第10章 曲线积分与曲面积分

第1节 第一类曲线积分

一、第一类曲线积分的定义

第一类曲线积分：设空间的光滑曲线L的两个端点A,B，$f(x,y,z)$是定义在L上的有界函数，用L上的点$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=B$把$L$分成$n$个子弧段$M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i,(i=1,\cdots,n)$，$\forall N_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$，$M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$弧长为$\Delta S_i$，作和式$I_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，令$\lambda=\max\{\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n\}$，如果$\lim_{\lambda\to 0} I_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\eta_i)\Delta S_i$存在，设为$I$。若$I$的值与对$L$的分法无关，也与点$N_i$在$M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$的取法无关，则称$I$为$f(x,y,z)$沿着曲线$L$的第一类曲线积分（对弧长的曲线积分），记为$\int_L f(x,y,z)ds$。

若曲线L的两个端点A,B，则曲线记为$L(AB)$或$\overset{\frown}{AB}$。

若积分路径L是封闭曲线，记为$\oint_L f(x,y,z)ds$。

二、第一类曲线积分的计算

1. 设空间曲线L由参量方程给出：$x=x(t),y=y(t),z=z(t),\alpha\le t\le\beta$，其中$x(t),y(t),z(t)$在$[\alpha,\beta]$上有一阶连续的导数，且$x'(t),y'(t),z'(t)$不同时为0。$f(x,y,z)$在曲线$L$是连续的，则$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$。

   证明该公式：假设当t由α变化到β时，L上的点$M(x(t),y(t),z(t))$从端点A到端点B描绘出曲线L，在L上取一系列分点$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=B$，对应一系列单调增加的$t$值：$t_0=\alpha<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$，由定义，由$\int_L f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，点$N(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$，对应参量值$t=\tau_i$，且$t_{i-1}\le\tau_i\le t_i$，根据定积分的应用，$\Delta S_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$，由积分中值定理，$\Delta S_i=\sqrt{x'(\tau_i')^2+y'(\tau_i')^2+z'(\tau_i')^2}(t_i-t_{i-1})=\sqrt{x'(\tau_i')^2+y'(\tau_i')^2+z'(\tau_i')^2}\Delta t_i$，其中$t_{i-1}\le\tau_i'\le t_i$，于是有$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i=\sum_{i=1}^n f[x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i)]\sqrt{x'(\tau_i')^2+y'(\tau_i')^2+z'(\tau_i')^2}\Delta t_i$

   因为$f(x,y,z)$在L上连续，所以$\int_L f(x,y,z)ds$存在，定义中的极限值与τ_i的取法无关，取$\tau_i=\tau_i'$，令$d=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}$，当$\lambda\to 0,d\to 0$。所以$\int_L f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\eta_i)\Delta S_i=$

   $\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n f[x(\tau_i'),y(\tau_i'),z(\tau_i')]\sqrt{x'(\tau_i')^2+y'(\tau_i')^2+z'(\tau_i')^2}\Delta t_i$

   $=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$

第2节 第二类曲线积分

一、第二类曲线积分的定义

数量场：若对空间区域Ω上的每一点$M(x,y,z)$，在时刻t总存在着一个确定的数值$u=u(x,y,z,t)$与之对应，就说在Ω上确定了一个数量场。

矢量场：若对空间区域Ω上的每一点$M(x,y,z)$，在时刻t总存在着一个确定的矢量$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z,t)$与之对应，就说在Ω上确定了一个矢量场。

稳定场：与时间t无关的场称为稳定场，这时数量场$u=u(x,y,z)$，矢量场$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)$。

矢量场$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)$在$oxyz$中三个坐标轴上投影分别为$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$，则
$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$。

曲线方向规定：非封闭曲线L两个端点A,B，有两个方向$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BA}$，规定一个为正向，记为$L$，另一个则记为$L^-$。对于封闭曲线，在曲线上取三个点，则有两个方向$A\overset{\frown}{BC}A,A\overset{\frown}{CB}A$，规定一个为正向，另一个就为负方向。

第二类曲线积分：设$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)$为一矢量场，L是矢量场中一条以A为起点，B为终点的有向光滑曲线，由起点A沿着曲线的正向，用分点$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=B$将$L$任意分成$n$个有向的子弧段，弧段$M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$，弧长为$\Delta S_i$，有向子弧段$M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$对应弦矢量$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$，若$M_i(x_i,y_i,z_i),M_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1},z_{i-1})$，则
$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=(x_i-x_{i-1})\vec{i}+(y_i-y_{i-1})\vec{j}+(z_i-z_{i-1})\vec{k}=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}+\Delta z_i\vec{k}$，任取点$N(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$，作数量积$\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$，当$\lambda=\max\{\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n\}$，如果和式极限$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$存在，且极限值与对$L$的分法无关，也与点$N_i$在$M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$的取法无关，则称此极限为矢量函数$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)$沿着曲线$L(AB)$的第二类曲线积分，记为$\int_L\vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$或$\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$。

$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}+\Delta z_i\vec{k}$，
$\int_L\vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$
$=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i]$
$=\int_LP(x,y,z)dx+\int_LQ(x,y,z)dy+\int_LR(x,y,z)dz$

注意第二类曲线积分与曲线的方向有关。

$\int_{L(AB)}Pdx+Qdy+Rdz=-\int_{L(BA)}Pdx+Qdy+Rdz$

二、第二类曲线积分的计算

设空间曲线的参量方程$L(AB):x=x(t),y=y(t),z=z(t)$，其中$x(t),y(t),z(t)$具有一阶连续的导数，起点$A$对应$t=\alpha$，即$A(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha))$，终点$B$对应$t=\beta$，即$B(x(\beta),y(\beta),z(\beta))$，当$t$单调地由$\alpha$变化到$\beta$时，点$M(x(t),y(t),z(t))$从端点$A$到端点$B$描绘出曲线$L(AB)$，$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$在$L(AB)$上连续，在$L(AB)$上，由起点$A$开始任意取一系列点$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=B$把$L(AB)$分成$n$个有向子弧段$M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i,(i=1,\cdots,n)$，这些分点对应单调变化的参量值$t_0=\alpha,t_1,t_2,\cdots,t_n=\beta$，$\forall N_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in M_{i-1}\overset{\frown}{}M_i$，点$N_i$对应参量值为$t=\tau_i$，即$N_i(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i))$（其中$\tau_i$介于$t_{i-1}$和$t_i$之间）；$x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$，其
$x_i=x(t_i),x_{i-1}=x(t_{i-1}),\Delta x_i=x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\tau_i')(t_i-t_{i-1})=x'(\tau_i')\Delta t_i$，

$\sum_{i=1}^nP(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i=P[x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i)]x'(\tau_i')\Delta t_i$，因为$P(x,y,z)$在$L(AB)$上连续，积分值与$t=\tau_i$的取法无关，现取$\tau_i=\tau_i'$，$\sum_{i=1}^nP(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^nP[x(\tau_i'),y(\tau_i'),z(\tau_i')]x'(\tau_i')\Delta t_i$，令$d=\max\{|\Delta t_1|,|\Delta t_2|,\cdots,|\Delta t_n|\}$，当$\lambda\to0$时，$d\to0$，$\int_LP(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^nP[x(\tau_i'),y(\tau_i'),z(\tau_i')]x'(\tau_i')\Delta t_i=\int_LP(x,y,z)dx$
$=\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^nP[x(\tau_i'),y(\tau_i'),z(\tau_i')]x'(\tau_i')\Delta t_i$
$\int_\alpha^\beta P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)dt$

三、两类曲线积分的关系

设有向曲线$L(AB)$，起点A，终点B，在$L(AB)$上任取一点$M(x,y,z)$，过M点作切线矢量$\vec{T}$（方向与L的正向相一致），取与$\vec{T}$方向相同的单位矢量$\vec{T^0}$，若$\vec{T}$与x轴，y轴，z轴正向夹角为α,β,γ，则
$\vec{T^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},|\vec{T^0}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=\sqrt{1}=1$。在第二类曲线积分中，
$\vec{ds}=\{dx,dy,dz\},|\vec{ds}|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=ds$（向量的模等于弧微分），因此有
$dx=|\vec{ds}|\cos\alpha=\cos\alpha ds,dy=|\vec{ds}|\cos\beta=\cos\beta ds,dz=|\vec{ds}|\cos\gamma=\cos\gamma ds$（投影），因此
$\vec{ds}=\{dx,dy,dz\}=\{\cos\alpha ds,\cos\beta ds,\cos\gamma ds\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}ds=\vec{T^0}ds$，因此
$\int_L\vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=\int_L\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{T^0}ds=\int_L\vec{A}(x,y,z)\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}ds$
$=\int_L\{P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\}ds$
$=\int_L P(x,y,z)dx+\int_L Q(x,y,z)dy+\int_L R(x,y,z)dz$

第3节 格林（Green）公式

格林公式描述了平面上封闭曲线的曲线积分$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$与平面区域$D$（$L$所围成）上的某一个二重积分关系。

单连通域：如果区域D中的任何一条封闭曲线所包围的点全都属于D，则称D为单连通域，否则称D为复连通域（如带有空洞的区域）。

格林公式：设闭区域D由光滑或分段光滑的曲线L所围成，两函数$P(x,y),Q(x,y)$在D内及其边界L上具有连续的一阶偏导数，则有$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$，其中$L$是区域$D$的正向边界曲线。

D的正向边界曲线：当人沿着D的正向边界曲线前进时，区域D在人的左侧。

证明：

情形一：先证D是单连通域、平行于坐标轴的直线穿过区域D时，直线与D的边界曲线交点不多于两个。

区域D对应的曲线：$L=L_1(AB)+L_2(BA)$（上半曲线和下半曲线），有
$L_1(AB):y=y_1(x),L_2(BA):y=y_2(x),y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b$。
$D=\{(x,y)|y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$，二重积分
$\iint_D(\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int_a^b P(x,y)|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx$
$=\int_a^b[P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))]dx=\int_a^b P[x,y_2(x)]dx-\int_a^b P[x,y_1(x)]dx$

$\oint_L P(x,y)dx=\int_{L_1}P(x,y)dx+\int_{L_2}P(x,y)dx=\int_a^b P[x,y_1(x)]dx+\int_b^a P(x,y_2(x))dx=\int_a^b P[x,y_1(x)]dx-\int_a^b P(x,y_2(x))dx$
。

情形二：D是单连通域，但是穿过D且与坐标轴平行的直线与D的边界曲线的交点多于两个。作线段MN把D分成区域D_1,D_2，D_1的边界曲线：$L_1+\bar{NM}$，D_2的边界曲线：$L_2+\bar{MN}$。D_1,D_2满足情形一条件，由已证得结论，有
$\iint_{D_1}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{L_1+\bar{NM}}Pdx+Qdy$，$\iint_{D_2}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{L_2+\bar{MN}}Pdx+Qdy$，

两式相加，
$\iint_{D_1}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\iint_{D_2}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{L_1+\bar{NM}}Pdx+Qdy+\int_{L_2+\bar{MN}}Pdx+Qdy$

情形三：设D是复连通域，D为L_1与L_2所围成。取L_2的正向为逆时针方向，L_1的正向是顺时针方向。作辅助线段AB，则以$L_1+\bar{AB}+L_2+\bar{BA}$为边界的区域$D'$，$D'$是单连通域。综合情形一和情形二结果，可知当$D$是复连通域时，格林公式仍然成立。

格林公式的应用：

1. 计算曲线围成的区域的面积$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$，$1=\frac{1}{2}[(1-(-1)]$
2. 计算复杂的第二类曲线积分。
3. 已知曲线积分与路径无关，则有$du(x,y)=Pdx+Qdy$，而$u(x,y)$是一个曲线积分定义的函数，从而选取特殊的积分路径，求出$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$。
4. 已知二元函数的全微分，求原二元函数。

平面曲线积分与路径无关的条件：

定理：设$P(x,y),Q(x,y)$在单连通域（复连通域中不一定成立）D上具有连续的偏导数，则以下四个命题是等价的：

(1) 在D内沿任何一条闭曲线L其积分值为零，即$\int_L Pdx+Qdy=0$;

(2) 在D内$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy$与路径无关，只与起点$A$和终点$B$有关;

(3) 在D上一定存在函数$u(x,y)$使得被积式$Pdx+Qdy$是$u(x,y)$的全微分，即$du(x,y)=Pdx+Qdy$;

(4) 在D内任一点(x,y)处，恒有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。

证：采用循环证法，即$(1)\Longrightarrow(2)\Longrightarrow(3)\Longrightarrow(4)\Longrightarrow(1)$。

$(2)\Longrightarrow(3)$使用偏导数的定义，$(3)\Longrightarrow(4)$利用混合偏导数连续，则两个混合偏导数相等。

第4节 第一类曲面积分

假定曲面Σ是有界的且是光滑的。

一、第一类曲面积分的定义

第一类曲面积分：设Σ是光滑曲面，$f(x,y,z)$是定义在Σ上的有界函数，将Σ任意地分成n个子曲面块$\Delta S_i,(i=1,2,\cdot,n)$，它的面积也记为$\Delta S_i$，$\lambda_i$表示$\Delta S_i$的直径，$\lambda=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\forall_{N_i}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$，作和式
$I_n=\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，如果当$\lim_{\lambda\to0}I_n=I$，且$I$的值与对$\Sigma$的分法无关，也与点$N_i$在$\Delta S_i$的取法无关，则称$I$为$f(x,y,z)$在$\Sigma$上的第一类曲面积分，或对面积的曲面积分。记为$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$，$dS$称为曲面面积元素，$\Sigma$称为积分曲面。

二、第一类曲面积分的计算

设曲面Σ的方程：$z=z(x,y)$，把Σ投影到xoy面上，得区域D_{xy}。设$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有连续的一阶偏导数z'_x,z'_y，
$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，子曲面块

ΔS_i在xoy面投影区域$(\Delta\sigma_i)_{xy}$，点$N_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$，计算$\Delta S_i$：
$\Delta S_i=\iint_{\Delta(\sigma_i)_{xy}}\sqrt{1+(z'_x(x,y))^2+(z'_y(x,y))^2}dxdy$
$=\sqrt{1+(z'_x(\xi'_i,\eta'_i))^2+(z'_y(\xi'_i,\eta'_i))^2}(\Delta\sigma_i)_{xy}$

（应用了二重积分的中值定理），取$\xi_i=\xi'_i,\eta_i=\eta'_i,\zeta_i=z(\xi'_i,\eta'_i)$，所以
$\iint_\Sigma=f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi'_i,\eta'_i,z(\xi'_i,\eta'_i))\sqrt{1+(z'_x(\xi'_i,\eta'_i))^2+(z'_y(\xi'_i,\eta'_i))^2}(\Delta\sigma_i)_{xy}$

令d_i表示$(\Delta\sigma_i)_{xy}$的直径，令$d=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$，当$\lambda\to0$时，有$d\to0$,
$\iint_\Sigma=f(x,y,z)dS=\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi'_i,\eta'_i,z(\xi'_i,\eta'_i))\sqrt{1+(z'_x(\xi'_i,\eta'_i))^2+(z'_y(\xi'_i,\eta'_i))^2}(\Delta\sigma_i)_{xy}$
$=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x(x,y))^2+(z'_y(x,y))^2}(\Delta\sigma_i)_{xy}$

第5节 第二类曲面积分

一、有向曲面

双侧曲面：上侧、下侧，左侧、右侧，前侧、后侧，内侧、外侧。

有向曲面：取定曲面的Σ法矢量的方向，亦即选定了侧的曲面。

曲面的投影：曲面Σ（有向），在Σ上任取一小块有向曲面ΔS，假设ΔS上各点处的法矢量与z轴正向夹角γ的余弦$\cos\gamma$有相同的符号，$\Delta S\cos\gamma$称为ΔS在xoy面上的有向投影。同理有其他两个面的有向投影。

第二类曲面积分：设有矢量场$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，$\Sigma$是矢量场中光滑的有向曲面，指定$\Sigma$的一侧为正侧。将曲面$\Sigma$任意地分成$n$个子曲面块：$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$，它们的面积仍为$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$，记$\Delta S_i$的直径为$\lambda_i$，记$\lambda=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，$\forall_{N_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)}\in\Delta S_i$，$\Sigma$在点$N_i$的单位法矢量为
$\vec{n_i}=\cos\alpha_i\vec{i}+\cos\beta_i\vec{j}+\cos\gamma_i\vec{k}$，其中$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$是$\vec{n_i}$的方向角。作点积：$\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n_i}\Delta S_i$，作和式
$I_n=\sum_{i=1}^n\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n_i}\Delta S_i$，如果$\lim_{\lambda\to0}I_n=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n_i}\Delta S_i$存在，记为$I$，$I$与对$\Sigma$的分法无关，同时$I$与点$N_i$在$\Delta S_i$的取法无关，则称此极限为$\vec{A}(x,y,z)$沿着有向曲面$\Sigma$正侧的第二类曲面积分，记为：
$\iint_\Sigma\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n_i}\Delta S_i$。

用坐标表示:

因为$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$,
$\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k}$,$\overrightarrow{n_i}=\cos\alpha_i\vec{i}+\cos\beta_i\vec{j}+\cos\gamma_i\vec{k}$,
$\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\overrightarrow{n_i}=P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i$,

$\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}ds$
$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i\Delta S_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i\Delta S_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i]$

称$d\vec{s}=\vec{n}ds=(\cos\alpha ds)\vec{i}+(\cos\beta ds)\vec{j}+(\cos\gamma ds)\vec{k}$为有向曲面面积微元矢量。记
$\cos\alpha ds=dydz,\cos\beta ds=dzdx,\cos\gamma ds=dxdy$,则$d\vec{s}=\vec{n}ds=(dydz)\vec{i}+(dzdx)\vec{j}+(dxdy)\vec{k}$,
$\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}ds=\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{ds}$
$=\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot[(dydz)\vec{i}+(dzdx)\vec{j}+(dxdy)\vec{k}]$
$=\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$

其中$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i\Delta S_i$。

应用:

如果矢量场是流速场,$\vec{v}(x,y,z)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$,则$\iint_\Sigma \vec{v}\overrightarrow{ds}=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$表示流速场中流体穿过$\Sigma$正侧的流量。

如果矢量场是磁场,磁感应强度为$\vec{B}(x,y,z)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$,$\iint_\Sigma \vec{B}\overrightarrow{ds}=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$表示穿过有向曲面$\Sigma$正侧的磁通量。

一般地说,$\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{ds}=\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$称为矢量场穿$\vec{A}(x,y,z)$穿过$\Sigma$正侧的通量。

用Σ表示有向曲面的正侧,用Σ^-表示有向曲面的负侧,则$\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{ds}=-\iint_{\Sigma^-}\vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{ds}$

两类曲面积分的关系:

第一类曲面积分:$\iint_\Sigma=f(x,y,z)dS$

第二类曲面积分:$\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{ds}$

关系:由于$dydz=\cos\alpha ds,dzdx=\cos\beta ds,dxdy=\cos\gamma ds$,$\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}ds=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$。
$=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$

三、第二类曲面积分计算法

设有向曲面$\Sigma:z=z(x,y)$,它在xoy面上投影区域D_{xy},$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有连续的一阶偏导数,γ为Σ上的法矢量与z轴正向的夹角,$R(x,y,z)$在Σ上连续。

(1)当Σ取上侧为正侧,则$0\le\gamma<\frac{\pi}{2},\cos\gamma>0$,有$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\iint_\Sigma R(x,y,z)\cos\gamma ds$,由前面的假设有:
$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y'}}$,所以$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\iint_\Sigma R(x,y,z)\cos\gamma ds=\iint_\Sigma R(x,y,z)\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}ds$

$$=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$
$$=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

（2）当Σ取下侧为正侧，曲面Σ下侧的法矢量与z轴正向的夹角$\frac{\pi}{2} < \gamma \le \pi, \cos\gamma < 0$，$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，从而

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \iint_\Sigma R(x,y,z)\cos\gamma ds = \iint_\Sigma R(x,y,z)(-\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}})ds$

$= -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

$= -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$

（3）当Σ是母线垂直于xoy面的柱面时，$\gamma = \frac{\pi}{2}, \cos\gamma = 0$，$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \iint_\Sigma R(x,y,z)\cos\gamma ds = 0$。

第6节 高斯公式，曲面积分与曲面无关的条件

一、高斯公式

空间区域的连通性：如果在空间区域Ω内，任何一张简单的封闭曲面所围成的区域全都属于Ω，则称Ω为二维的单连通域。如果在空间区域Ω内，任意一条闭曲线都可以张成一片完全属于Ω的曲面（圈起来的曲面），则称Ω是一维的单连通域。

高斯公式：设空间中有界闭域Ω是二维，其边界曲面为Σ，函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Omega$内及$\Omega$上具有连续的一阶偏导数，则$\iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \oint\!\!\!\!\oint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

$= \oint\!\!\!\!\oint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

其中Σ取外侧，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是$\Sigma$外侧的法线的方向余弦。

证明：（等式左右两端各项分别证明相等，设空间Ω由上半曲面Σ_1，下半曲面Σ_2，柱面Σ_3共同围成）假定穿过Ω内部与z轴平行的直线与Ω的边界曲面交点恰好为两个，要证$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \oint\!\!\!\!\oint_\Sigma Rdxdy$。

$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_{D_{xy}} [\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz]dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z)|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dxdy$
$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z_2(x,y)]dxdy - \iint_{D_{xy}} R[x,y,z_1(x,y)]dxdy$

$\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma Rdxdy = \iint_{\Sigma_2} Rdxdy + \iint_{\Sigma_1} Rdxdy + \iint_{\Sigma_3} Rdxdy$
$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z_2(x,y)]dxdy - \iint_{D_{xy}} R[x,y,z_1(x,y)]dxdy + 0$

所以$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \oint\!\!\!\!\oint_\Sigma Rdxdy$。同理$\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \oint\!\!\!\!\oint_\Sigma Pdydz, \iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \oint\!\!\!\!\oint_\Sigma Qdzdx$

因而公式得证。

将公式进行推广，当穿过Ω内部与z轴平行的直线与Ω的边界曲面交点多于两个时，公式同样成立。

二、曲面积分与路径无关的条件

定理：设Ω是空间二维单连通域，$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$\Omega$上具有一阶连续的偏导数，则以下三个命题是等价的。

（1）在Ω内，$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$

（2）对全部包含在Ω内的一个封闭曲面Σ，有$\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 0$

（3）对全部包含在Ω内的非封闭曲面Σ_1的曲面积分$\iint_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$只与曲面$\Sigma_1$的边界曲线有关，而与曲面$\Sigma_1$无关。

第7节 Stokes公式，空间曲线积分与路径无关的条件

一、Stokes公式

定理：设$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在包含曲面$\Sigma$的某一空间区域$\Omega$内具有一阶连续的偏导数，则
$\iint_\Sigma (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$

其中L为有向曲面Σ的正向边界曲线，L与Σ的方向按右手法则确定。

为方便记忆，假如把$\frac{\partial R}{\partial y}$看作是$\frac{\partial}{\partial y}$乘以一个函数$R$，即$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot R$，

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} \cos\alpha ds & \cos\beta ds & \cos\gamma ds \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (1)$$

二、空间曲线积分与路径无关的条件：

定理：设$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$及其偏导数在一维单连通域$\Omega$上连续，则以下四个命题等价：

（1）在Ω内，曲线积分$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+Rdz$与路径无关，只与起点$A$和终点$B$有关

（2）在Ω内，沿任意一条封闭曲线L的积分为零，即$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0$

（3）在Ω内任一点(x,y,z)处，恒有$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$

（4）在Ω中，存在函数$u(x,y,z)$，$du(x,y,z)=Pdx+Qdy+Rdz$