第三章 导数与微分

1. 由于自变量x的变化引起函数$y=f(x)$变化的“快慢”问题——函数的变化率——导数。
2. 由于自变量的微小改变（增量$|\Delta x|$很小时）引起$y=f(x)$的改变量Δy的近似值问题，微分问题。
3. 求导数或求微分。

第1节 导数概念

一、导数定义

定义1：设$y=f(x)$在$N(x_0,\delta),(\delta>0)$内有定义，当自变量x在x_0点有增量$\Delta x, x_0+\Delta x\in N(x_0,\delta)$，函数$y=f(x)$相应的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称$y=f(x)$在$x_0$点可导，并称此极限为$y=f(x)$在$x_0$点的导数，记为$y'|_{x=x_0}, f'(x_0), \frac{d_y}{d_x}|_{x=x_0}, \frac{d_{f(x)}}{d_x}|_{x=x_0}$，即$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

导数定义的另一种形式：记$x=x_0+\Delta x, \Delta x=x-x_0$，当$\Delta x\to 0$时$x\to x_0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$，$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

若$y=f(x)$在x_0点可导，记为$f(x)\in D\{x_0\}$；若$y=f(x)$在(a,b)每一点处都可导，则称$y=f(x)$在(a,b)内可导，记为$f(x)\in D(a,b)$；若$y=f(x)$在区间I上每一点处都可导，则称$y=f(x)$在I内可导，记为$f(x)\in D(I)$。

若$y=f(x)$在(a,b)内可导，$\forall_x\in(a,b)$，就有$f'(x)$与x对应，由函数的定义，可知$f'(x)$是定义在区间(a,b)的函数，$f'(x)$为导函数，简称为导数。

例1、求$y=\frac{1}{x^2},(x\neq 0)$的导数。

解：$y=\frac{1}{x^2}$的定义域为$(-\infty,0)\cap(0,+\infty)$。$\forall_x\in(-\infty,0)\cap(0,+\infty)$，自变量有增量$\Delta x, x+\Delta x\in(-\infty,0)\cap(0,+\infty)$，函数$y=\frac{1}{x^2}$对应得增量$\Delta y=\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$，作比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$，求极限$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}=\frac{-2}{x^3}$，故$f'(x)=\frac{-2}{x^3}$。

定义2：设函数$f(x)$在x_0点左侧$[x_0+\Delta x, x_0],(\Delta x<0)$上有定义，如果极限$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为$f(x)$在$x_0$点的左导数，记为$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；类似地有右导数$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。显然有：$f(x)$在$x_0$点可导等价于$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$。

如果$f(x)$在(a,b)内可导且$f'_+(a), f'_-(b)$存在，称$f(x)$在$[a,b]$上可导，记为$f(x)\in D[a,b]$。

二、导数的几何意义

导数的几何意义：曲线上一点处切线的斜率问题及导数的定义，即$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，可知$f'(x_0)$在几何上表示曲线上一点$P_0(x_0,f(x_0))$上的切线$P_0T$的斜率，即$f'(x_0)=\tan\alpha$（$\alpha$是切线$P_0T$的倾角）。

1. 根据导数的几何意义与平面解析几何关于直线方程的知识可知，切线方程$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。
2. 求曲线上点$P_0(x_0,f(x_0))$的法线（过P_0且与该点处的切线垂直的直线）方程。已知切线斜率$k_1=f'(x_0), f'(x_0)\neq 0$，而切线与法线垂直，故法线斜率$k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{f'(x_0)}$，则法线方程为$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。
3. 若$y=f(x)$在x_0点处的导数$f'(x_0)=\infty$，表示切线垂直于x轴，切线方程$x=x_0$。

三、函数的可导性与连续性的关系

定理：如果函数$y=f(x)$在x_0点可导，则$f(x)$在x_0点一定是连续的。

证：设$y=f(x)$的自变量x在x_0点有增量Δx，函数对应的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$。要证$f(x)$在$x_0$点处连续，亦即要证$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$。因为$y=f(x)$在$x_0$点可导，从而有$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在且$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，根据有极限的函数与无穷小的关系有：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，其中$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，即$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$，取极限$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x_0)\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\Delta x=0$，所以函数$y=f(x)$在$x_0$点处连续。（连续是可导的必要条件）

定理的逆命题不真

例如：函数$y=\sqrt[3]{x}$，$y=\sqrt{x^2}=|x|$在$x=0$点连续，但在$x=0$点不可导。

证：设$y=\sqrt[3]{x}$的自变量$x_0=0$处有增量Δx，则$\Delta y=\sqrt[3]{x_0+\Delta x}-\sqrt[3]{x_0}=\sqrt[3]{\Delta x},(\Delta y)^3=\Delta x$，$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y)^3=(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y)^3=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0, \therefore \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，因此$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$点连续。而$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=\infty$，所以$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$点不可导。

对于函数：

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{Bmatrix} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

容易证明$y=|x|$在$x=0$点连续。设自变量$x=0$处有增量Δx，

$$\Delta y=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|=\begin{Bmatrix} \Delta x, & \Delta x>0, \\ -\Delta x, & \Delta x<0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$，$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$，因为$f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以$y=f(x)=|x|$在$x=0$点不可导。

四、几个基本初等函数的导数公式

1. 常数C：$f(x)\equiv C,-\infty<x<+\infty$。

   证：令$y=f(x)\equiv C$，
   $\forall_x\in(-\infty,+\infty),\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0,f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$
   ，所以$C'=0$。

2. 幂函数$y=f(x)=x^{\alpha}$（α为实常数）。

   证：当$\alpha=n,(n\in N)$时，设自变量x有增量Δx，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-(x)^n\\&=[x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n]-x^n\\&=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n\end{aligned}\tag{3}$$

   $\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}$，
   $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}]=nx^{n-1}$，即$(x^n)'=nx^{n-1}$。

   当α为任何实常数时，$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，证明将在后面完成。

3. 正弦、余弦函数$y=f(x)=\sin x,y=f(x)=\cos x$。

   解：$y=\sin x,-\infty<x<+\infty,\forall_x\in(-\infty,+\infty)$。设自变量$x$有增量$\Delta x$，函数$y=\sin x$的增量
   $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin(x)=2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$，
   $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=1\cdot\cos x=\cos x$
   ，因此$(\sin x)'=\cos x$。

   $y=\cos x,-\infty<x<+\infty,\forall_x\in(-\infty,+\infty)$。设自变量$x$有增量$\Delta x$，函数$y=\cos x$的增量
   $\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos(x)=-2\sin(\frac{\Delta x}{2})\sin(x+\frac{\Delta x}{2})$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\sin(\frac{\Delta x}{2})\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$，
   $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{-2\sin(\frac{\Delta x}{2})\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}]=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})=-1\cdot\sin x=-\sin x$
   ，因此$(\cos x)'=-\sin x$。

4. 对数函数$y=f(x)=\log_a x,(a>0,a\neq 1)$。

   解：已知$y=\log_a x,0<x<+\infty,\forall_x\in(0,+\infty)$，设自变量$x$有增量$\Delta x$，函数对应增量
   $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})$，
   $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})=\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}[\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}]=\\\frac{1}{x}\cdot\log_a[\lim_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}]=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}\end{aligned}\tag{4}$$

   故$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，特殊地：$(\ln x)'=\frac{1}{x}$。

第2节 函数的微分法

一、函数的和差积商的求导数公式

1. 设$u=u(x),v=v(x)$在同一点x处可导，则$y=u(x)\pm v(x)$在x点处可导且$y'=u'(x)\pm v'(x)$。

   证：设自变量在x点处有增量Δx，函数y对应的增量
   $\Delta y=[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]=\Delta u\pm\Delta v$
   ，则$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u\pm\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}$，由假设可知$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x),\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x)$，所以
   $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)\pm v'(x)$，故$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$。

用数学归纳法原理可将公式推广到有限多个函数和差的导数，即：
$[u_1(x) \pm u_2(x) \pm u_3(x) \pm \cdots \pm u_n(x)]' = u_1'(x) \pm u_2'(x) \pm u_3'(x) \pm \cdots \pm u_n'(x)$。

2. 设$u = u(x), v = v(x)$在同一点x处可导，则$y = u(x) \cdot v(x)$在x点处可导且
$y' = [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$。

证：设自变量在x点处有增量Δx，函数y对应的增量

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) \\ &= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) \\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)] \cdot v(x+\Delta x) + [v(x+\Delta x) - v(x)] \cdot u(x) \\ &= \Delta u \cdot v(x+\Delta x) + \Delta v \cdot u(x)\end{aligned} \tag{5}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u \cdot v(x+\Delta x) + \Delta v \cdot u(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x)$，因为$v = v(x)$在$x$点可导，所以$v(x)$在$x$点连续，即$\lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$，所以
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} u(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
，所以$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$。

若$v(x) = C$（C是常数），则$v'(x) = C' = 0$，$[C \cdot u(x)]' = C \cdot u'(x)$。

有限个函数乘积的导数公式（以四个函数为例）：

$$\begin{aligned}(u \cdot v \cdot w \cdot z)' &= [u \cdot (v \cdot w \cdot z)]' \\ &= u' \cdot (v \cdot w \cdot z) + u \cdot (v \cdot w \cdot z)' \\ &= u' \cdot v \cdot w \cdot z + u \cdot [v \cdot (w \cdot z)]' \\ &= u' \cdot v \cdot w \cdot z + u \cdot [v' \cdot (w \cdot z) + v \cdot (w \cdot z)'] \\ &= u' \cdot v \cdot w \cdot z + u \cdot [v' \cdot w \cdot z + v \cdot (w' \cdot z + w \cdot z')] \\ &= u' \cdot v \cdot w \cdot z + u \cdot (v' \cdot w \cdot z + v \cdot w' \cdot z + v \cdot w \cdot z') \\ &= u' \cdot v \cdot w \cdot z + u \cdot v' \cdot w \cdot z + u \cdot v \cdot w' \cdot z + u \cdot v \cdot w \cdot z'\end{aligned} \tag{6}$$

例1、设$y = x^{\frac{1}{5}} - \cos x + \sin \frac{\pi}{180}$，求$y'$。

解：$y' = (x^{\frac{1}{5}} - \cos x + \sin \frac{\pi}{180})' = (x^{\frac{1}{5}})' - (\cos x)' + (\sin \frac{\pi}{180})' = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} + \sin x + 0$。

例2、设$y = \frac{1-x}{\sqrt{x}} + \ln(3x)$，求$y'$。

解：$y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} + \ln 3 + \ln x = x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + \ln 3 + \ln x$，
$y' = (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + \ln 3 + \ln x)' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 0 + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$。

例3、$y = (x - x^3) \ln x + \sin(2x)$，求$y'$。

解：

$$\begin{aligned}y' &= [(x - x^3) \ln x]' + [\sin(2x)]' \\ &= (x - x^3)' \cdot \ln x + (x - x^3) \cdot (\ln x)' + (2 \sin x \cos x)' \\ &= (1 - 3x^2) \cdot \ln x + 1 - x^2 + 2[(\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'] \\ &= (1 - 3x^2) \cdot \ln x + 1 - x^2 + 2[(\cos x)^2 - (\sin x)^2] \\ &= (1 - 3x^2) \cdot \ln x + 1 - x^2 + 2 \cos(2x)\end{aligned} \tag{7}$$

3. 设$u = u(x), v = v(x)$在同一点x处可导，且$v(x) \neq 0$，则$y = \frac{u(x)}{v(x)}$在x点处可导，且
$[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$。

证：设自变量在x点处有增量Δx，函数y有对应增量

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \\ &= \frac{v(x)\cdot u(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} \\ &= \frac{v(x)\cdot u(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} \\ &= \frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)} \\ &= \frac{\Delta u\cdot v(x) - u(x)\cdot\Delta v}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}\end{aligned} \tag{8}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x) - u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}$，因为$u(x), v(x)$在$x$点可导，所以$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$又因为$v(x)$在$x$点连续，所以$\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$，取极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta u}{\Delta x}) - u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta v}{\Delta x})}{v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$。当$u = 1$时，$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$。

例1、设$y = \tan x$，$y = \cot x$，求y'。

解：$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$，

$y' = (\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = (\sec x)^2$；

$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$，同理可得$y' = (\cot x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = -(\csc x)^2$。

例2、$y = \sec x$，$y = \csc x$，求y'。

解：$y' = (\sec x)' = (\frac{1}{\cos x})' = -\frac{-\sin x}{(\cos x)^2} = \sec x\cdot\tan x$；$y' = (\csc x)' = -\csc x\cdot\cot x$。

二、反函数的导数

反函数的求导法则——设$x = \phi(y)$在区间I上单调且可导，同时$\phi'(y) \neq 0$，则其反函数$y = f(x)$在对应区间$J = \{x|x = \phi(y), y\in I\}$也是可导的且$f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$。

证：因为$x = \phi(y)$在区间I内单调且可导$\Longrightarrow x = \phi(y)$在区间$I$上单调且连续$\Longrightarrow$其反函数$y = f(x)$在对应区间$J$上单调且连续。$\forall_x \in J$，设$x$有增量$\Delta x$，反函数$y = f(x)$的增量$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0$，$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$。因为$y = f(x)$是连续函数，由函数连续性的定义，当$\Delta x \to 0$时$\Delta y \to 0$，且注意到$\phi'(y) \neq 0$，从而有$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\phi'(y)}$，所以$f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$。

例1、设$y = \arcsin x, y = \arccos x$，求$y'$。

解：已知$y = f(x) = \arcsin x, -1 \le x \le 1$是$x = \phi(y) = \sin y, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$的反函数。因为$x = \phi(y) = \sin y$在$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$内是单调增且可导的，$x' = \phi'(y) = (\sin y)' = \cos y > 0, (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$。所以$(\arcsin x)' = \frac{1}{\phi'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

类似地，可推出$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

例2、设$y = \arctan x, y = arccot x$，求$y'$。

解：已知$y = f(x) = \arctan x, -\infty < x < +\infty$是$x = \phi(y) = \tan y, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$的反函数，且$\phi(y) = \tan y$在$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$上单调增且可导，所以$\phi'(y) = (\tan y)' = (\sec y)^2 > 0, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$，所以$(\arctan x)' = \frac{1}{\phi'(y)} = \frac{1}{(\sec y)^2} = \frac{1}{1+(\tan y)^2} = \frac{1}{1+x^2}$。

类似地，可推出$y' = (arccotx)' = -\frac{1}{1+x^2}$。

例3、求$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$的导数。

解：已知$y = f(x) = a^x, -\infty < x < +\infty$是$x = \log_a y$在$(0, +\infty)$内的反函数，$x = \phi(y) = \log_a y$在$(0, +\infty)$内单调且可导，$\phi'(y) = \frac{1}{y \cdot \ln a}, 0 < y < +\infty$，在对应区间$(-\infty, +\infty)$内，$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot \ln a}} = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$。特殊地，当$a = e$时，$(e^x)' = e^x$。

三、复合函数的导数

像$\ln \tan x, e^{x^2}, \sin \frac{2x}{1+x^2}$都是复合函数。

复合函数的求导法则——设$u = \phi(x)$在x点可导， 而$y = f(u)$在对应点u可导，则复合函数$y = f(u) = f[\phi(x)]$在x点可导，且有$\frac{d_y}{d_x} = \frac{d_{f(u)}}{d_u} \cdot \frac{d_u}{d_x} = f'(u) \cdot \phi'(x)$。

证：设自变量在x点有增量Δx，中间变量u有对应增量$\Delta u = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$，当$\Delta u \neq 0$时$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$，根据有极限的函数与无穷小的关系，$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha$，其中$\lim_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$。所以有$\Delta y = f'(u) \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$；当$\Delta u = 0$时，$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = 0$，这时令$\alpha = 0$，则$\Delta y = f'(u) \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$对于$\Delta u \neq 0$或$\Delta u = 0$都是正确的。做比值$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$。因为$u = \phi(x)$在$x$点可导$\Longrightarrow u = \phi(x)$在$x$点连续，由函数连续性的定义可得当$\Delta x \to 0$时有$\Delta u \to 0$。取极限$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}] + \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}) = f'(u) \cdot \frac{d_u}{d_x} = f'(u) \cdot \phi'(x)$。即$\frac{d_y}{d_x} = f'(u) \cdot \phi'(x)$。

例1、设$y = \ln \tan x$，求$\frac{d_y}{d_x}$。

解：设$y = \ln u, u = \tan x$，$\frac{d_y}{d_x} = \frac{d_y}{d_u} \cdot \frac{d_u}{d_x} = \frac{d_{\ln u}}{d_u} \cdot \frac{d_{\tan x}}{d_x} = \frac{1}{u} \cdot (\sec x)^2 = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\sin x \cos x}$。

例2、设$y = x^\alpha$， （$x > 0$，α为实常数）,求$\frac{d_y}{d_x}$。

解：两边取对数，得$\ln y = \alpha \ln x$，所以$y = e^{\alpha \ln x} = e^u, u = \alpha \ln x$，$\frac{d_y}{d_x} = \frac{d_{e^u}}{d_u} \cdot \frac{d_{\alpha \ln x}}{d_x} = e^u \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$，即$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$。

例3、设$y = \sin(\frac{2x}{1+x^2})$，求$\frac{d_y}{d_x}$。

解：设$y = \sin u, u = \frac{2x}{1+x^2}$，$\frac{d_y}{d_x} = \frac{d_y}{d_u} \cdot \frac{d_u}{d_x} = \frac{d_{\sin u}}{d_u} \cdot \frac{d(\frac{2x}{1+x^2})}{d_x} = \cos u \cdot 2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \cos(\frac{2x}{1+x^2})$。

若$y = f[\phi(\psi(x))] \Longleftrightarrow y = f(u), u = \phi(\psi(x)) = \phi(v), v = \psi(x)$，设$v = \psi(x)$在点$x$可导，而$u = \phi(v)$在对应的$v$可导，$y = f(u)$在对应点$u$可导，则：$\frac{d_y}{d_x} = \frac{d_{f(u)}}{d_u} \cdot \frac{d_u}{d_x} = \frac{d_{f(u)}}{d_u} \cdot \frac{d_u}{d_v} \cdot \frac{d_v}{d_x} = f'(u) \cdot \phi'(v) \cdot \psi'(x)$。

例如：$y = e^{\sin \frac{1}{x}}$，求$\frac{d_y}{d_x}$。

解：$y = e^u, u = \sin \frac{1}{x} = \sin v, v = \frac{1}{x} = x^{-1}$，$\frac{d_y}{d_x} = \frac{d_y}{d_u} \cdot \frac{d_u}{d_x} = \frac{d_y}{d_u} \cdot \frac{d_u}{d_v} \cdot \frac{d_v}{d_x} = e^u \cdot \cos v \cdot (-1)x^{-2} = -e^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot e^{\sin \frac{1}{x}}$。

初等函数求导数归纳：

1. 记住基本初等函数的导数公式；
2. 记住函数的四则运算的求导公式；
3. 掌握反函数与复合函数的求导规则。

例4、设$y=arsh(x)$，求$\frac{d_y}{d_x}$。

解：$y=arsh(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，
$y=\ln u, u=x+\sqrt{1+x^2}=v+w, v=x, w=\sqrt{1+x^2}=z^{\frac{1}{2}}, z=1+x^2$。

$$\begin{aligned}\frac{d_y}{d_x}&=\frac{d_{\ln u}}{d_u}\cdot\frac{d_u}{d_x}\\&=\frac{1}{u}\cdot(\frac{d_v}{d_x}+\frac{d_w}{d_x})\\&=\frac{1}{u}\cdot(1+\frac{d_w}{d_z}\cdot\frac{d_z}{d_x})\\&=\frac{1}{u}\cdot(1+\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x)\\&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\\&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\end{aligned}\tag{9}$$

四、高阶导数

若$y=f(x)$在区间I上可导，则其导数$y'=f'(x)$仍是区间I上的函数——导函数，如果$y'=f'(x)$也是可导函数，则称$f'(x)$的导数$[f'(x)]'$为$f(x)$的二阶导数，记为$y''=[f'(x)]'=f''(x)$，或$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(dy)}{dx(dx)}$或$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$。类似地，如果$y''=f''(x)$仍是可导函数，则称$[f''(x)]'$为$f(x)$的三阶导数，记为$y'''=[f''(x)]'=f'''(x)$。如果$f^{(n-1)}(x)$仍是可导函数，则称$[f^{(n-1)}f(x)]'$为$f(x)$的$n$阶导数，记为：
$[f^{(n-1)}f(x)]'=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^nf(x)}{dx^n}$。

若$f(x)$在区间I，或(a,b)内有n阶导数，记为$f(x)\in D^n(I)$或$f(x)\in D^n(a,b)$。

例1、求$y=a^x,(a>0,a\neq 1)$，求y的n阶导数。

解：$y=a^x$，$y'=(a^x)'=a^x\ln a$，$y''=a^x[\ln(a)]^2$。设$y^{(n-1)}=a^x[\ln(a)]^{(n-1)}$，
$y^n=(y^{(n-1)})'=[a^x(\ln a)^{(n-1)}]'=(a^x)'(\ln a)^{(n-1)}=a^x[\ln(a)]^n$，根据数学归纳法原理，得
$(a^x)^{(n)}=a^x[\ln(a)]^n$。

例2、设$y=\sin x$，求$y^{(n)}$。

解：$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin((x+\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$，
$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin((x+2\cdot\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$，假设$y^{(n-1)}=\sin(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2})$，则
$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'=\cos(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2})=\sin[(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$，由数学归纳法原理，得$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$。

例3、设$u=u(x),v=v(x)$在同一点x处有直至n阶导数（即$u\in D^{(n)}(I),v\in D^{(n)}(I)$），则
$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-1)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$（莱布尼茨公式）。

例如：设$y=x^2\cdot e^{2x}$，求$y^{(20)}$。

解：设$u=e^{2x},v=x^2$，则$u'=2e^{2x},u''=2^2e^{2x},\cdots,u^{(k)}=2^ke^{(2x)}(k=1,2,\cdots)$，
$v'=2x,v''=2,v^{(k)}=0(k=3,4,5,\cdots)$，由莱布尼茨公式，
$(uv)^{(n)}=(e^{2x}\cdot x^2)^{(20)}=(e^{2x})^{(20)}\cdot x^2+20\cdot(e^{2x})^{(19)}\cdot(x^2)'+\frac{20\cdot 19}{2!}(e^{2x})^{(18)}\cdot(x^2)''$
$=2^{20}\cdot e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\cdot e^{2x}\cdot 2x+\frac{20\cdot 19}{2!}\cdot 2^{18}\cdot e^{2x}\cdot 2=2^{20}\cdot e^{2x}(x^2+20x+95)$

第3节 隐函数、参量函数的导数

一、隐函数的导数

函数$f(x)$表示x与y之间的对应关系，例如：$y=x\cdot\sin x,y=\ln(1+x^2)\cdots$，因变量$y$已经表示成自变量$x$的明显的数学表达式，这种函数称为显函数。

另一种自变量x与因变量y的对应关系通过x,y的方程$(x,y)=0$来实现。例如：方程
$x+y^3-1=0,\forall_x\in(-\infty,+\infty)$。通过这个方程都有确定的$y$值与之对应，这种函数称为隐函数。

隐函数：对于x,y的二元方程$F(x,y)=0$，如果存在函数$y=f(x)$，使$F[x,f(x)]\equiv 0$，则称$y=f(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数。

例如：$x+y^3-1=0\Longrightarrow y=\sqrt[3]{1-x}$，称此过程为隐函数的显化，使得$x+(\sqrt[3]{1-x})^3-1=0$，则称$y=\sqrt[3]{1-x}$是由方程$x+y^3-1=0$所确定的隐函数。

再如：$xy-e^x+e^y=0$确定隐函数，但是它不能显化。

问题：

1. $F(x,y)$满足什么条件，$F(x,y)=0$才能够确定一个隐函数？（下册解决）
2. $F(x,y)=0$确定的隐函数是否可导？（下册解决）
3. 如果$F(x,y)=0$所确定的隐函数$y=f(x)$可导，如何求导数$y'=f'(x)$?

隐函数求导数的方法：

设$F(x,y)=0$所确定的隐函数$y=f(x)$可导，把$y=f(x)$代入原方程，得$F[x,f(x)]\equiv 0$，恒等式两边分别对x求导，得到含有$f'(x)$的一个等式，从等式中解出$f'(x)$就行了。

例1、设方程$e^y-e^x+xy=0$确定隐函数$y=f(x)$，求$\frac{dy}{dx}|_{x=0}$。

解：把原方程的y看作是x的函数，把原方程看作恒等式$e^y-e^x+xy\equiv 0$，对恒等式两边分别求导，得：
$\frac{d(e^y)}{dx}-\frac{d(e^x)}{dx}+\frac{d(xy)}{x}=0$，$\frac{d(e^y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}-e^x+(1\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx})=0$，$e^y\cdot\frac{dy}{dx}-e^x+y+x\cdot\frac{dy}{dx}=0$，
$(e^y+x)\frac{dy}{dx}=e^x-y$，所以$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{e^y+x}$。把$x=0$代入原方程$e^y-e^x+xy=0$，得$e^y-1=0\Longrightarrow y=0$，
所以$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=\frac{e^x-y}{e^y+x}|_{x=0}=\frac{e^0-0}{e^0+0}=1$。

例2、（1）求椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$在点$M(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$处的切线方程。（2）求由方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$所确定的隐函数$y=f(x)$的$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：（1）把恒等式$\frac{x^2}{4}+y^2\equiv 1$对$x$求导，$\frac{x}{2}+2y\cdot y'=0$，解得$y'=-\frac{x}{4y}$。
$y'|_{x=\sqrt{2}}=-\frac{x}{4y}|_{x=\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}$。所以过点$M(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$的切线方程为$(y-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{1}{2}(x-\sqrt{2})$，化简得$x+2y-2\sqrt{2}=0$。

（2）由（1），已求$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$，则$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4}\frac{d(\frac{x}{y})}{dx}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot y-x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{1}{4}\frac{y-x\cdot(-\frac{x}{4y})}{y^2}=-\frac{4y^2+x^2}{16y^3}$，由方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1\Longrightarrow x^2+4y^2=4$，所以$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4y^3}$。

例3、设$y=x^{\sin\frac{x}{2}},(x>0)$，求$\frac{dy}{dx}$。

解：对$y=x^{\sin\frac{x}{2}}$两边取对数得$\ln y=\sin\frac{x}{2}\cdot\ln x$，两边对$x$取导数：$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\ln x+\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}$，$\frac{dy}{dx}=y[\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\ln x+\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}]=x^{\sin\frac{x}{2}}[\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\ln x+\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}]$。此法称为取对数微分法。

取对数微分法：幂指函数$y=[f(x)]^{g(x)},(f(x)>0)$，当$f(x),g(x)$可导时，用取对数微分法求$\frac{dy}{dx}$。

例4、设$y=x^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，求$\frac{dy}{dx}$。

解：取对数$\ln y=2\ln x+\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$，两边对$x$求导数得$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x})$，则$\frac{dy}{dx}=x^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(\frac{2}{x}-\frac{1}{1-x^2})$。

二、参量函数的导数

例如：在解析几何中，用参量方程讨论动点的几何轨迹：

椭圆的参量方程：

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a\cos t \\ y & = & b\cos t \end{array}\right. \tag{10}$$

其中a,b分别为椭圆的长、短半轴。

在力学中，用参量方程讨论质点的运动轨迹，如：一物体以初速度v_0，仰角ϕ抛射出去，忽略空气阻力，得到物体的运动轨迹：

$$\begin{aligned} x &= v_0\cos\phi\cdot t \\ y &= v_0\sin\phi\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{11}$$

给定参量t一个值，得到对应的一对x,y的值，把这对x,y的值看作x与y之间的一种对应，则参量方程确定y是x的函数。消去参数t：由$x=v_0\cos\phi\cdot t\Longrightarrow t=\frac{x}{v_0\cos\phi}$代入$y$的方程：$y=v_0\sin\phi\cdot\frac{x}{v_0\cos\phi}-\frac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\phi}$，此为参量函数的显化。

一般地，设参量方程$x=\phi(x),y=\psi(t),t\in I$，设函数$x=\phi(t)$具有单调连续的反函数$t=\phi^{-1}(x)$，将$t$代入$y$的表达式，$y=\psi[\phi^{-1}(x)]$，它是$x$的复合函数，如果$x=\phi(t),y=\psi(t)$都可导，且$\phi'(t)\neq 0$，求参量函数：

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \phi(t) \\ & & \qquad ,x\in I \\ y & = & \psi(t) \end{array}\right. \tag{12}$$

的导数。

由$y=\psi[\phi^{-1}(x)]=\psi(t),t=\phi^{-1}(x)$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$。

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)})}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}=\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3}$。

例1、求摆线

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a(t-\sin t) \\ y & = & a(1-\cos t) \end{array}\right. \tag{13}$$

在$t=\frac{\pi}{2}$时的切线方程，并求$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：（1）当$t=\frac{\pi}{2}$时，对应一点$M(a(\frac{\pi}{2}-1),a)$，$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}$，$\frac{dy}{dx}|_{t=\frac{\pi}{2}}=\cot\frac{\pi}{4}=1$。切线方程：$y-a=1\cdot(x-a(\frac{\pi}{2}-1))$，化简得：$x-y+a(2-\frac{\pi}{2})=0$。

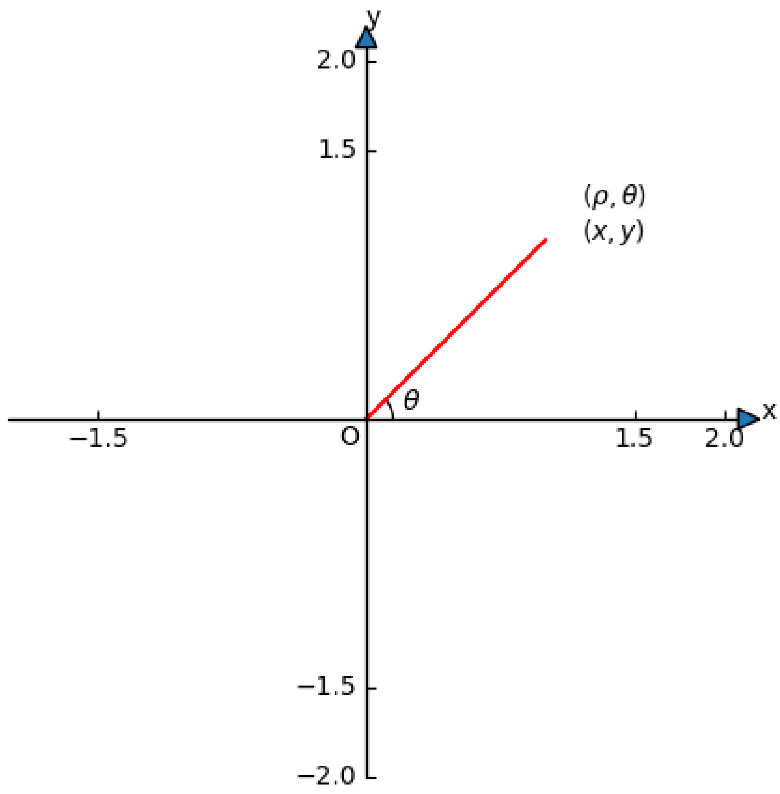
（2）

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\cot\frac{t}{2})}{dx}=\frac{d(\cot\frac{t}{2})}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\csc^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2},(t\neq 2n\pi)$

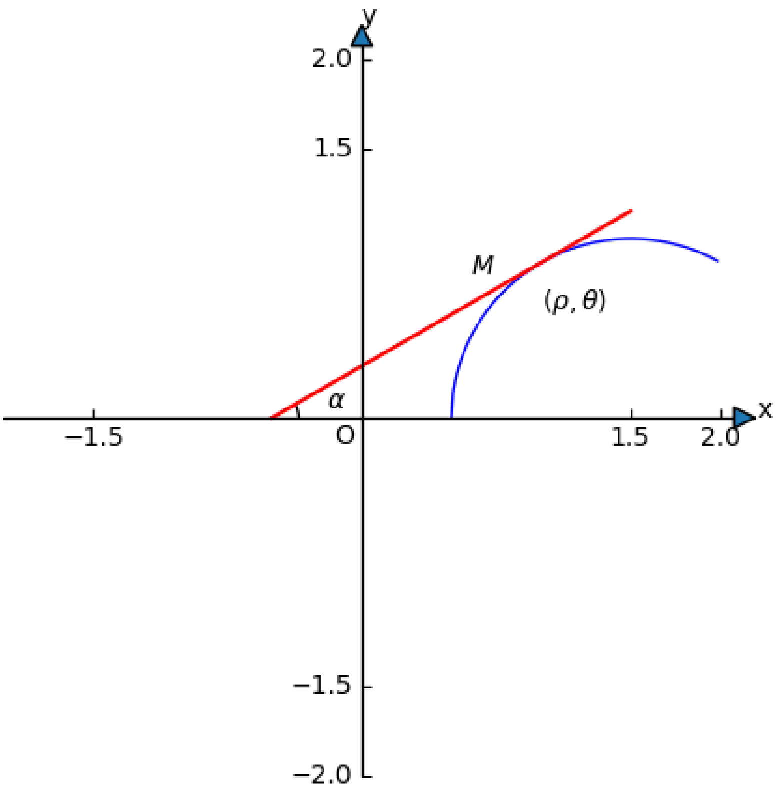
。

三、极坐标系下曲线$\rho=\rho(\theta)$的切线的斜率

设极坐标系下$\rho=\rho(\theta)$可导，利用极坐标与直角坐标的关系：
$x=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta,y=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta$，其中$\theta$为极角（参量）。



曲线$\rho=\rho(\theta)$上的一点(ρ,θ)的切线与x轴正向的夹角α（切线的倾角）。



由参量函数的微分法：

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{[\rho(\theta)\sin\theta]'}{[\rho(\theta)\cos\theta]'} \\ &= \frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta} \\ &= \frac{\rho'(\theta)\tan\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\tan\theta}\end{aligned} \tag{14}$$

点$M_0(\rho_0, \theta_0) = M(\rho(\theta_0), \theta_0)$，斜率$k = \frac{dy}{dx}|_{\theta=\theta_0}$，然后用直角坐标写切线方程。

例1、求心形线$\rho = \alpha(1-\cos\theta)$在$\theta = \frac{\pi}{4}$的点$M(\alpha(1-\frac{\sqrt{2}}{2}), \frac{\pi}{4})$的切线的斜率。

解：曲线的参量方程：

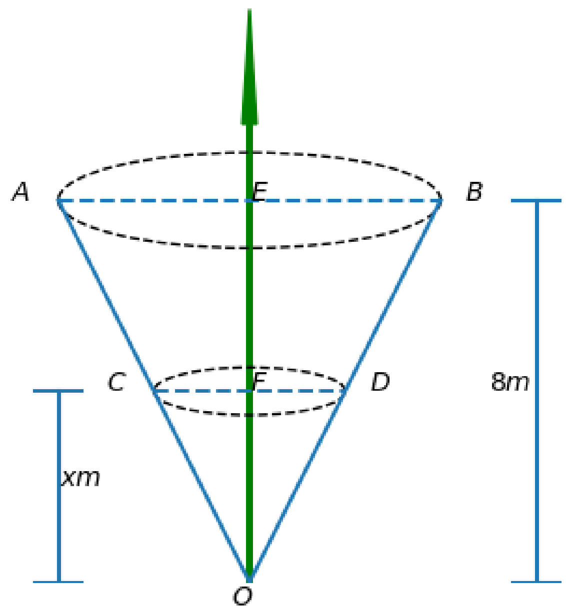
$$\left\{\begin{array}{rcccl} x &=& \rho\cos\theta &=& \alpha(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y &=& \rho\sin\theta &=& \alpha(1-\cos\theta)\sin\theta \end{array}\right. \tag{15}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(\sin\theta-\sin\theta\cos\theta)'}{\alpha(\cos\theta-\cos^2\theta)'} = \frac{\cos\theta-\cos2\theta}{\sin2\theta-\sin\theta}$，$\frac{dy}{dx}|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$。

四、相关变化率

设$x = x(t), y = y(t)$都是可导的，而x与y存在某种依赖关系，从而导数$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dx}$也存在某种关系，这两个相关导数称为相关变化率。

例3、设有深为$8m$，上顶直径为$8m$的正圆锥形容器，现往容器内注水，其速率为$4m^3/min$，问当水深为$5m$时水表面上升的速度是多少？



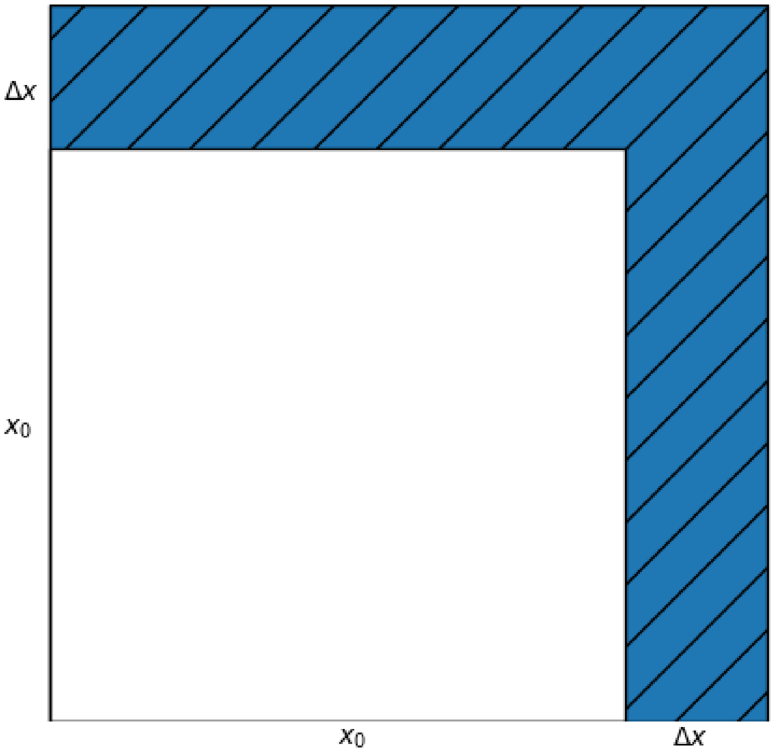
解：设注水t分钟后，水表面上升的高度为$x\ m$。已知$AB = 8m, OE = 8m, OF = x\ m$，因为$\triangle OAB \sim \triangle OCD$，所以$\frac{CD}{AB} = \frac{OF}{OE}$，即$\frac{CD}{8} = \frac{x}{8} \Longrightarrow CD = x$。当注水$t$分钟时，水的体积$V = \frac{1}{3}\pi(\frac{CD}{2})^2 \cdot OF = \frac{\pi}{12}x^3$，$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$，解得$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{\pi x^2} \cdot \frac{dv}{dt}$，当$x = 5$时，$\frac{dv}{dt} = 4m^3/min, \frac{dx}{dt} = \frac{16}{25\pi} \approx 0.204m/min$。

第4节 函数的微分

一、微分的概念

设函数$y = f(x)$在x_0点处自变量x有增量Δx，函数y对应的增量$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，当$y = f(x)$很复杂时，计算$\Delta y$很麻烦，寻找$\Delta y$的一个既简单而又有一定精度的近似表达式。

例1、设有一个正方形的金属薄片，加热之后边长由x_0变化到$x_0 + \Delta x$，现求金属薄片面积增加了多少？



解：设金属薄片的边长为x，其面积为y，则$y=x^2$，自变量在x_0点有增量Δx，而面积增量为$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$，$\Delta y$由两部分组成：$2x_0\Delta x$是关于$\Delta x$的线性部分与$(\Delta x)^2$是关于$\Delta x$的高次幂，当$\Delta x\to 0$时，$(\Delta x)^2=O(\Delta x)$，此时可舍去$\Delta x$的高阶无穷小部分（$|\Delta x|$很小时）。取$\Delta y\approx 2x_0\Delta x$。类似地，$y=x^3,\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+[3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]$，其中：$3x_0^2\Delta x$是关于$\Delta x$的线性部分，当$\Delta x\to 0$时，$3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=O(\Delta x)$，取$\Delta y\approx 3x_0^2\Delta x$。

函数微分的定义：设函数$y=f(x)$在$N(x_0,\delta),(\delta>0)$有定义，当x在x_0点有增量$\Delta x,(x_0+\Delta x\in N(x_0,\delta))$，如果$y=f(x)$在$x_0$点的增量$\Delta y$可以表示为$\Delta y=k\Delta x+\alpha$，其中$k$是不依赖于$\Delta x$的常数，$\alpha=O(\Delta x)$（当$\Delta\to 0$，则称$k\Delta x$为$y=f(x)$在$x_0$点的微分，称$y=f(x)$在$x_0$点可微。）

$dy|_{x=x_0}=k\Delta x$，由定义可知，当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y=k\Delta x+\alpha\to 0,dy=k\Delta x\to 0,\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\frac{k\Delta x+\alpha}{k\Delta x}=1+\frac{1}{k}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x}=1$，说明当$\Delta x\to 0,\Delta y\sim dy$。

问题：$y=f(x)$满足什么条件，它才是可微的？

定理：函数$y=f(x)$在x_0点可微$\Longleftrightarrow y=f(x)$在$x_0$点可导。

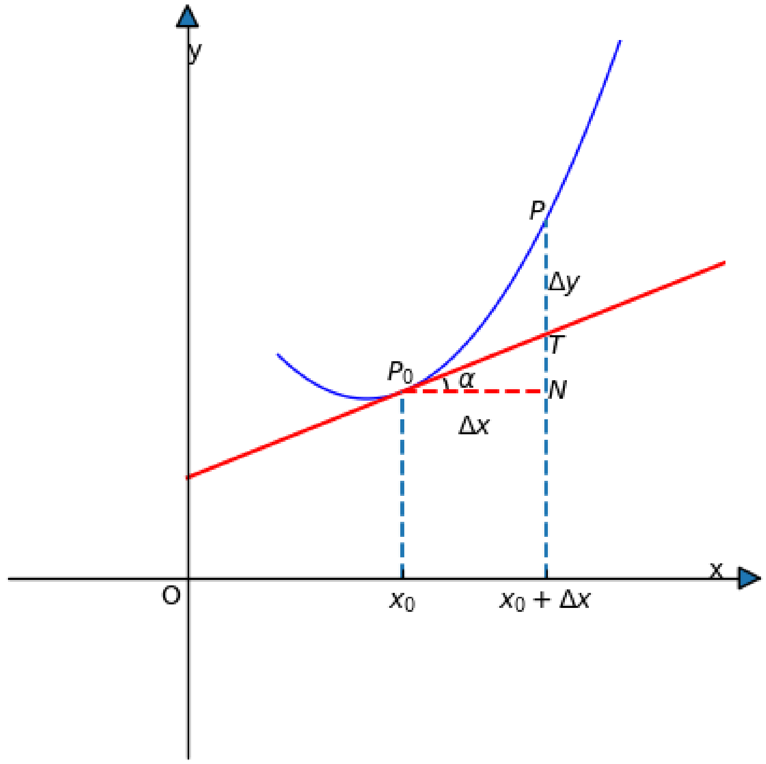
证：$\Longleftarrow$充分性。设$y=f(x)$在x_0点可导，自变量x在x_0点有增量Δx，函数y对应增量Δy，则有：$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$。再根据有极限的函数与无穷小的关系：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\beta,\lim_{\Delta x\to 0}\beta=0$，$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\beta\cdot\Delta x$，其中$f'(x_0)$是与$\Delta x$无关的常数，$\alpha=\beta\cdot\Delta x$，当$\Delta x\to 0$时，$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\beta\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\beta=0$，即$\alpha=O(\Delta x),(\Delta x\to 0)$，按照微分的定义，可知$f(x)$在$x_0$点可微。

再证：$\Longrightarrow$必要性：设$y=f(x)$在x_0点可微，根据微分的定义：自变量x在x_0点有增量Δx，$\Delta y=k\Delta x+\alpha$，其中$k$与$\Delta x$无关，$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x}=0$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{k\Delta x+\alpha}{\Delta x}=k+\frac{\alpha}{\Delta x}$，$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(k+\frac{\alpha}{\Delta x})=k+0=k$，所以$y=f(x)$在$x_0$点可导，且$f'(x_0)=k$。

于是$dy|_{x=x_0}=k\Delta x=f'(x_0)\Delta x$。规定$\Delta x=dx,dy|_{x=x_0}=f'(x_0)dx$，对于任一点$x$，$y=f(x)$可微，则$dy=f'(x)dx$。

例如：$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内可导，$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内处处可微。
$\forall_x\in(-\infty,+\infty),dy=(\sin x)'dx=\cos xdx$，取$x=\frac{\pi}{3}$，$dy|_{x=\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}dx=0.5dx$，取$x=\frac{\pi}{3},dx=0.01$时，$y=\sin x$的微分：$dy|_{x=\frac{\pi}{3},dx=0.01}=0.5\times0.01=0.005$，而
$\Delta y=f(\frac{\pi}{3}+0.01)-f(\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3}+0.01)-\sin(\frac{\pi}{3})\approx0.005$。

二、微分的几何意义



设$y=f(x)$在x_0点可导，点P_0的坐标为$P_0(x_0,f(x_0))$，点P的坐标为$P(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$，其中$P_0N=\Delta x,NP=\Delta y,NT=P_0N\cdot\tan\alpha=f'(x_0)\Delta x=dy$，可见$y=f(x)$在$x_0$点处的微分$dy|_{x=x_0}$在几何上表示曲线$y=f(x)$在$P_0(x_0,f(x_0))$处切线的纵坐标的增量。

三、复合函数的微分法则

设$u=\phi(x),y=f(u)$都是可微函数，则复合函数$y=f[\phi(x)]$的微分为
$dy=\{f[\phi(x)]\}'dx=f'(u)\phi'(x)dx=f'(u)du$，当$x$为自变量时，$y=f(x)$的微分$dy=f'(x)dx$，当$u$为中间变量时，$y=f(u)$的微分$dy=f'(u)du$，称为微分形式不变性，对于中间变量来说：
$\Delta u\neq du,dy\neq f'(u)\Delta u,dy=f'(u)du$。