(2+x-2-2x+x)=e^x\cdot 0\equiv 0$。所以$y=xe^x$是$y''-2y'+y=0$的解。

例4：求函数$y=c_1e^{c_2x}$，（c_1,c_2为任意常数），求其所满足的微分方程。

解：已知$y=c_1e^{c_2x},y'=c_1c_2e^{c_2x}=c_2y,y''=c_2y'(x)$，则有$\frac{y'}{y''}=\frac{c_2y}{c_2y'}$，即$y''y-(y')^2=0$。此为所求的微分方程（通过求导消去任意常数$c_1,c_2$）。

第2节 一阶微分方程

隐式：$F(x,y,y')=0$

显式：$y'=f(x,y)$或$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

一、可分离变量的微分方程

例如：$\frac{dy}{dx}=2x$或$dy=2xdx$，$\int dy=\int 2xdx+C,y=x^2+C$。

又例如：$\frac{dy}{dx}=2xy^2$或$dy=2xy^2dx$。若$y\neq 0$，则$\frac{1}{y^2}dy=2xdx$，两边作积分$\int\frac{1}{y^2}dy=\int 2xdx+C$。即$-\frac{1}{y}=x^2+C\Longrightarrow y=-\frac{1}{x^2+c}$。

情形：形如$X(x)dx=Y(y)dy$为变量已分离的方程，假设$X(x),Y(y)$为已知的连续函数，假若$y=y(x)$是方程的解，则$X(x)dx=Y(y)dy(x)$，即$X(x)dx=Y[y(x)]y'(x)dx$，令$y=y(x),X(x)dx=Y[y(x)]d[y(x)],X(x)dx=Y(y)dy,\int X(x)dx=\int Y(y)dy+C$。即$y(x)$是由$\int X(x)dx=\int Y(y)dy+C$确定的隐函数。

反之，由$\int X(x)dx=\int Y(y)dy+C$确定隐函数$y=y(x)$。令$F(x,y)=\int X(x)dx-\int Y(y)dy-C$，由隐函数微分法：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}=\frac{X(x)}{Y(y)}$，即$X(x)dx=Y(y)dy\quad(1)$，证明了$y=y(x)$是方程$(1)$的解。

例1：求$\frac{dy}{dx}=3x^2y$的通解。

解：把方程变形为$\frac{1}{y}dy=3x^2dx(y\neq0)$，两边积分$\int\frac{1}{y}dy=\int3x^2dx$。即$\ln(|y|)=x^3+C_1,|y|=e^{x^3+C_1}=e^{C_1}e^{x^3},y=\pm e^{C_1}e^{x^3}$，令$C=\pm e^{C_1}$，则有$y=Ce^{x^3}$是方程的通解。

例2：求$y'=\frac{y\ln y}{x}$的通解。

解：化为$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{1}{x}dx,y\neq1$。$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{1}{x}dx,\int\frac{1}{\ln y}d(\ln y)=\ln(|x|)+C_1$，$\ln(|\ln y|)=\ln|x|+C_1,|\ln y|=e^{\ln|x|}\cdot e^{C_1}=|x|e^{C_1},\ln y=\pm e^{C_1}|x|$，令$C=\pm e^{C_1}$，则$\ln y=C|x|$，即$y=e^{C|x|}$，设$C$为任意常数，则$y=e^{Cx}$是微分方程的通解。

例3：求$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c),(b\neq0)$的通解。

解：令$u=ax+by+c,\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}(\frac{du}{dx}-a)$，代入原方程得$\frac{1}{b}(\frac{du}{dx}-a)=f(u)\Longrightarrow\frac{du}{dx}=bf(u)+a$，则$\frac{1}{bf(u)+a}du=dx$，解出未知函数$u$后，再换回$u=ax+by+c$。

例4：求$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$的通解。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(x-y)}{x-y}$，$f(x-y)=\frac{1+(x-y)}{x-y}$，令$x-y=u,1-\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx},\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=1-\frac{du}{dx}$。将$\frac{dy}{dx},u=x-y$代入原方程得$1-\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+1\Longrightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{1}{u}$，则$udu=-dx$，等式两边积分得$\frac{1}{2}u^2=-x+C$，所以$u^2=-2x+2C\Longrightarrow(x-y)^2=-2x+C_1$（通积分），其中$C_1=2C$是任意常数。

二、一阶齐次方程

如果一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=\phi(x,y)$，而$\phi(x,y)$可以写成$\phi(x,y)=f(\frac{y}{x})$（如果$\phi(x,y)$满足：$\phi(tx,ty)=\phi(x,y)$），则称该一阶微分方程为一阶齐次微分方程。

例如：$(x^2+4y^2)dx-3xydy=0\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+4y^2}{3xy}$，即$\phi(x,y)=\frac{x^2+4y^2}{3xy}$，$\phi(tx,ty)=\frac{(tx)^2+4(ty)^2}{3(tx)(ty)}=\frac{x^2+4y^2}{3xy}=\phi(x,y)$，亦即$\frac{dy}{dx}=\frac{1+4(\frac{y}{x})^2}{3(\frac{y}{x})}=f(\frac{y}{x})$。

解 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$，令 $\frac{y}{x}=u \Longrightarrow y=ux$，两边求导得 $\frac{dy}{dx}=u+x\cdot\frac{du}{dx}$，代入原微分方程得 $u+x\cdot\frac{du}{dx}=f(u)\Longrightarrow x\cdot\frac{du}{dx}=f(u)-u\Longrightarrow\frac{1}{f(u)-u}du=\frac{1}{x}dx$。两边积分得 $\int\frac{1}{f(u)-u}du=\ln|x|+C$（通积分），最后再把 $u=\frac{y}{x}$ 换回原来的变量，就得到原微分方程的通解。

例1：$xydx-(x^2-y^2)dy=0$ 的通解。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$，令 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入原微分方程得 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}$，移项得 $x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u^2}-u=\frac{u^3}{1-u^2}$，分离变量得 $\frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{1}{x}dx$，两端积分得 $-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln x-\ln C$，即 $\ln|\frac{ux}{C}|=-\frac{1}{2u^2}$，脱去对数符号，$|\frac{ux}{C}|=e^{-\frac{1}{2u^2}}$，即
$|ux|=|y|=|C|e^{-\frac{1}{2u^2}},y=\pm|C|e^{-\frac{1}{2u^2}}=Ce^{-\frac{1}{2u^2}}$。（其中 C 为任意常数）。

例2：求 $(1+e^{-\frac{x}{y}})ydx+(y-x)dy=0$ 的通解。

解：把原方程化为 $\frac{dy}{dx}=\frac{(1+e^{-\frac{x}{y}})y}{x-y}$，分子分母同时除以 y 得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+e^{-\frac{x}{y}}}{\frac{x}{y}-1}=f(\frac{x}{y})$。令 $\frac{x}{y}=u\Longrightarrow x=uy\Longrightarrow dx=udy+ydu$，代入原方程得 $(1+e^{-u})y(udy+ydu)+(y-uy)dy=0$，整理得 $\frac{1+e^{-u}}{1+ue^{-u}}du+\frac{1}{y}dy=0$。

由上式的第一项的分子分母同乘 e^u，$\frac{e^u+1}{e^u+u}du+\frac{1}{y}dy=0$，注意到 $(e^u+u)'=e^u+1$，等式两边同时积分 $\ln|e^u+u|+\ln|y|=\ln C$，化简得 $|y(e^u+u)|=C\Longleftrightarrow ye^{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}=C$。

形如 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ 方程：当 $c_1=c_2=0$ 时，它是齐次方程，若 c_1,c_2 不全为零时，它不是齐次方程，但可以转化为齐次方程，具体的做法为：

（1）解方程组：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 &= 0 \\ a_2x+b_2x+c_2 &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

解得 $x=x_0,y=y_0$

（2）作变量替换：

$$\begin{cases} x &= X+x_0 \\ y &= Y+y_0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX} \tag{4}$$

（3）代入原方程得齐次方程：

$\frac{dY}{dX}=f(\frac{a_1(X+x_0)+b_1(Y+y_0)+c_1}{a_2(X+x_0)+b_2(Y+y_0)+c_2})=f(\frac{a_1X+b_1Y+a_1x_0+b_1y_0+c_1}{a_2X+b_2Y+a_2x_0+b_2y_0+c_2})=f(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y})$

（4）把 X,Y 换成 x,y。

例3：求 $\frac{dy}{dx}=\frac{y+2}{x+y+1}$ 的通解。

解：解方程组

$$\begin{cases} y+2 &= 0 \\ x+y+1 &= 0 \end{cases} \tag{5}$$

解得$x_0=3,y_0=-2$，作变量替换$x=X+3,y=Y-2$，$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$，代入原方程：$\frac{dY}{dX}=\frac{Y}{X+Y}$，令$Y=uX$，$\frac{dY}{dX}=\frac{du}{dX}X+u$，$X\frac{du}{dX}+u=\frac{uX}{X+uX}=\frac{1}{1+u}$，$X\frac{du}{dX}=-\frac{u^2}{1+u}$，最终解得
$\frac{X}{Y}-\ln\frac{Y}{X}=\ln(CX)$，$\frac{x-3}{y+2}=\ln[C(y+2)]$。

三、一阶线性方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的微分方程称为一阶的线性方程。其中$Q(x)$称为自由项。

若$P(x),Q(x)$连续，则方程的解存在。

（1）若$Q(x)\equiv 0$，则方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$称为一阶线性齐次方程，为可分离变量的微分方程。

（2）若$Q(X)\not\equiv 0$，则方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$称为一阶线性非齐次方程。

常数变易法：已知在（1）中，方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的通解为$y=Ce^{-\int P(x)dx}$，设
$y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$是非齐次方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的解，两边求导数得
$\frac{dy}{dx}=u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)]=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$

代入非齐次方程得：$u'(x)e^{-\int P(x)dx}-u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$

即$u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$，$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$，整理得一阶线性非齐次微分方程的通解：$y=u(x)e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$。

例1：求$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解。

解：$P(x)=-\frac{2}{x+1},Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$，套公式
$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C]=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot e^{\int-\frac{2}{x+1}dx}dx+C]$
$=e^{\ln(x+1)^2}[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot e^{-\ln(x+1)^2}dx+C]$
$=(x+1)^2[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}dx+C]$
$=(x+1)^2[\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C]=(x+1)^2[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C]$

例2：求$(\sin x)y'-y\cos x=2x\sin^3 x$的通解。

解：原方程变形为$y'-y\frac{\cos x}{sinx}=2x\sin^2 x$，$P(x)=-\frac{\cos x}{\sin x},Q(x)=2x\sin^2 x$，套公式
$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C]=e^{\int\frac{\cos x}{\sin x}dx}[\int 2x\sin^2 x\cdot e^{\int-\frac{\cos x}{\sin x}dx}dx+C]$
$=e^{\ln\sin x}[\int 2x\sin^2 x\cdot e^{-\ln\sin x}dx+C]=\sin x[\int 2x\sin^2 x\cdot\frac{1}{\sin x}dx+C]$
$=\sin x[\int 2x\sin x dx+C]=\sin x[-2x\cos x+2\sin x+C]$

四、伯努利方程

方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$称为伯努利方程。

解法：通过变量替换，化为一阶线性方程求解。

把方程变形为：$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$，
$\because \frac{d(y^{1-n})}{dx}=(1-n)\cdot y^{-n}\frac{dy}{dx}\Longleftrightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\frac{d(y^{1-n})}{dx}$，令$z=y^{1-n},y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}$，代入上面的方程，得$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)\Longrightarrow\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$为一阶线性微分方程。求出通解后，把$z$换回$y^{1-n}$，得到原方程的通解。

例1：求$y'+\frac{y}{x}=(\ln x)y^2$的通解。

解：原方程式伯努利方程。把原方程化为$y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=\ln x$，令$z=y^{-1}$，
$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}\Longrightarrow y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{dz}{dx}$，代入上面方程$-\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=\ln x\Longrightarrow\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}=-\ln x$，解得$z=x[-\frac{1}{2}(\ln x)^2+C]$，$\therefore y^{-1}=x[C-\frac{1}{2}(\ln x)^2]\Longrightarrow xy[C-\frac{1}{2}(\ln x)^2]=1$

五、全微分方程

如果微分方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，若方程的左端恰好式某二元函数$u(x,y)$的全微分，即$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则称$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$为全微分方程。

问题：怎样判定$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$是全微分方程?

在曲线积分那一章中讲到：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$是某函数的全微分$\Longleftrightarrow\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

求解全微分方程：如果存在二元函数$u(x,y)$的全微分为$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，则$u(x,y)=C$。

假定$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$是全微分方程，那么有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$与路径无关，其中$L$是由$(x_0,y_0)$到$(x,y)$的曲线弧。

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$，令$u(x,y)=C$，得通解。

例1：求$(x^2+y)dx-(y-x)dy=0$的通解。

解：$P(x,y)=x^2+y,Q(x,y)=x-y$，$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\frac{\partial Q}{\partial x}=1$，所以原方程是全微分方程，
$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+y)dx-(y-x)dy=\int_0^x x^2dx+\int_0^y(x-y)dy=\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{2}y^2$，令$u(x,y)=C$，原方程的通解为$\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{2}y^2=C$。

另一种方法：用不定积分法求解。

设有全微分方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，一定存在二元函数$u(x,y)$使$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$，由全微分的唯一性，从而$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$，$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\phi(y)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y)dx]+\phi'(y)$，所以$\phi'(y)=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y)dx]=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y)dx]$。

验证等号右端函数与x无关，
$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y)dx]\}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\{\frac{\partial}{\partial x}[\int P(x,y)dx]\}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$

$\therefore\phi(y)=\int\phi'(y)dy=\int\{Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y)dx]\}dy$，代入$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\phi(y)$，从而$u(x,y)=C$为全微分方程的通解。

例2：求$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$的通解。

解：$P=\frac{2x}{y^3},Q=\frac{y^2-3x^2}{y^4}=\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}=\frac{\partial P}{\partial y}$，原方程是全微分方程。

由$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=\frac{2x}{y^3},\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}$，$u(x,y)=\int\frac{2x}{y^3}dx=\frac{x^2}{y^3}+\phi(y)$，
$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}=-\frac{3x^2}{y^4}+\phi'(y)$，从而$\phi'(y)=\frac{1}{y^2}$，$\phi(y)=\int\frac{1}{y^2}dy=-\frac{1}{y}$（取一个函数就行），$u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}$，所以全微分方程的通解为$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$。

六、一阶微分方程的应用举例

1. 瞬态法：根据已知的科学规律，在任意瞬时（或任一点处）去寻求未知函数及其导数与自变量之间的关系，并整理成微分方程。（如：冷却问题或者反射问题）
2. 微量法：在任一时间间隔内（或在任一局部范围内），去寻求未知函数及其微分与自变量微分之间的关系，整理成微分方程。

第3节 可降阶的高阶方程

一、$y^{(n)}=f(x)$型的方程

方程右端$f(x)$是已知的连续函数，令$y^{(n-1)}=u\Longrightarrow y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'=u'$，方程可化为$u'=f(x)$，则$u=\int f(x)dx+C$。反复进行积分降阶，连续作$n$次积分，就得到含有$n$个任意常数的通解。

例1：求$y'''=e^{2x}-\cos x$的通解。

解：$y''=\int(e^{2x}-\cos x)dx+C_1=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1$，
$y'=\int(\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x)dx+C_1x+C_2=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2$，
$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$。

二、$y''=f(x,y')$型的方程

方程的特点：方程右端不显含未知函数y。

作变量替换：$y'=P,y''=\frac{dP}{dx}$，代入原方程得$\frac{dP}{dx}=f(x,P)$，该方程是以P为未知函数，x为自变量的一阶微分方程。设方程的通解$P=\phi(x,C_1)$，又得到一阶方程$y'=\phi(x,C_1)$，
$y=\int\phi(x,C_1)dx+C_2$。

例1：求$(1+x^2)y''=2xy'$满足初始条件$y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=3$的特解。

解：原方程化为$y''=\frac{2x}{1+x^2}y'$，方程右端不显含y，作变量替换，$y'=P,y''=\frac{dP}{dx}$，代入上面的方程$\frac{dP}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}P$，分离变量：$\frac{dP}{P}=\frac{2x}{1+x^2}dx$，两边积分$\ln P=\ln(1+x^2)+\ln C_1$，$P=C_1(1+x^2)$，
即$y'=C_1(1+x^2)$，由$y'|_{x=0}=3\Longrightarrow C_1=3$，$y'=3(1+x^2)$，
$y=\int 3(1+x^2)dx+C_2=3(x+\frac{1}{3}x^3)+C_2$，由$y|_{x=0}=1\Longrightarrow C_2=1$，所以$y=x^3+3x+1$。

三、$y''=f(y,y')$型方程

方程的特点：方程的右端不显含自变量x。

作变量替换：$y' = P, y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P\frac{dP}{dy}$，代入原方程，得$P\frac{dP}{dy} = f(y, P)$是一阶微分方程。设其通解为$P = \psi(y, C_1), y' = \psi(y, C_1), \frac{dy}{\psi(y,C_1)} = dx, \int \frac{1}{\psi(y,C_1)}dy = x + C_2$。

例1：求$1 + (y')^2 = 2yy''$的通解。

解：原方程可化为$y'' = \frac{1+(y')^2}{2y}$，作变量替换，$y' = P, y'' = P\frac{dP}{dy}$，代入原方程，得$P\frac{dP}{dy} = \frac{1+P^2}{2y}$，分离变量$\frac{2P}{1+P^2}dP = \frac{1}{y}dy$，两端积分得$\ln(1 + P^2) = \ln y + \ln C_1$，$1 + P^2 = C_1 y \Longrightarrow P = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$。还原成原变量，$y' = \pm\sqrt{C_y - 1}$，分离变量$\frac{1}{\pm\sqrt{C_1 y-1}}dy = dx$，两端积分后，$\pm\frac{2}{C_1}(C_1 y - 1)^{\frac{1}{2}} = x + C_2$，两边平方得$C_1 y = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2 + 1$。

第4节 线性微分方程解的结构

n阶线性微分方程的一般形式：
$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x)$，其中$P_i(x), (i = 1, 2, \cdots, n)$，$f(x)$为已知的连续函数，也称为自由项。如果$f(x) \equiv 0$，则方程称为$n$阶线性齐次方程。如果$f(x) \not\equiv 0$，则方程称为$n$阶线性非齐次方程。

一、线性齐次方程解的结构——以二阶线性齐次方程为例

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$，$p(x), q(x)$是已知的连续函数。显然可知$y = 0$是方程的解——平凡解。其它的解——非平凡解。

定理：设函数y_1, y_2是齐次方程的两个解，则$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$也是方程的解（其中C_1, C_2是任意常数）。

证：由假设，有

$$\begin{aligned} y_1'' = p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' = p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

将$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$代入方程的左端中，得
$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)$
$= C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1'] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2'] = 0$

所以$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$也是方程的解

当y_1, y_2满足什么条件时？$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$才是方程的通解？

函数线性无关：设有$y_1, y_2, \cdots, y_n$是在(a, b)内的n个函数，如果存在不全为零的n个常数$k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0$，则称$y_1, y_2, \cdots, y_n$在$(a, b)$内是线性相关的，否则称$y_1, y_2, \cdots, y_n$在$(a, b)$内是线性无关的。

判定两个函数y_1, y_2在$x \in I$内线性无关或相关的方法：

1. $\frac{y_2}{y_1} = k$（k为常数），则y_1, y_2线性相关；

2. $\frac{y_2}{y_1} \neq k$（k为常数），则y_1, y_2线性无关。

定理：如果y_1, y_2是齐次方程的两个线性无关的解，则$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$是齐次方程的通解，其中C_1, C_2为任意常数。

二、线性非齐次方程解的结构——以二阶线性非齐次方程为例

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$，$p(x), q(x)$是已知的连续函数。

定理：设$y^\star$是方程的一特解，而$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$是方程所对应的齐次方程的通解，则$y = \bar{y} + y^\star$是非齐次方程的通解。

解：由定理的假设，有$(y^\star)'' + p(x)(y^\star)' + q(x)y^\star = f(x)$，$(\bar{y})'' + p(x)(\bar{y})' + q(x)\bar{y} = 0$，把$y = \bar{y} + y^\star$代入非齐次方程的左端$(\bar{y} + y^\star)'' + p(x)(\bar{y} + y^\star)' + q(x)(\bar{y} + y^\star)$

$$= [\bar{y}'' + p(x)\bar{y}' + q(x)\bar{y}] + [(y^\star)'' + p(x)(y^\star)' + q(x)y^\star] = f(x)$$

所以$y = \bar{y} + y^\star$是非齐次方程的解。而$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^\star$中含有两个任意常数，所以$y = \bar{y} + y^\star$是非齐次方程的通解。

定理：设有二阶线性非齐次方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$，其中$p(x), q(x), f_1(x), f_2(x)$是连续函数，而$y_1^\star$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$的一个特解，$y_2^\star$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$的一个特解。则$y^\star = y_1^\star + y_2^\star$是方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$的特解。

第5节 常系数线性微分方程

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$，其中（$p_i, i = 1, 2 \cdots, n$）是常数。

一、常系数线性微分方程——以二阶常系数线性齐次微分方程为例

$y'' + py' + qy = 0$，p, q是常数。

由方程结构可知，解y及y', y''必须是同一类函数，才有可能使$y'' + py' + qy \equiv 0$。

可知指数函数$y = e^{rx}, y' = re^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}$是同一类函数。

假设$y = e^{rx}$是方程的解，代入方程得：$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0 \Longrightarrow (r^2 + pr + q)e^{rx} \equiv 0$，$\because e^{rx} > 0, \therefore r^2 + pr + q = 0$，说明$y = e^{rx}$中的$r$是二次方程$r^2 + pr + q = 0$的根。以上推导过程步步可逆，从而可知，由二次方程$r^2 + pr + q = 0$的根$r$，写出$y = e^{rx}$就是微分方程的解。

方程$r^2 + pr + q = 0$称为微分方程的特征方程。特征方程的根r_1, r_2称为微分方程的特征根。

（1）不相等的实根，$p^2 - 4q > 0$，特征根$r_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, r_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$，微分方程的两个解$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$，因为$\frac{y_2}{y_1} = e^{(r_2 - r_1)x}$，其中$r_2 - r_1 \neq 0$（因为实根不相等），可见$y_1, y_2$线性无关，则$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$是微分方程的通解。

（2）相等实根，$p^2-4q=0$，$r_1=r_2=-\frac{p}{2}$，得到齐次方程的一个解：$y_1=e^{r_1x}$，为了求得另一个与y_1线性无关的解y_2，可令$\frac{y_2}{y_1}=u(x), y_2=u(x)y_1$，求导数
$y_2'=u'(x)y_1+u(x)y_1'=u'(x)e^{r_1x}+r_1u(x)e^{r_1x}$，
$y_2''=u''(x)y_1+2u'(x)y_1'+u(x)y_1''=u''(x)e^{r_1x}+2r_1u'(x)e^{r_1x}+r^2u(x)e^{r_1x}$，把$y_2,y_2',y_2''$代入齐次方程，得$e^{r_1x}[u''(x)+(2r_1+p)u'(x)+(r_1^2+pr_1+q)u(x)]\equiv 0$，$\because e^{r_1x}>0$，
$\therefore u''(x)+(2r_1+p)u'(x)+(r_1^2+pr_1+q)u(x)\equiv 0$，$\because r_1=-\frac{p}{2}\Longrightarrow 2r_1+p=0$，$r_1$是特征根，$r_1^2+pr_1+q=0$，$\therefore u''(x)=0$，$u(x)=C_1x+C_2$，取$C_1=1, C_2=0$，得$u(x)=x$，
$\therefore y_2=u(x)y_1=xy_1=xe^{r_1x}$，因此原微分方程的通解为$y=C_1y_1+C_2y_2=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$。

（3）共轭复数根，$p^2-4q<0$，$r_1=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}i, r_2=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}i$，令
$\alpha=-\frac{p}{2}, \beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$，$r_1=\alpha-i\beta, r_2=\alpha+i\beta$，得到两个复函数解：$y_1=e^{(\alpha-i\beta)x}, y_2=e^{(\alpha+i\beta)x}$，由欧拉公式，有$y_1=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$，
$y_2=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$，$y_1+y_2=2e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2-y_1=2ie^{\alpha x}\sin\beta x$，得到
$Y_1=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x, Y_2=\frac{y_2-y_1}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x$。

Y_1,Y_2是齐次方程的两个解，$\frac{Y_2}{Y_1}=\tan\beta x$，因此$Y_1,Y_2$是线性无关的，则
$y=C_1Y_1+C_2Y_2=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$是原微分方程的通解。

例1：求$y''-2y'-3y=0$的通解。

解：特征方程$r^2-2r-3=0$，解得$r_1=-1, r_2=3$，通解$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$。

例2：求初值问题：

$$\begin{cases} \frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s & = & 0 \\ s|_{t=0}=4, \frac{ds}{dt}|_{t=0}=-2 \end{cases} \tag{7}$$

解特征方程：$r^2+2r+1=0$，特征根$r_1=r_2=-1$，通解$s=(C_1+C_2t)e^{-t}$，由
$s|_{t=0}=4, \frac{ds}{dt}|_{t=0}=-2$，有$C_1=4, C_2=2$，求得特解$s=(4+2t)e^{-t}$。

设有n阶常系数齐次方程：$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$，写出特征方程
$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$，求出$n$个特征根，求出对应的线性无关的解：

（1）单实根r，$y=e^{rx}$；

（2）一对共轭复根，$r_1=\alpha-i\beta, r_2=\alpha+i\beta, y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$；

（3）k重实根，$r_1=r_2=\cdots=r_k=r$，$y_1=e^{rx}, y_2=xe^{rx}, y_3=x^2e^{rx},\cdots,y_k=x^{k-1}e^{rx}$

（4）一对m重复根，$r_1=r_2=\cdots=r_m=\alpha-i\beta$，$r_{m+1}=r_{m+2}=\cdots=r_{2m}=\alpha+i\beta$，
$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots y_m=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$，

$y_{m+1}=e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{m+2}=x^2e^{\alpha x}\sin\beta x\cdots y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

例4：求$y^{(4)}-6y'''+12y''-8y'=0$的通解。

解：特征方程：$r^4-6r^3+12r^2-8r=0$或$r(r-2)^3=0$，解得特征根$r_1=0, r_2=r_3=r_4=2$，
线性无关的解：$y_1=1, y_2=e^{2x}, y_3=xe^{2x}, y_4=x^2e^{2x}$，通解
$y=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}+C_4x^2e^{2x}$。

例5：求$y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$的通解。

解：特征方程：$r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0$或$(r^2+1)^2(r+1)=0$，特征根：$r_1=r_2=-i,r_3=r_4=i,r_5=-1$，写出线性无关的解：$y_1=\cos x,y_2=x\cos x$，$y_3=\sin x,y_4=x\sin x,y_5=e^{-x}$。通解：$y=(C_1+C_1x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x+C_5e^{-x}$。

二、常系数线性非齐次微分方程——以二阶方程为例

$y''+py'+qy=f(x)$

步骤：

（1）求方程对应的齐次方程$y''+py'+qy=0$的通解，$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$；

（2）求非齐次方程的特解$y^\star$；

（3）写出非齐次方程的通解$y=\bar{y}+y^\star=C_1y_1+C_2y_2+y^\star$。

讨论以下两种情况：

（1）$f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$，其中λ是一实常数，$P_n(x)$表示实系数的n次多项式，即$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$；

设方程的解的一般形式$y^\star=Q(x)e^{\lambda x}$，$Q(x)$是多项式，它的次数、系数待定。

求导数：$(y^\star)'=Q'(x)e^{\lambda x}+\lambda Q(x)e^{\lambda x}$，$(y^\star)''=Q''e^{\lambda x}+2\lambda Q'(x)e^{\lambda x}+\lambda^2Q(x)e^{\lambda x}$。

把$y^\star,(y^\star)',(y^\star)''$代入方程，
$e^{\lambda x}[Q''(x)+2\lambda Q'(x)+\lambda^2Q(x)]+pe^{\lambda x}[Q'(x)+\lambda Q(x)]+qQ(x)e^{\lambda}x=P_n(x)e^{\lambda x}$

消去$e^{\lambda x}$，整理成$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x)$。

（1）如果λ不是特征方程的特征根，则$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$，比较左右两边多项式的次数，可知$Q(x)$是$n$次多项式。$Q(x)=Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$，把$Q_n(x)$，$Q'(x),Q''(x)$代入$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x)$中，比较$x$的同次幂的系数，求出$b_i,(i=0,1,\cdots,n)$。得到方程的特解$y^\star=Q_n(x)e^{\lambda x}$；

（2）如果λ是特征方程的单根，有$\lambda^2+p\lambda+q=0,2\lambda+p\neq 0$（单根处的导数值不等于零），$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_n(x)$，比较等号两端$x$的次数，可知$Q'(x)$应是$n$次多项式，从而$Q(x)$应是$n+1$次多项式，可设$Q(x)=xQ_n(x)$（$Q_n(x)$是$n$次完全多项式）。把$Q_n(x)$，$Q'(x),Q''(x)$代入$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x)$中，比较$x$的同次幂的系数，求出$Q_n(x)$的系数，从而求出$Q(x)$，得到方程的特解$y^\star=Q(x)e^{\lambda x}=xQ_n(x)e^{\lambda x}$；

（3）如果λ是特征方程的重根，有$\lambda^2+p\lambda+q=0,2\lambda+p=0$，$Q''(x)=P_n(x)$，应有$Q''(x)$是$n$次多项式，$Q(x)$应是$n+2$次多项式，设$Q(x)=x^2Q_n(x)$，把$Q_n(x)$，$Q'(x),Q''(x)$代入$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x)$中，比较$x$的同次幂的系数，求出$Q_n(x)$的系数，从而求出$Q(x)$，得到方程的特解$y^\star=Q(x)e^{\lambda x}=x^2Q_n(x)e^{\lambda x}$。

推广到n阶常系数线性非齐次微分方程：

$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=P_m(x)e^{\lambda x}$，特征方程$r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$，

（1）若λ不是特征根，$y^\star=Q_m(x)e^{\lambda x}$；

（2）若λ是s重特征根，$y^\star=x^sQ_m(x)e^{\lambda x}$。

例1：求$y''-5y'+6y=xe^{2x}$的通解。

解：特征方程$r^2-5r+3=0$，$(r-2)(r-3)=0$，解得特征根$r_1=2,r_2=3$，对应的齐次方程的通解$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$。自由项$f(x)=xe^{2x}=P_n(x)e^{\lambda x}$，取$n=1,\lambda=2$，$\lambda=2$是单根，特解的一般形式$y^\star=x(Ax+B)e^{2x}$，求$(y^\star)',(y^\star)''$代入原方程，消去$e^{2x}$，整理后得$-2Ax+2A-B=x$，比较等式两端$x$的同次幂系数，得$A=-\frac{1}{2},B=-1$，所以$y^\star=-(\frac{1}{2}x^2+x)e^{2x}$。因此原方程的通解$y=\bar{y}+y^\star=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(\frac{1}{2}x+1)e^{2x}$。

例2：求$y''+y'+y=x^2$的一个特解。

解：特征方程：$r^2+r+1=0$，特征根：$r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$。自由项$f(x)=x^2=x^2e^{0x}$，取$n=2,\lambda=0$，而$\lambda=0$不是特征根，特解的一般形式：$y^\star=Q_n(x)e^{\lambda x}=(Ax^2+Bx+C)$，求$(y^\star)'=2Ax,(y^\star)''=2A$，把$y^\star,(y^\star)',(y^\star)''$代入原方程，$2A+(2Ax+B)+(Ax^2+Bx+C)=x^2$，整理得$Ax^2+(2A+B)x+(2A+B+C)=x^2$，比较$x$的同次幂的系数，解得$A=1,B=-2,C=0$。所以$y^\star=x^2-2x$。

例3：求初值问题：

$$\begin{cases} y''-2y'+y=e^x \\ y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0 \end{cases} \tag{8}$$

解：特征方程：$r^2-2r+1=0$，特征根$r_1=r_2=1$，对应齐次方程的通解$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^x$。$y''-2y'+y=e^x$，自由项$f(x)=e^x=1\cdot e^x=P_n(x)e^{\lambda x}$，$n=0,\lambda=1$，$\because\lambda=1$是二重特征根，特解一般形式$y^\star=x^2\cdot A\cdot e^x$，求$(y^\star)',(y^\star)''$代入原方程，消去$e^x$，整理后得$A(x^2+4x+2)-2A(x^2+2x)+Ax^2=1$，解得$2A=1,A=\frac{1}{2}$，所以$y^\star=\frac{1}{2}x^2e^x$。非齐次方程的通解：$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x$，由初始条件，解得$C_1=1,C_2=-1$，特解$y=(1-x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x$。

（2）$f(x)=e^{ax}[P_{n_1}(x)\cos bx+Q_{n_2}(x)\sin bx]$，其中$a,b$实常数，$b\neq0$。$P_{n_1}(x)$是$n_1$次实系数多项式，$P_{n_2}(x)$是$n_2$次的实系数多项式。

讨论$y''+py'+qy=e^{ax}[P_{n_1}(x)\cos bx+Q_{n_2}(x)\sin bx]$的特解的一般形式：

$y^\star=x^ke^{ax}[R_n(x)\cos bx+T_n(x)\sin bx]$，其中$n=\max\{n_1,n_2\},R_n(x),T_n(x)$是$n$次多项式。

当$a+bi$不是特征方程$r^2+pr+q=0$的根时，$k=0$；当$a+bi$是特征方程$r^2+pr+q=0$的根时，$k=1$。

例1：求$y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$的通解。

解：特征方程$r^2-2r+5=0$，解得特征根$r_1=1-2i,r_2=1+2i$，对于齐次方程的通解$\bar{y}=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$。自由项$f(x)=e^x\cos 2x=e^x[\cos 2x+0\cdot\sin 2x]=e^{ax}[P_{n_1}(x)\cos bx+Q_{n_2}(x)\sin bx]$，$P_{n_1}(x)=1,Q_{n_2}(x)=0,a=1,b=2$。取$n=0$（0次多项式，即常数）。因为$a+bi=1+2i$是特征根，所以特解的一般形式$y^\star=xe^x[A\cos 2x+B\sin 2x]$。求$(y^\star)',(y^\star)''$，把$y^\star,(y^\star)',(y^\star)''$代入原方程，消去$e^x$，得到$4B\cos 2x-4A\sin 2x=\cos 2x$，比较等号两边$\cos 2x,\sin 2x$的系数，得$4B=1,-4A=0$，即$B=\frac{1}{4},A=0$。$y^\star=\frac{xe^x\sin 2x}{4}$。原方程的通解$y=\bar{y}+y^\star=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{xe^x\sin 2x}{4}$。

例2：求$y''+2y'+y=x\sin x$满足$y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$的特解。

解：特征方程：$r^2+2r+1=0$，解得特征根：$r_1=r_2=-1$，对应的齐次方程的通解$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-x}$。自由项$f(x)=x\sin x=e^{0x}x\sin x=e^{ax}[P_{n_1}(x)\cos bx+Q_{n_2}(x)\sin bx]$，$P_{n_1}(x)=0,Q_{n_2}(x)=x,a=0,b=1$，取$n=1$。$a+bi=i$不是特征根，特解的一般形式$y^\star=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$，求$(y^\star)'=A\cos x-(Ax+B)\sin x+C\sin x+(Cx+D)\cos x=(Cx+A+D)\cos x+(C-B-Ax)\sin x$，$(y^\star)''=(2C-B-Ax)\cos x-(Cx+D+2A)\sin x$。把$y^\star,(y^\star)',(y^\star)''$代入原方程，整理得$(2Cx+2A+2C+2D)\cos x+(-2Ax-2A-2B+2C)\sin x=x\sin x$。比较等号两边$\cos x,\sin x$的系数，得:

$$\begin{cases}-2Ax-2A-2B+2C=x\\ 2Cx+2A+2C+2D=0\end{cases}\tag{9}$$

解得$A=-\frac{1}{2},B=\frac{1}{2},C=0,D=\frac{1}{2}$，特解$y^\star=(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\cos x+\frac{1}{2}\sin x$。原方程的通解$y=\bar{y}+y^\star=(C_1+C_2x)e^{-x}+(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\cos x+\frac{1}{2}\sin x$。由$y|_{x=0}=0$，得$0=C_1+\frac{1}{2},C_1=-\frac{1}{2}$，则$(-\frac{1}{2}+C_2x)e^{-x}+(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\cos x+\frac{1}{2}\sin x$；$y'=C_2e^{-x}-(-\frac{1}{2}+C_2x)e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x-(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\sin x+\frac{1}{2}\cos x$，再由$y'|_{x=0}=1$，得$1=C_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，即$C_2=\frac{1}{2}$。所求特解$y=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)e^{-x}+(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\cos x+\frac{1}{2}\sin x$。

例3：写出$y^{(4)}+y''=3x^2+\sin x$特解的一般形式。

解：由原方程，写出:

$$\begin{cases}y^{(4)}+y''=3x^2\\ y^{(4)}+y''=\sin x\end{cases}\tag{10}$$

对于方程$y^{(4)}+y''=3x^2$：特征方程$r^4+r^2=0,r^2(r^2+1)=0$，解得$r_1=r_2=0,r_3=-i,r_4=i$。自由项$f_1(x)=3x^2=3x^2e^{0x}=P_n(x)e^{\lambda x}$，取$n=2,\lambda=0$。$\therefore\lambda=0$是二重特征根，特解的一般形式$y_1^\star=x^2(Ax^2+Bx+C)$；

对于方程$y^{(4)}+y''=\sin x$：特征方程与特征根同上。自由项$f_2(x)=\sin x=e^{0x}\sin x=e^{ax}[P_{n_1}(x)\cos bx+Q_{n_2}(x)\sin bx]$，$P_{n_1}(x)=0,Q_{n_2}(x)=1,a=0,b=1$，取$n=0$。$a+bi=0+i=i$是特征根，特解的一般形式：$y_2^\star=xe^{0x}(D\cos x+E\sin x)=x(D\cos x+E\sin x)$。由非齐次方程解的结构定理，可知原方程的特解的一般形式为：$y^\star=y_1^\star+y_2^\star=x^2(Ax^2+Bx+C)+x(D\cos x+E\sin x)$。求导代入原方程，对比系数即可求出$A,B,C,D,E$的值。

总结：对于$y''+py'+qy=f(x)$的特解$y^\star$一般形式的确定方法：

自由项$f(x)$的形式	条件	$y^\star$形式
$P_n(x)$	0不是特征根	$Q_n(x)$
$P_n(x)$	0是特征方程的单根	$xQ_n(x)$
$P_n(x)$	0是特征方程的二重根	$x^2Q_n(x)$
$e^{\lambda x}P_n(x)$	λ不是特征根	$e^{\lambda x}Q_n(x)$
$e^{\lambda x}P_n(x)$	λ是特征方程的单根	$xe^{\lambda x}Q_n(x)$
$e^{\lambda x}P_n(x)$	λ是特征方程的二重根	$x^2e^{\lambda x}Q_n(x)$
$e^{ax}[P_{n_1}(x)\cos bx+Q_{n_2}(x)\sin bx],n=\max\{n_1,n_2\}$	$a+bi$不是特征根	$e^{ax}[R_n(x)\cos bx+T_n\sin bx]$
$e^{ax}[P_{n_1}(x)\cos bx+Q_{n_2}(x)\sin bx],n=\max\{n_1,n_2\}$	$a+bi$是特征根	$xe^{ax}[R_n(x)\cos bx+T_n\sin bx]$

例1：设$f(x)$有二次连续的导数，使$f(x)ydx+[e^x-f'(x)]dy=0$是全微分方程，同时，$f(0)=\frac{1}{2},f'(0)=1$，（1）求$f(x)$；（2）求全微分方程的通解。

解：（1）方程$f(x)ydx=[e^x-f'(x)]dy=0$是全微分方程$\Longrightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},[P=f(x)y,Q=e^x-f'(x)]$，则有$\frac{\partial P}{\partial y}=f(x),\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x-f''(x)$，得到$f(x)=e^x-f''(x)$，移项得$f''(x)+f(x)=e^x$。

$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=e^x \\ f(0)=\frac{1}{2},f'(0)=1 \end{cases} \tag{11}$$

特征方程$r^2+1=0$，特征根$r_1=-i,r_2=i$，对应齐次方程的通解$\bar{y}=C_1\sin x+C_2\cos x$，非齐次方程的特解的一般形式$y^\star=Ae^x$，$(y^\star)'=Ae^x,(y^\star)''=Ae^x$，代入非齐次方程，得到$Ae^x+Ae^x=e^x,2A=1,A=\frac{1}{2}$，$\therefore y^\star=\frac{1}{2}e^x$。所以通解$f(x)=\bar{y}+y^\star=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x$。由条件$f(0)=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}=C_2+\frac{1}{2},\Longrightarrow C_2=0$，$f(x)=C_1\sin x+\frac{1}{2}e^x,f'(x)=C_1\cos x+\frac{1}{2}e^x$；则再由条件$f'(0)=1$，$1=C_1+\frac{1}{2}\Longrightarrow C_1=\frac{1}{2}$。所求函数$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}e^x$。

（2）把$f(x)$代入全微分方程，得到$\frac{1}{2}(\sin x+e^x)ydx+[e^x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}e^x]dy=0$，方程整体乘以2，$(\sin x+e^x)ydx+[e^x-\cos x]dy=0$。用曲线积分的方法求$u(x,y)$。$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(\sin x+e^x)ydx+(e^x-\cos x)dy=0+\int_0^y(e^x-\cos x)dy=(e^x-\cos x)y$，全微分方程通解：$u(x,y)=(e^x-\cos x)y=C$。

三、常系数线性微分方程应用举例

例1：设有一个弹簧，上端固定，下端挂一个质量为m的重物，当物体处于静止状态时，作用在物体上的重力与弹簧的弹性力大小相等，方向相反（这个位置称为平衡位置）。建立以平衡位置为原点O，方向同重力方向的坐标轴，给物体初速度$v_0\neq 0$，这时物体离开平衡位置O，作上、下的振动。物体的位置x随着时间t变化，即$x=x(t)$。求物体振动的规律$x(t)$。

解：在振动的过程中，某一时刻t，物体受到弹簧恢复力f的作用，f的大小与物体离开平衡位置的位移x有关，且$f=-kx,(k>0)$，负号表示弹簧的恢复力与物体的位移方向相反。

（1）无阻尼自由振动，即不考虑介质（如空气）的阻力，根据牛顿第二运动定律（$F=ma$），有$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$，$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$，令$\frac{k}{m}=\omega_0^2$，$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$，特征方程$r^2+\omega_0^2=0$，解得特征根$r_1=\omega_0 i,r_2=-\omega_0 i$。方程的通解$x=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t$，
$x=\sqrt{C_1^2+C_2^2}(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\omega_0 t+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin\omega_0 t)$，令
$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\sin\phi,\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}=\cos\phi,\sqrt{C_1^2+C_2^2}=A$，则
$x=A(\sin\phi\cos\omega_0 t+\cos\phi\sin\omega_0 t)=A\sin(\omega_0 t+\phi)$——简谐振动，周期是$\frac{2\pi}{\omega_0}$， 振幅$A=\sqrt{C_1+C_2}$。

（2）阻尼自由振动，如上例，假定物体除了受弹簧的恢复力之外，还有介质阻力R的作用。R的大小与振动的速度$\frac{dx}{dt}$成正比，$R=-h\frac{dx}{dt},(h>0)$，其中负号表示阻力的方向与物体的运动方向相反。由牛顿第二运动定律，$m\frac{d^2x}{dt^2}=-h\frac{dx}{dt}-kx$，$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{h}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$，令$2\beta=\frac{h}{m},\frac{k}{m}=\omega_0^2$，则$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$。

1. 小阻尼情形（$0<\beta<\omega_0$）：微分方程的特征方程$r^2-2\beta r+\omega_0^2=0$，由求根公式得：
   $r_1=-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}=-\beta-\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}i,r_2=-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}=-\beta+\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}i$
   方程的通解：
   $x=e^{-\beta t}(C_1\cos\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+C_2\sin\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t)=Ae^{-\beta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\phi)$，其中
   $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\phi=\arctan\frac{C_1}{C_2}$，振幅$Ae^{\beta t},(\beta>0)$，$\lim_{t\to+\infty}Ae^{-\beta t}=0$，这说明随着时间$t$的增大，振幅很快地趋于0。
2. 大阻尼情形（$0<\omega_0<\beta$）：$r_1=-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2},r_2=-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$，
   $x=C_1e^{(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$，显然$-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}<0$，
   $\because\beta>\sqrt{\beta^2-\omega_0^2},\therefore-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}<0$，$\lim_{t\to+\infty}x=0$。
3. 临界阻尼情形：$\beta=\omega_0$，特征根$r_1=r_2=-\beta$，通解
   $x=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}=C_1e^{-\beta t}+C_2te^{-\beta t}$，
   $\lim_{t\to+\infty}e^{-\beta t}=0,\lim_{t\to+\infty}te^{-\beta t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{\beta t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\beta e^{\beta t}}=0$，$\therefore\lim_{t\to+\infty}x=0$。

四、欧拉方程

形如$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$（其中$p_1,p_2,\cdots,p_n$是常数），称为欧拉方程。

作变换$x=e^t$或$t=\ln x$，将自变量x换为t，$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，
$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx})$，
$\frac{d3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}[\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx})]=-\frac{2}{x^3}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx})+\frac{1}{x^2}(\frac{d^3y}{dt^3}\cdot\frac{dt}{dx}-\frac{d^2y}{dt}\cdot\frac{dt}{dx})$
$=\frac{1}{x^3}(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt})$

引进符号$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\cdot y=Dy,(D=\frac{d}{dt})$，则$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}=Dy$，
$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{d^2}{dt^2}-\frac{d}{dt})y=(D^2-D)y=D(D-1)y$，
$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=(D^3-3D^2+2D)y=D(D-1)(D-2)y$，

一般地：$x^k\frac{d^{(k)}y}{dx^{(k)}}=D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y,(k=1,2,\cdots)$，

代入欧拉方程，得到以t为自变量的常系数线性微分方程，求得通解后，再把t换成$\ln x$，就得到了原方程的通解。

例1：求$x^3y'''+3x^2y''+xy'-y=x^2$的通解。

解：原方程是欧拉方程。作变量替换$x=e^t$，或$t=\ln x$。$x^3y'''=D(D-1)(D-2)y$，$x^2y''=D(D-1)y$，$xy'=Dy$，代入原方程：$D(D-1)(D-2)y+3D(D-1)y+Dy-y=e^{2t}$，即$(D^3-1)y=e^{2t},D^3y-y=e^{2t}$，$\frac{d^3y}{dt^3}-y=e^{2t}$。特征方程：$r^3-1=0$，特征根$r_1=1,r_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,r_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，对应齐次方程的通解：$\bar{y}=C_1e^t+e^{-\frac{1}{2}t}[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t]$，由$x=e^t$，得$\bar{y}=C_1x+x^{-\frac{1}{2}}[C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+C_3\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)]$。非齐次方程：$\frac{d^3y}{dt^3}-y=e^{2t}$的特解一般形式$y^\star=Ae^{2t}=Ax^2$，$(y^\star)'=2Ax,(y^\star)''=2A,(y^\star)'''=0$，代入原欧拉方程，$3x^2\cdot 2A+x\cdot 2Ax-Ax^2=x^2$，即$6A+2A-A=1$，解得$A=\frac{1}{7}$。

原欧拉方程的通解$y=\bar{y}+y^\star=C_1x+x^{-\frac{1}{2}}[C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+C_3\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)]+\frac{1}{7}x^2$。