第7章 空间解析几何和矢量代数

平面解析几何：通过坐标法，把平面中的点与坐标(x, y)对应起来。把平面中的曲线与方程对应起来，用代数的方法研究几何问题。

空间解析几何：通过坐标法，点$M \Longleftrightarrow (x, y, z)$。空间图形（曲线、曲面）和方程对应起来。用代数的方法研究几何问题。

第1节 空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

空间直角坐标系的规定：按照右手系确定（右手手指从x轴指向y轴，大拇指方向为z轴方向）。

坐标面：三条坐标轴中任何两条可以确定一个平面，称为坐标面。如xoy, yoz, zox面。

卦限：坐标面xoy, yoz, zox把空间分成八个部分——每个部分称为一个卦限。含有x轴，y轴，z轴正向的部分称为第一卦限。在xoy面上方，从第一卦限开始按照逆时针方向的顺序确定第二、第三、第四卦限。在xoy面下方，位于第一卦限下方的部分称为第五卦限，从第五卦限开始按照逆时针方向的顺序确定第六、第七、第八卦限。

二、空间中两点间的距离

已知空间中两点$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$，距离
$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

第2节 矢量代数

一、矢量的概念

矢量：既有大小又有方向。

单位矢量、零矢量：模等于1的矢量称为单位矢量，模等于0的矢量称为零矢量，记为$\vec{0}$。零矢量的方向是任意的。

二、矢量的坐标表达式

矢量$\vec{a}$的方向：可以用矢量$\vec{a}$与x轴，y轴，z轴正向的夹角α, β, γ，$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$表示。

α, β, γ的余弦$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$:

$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

三、数量积和矢量积

（1）数量积：设有两个非零矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$，$(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$，称$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$为矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$的数量积（点积，内积），记为$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$。$\vec{a} \circ \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$。零矢量与任何矢量的数量积都等于0。

（2）矢量积：有两个非零矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$，按照下面方式确定一新的矢量$\vec{c}$：1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$；2. $\vec{c}$垂直于$\vec{a}, \vec{b}$所确定的平面，且$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$方向构成右手系，则称$\vec{c}$为矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$的矢量积（外积，叉积），即$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$。

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

矢量即运算规律:

（1）$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$;

（2）$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$;

（3）$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$。

第3节 平面及其方程

一、曲面方程的概念

平面解析几何中曲线方程概念：如有平面曲线L与坐标x,y的方程$F(x,y)=0$有以下关系：（1）凡是L上的点$M(x,y)$的坐标都满足$F(x,y)=0$；（2）凡不是L上的点$N(x,y)$的坐标都不满足$F(x,y)=0$。则称$F(x,y)=0$是L的方程，称L为$F(x,y)=0$的图形。

在空间中把曲面S看作动点$M(x,y)$的轨迹，如果曲面S与坐标x,y,z的方程$F(x,y,z)=0$有以下关系：（1）凡是S上的点$M(x,y,z)$的坐标都满足$F(x,y,z)=0$；（2）凡不是S上的点$N(x,y,z)$的坐标都不满足$F(x,y,z)=0$。则称$F(x,y,z)=0$是S的方程，称S为$F(x,y,z)=0$的图形。

二、平面的点法式方程

平面的法矢量：若非零矢量$\vec{n}$垂直于平面Π，则称$\vec{n}$是平面Π的法矢量。

设平面Π的法矢量$\vec{n}=\{A,B,C\}\neq\vec{0}$。且平面$\Pi$过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，建立平面$\Pi$的方程：

解：在平面Π上任取一点$M(x,y,z)$，作矢量$\overrightarrow{M_0M}$，$\overrightarrow{M_0M}$在平面Π上，则有$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$，所以$\vec{n}\circ\overrightarrow{M_0M}=0$。$\because \vec{n}=\{A,B,C\},\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$，$\vec{n}\circ\overrightarrow{M_0M}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$。由$\vec{n}\circ\overrightarrow{M_0M}=0$，得$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，称为平面的点法式方程。

三、平面的一般式方程

若平面的法矢量$\vec{n}=\{A,B,C\}$。过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，则有平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。令$F=Ax+By+Cz+D=0$。平面方程一定是$x,y,z$的一次方程。

反过来，坐标x,y,z的一次方程$Ax+By+Cz+D=0$（A,B,C不同时为零）的图形是一个平面。

证：取方程$Ax+By+Cz+D=0$的一组解：$Ax_0+By_0+Cz_0+D\equiv 0$，两式相减得$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，此方程表示一平面（法矢量$\vec{n}=\{A,B,C\}$。点$M_0(x_0,y_0,z_0)$），且此方程与$Ax+By+Cz+D=0$是等价的，因此方程$Ax+By+Cz+D=0$的图形是一平面。

$Ax+By+Cz+D=0$称为平面的一般式方程。

四、平面的截距式方程

设平面的一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$且A,B,C,D都不为0（平面不平行于坐标轴，也不过原点），方程化为$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$，即$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，此方程称为平面的截距式方程。

五、两平面的夹角

两平面的法向量的夹角（指锐角），称为两平面的夹角。

设平面Π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$; 平面$\Pi_2$: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$。求$\Pi_1,\Pi_2$的夹角$\theta$，即是$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$的夹角（指锐角）。$\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}=|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|\cos\theta$，即$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}+\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$。

（1）平面$\Pi_1 \|$平面$\Pi_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{n_1}\parallel\overrightarrow{n_2}\Longleftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$。

（2）平面$\Pi_1\perp$平面$\Pi_2\Longleftrightarrow\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Longleftrightarrow\overrightarrow{n_1}\circ\overrightarrow{n_2}=0\Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

六、平面外一点到平面的距离

设有一平面Π: $Ax+By+Cz+D=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$是平面外一点，点$M_1(x_1,y_1,z_1)$位于平面上。过M_0点作平面的法矢量$\vec{n}$，$\vec{n}$与平面的交点为N，作矢量$\overrightarrow{M_1M_0}$，点M_0到平面Π的距离为d，则$d=|NM_0|=|Prj_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|$。

平面Π的法矢量$\vec{n}=\{A,B,C\}$，有$Ax_1+By_1+Cz_1+D\equiv0$，
$\overrightarrow{M_1M_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}$。
$d=|Prj_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+Bx_1+Cx_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

第4节 空间直线及其方程

一、空间曲线及其方程

把空间曲线看作是两曲面的交线，设曲面S_1: $F(x,y,z)=0$，曲面S_2: $G(x,y,z)=0$，S_1与S_2的交线C——空间曲线。$M(x,y,z)\in C$，点$M\in S_1$，有$F(x,y,z)=0$，同时$M\in S_2$，有$G(x,y,z)=0$，从而点$M(x,y,z)$满足：

$$\begin{cases} F(x,y,z) &= 0 \\ G(x,y,z) &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

二、直线的对称式和参量式方程

空间直线的方向矢量：任何一个与空间直线平行的非零矢量$\vec{s}$，都称为该直线的方向矢量。

设空间直线L过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，其方向矢量$\vec{s}=\{m,n,p\}\neq\vec{0}$，建立直线$L$的方程。

解：在直线L上任取一点$M(x,y,z)$，在直线L上有矢量$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$，由$\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}\Longleftrightarrow\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，称为$L$的对称式方程（标准式方程）。$\vec{s}$的坐标$m,n,p$称为直线$L$的一组方向数，$\vec{s}$的方向余弦称为$L$的方向余弦。

现令$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\Longleftrightarrow x=x_0+mt,y=y_0+nt,z=z_0+pt$，称：

$$\begin{cases} x &= x_0+mt \\ y &= y_0+nt \\ z &= z_0+pt \end{cases} \tag{3}$$

为L的参量式方程。

三、直线的一般式方程

把空间直线L看作两平面Π_1,Π_2的交线，设已知Π_1,Π_2的方程：
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则$\Pi_1,\Pi_2$的交线为直线$L$，其方程为：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0 \end{cases} \tag{4}$$

称为直线L的一般式方程。

例2：用对称式方程和参量式方程表示直线L，已知L的一般式方程为：

$$\begin{cases} x+y+z+1 &= 0 \\ 2x-y+3z+4 &= 0 \end{cases} \tag{5}$$

解：先求出直线L上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，可以取$x_0=1$，代入L的方程，得：

$$\begin{cases} y_0+z_0 &= -2 \\ -y_0+3z_0 &= -6 \end{cases} \tag{6}$$

解得：$y_0=0, z_0=-2$，得到L上一点$M_0(1,0,-2)$。

再求直线L的方向矢量$\vec{s}$。由直线L的一般式方程可知两平面的法矢量$\overrightarrow{n_1}=\{1,1,1\},\overrightarrow{n_2}=\{2,-1,3\}$，因为直线$L$在$\Pi_1,\Pi_2$上，所以直线$L\perp\overrightarrow{n_1}$，$L\perp\overrightarrow{n_2}$，而方向矢量$\vec{s}\parallel L$。所以$\vec{s}\perp\overrightarrow{n_1},\vec{s}\perp\overrightarrow{n_2}$，根据两个矢量的矢量积定义，可以取$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$。

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k} \tag{7}$$

由L上的点$M_0(1,0,-2)$以及$\vec{s}=\{4,-1,-3\}$，所以直线L的对称式方程为：$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}$。参量方程：

$$\begin{cases} x &= 4t+1 \\ y &= -t \\ z &= -3t-2 \end{cases} \tag{8}$$

四、直线的相互关系

两直线的夹角：两直线的方向矢量的夹角，称为两直线的夹角。

设有两直线，$L1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，方向矢量$\overrightarrow{s_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$；$L2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，方向矢量$\overrightarrow{s_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$。

$\cos\phi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$。

两直线L_1,L_2平行、垂直的条件：

1. $L_1\parallel L_2\iff\overrightarrow{s_1}\parallel\overrightarrow{s_2}\iff\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$
2. $L_1\perp L_2\iff\overrightarrow{s_1}\perp\overrightarrow{s_2}\iff m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

五、直线与平面的夹角

直线L与平面Π的夹角：l'是直线L在平面Π上的投影直线，则称直线L与l'的夹角$\phi(0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2})$为直线$L$与平面$\Pi$的夹角。

设直线L的方程为$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，方向矢量$\vec{s}=\{m,n,p\}$，平面$\Pi$的方程：$Ax+By+Cz+D=0$，法矢量$\vec{n}=\{A,B,C\}$。直线$L$与平面$\Pi$的夹角为$\phi=|\frac{\pi}{2}-(\vec{s},\vec{n})|(0\le\phi\le\frac{\pi}{2})$，$\sin\phi=|\cos(\vec{s},\vec{n})|=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$。

直线L与平面Π平行，垂直的条件：

1. 直线L与平面Π垂直$\Longleftrightarrow\vec{s}\parallel\vec{n}\Longleftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$
2. 直线L与平面Π平行$\Longleftrightarrow\vec{s}\perp\vec{n}\Longleftrightarrow Am+Bn+Cp=0$

第5节 曲面与方程

讨论：柱面，旋转曲面的方程

一、柱面

平行于定直线并沿着定曲线C移动的直线L所生成的曲面，称为柱面，定曲线C称为准线，平行移动的直线L称为母线。

柱面方程的特征：只含有x,y而缺少z的方程$F(x,y)=0$表示与xoy面以一曲线$F(x,y)=0$为准线，而母线平行于z轴的柱面。

二、旋转曲面

一条平面曲线C绕着同一平面的一条定直线l旋转一周所生成的曲面，叫做旋转曲面。

旋转曲面的方程：

设在yoz平面上有一已知曲线$C:F(y,z)=0$，把曲线C绕z轴旋转，就得到以z轴为旋转轴的旋转曲面，求该曲面的方程。

设点$M_1(0,y_1,z_1)$在曲线C上，从而有$F(y_1,z_1)=0$，当曲线C绕着z轴旋转时，点M_1也绕着z轴旋转到另一点$M(x,y,z)$。这时，$z=z_1$，且点M_1到z轴的距离$|y_1|$与点$M(x,y,z)$到z轴的距离$d=\sqrt{x^2+y^2}$相等，即：

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} &= |y_1| \\ z &= z_1\end{cases}\tag{9}$$

或：

$$\begin{cases}y_1 &= \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ z_1 &= z\end{cases}\tag{10}$$

代入$F(y_1,z_1)=0$，得$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$，为旋转曲面的方程。

概括起来：曲线$C:F(y,z)=0$（yoz平面上的曲线）绕z轴旋转生成旋转曲面，曲面的方程为：把$F(y,z)=0$中的z保持不变，而把y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$，得到$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$。曲线$C:F(y,z)=0$（yoz平面上的曲线）绕y轴旋转生成旋转曲面，曲面的方程为：把$F(y,z)=0$中的y保持不变，而把z换成$\pm\sqrt{x^2+z^2}$，得到$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$。

第6节 二次曲面

平面解析几何：把二元二次方程所表示的曲线，称为二次曲线。一次方程所表示的曲线称为一次曲线。

空间解析几何：把三元二次方程所表示的曲面，称为二次曲面，平面称为一次曲面。

研究方法：平面截割法——用坐标面或平行于坐标面的平面族去截割二次曲面，考察它们的交线形状，进行综合分析，从而掌握曲面的全貌。

一、椭球面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$所确定的曲面称为椭球面。

由方程可知：$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\frac{y^2}{b^2}\le 1,\frac{z^2}{c^2}\le 1$，即$|x|\le a,|y|\le b,|z|\le c$。这说明椭球面包含在$x=\pm a,y=\pm b,z=\pm c$所围成的长方体内，且椭球面关于三个坐标轴对称。

椭球面与三个坐标面的交线：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} & = & 1\\ z & = & 0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} & = & 1\\ z & = & 0\end{cases}\tag{11}$$

其表示xoy面的椭圆。

椭球面与平行于xoy面的平面族$z=h(|h|\le c)$的交线：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} & = & 1\\ z & = & h\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})} & = & 1\\ z & = & h\end{cases}\tag{12}$$

其表示$z=h$平面上的椭圆。椭圆的两个半轴$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2},\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}$，椭圆的中心在$z$轴上，当$h$由$0\to c$时，两个半轴有$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}\to 0,\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}\to 0$。

类似地，可讨论平行于zox面及平行于yoz面的平面族与椭球面的交线也都是椭圆。

二、抛物面

1. 由方程$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$（其中$p,q$同号）所表示的曲面称为椭圆抛物面。设$p>0,q>0$，由$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\ge 0$，椭圆抛物面都在$xoy$面的上方，与$xoy$面交于点$O(0,0,0)$，用平面族$z=h>0$去截曲面，得交线：
$$\begin{cases}\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} & = & z\\ z & = & h>0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh} & = & 1\\ z & = & h\end{cases}\tag{13}$$
表示$z=h$平面上的椭圆，两个半轴$\sqrt{2ph},\sqrt{2qh}$，中心在z轴上，当$h>0$越大，两个半轴也越大。用zox坐标面去截曲面，得交线：
$$\begin{cases}\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} & = & z\\ y & = & 0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^2 & = & 2pz\\ y & = & 0\end{cases}\tag{14}$$
为zox面上的抛物线，顶点在原点，z轴为对称轴，开口朝z轴正向。
用平行于zox平面的平面$y=h$去截曲面，得交线：
$$\begin{cases}\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} & = & z\\ y & = & h\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^2 & = & 2p(z-\frac{h^2}{2q})\\ y & = & h\end{cases}\tag{15}$$
为$y=h$平面上的抛物线，对称轴平行于z轴，顶点$(0,h,\frac{h^2}{2q})$，开口朝z轴的正向。
2. 由方程$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$（其中$p,q$同号）所表示的曲面称为双曲抛物面。讨论曲面的形状：设$p>0,q>0$，考虑用xoy平面去截曲面，得交线：

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} & = & z \\ z & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\frac{-x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}})(\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}) & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases} \tag{16}$$

$$\Longleftrightarrow L1: \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}} & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases} \quad or \quad L2: \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}} & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$$

$L1$是xoy面上过原点O的一条直线，$L2$是xoy面上另一条过原点O的一条直线。

若用平面$z=h(h>0)$去截曲面，得交线：

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} & = & z \\ z & = & h>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh} & = & 1 \\ z & = & h \end{cases} \tag{17}$$

交线是$z=h>0$平面的双曲线，实轴平行于y轴，虚轴平行于x轴，中心在z轴上。

若用平面$z=h(h<0)$去截曲面，得交线：

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} & = & z \\ z & = & h<0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh} & = & 1 \\ z & = & h \end{cases} \tag{18}$$

交线是$z=h<0$平面的双曲线，实轴平行于x轴，虚轴平行于y轴，中心在z轴上。

三、双曲面

1. 单叶双曲面

   由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$所表示的曲面称为单叶双曲面。

   用$z=h$（平行于xoy面的平面）与单叶双曲面相交，交线：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ z & = & h \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})} & = & 1 \\ z & = & h \end{cases} \tag{19}$$

   交线是平面$z=h$平面上的椭圆，两个半轴$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}, \frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$，随着$|h|$增大，两个半轴也增大，中心在$z$轴上。

   用zox坐标面$y=0$去截单叶双曲面，得交线：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases} \tag{20}$$

   交线是zox面上的双曲线，其实轴为x轴，虚轴为z轴，中心在原点。

   用yoz坐标面$x=0$去截单叶双曲面，得交线：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ x & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ x & = & 0 \end{cases} \tag{21}$$

   交线是yoz面上的双曲线，其实轴为y轴，虚轴为z轴，中心在原点。

2. 双叶双曲面

   由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1(a>0,b>0,c>0)$所表示的曲面称为双叶双曲面。

   用$z=h$（平行于xoy面的平面）与双叶双曲面相交，交线：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & = & -1 \\ z & = & h \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} & = & (\frac{h^2}{c^2}-1) \\ z & = & h \end{cases} \tag{22}$$

可以看出，当$|h| < c, (-c < h < c)$时，平面$z = h$与双叶双曲面无交点，即在此范围内双叶双曲面没有图形。

当$h = \pm c$时：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} & = & -1 \\ z & = & \pm c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = & 0 \\ z & = & \pm c \end{cases} \tag{23}$$

$z = \pm c$与双叶双曲面相交于两点：$(0, 0, c)$和$(0, 0, -c)$。

用zox坐标面$y = 0$去截双叶双曲面，得交线：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} & = & -1 \\ y & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ y & = & 0 \end{cases} \tag{24}$$

交线是zox面上的双曲线。

用yoz坐标面$x = 0$去截单叶双曲面，得交线：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} & = & -1 \\ x & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} & = & 1 \\ x & = & 0 \end{cases} \tag{25}$$

交线是yoz面上的双曲线。

第7节 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

二、空间曲线的参量方程

将曲线C上的动点(x, y, z)表示成参量t的函数：

$$\begin{cases} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \\ z & = & z(t) \end{cases} \tag{26}$$

称上述方程为曲线C的参量方程。

三、空间曲线在坐标面上的投影曲线

设空间曲线C的一般方程：

$$\begin{cases} F(x, y, z) & = & 0 \\ G(x, y, z) & = & 0 \end{cases} \tag{27}$$

把C投影到xoy面上，得到投影曲线C'，求xoy面上C'的方程。

曲线C的投影柱面：以空间曲线C为准线，母线平行于z轴的柱面，称为曲线C关于xoy面上的投影柱面。

曲线C在xoy面上的投影曲线C'：曲线C关于xoy面上的投影柱面与xoy面的交线C'。

解：

（1）先求曲线C关于xoy面上的投影柱面；

由方程组（27），消去z，得到$H(x, y) = 0$，

（2）再求投影柱面与xoy面的交线C'，即令$z = 0$。