第九章 重积分

第1节 曲顶柱体的体积

一、实例

平面区域直径：区域σ上任意两端距离最大值。

二、二重积分的定义

设函数$f(x,y)$是定义在平面有界闭区域D上的有界函数，如果$\lim_{\lambda\to 0}\sum_i^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在（则称$f(x,y)$在$D$上可积），极限值为$I$，且$I$的值与对$D$的分法无关，也与$N_i(\xi_i,\eta_i)$在$\sigma_i$上的取法无关，则称$I$为$f(x,y)$在有界闭区域$D$上的二重积分。记为$\iint_D f(x,y)d\sigma$。其中$f(x,y)$称为被积函数，$D$称为积分区域，$d\sigma$称为面积元素，$f(x,y)d\sigma$称为被积表达式。

三、二重积分的性质

6. 中值定理：设$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，S表示D的面积，则至少存在一点$(\xi,\eta)\in D$ 使得$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)S$。

第2节 二重积分的计算

一、在直角坐标系下

简单区域：平行于x轴或y轴的直线与区域D的边界的交点不多于两个。

X型区域：与y轴平行的直线与D的边界交点不多于两个。$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$

Y型区域：与x轴平行的直线与D的边界交点不多于两个。$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

若区域D是简单区域，则将积分化成两次单积分进行求解；若区域D不是简单区域，利用平行于y轴或x轴的直线把D分为若干个简单区域$D_1,D_2,\cdots,D_n$再分别求解，最后相加。

二重积分$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(x,y)dxdy$

二、在极坐标系下

1. 二重积分由直角坐标变换为极坐标的变换公式：

   假设有界闭区域D满足：从极点出发的半直线与D的边界的交点不多于两个。

   $\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$
   $= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\rho_i\cos\theta_i,\rho_i\sin\theta_i)\rho_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i$
   $= \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

2. 极坐标系下的累次积分

   假设有界闭区域D满足：从极点出发的半直线与D的边界的交点不多于两个。

   （1）极点O在积分区域外部

   $D = \{(\rho,\theta)|\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$

   $\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

   （2）极点O在积分区域边界上

   $D = \{(\rho,\theta)|0\le\rho\le\rho(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$

   $\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

   （3）极点O在积分区域内部

   $D = \{(\rho,\theta)|0\le\rho\le\rho(\theta),0\le\theta\le 2\pi\}$

   $\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

例：计算$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$。

构造两个圆域和一个矩形域，分别记为D_1,D_2,S，利用夹逼准则，求出极限为$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

$\iint_S e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy = (\int_0^R e^{-x^2}dx)^2$

第3节 三重积分

仿照二重积分的定义，把面积元素换成体积元素即可定义三重积分。记为$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$。

第4节 三重积分的计算

一、直角坐标系下

设平行于z轴的直线穿过Ω时与Ω的边界曲面交点不多于两个。

把$f(x,y,z)$中的x,y看作常数，对z在$[z_1(x,y),z_2(x,y)]$（z_1(x, y), z_2(x, y)分别为区域Ω的上下曲面方程）上作积分，得$\phi(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$。设$\phi(x,y)$在$D$上可积，则：

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \phi(x,y)dxdy = \iint_D[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dxdy$。其中$D$是区域Ω沿着平行于$z$轴方向的投影得到的区域。

类似地，可以沿着其他坐标轴进行投影。

思想：先对其中一个轴进行积分，将其他两个变量当作常数 。

方法二：$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_{c_1}^{c_2}dz\iint_D f(x,y,z)dxdy$。

二、在柱面坐标系下

柱面坐标：在直角坐标系下点$M(x,y,z)$，在xoy面上以原点O为极点，x轴为极轴，建立极坐标系，再以z轴为数轴，构成了一个柱面坐标系。表示形式为$P(\rho,\theta,z)$。

柱面坐标与直角坐标的关系：$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=z$。

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$

三、在球面坐标系下

球面坐标：设空间一点M在直角坐标下的坐标为$M(x,y,z)$。

$x=r\sin\phi\cos\theta,y=r\sin\phi\sin\theta,z=r\cos\phi$。

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(r\sin\phi\cos\theta,r\sin\phi\sin\theta,r\cos\phi)r^2\sin\phi drd\phi d\theta$

$V=\iiint_\Omega 1dxdydz=\int_a^b d\theta\int_c^d d\phi\int_e^f r^2\sin\phi dr$

第5节 重积分的应用

1. 曲面的面积

   设曲面$\Sigma:z=f(x,y)$，Σ在xoy面上投影区域为D，$f(x,y)$在D上有连续的偏导数$f'_x(x,y),f'_y(x,y)$，用切平面的面积近似代替小曲面的面积。

   dA与$d\sigma$有如下关系：$d\sigma=dA\cdot|\cos\gamma|$其中$\gamma$是曲面在点$M$的法线与$z$轴正向的夹角。所以$dA=\frac{1}{|\cos\gamma|}d\sigma$。其中$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}}$，因此$dA=\frac{1}{|\cos\gamma|}d\sigma=\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}d\sigma$。所以曲面的面积$S=\iint_D\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}d\sigma$