第四章 微分中值定理、导数的应用

利用$y=f(x)$的导数（$y=f'(x)$，$y=f''(x)$）来研究函数曲线的性态：单调性、求函数的极值，最值，凹凸性，拐点，作函数的图形等。

理论基础——微分中值定理

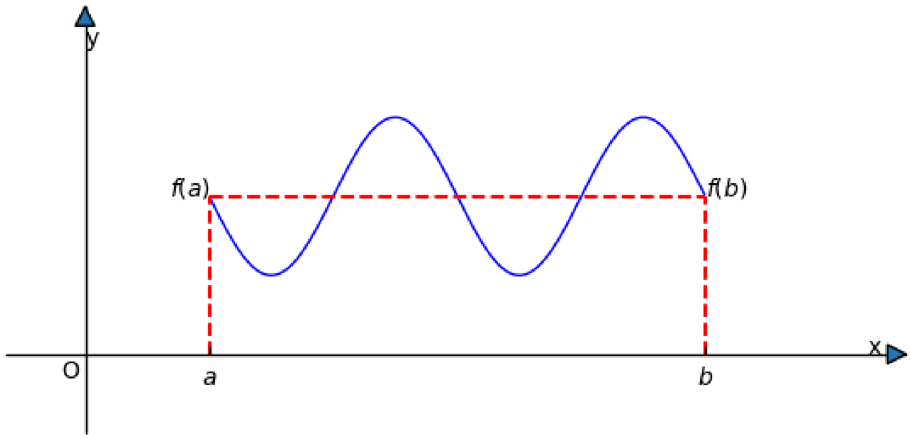
第1节 微分中值定理

一、Rolle定理

Rolle定理：若$f(x)\in C[a,b],f(x)\in D(a,b)$，且$f(a)=f(b)$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

证：因为$f(x)\in C[a,b]$，所以$f(x)$在$[a,b]$必取得最大值M，最小值m。讨论：

1. 若$M=m$，则$m\le f(x)\le M\Longrightarrow f(x)=f(a)=f(b)=$常数，故$f'(x)\equiv 0,\forall_x\in(a,b)$，于是$\forall_\xi\in(a,b)$，均有$f'(\xi)=0$。
2. 若$m<M$，这时m,M至少有一个点在(a,b)内部取得，不妨设$M\ne f(a)=f(b)$，即至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=M$，对于任何增量Δx，$f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\le 0$，因为$f(x)\in D(a,b)$，所以$f'(\xi)$一定存在。当$\Delta x<0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\ge 0$，当$\Delta x>0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\le 0$。$\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0,\lim_{\Delta\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$。因为$f'(\xi)$存在，所以$f'_-(\xi)=f'_+(\xi)\Longrightarrow f'(\xi)=0$。



注意条件，否则定理的结论可能不成立:

1. $f(x) \in C[a,b]$;
2. $f(x) \in D(a,b)$;
3. $f(a) = f(b)$

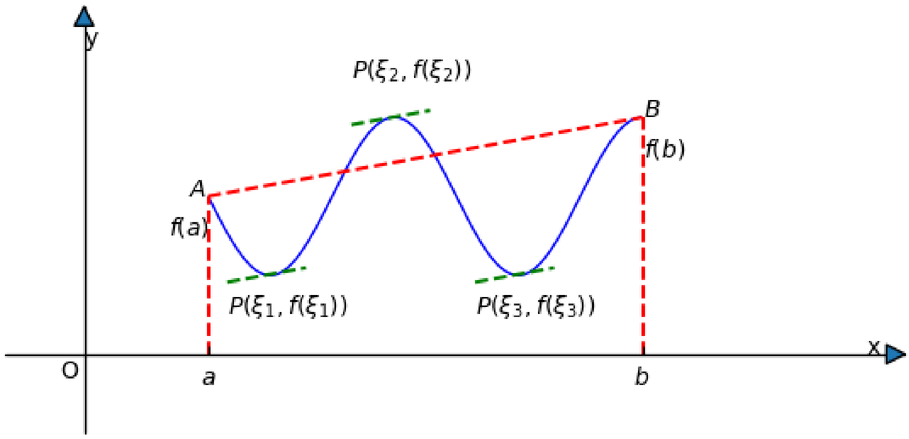
例如：设$f(x) = x(x-1)(x-2)$，不求导数，说明$f'(x) = 0$有几个实根?

解：$f(x) = x(x-1)(x-2)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且可导，$f(0) = 0, f(1) = 0$，$f(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件，则至少存在一点$\xi_1 \in (0,1)$，使得$f'(\xi_1) = 0$，同理$f(x)$在$[1,2]$区间上也满足罗尔定理条件，至少存在一点$\xi_2 \in (1,2)$，使得$f'(\xi_2) = 0$，又因为$f'(x)$是二次函数，$f'(x) = 0$至多有两个实根，现在有$f(\xi_1) = 0, f(\xi_2) = 0$，所以$\xi_1 \in (0,1), \xi_2 \in (1,2)$是$f'(x)$的两个实根。

二、LaGrange定理

LaGrange定理：设$f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b)$，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

分析：令$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，表示弦$AB$的斜率。结论：曲线上至少存在一定$P(\xi, f(\xi))$使得过$P$点的切线平行于弦$AB$。要证：$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k$，即证$f'(\xi) - k = 0 \Longleftrightarrow [f(x) - kx]'|_{x=\xi} = 0$，这是罗尔定理的条件。



证：通过构造函数$f(x)-kx$，利用罗尔定理证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)-k=0$。作辅助函数$\phi(x)=f(x)-kx,k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，显然$\phi(x)\in C[a,b],\phi(x)\in D(a,b)$。
$\phi(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a},\phi(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$，所以$\phi(a)=\phi(b)$，所以$\phi(x)$满足Rolle定理条件，由Rolle定理，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$\phi'(\xi)=0$，
$\phi'(x)=[f(x)-kx]'=f'(x)-k,\phi'(\xi)=f'(\xi)-k=0$，即$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，故LaGrange定理成立。

LaGrange定理的其它形式:

1. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$；
2. $f(x)$在$[a,b]$区间内满足LaGrange定理条件，$\forall_x\in[a,b]$，且x有增量$\Delta x,(x+\Delta x)\in[a,b]$（$\Delta x>0$或$\Delta x<0$），则$f(x)$在$[x,x+\Delta x],(\Delta x>0)$或在$[x+\Delta x,x],(\Delta x<0)$满足Lagrange定理条件，则有$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x$，其中$\xi$介于$x$与$x+\Delta x$之间。
3. 由2，因为ξ介于x与$x+\Delta x$之间，必有$0<\theta<1$，使得$\xi=x+\theta\Delta x$，所以$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$（有限增量公式）。

   例子:

   （1）若$f'(x)\equiv0,a<x<b$，则$f(x)\equiv$常数。

   证：$\forall_{x_1,x_2}\in(a,b)$，设$x_1<x_2$，则$f(x)$在$[x_1,x_2]$上满足LaGrange定理条件，从而有$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$。因为$f'(x)\equiv0,a<x<b$，由于$\xi\in(a,b)$，所以$f'(\xi)=0$，即$f(x_2)=f(x_1)$，由于$x_1,x_2$的任意性，所以$f(x)\equiv f(x_1)$（常数）。

   结论：$f'(x)\equiv0,x\in I\Longrightarrow f(x)\equiv C,x\in I$。

   （2）若$f'(x)=g'(x),\forall_x\in(a,b)$，则$f(x)-g(x)=$常数（$x\in(a,b)$）。（1）、（2）在不定积分里用到。分析：$f'(x)=g'(x)\Longleftrightarrow f'(x)-g'(x)=0\Longleftrightarrow[f(x)-g(x)]'=0\Longleftrightarrow f(x)-g(x)=$常数。

   （3）若$f'(x)=k\neq0,x\in(a,b)$，则$f(x)=kx+C,\forall_x\in(a,b)$（$k,C$为常数）。

利用LaGrange定理证明函数不等式或数字不等式：

例1、证明：当$x>1$时，$e^x>ex$。

证：设$f(x)=e^x,x\in(1,+\infty)$，$f(x)$在$[1,x],(x>1)$满足LaGrange定理条件，从而有$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),\xi\in(1,x)$，即$e^x-e=f'(\xi)(x-1)$，因为$e^x$是单调增函数，且$1<\xi$，所以有$e^1<e^\xi$，又因为$x-1>0$，所以$e^x-e=f'(x)(x-1)>e(x-1),e^x-e>ex-e$，即$e^x>ex,x>1$。

例2、证明：对任意实数a,b，都有$|\arctan a-\arctan b|\leq|a-b|$。

证：把$\arctan a, \arctan b$看作是$\arctan x$在$x=a, x=b$处的函数值。选定$f(x)=\arctan x$，则$f(x)$在区间$[a,b]$或$[b,a]$满足LaGrange定理条件，从而有$\arctan a-\arctan b=f'(\xi)(a-b)=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b)$，因为$\frac{1}{1+\xi^2}\le 1$，所以$|\arctan a-\arctan b|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\le|a-b|$。

例3、设$f(x)\in D^2[1,2], f(1)=f(2)=0, F(x)=(x-1)^2f(x)$。证明：至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使$F''(\xi)=0$。

证：$F(x)=(x-1)^2f(x)\in C[1,2], F(x)\in D[1,2], F(1)=0, F(2)=0$，则$F(x)$在$[1,2]$上满足Rolle定理条件，从而至少存在一点$\xi_1$，使得$F'(\xi_1)=0$，其中$1<\xi_1<2$。因为$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$，$F'(1)=2(1-1)f(1)+(1-1)^2f'(1)=0$，从而有$F'(x)$在$[1,\xi_1]\subset[1,2]$满足Rolle定理条件，从而有$\xi_2\in(1,\xi_2)\subset(1,2)$，使$F''(\xi_2)=0$。

三、Cauchy定理

Cauchy定理：设$f(x),g(x)\in C[a,b]$，且$f(x),g(x)\in D(a,b)$，且$g'(x)\ne 0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

证明分析：令$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，要证的结论：

$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k\Longrightarrow f'(\xi)=kg'(\xi)\Longrightarrow f'(\xi)-kg'(\xi)=0\Longrightarrow[f'(x)-kg'(x)]|_{x=\xi}=0\Longrightarrow[f(x)-kg(x)]'|_{x=\xi}=0$。这正是罗尔定理的结论。

证明：作辅助函数$\phi(x)=f(x)-kg(x)$，因为$g'(x)\ne 0$，可推知$g(b)-g(a)\ne 0$（反证法，假若$g(b)-g(a)=0$，又因为$g(x)$满足Rolle定理条件，有$f'(\xi)=0,\xi\in(a,b)$，而$b-a\ne 0$，这与$g'(x)\ne 0$的假设矛盾。）由$f(x),g(x)\in C[a,b], f(x),g(x)\in D(a,b)\Longrightarrow\phi(x)=f(x)-kg(x)\in C[a,b],\phi(x)\in D(a,b)$。$\phi(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(a)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)},\phi(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(b)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$，所以$\phi(a)=\phi(b)$，所以$\phi(x)=f(x)-kg(x)$满足Rolle定理条件，从而有至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$\phi'(\xi)=0$。因为$\phi'(x)=f'(x)-kg'(x)$，所以$\phi'(\xi)=f'(\xi)-kg'(\xi)=0$。因为$g'(\xi)\ne 0$，所以$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

四、Taylor定理

Tayloar定理：设$f(x)\in C[a,b], f(x)\in D^{n+1}(a,b)$，若$x_0\in(a,b)$，则至少存在一点$\xi\in(a,b),\forall_x\in(a,b)$，有$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$，其中$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$（$\xi$介于$x_0$与$x$之间）。备注：$f(x)\in D^{n+1}(a,b)$不一定要全部展到$n$阶，最终的$\xi$与$n$有关，看如下证明。

证明：为了方便起见，不妨设$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$，因为$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$，所以$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$，令$q(x)=(x-x_0)^{n+1}$，因为$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，要证：$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot q(x)\Longrightarrow\frac{R_n(x)}{q(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$。

先列出几个函数的导数（后面应用Cauchy定理的时候用到）：

$P_n^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0),(i=0,1,2,\cdots,n)$（小于$i$的项求导完之后等于零，大于$i$的项由于带有$(x-x_0)=(x_0-x_0)=0$也直接消去）

进而可以得到$R_n^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)-P_n^{(i)}(x_0)=0,(i=0,1,2,\cdots,n)$，对于函数$q(x)$，容易得到$q^{(i)}(x_0)=0,(i=0,1,2,\cdots,n)$。

对两个函数：$R_n(x),q(x)$，在$[x_0,x]$或$[x,x_0]$上应用Cauchy定理（技巧：分子分母同时减去零）：

$\frac{R_n(x)}{q(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{q(x)-q(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{q'(\xi_1)}$，其中$\xi_1$介于$x$与$x_0$之间。再对两个函数$R_n'(x),q'(x)$在$[x_0,\xi_1]$或$[\xi_1,x_0]$应用柯西定理：$\frac{R_n'(\xi_1)}{q'(\xi_1)}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{q'(\xi_1)-q'(x_0)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{q''(\xi_2)}$，其中$\xi_2$介于$\xi_1$与$x_0$之间。

照此方法做下去，经过$n+1$次应用柯西定理，得到：

$\frac{R_n(x)}{q(x)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{q'(\xi_1)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{q''(\xi_2)}=\cdots=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{q^{(n+1)}(\xi)}$，其中$\xi$介于$x_0$与$\xi_n$之间，即$\xi$介于$x$与$x_0$之间。（注意到$\xi_n$离$x_0$越来越近）。

前方高能：

因为$P_n^{(n+1)}(x)=0$，所以$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-P_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$，所以$R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$；因为$q(x)=(x-x_0)^{(n+1)}$，所以$q^{(n+1)}(x)=(n+1)!$，所以$q^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$，于是$\frac{R_n(x)}{q(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，所以$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot q(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{(n+1)}$。

公式：$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$，其中$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$介于$x_0$与$x$之间），称为$f(x)$在$x_0$点的n阶泰勒公式。（$\xi$与$n$有关）

当$x_0=0$时，$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$，其中$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$（$\xi$介于0与$x$之间）。此公式称为$f(x)$的$n$阶麦克劳林公式，$R_n(x)$称为$n$阶的Taylor余项。

$R_n(x)$有以下两种形式：

1. LaGrange形式：$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，（$\xi$介于$x_0$与$x$之间）；
2. Peano形式：由于$f(x)\in D^{n+1}(a,b),\forall_{x_0}\in(a,b)$在$N(x_0,\delta)$内$f(x)$有直至$n+1$阶导数，从而$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k-f(x_0)$，利用下一节求极限的罗比塔法则，可以推出：$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$，即当$x\to x_0$时，$R_n(x)=O((x-x_0)^n)$，称为Taylor公式$n$阶余项的Peano形式。

   对于麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+O(x^n)$。

例1、求$f(x)=e^x$的n阶麦克劳林公式。

解：$\because f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n+1)}(x)=e^x,f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$。
$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\therefore e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中$\xi$介于0与$x$之间，取$e^x\approx1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$，误差$|R_n(x)|=|\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}|$，因为$\xi$介于0与$x$之间，所以$|\xi|<|x|,|e^\xi|\le e^{|\xi|}<e^{|x|}$，所以$|R_n(x)|\le\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$。当$x=1$时，$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!},|R_n|\le\frac{e}{(n+1)!}$，若取$n=7$，则$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{7!}$，误差：$|R_7|\le\frac{e}{(7+1)!}<\frac{3}{8!}<10^{-4}$。$e\approx2.7183$。

例2、求$f(x)=\sin(x)$的$2m$阶麦克劳林公式。

解：$f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$。
$f(0)=\sin0=0,f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=1,f''(0)=\sin\pi=0,f'''(0)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1,f^{(2m)}(0)=0,f^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}$。
$\sin x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots+\frac{f^{(2m-1)}(0)}{(2m-1)!}x^{2m-1}+\frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!}x^{2m}+R_{2m}(x)$。

$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1}+\frac{\sin(\xi+\frac{2m+1}{2}\pi)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$，$\xi$在0与$x$之间。

如果取$m=1$，有$\sin x\approx x$，误差$|R_2(x)|=|\frac{1}{3!}\sin(\xi+\frac{3\pi}{2})x^3|\le\frac{1}{3!}|x|^3$。

同理：$m=2$或$m=3$，有$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3,|R_4(x)|\le\frac{1}{5!}|x|^5$，$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5,|R_6(x)|\le\frac{1}{7!}|x|^7$。

第2节 洛必达法则

如果当$x\to x_0,(x\to\infty)$时，$f(x)\to0,\phi(x)\to0$，则称$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}$为"$\frac{0}{0}$"型未定式。

如果当$x\to x_0,(x\to\infty)$时，$f(x)\to\infty,\phi(x)\to\infty$，则称$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}\frac{f(x)}{\phi(x)}$为"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式。

一、"$\frac{0}{0}$"型未定式

准则1：（1）设$f(x),\phi(x)$在$N(x_0,\delta)$内有定义，且$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,\lim_{x\to x_0}\phi(x)=0$；（2）$f(x),\phi(x)$在$N(\hat{x_0},\delta)$内可导，且$\phi'(x)\ne0$；（3）$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$存在（或为$\infty$），则$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}$存在（或为$\infty$），且$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$。

证：由假设（1），$\lim_{x\to x_0} f(x)=0, \lim_{x\to x_0}\phi(x)=0$。补充定义$f(x_0)=0,\phi(x_0)=0$，则$f(x),\phi(x)$在$x_0$点连续。$\forall_x\in N(x_0,\delta), x\neq x_0$，则$f(x),\phi(x)$在$[x_0,x]$（或$[x,x_0]$）连续，在$(x_0,x)$（或$(x,x_0)$）内可导，$\phi'(x)\neq 0$，由Cauchy定理：$\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f(x)-0}{\phi(x)-0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-\phi(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$，$\xi$在$x_0$与$x$之间。那么当$x\to x_0$时，$\xi\to x_0$，
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$。由假设（3）$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$存在（或为$\infty$），所以
$\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$（或为$\infty$）。

如果$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$又是"$\frac{0}{0}$"，且$f'(x),\phi'(x)$满足准则1条件，就可以连续使用准则1，即：
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\frac{f''(x)}{\phi''(x)}$

例1、求$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$。

解：$\lim_{x\to 1}(x^3-3x+2)=0, \lim_{x\to 1}(x^3-x^2-x+1)=0$。
$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$。

例2、求$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x^2}$。

解：原式$\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot x^2}=\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$。

注意：在准则1中，条件（3）$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$存在（或为$\infty$），则$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}$存在（或为$\infty$），且
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$。由$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$不存在，不能推出$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}$
不存在。

例3、求$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\overset{"\frac{0}{0}"}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$。因为当$x\to 0$时，$\cos\frac{1}{x}$极限不存在，所以$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在，但是原式$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$。

推论1：设（1）$f(x),\phi(x)$在$|x|>N>0$时有定义，且$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\lim_{x\to\infty}\phi(x)=0$；（2）当$|x|>N$时$f'(x),\phi'(x)$存在，且$\phi'(x)\neq 0$；（3）$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$存在（或为$\infty$），则$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)}$存在，且
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$（或为$\infty$）。

证：作变换$x=\frac{1}{t}$，当$x\to\infty, t\to 0$，把$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)}$化为$t\to 0$的极限，
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{\phi(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{\phi'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})}{\phi'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$。

例4、求$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$。

解：原式$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}+1}=1$。

二、"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式

准则2：设（1）$f(x),\phi(x)$在$N(\hat{x_0},\delta)$内有定义，且$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\infty$；（2）$f(x),\phi(x)$在$N(\hat{x_0},\delta)$内可导，$\phi'(x)\neq 0$；（3）$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$存在（或为$\infty$）。则$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}$存在（或为$\infty$），且$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$。（证明超出教学要求）

推论2：设（1）$f(x),\phi(x)$在$|x|>N>0$时有定义且$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\lim_{x\to\infty}\phi(x)=\infty$；（2）$f(x),\phi(x)$在$|x|>N$时可导，且$\phi'(x)\neq 0$；（3）$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$存在（或为$\infty$），则$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)}$存在（或为$\infty$），且
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$。

例1、求$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\ln\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\ln(x-\frac{\pi}{4})}$。

解：容易验证当$x\to\frac{\pi}{4}^+$时，原式是"$\frac{\infty}{\infty}$"未定式。

原式$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{[\ln\sin(x-\frac{\pi}{4})]'}{[\ln(x-\frac{\pi}{4})]'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\frac{1}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}\cdot\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\cos(x-\frac{\pi}{4})=1\cdot1=1$。

例2、求$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x},(n\in N)$。

原式="$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式。原式$=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$。

三、其它类型未定式

例如：$\lim f(x)=0,\lim\phi(x)=\infty$，则$\lim[f(x)\phi(x)]$就是"$0\cdot\infty$"型未定式，如此类推，还有"$\infty-\infty$"型，"$0^0$"型，"$1^\infty$"型，"$\infty^0$"型未定式，对以上类型未定式求极限的原则：把未定式化为"$\frac{0}{0}$"型或者"$\frac{\infty}{\infty}$"型，再利用准则1、2或推论1、2来解决。

例3、求$\lim_{x\to0^+}x^n\ln x(n>0)$。

解：原式是"$0\cdot\infty$"型未定式。原式$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{x^n}{n}=0$。

例4、求$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec x-\tan x$。

解：原式是"$\infty-\infty$"型未定式。原式$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$。

例5、求$\lim_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}$（幂指函数$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{\phi(x)}$）。

解：原式是"0^0"型未定式。设$y=(\tan x)^{\sin x}$，取对数$\ln y=\sin x\ln(\tan x)$，$y=e^{\sin x\ln(\tan x)}$。所以$\lim_{x\to0^+}\tan x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{\sin x\ln(\tan x)}=e^{\lim_{x\to0^+}\sin x\ln(\tan x)}\overset{\text{"}0\cdot\infty\text{"}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\sin x}}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2x}{-\frac{1}{\sin^2x\cdot\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\cos^2x}=0$。所以$\lim_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}=e^{\lim_{x\to0^+}\sin x\ln(\tan x)}=e^0=1$。

第3节、函数的增减性与极值（理论基础是中值定理）

一、函数单调增、减的必要条件与充分条件

1. 函数单调增、减的必要条件

   $y=f(x)$在(a,b)内单调增，$\forall_{x_1,x_2}\in(a,b),x_1<x_2,f(x_1)<f(x_2)$，曲线$y=f(x)$在$(a,b)$内随着$x$的增加而上升，$\forall_x\in(a,b)$，过曲线上点$M(x,f(x))$作切线MT，其倾斜角为$\alpha$，则$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，斜率$k=\tan\alpha>0$，即$f'(x)=\tan\alpha>0$;
2. 类似地，若$y=f(x)$在(a,b)内单调减，$\forall_{x_1,x_2}\in(a,b)$，过点$M(x,f(x))$的切线的倾斜角$\alpha$是钝角，即$f'(x)=\tan\alpha<0$。

函数单调增、减的必要条件：设$f(x)\in C[a,b],f(x)\in D(a,b)$，则当$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增（或减）时，在$(a,b)$内必有$f'(x)\geq0\ (f'(x)\leq0)$，且在$(a,b)$的任何子区间中等号不恒成立。

证：设$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增，$\forall_x\in(a,b)$，x有增量Δx，$x+\Delta x\in(a,b)$。

当$\Delta x<0$时，$x+\Delta x<x\Longrightarrow f(x+\Delta x)<f(x)\Longleftrightarrow\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$;

当$\Delta x>0$时，$x+\Delta x>x\Longrightarrow f(x+\Delta x)>f(x)\Longleftrightarrow\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$;

则无论$\Delta x>0$或$\Delta x<0$，有$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$。又因为$f(x)\in D(a,b)$，所以$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\geq 0$。上式$f'(x)=0$在$(a,b)$的任何子区间中不恒成立，假若在$(a,b)$的一个子区间$(c,d)\subset(a,b)$中，$f'(x)\equiv 0\Longrightarrow f(x)=$常数，这与$f(x)$在$(a,b)$内严格单调增矛盾。

2. 函数单调增、减的充分条件

函数单调增、减的充分条件：设$f(x)\in C[a,b],f(x)\in D(a,b),f'(x)\geq 0$（或$f'(x)\leq 0$）且$f'(x)$在$(a,b)$任何子区间内不恒为零，则$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增（或减）。

解：任取$x_1<x_2,x_1,x_2\in[a,b]\Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$。

证：设$f'(x)\geq 0$且$a<x<b$，$f'(x)$在(a,b)的任何子区间内不恒为零，$\forall_{x_1,x_2}\in[a,b]$，且$x_1<x_2$，$f(x)$在$[x_1,x_2]$上满足Lagrange定理条件，从而有$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，由假设知$f'(\xi)\geq 0,x_2-x_1>0$，所以$f(x_2)-f(x_1)\geq 0$，即$f(x_1)\leq f(x_2)$。不等式中等号不成立。假若$x_1<x_2,f(x_1)=f(x_2)$，$\forall_x\in(x_1,x_2)$，由前面已证明结论，有：$f(x_1)\leq f(x)\leq(x_2)\Longrightarrow f(x)=f(x_1)=f(x_2)$，所以$f(x)\equiv C,x\in[x_1,x_2]\Longrightarrow f'(x)=0,x\in[x_1,x_2]$，这与假设矛盾。所以当$x_1<x_2$时，$f(x_1)<f(x_2)$，即$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增。

设$f(x)\in[a,b],f(x)\in D(a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增（减）$\Longleftrightarrow$在$(a,b)$内$f'(x)\geq 0$（$f'(x)\leq 0$）且在$(a,b)$内的任何子区间中等号不恒成立。

例1：讨论$y=e^x-x-1$的单调性。

解：$y'(x)=e^x-1$，令$y'(x)=0$，即$e^x-1=0$，解得$x=0$。$y=e^x-x-1$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，点$x=0$把$(-\infty,+\infty)$分为$(-\infty,0),[0,+\infty)$。在$(-\infty,0)$上，$y'=e^x-1<0,y=e^x-x-1$在$(-\infty,0)$上严格单调减，在$(0,\infty)$内，$y'=e^x-1>0,y=e^x-x-1$在$[0,+\infty]$上严格单调增。

例2：求$y=\sqrt[3]{x^2}$的单调区间。

解：$y'(x)=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$。当$x=0$时，导数$y'$不存在。$y=\sqrt[3]{x^2}$的定义域$(-\infty,+\infty)$，$x=0$把$(-\infty,+\infty)$分为$(-\infty,0),[0,+\infty)$。在$(-\infty,0)$内，$y'<0$，$y=\sqrt[3]{x^2}$在$(-\infty,0)$内单调减，在$[0,\infty)$内，$y'>0$，$y=\sqrt[3]{x^2}$在$[0,\infty)$内单调增。

例3：求$y=2x^3-9x^2+12x-3$。

解：函数y的定义域$(-\infty,+\infty)$。$y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$。令$y'=0$，得$x_1=1,x_2=2$。$x_1=1,x_2=2$把$(-\infty,+\infty)$分为$(-\infty,1),(1,2),(2,+\infty)$，列表讨论：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

函数y的单增区间：$(-\infty,1],[2,+\infty)$，单减区间：$[1,2]$。

利用函数的单调性证明不等式：

例4：证明：当$x>1$时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$。

证：当$x>1$时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\Longleftrightarrow 2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3>0$。令$f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3,1\leq x<+\infty$。$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1)$。当$1\leq x<+\infty$，$x\sqrt{x}-1>0,f'(x)>0$，$f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3$在$[1,+\infty]$内单调增，而$f(1)=2\sqrt{1}+1-3=0$。$\forall_x\in(1,+\infty),f(x)>f(1)=0$，所以$f(x)>0,2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3>0\Longrightarrow 2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$。

二、函数的极值及求法

极值的定义：设$f(x)$在$N(x_0,\delta),(\delta>0)$内有定义，如果$\forall_x\in N(x_0,\delta),x\neq x_0$，皆有$f(x)<f(x_0)$（或$f(x)>f(x_0)$），则称$f(x_0)$为$f(x)$的极大值（$f(x_0)$为$f(x)$的极小值）。极大值和极小值统称为函数的极值，取得极大值的点x_0称为极值点。

1. 极值的必要条件

极值的必要条件：设$f(x)$在x_0点可导，且$f(x_0)$是$f(x)$的极值，则必有$f'(x)=0$。

证：设$f(x_0)$是$f(x)$的极大值，根据定义知，存在$N(x_0,\delta)$，使得$\forall_x \in N(x_0,\delta),(x \neq x_0), f(x) < f(x_0)$或$f(x)-f(x_0)<0$。当$x<x_0$时，有$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$；当$x>x_0$时，有$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$；因为$f(x)$在$x_0$点可导，所以$f'_-(x_0),f'_+(x_0)$存在且相等。即$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$。因为$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0,\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$，所以$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)=0$。

驻点：使得导数$f'(x_0)=0$的点x_0称为$f(x)$的驻点。由极值的必要条件可知：$f(x)$的极值点x_0一定是驻点，反之，$f(x)$的驻点不一定是极值点。

求极值点：$y=f(x)\Longrightarrow y'=f'(x)$，令$f'(x)=0$，解方程得驻点，再判定驻点是不是极值点。

对连续函数来说，导数不存在的点也可能是极值点，例如：$y=|x|$在$(-\infty,+\infty)$连续，$x=0$是极小值点，但$y=|x|$在$x=0$不可导。求极值点：找驻点，导数不存在的点，统称为极值的"嫌疑点"。

2. 极值存在的充分条件

极值存在的第一充分条件：设$f(x)$在$|x-x_0|\leq\delta,(\delta>0)$上连续，在$N(\hat{x_0},\delta)$可导。(1) 如果在$(x_0-\delta,x_0)$内$f'(x)>0$，而在$(x_0,x_0+\delta)$内$f'(x_0)<0$，则$f(x_0)$是$f(x)$的极大值。(2) 如果在$(x_0-\delta,x_0)$内$f'(x)<0$，而在$(x_0,x_0+\delta)$内$f'(x_0)>0$，则$f(x_0)$是$f(x)$的极小值。(3) 如果在$(x_0-\delta,x_0)$及$(x_0,x_0+\delta)$中，$f'(x_0)$不变号（恒为正，或恒为负，或恒为零），则$f(x_0)$不是$f(x)$的极值。

证：只证(1)：因为在$(x_0-\delta,x_0)$内$f'(x)>0\Longrightarrow f(x)$在$[x_0-\delta,x_0]$上单调增$\Longrightarrow\forall_x\in(x_0-\delta,x_0)$，即$x_0-\delta<x<x_0$，则$f(x)<f(x_0)$。因为$\forall_x\in(x_0,x_0+\delta)$内$f'(x)<0\Longrightarrow f(x)$在$[x_0,x_0+\delta]$上单调减$\Longrightarrow\forall_x\in(x_0,x_0+\delta)$，即$x_0<x<x_0+\delta$，有$f(x_0)>f(x)$，从而有$\forall_x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),(x\neq x_0)$恒有$f(x)<f(x_0)$，所以$f(x_0)$是$f(x)$的极大值。

例1：求$f(x)=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$的极值。

解：$f(x)$在定义域$(-\infty,+\infty)$内连续，$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$。当$x=1$时，$f(x)$不可导，即$f'(1)$不存在。对于$x_1=1$点，当$x<1$时，$f'(x)>0$；当$x>1$时，$f'(x)<0\Longleftrightarrow x_1=1$是极大值点，$f(1)=2$是极大值。

极值存在的第二充分条件：设$f(x)$在$N(x_0,\delta)$内连续，而且在x_0点有二阶导数，$f'(x_0)=0,f''(x_0)\neq 0$，则：(1) 当$f''(x_0)<0$时，$f(x_0)$是$f(x)$的极大值；(2) 当$f''(x_0)>0$时，$f(x_0)$是$f(x)$的极小值。

证：只证(1)：因为$f''(x_0)<0$，由二阶导数的定义，有$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-0}{x-x_0}<0$，根据函数值与极限值的同号性定理，必存在$N(\hat{x_0})$，使得$\forall_x\in N(\hat{x_0})$，有$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$，从而可知，当$x<x_0$时，$x-x_0<0,f'(x)>0$；当$x>x_0$时，$x-x_0>0,f'(x)<0$，再根据第一充分条件(1)，可知$f(x_0)$是函数$f(x)$的极大值。如果$f'(x_0)=0,f''(x_0)=0\Longrightarrow f(x_0)$可能是极值，也可能不是极值。例如：$f(x)=x^4,f''(x)=12x^2,f'(0)=0,f''(0)=0,f(0)$是极小值。同理$f(x)=x^3,f'(0)=0,f''(0)=0,f(0)$不是极值。

第4节 函数的最大、最小值

假设$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，除了(a,b)内有限个点外，$f(x)$在(a,b)内可导，有有限个驻点。讨论$f(x)$在$[a,b]$上的最值，如果$f(x)$在(a,b)内一点x_0取得最值，由极值的定义可知，x_0一定是$f(x)$的极值点$\Longrightarrow x_0$一定是驻点，或导数不存在的点，同时$f(x)$的最值有可能在$[a,b]$的端点a,b处取得，在此假设前提下，求$f(x)$在闭区间上的最值方法：先求出$f(x)$在(a,b)内的驻点，导数不存在的点$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，再求出函数值$f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)$，则$\max_{[a,b]}f(x)=\max\{f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)\},\min_{[a,b]}f(x)=\min\{f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)\}$。特例：如果$f(x)$在区间$I$（有限、无限、开的、闭的）内可导，且只有一个驻点（即驻点唯一），而且这个驻点又是$f(x)$的极值点，当$f(x)$是极大值时，必有$\max_{x\in I}f(x)=f(x_0)$。当$f(x_0)$是极小值时，有$\min_{x\in I}f(x)=f(x_0)$。

利用函数的最值可以证明不等式。

例3：设$0\leq x\leq 1,\alpha>1$，证明：$\frac{1}{2^{\alpha-1}}\leq x^\alpha+(1-x)^\alpha\leq 1$。

解：令$f(x)=x^\alpha+(1-x)^\alpha,0\leq x\leq 1$。$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha(1-x)^{\alpha-1}$，令$f'(x)=0$，即$\alpha x^{\alpha-1}-\alpha(1-x)^{\alpha-1}=0,x^{\alpha-1}=(1-x)^{\alpha-1},x=\frac{1}{2}$。因为$f(0)=1,f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{\alpha-1}},f(1)=1,\max_{x\in[0,1]}f(x)=f(1)=1,\min_{x\in[0,1]}f(x)=\frac{1}{2^{\alpha-1}}$，所以$\frac{1}{2^{\alpha-1}}\leq x^\alpha+(1-x)^\alpha\leq 1,(0\leq x\leq 1)$。

第5节 曲线的凹凸性拐点

曲线凹凸的定义：设$y=f(x)\in C[a,b]$，若$\forall_{x_1,x_2}\in(a,b)$，恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，称$y=f(x)$曲线在$[a,b]$上是向上凹的，简称为凹弧，称$f(x)$为在$[a,b]$上的凹函数；若$\forall_{x_1,x_2}\in(a,b)$，恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，称$y=f(x)$曲线在$[a,b]$上是向上凸的，简称为凸弧，称$f(x)$为在$[a,b]$上的凸函数。

曲线凹凸性的判别法：设$f(x)\in C[a,b],f(x)\in D^2(a,b)$，则：(1) 如果在$(a,b)$内$f''(x)\geq 0$，在$(a,b)$内的任何子区间中不恒为零，则函数曲线$y=f(x)$在$[a,b]$上为凹弧；(2) 如果在$(a,b)$内$f''(x)\leq 0$，在$(a,b)$内的任何子区间中不恒为零，则函数曲线$y=f(x)$在$[a,b]$上为凸弧。

证：只证(1)。只需证：$\forall_{x_1,x_2}\in(a,b)$，恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，且$x_1<x_2$。记$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},h=x_2-x_0=x_0-x_1>0$，根据假设，有$f(x)$在$[x_1,x_0],[x_0,x_2]$上满足Lagrange定理条件，从而有：$f(x_1)-f(x_0)=f'(\xi_1)(x_1-x_0),x_1<\xi_1<x_0$，$f(x_2)-f(x_0)=f'(\xi_2)(x_2-x_0),x_0<\xi_2<x_2$，两式相减得$f(x_1)+f(x_2)-2f(x_0)=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]h$，因为$\xi_1<\xi_2,f''(x)\geq 0$，且在$(a,b)$的任何子区间内不恒为零$\Longrightarrow f'(x)$在$[a,b]$上单增$\Longrightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，即$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)>0$，所以$f(x_1)+f(x_2)>2f(x_0)$，即$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(x_0)=f(\frac{x_1+x_2}{2})$，亦即$y=f(x)$在$[a,b]$上为凹弧。

例1：判断曲线$y=\ln x$的凹凸性。

解：$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上是连续的，$y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}<0,0<x<+\infty$，所以函数$y=\ln x$曲线在$(0,+\infty)$中是凸弧。

例2：判断$y=x^3$曲线的凹凸性。

解：$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$中连续，$y'=3x^2,y''=6x$，令$y''=6x=0\Longrightarrow x=0$，点$x=0$把$(-\infty,+\infty)$分成$(-\infty,0],[0,+\infty]$。在$(-\infty,0]$内，$y''=6x<0$，因此为凸弧，在$[0,+\infty)$内，$y''=6x>0$，因此为凹弧。

拐点：连续曲线$y=f(x)$上凹凸弧的分界点，称为函数曲线$y=f(x)$的拐点，如果在点x_0处，$f''(x_0)=0$且在x_0点邻域的左右两侧$f''(x)$异号，则点$(x_0,f(x_0))$为拐点。如果在点x_0处，$f''(x_0)$不存在，在x_0点邻域的左右两侧$f''(x)$异号，则点$(x_0,f(x_0))$为拐点。

求曲线$y=f(x)$拐点的一般步骤：

(1) 确定$y=f(x)$的连续区间I；

(2) 求$f'(x),f''(x)$；

(3) 令$f''(x)=0$，求得二阶导数等于0的点，求二阶导数不存在的点，这些点：$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_k$；

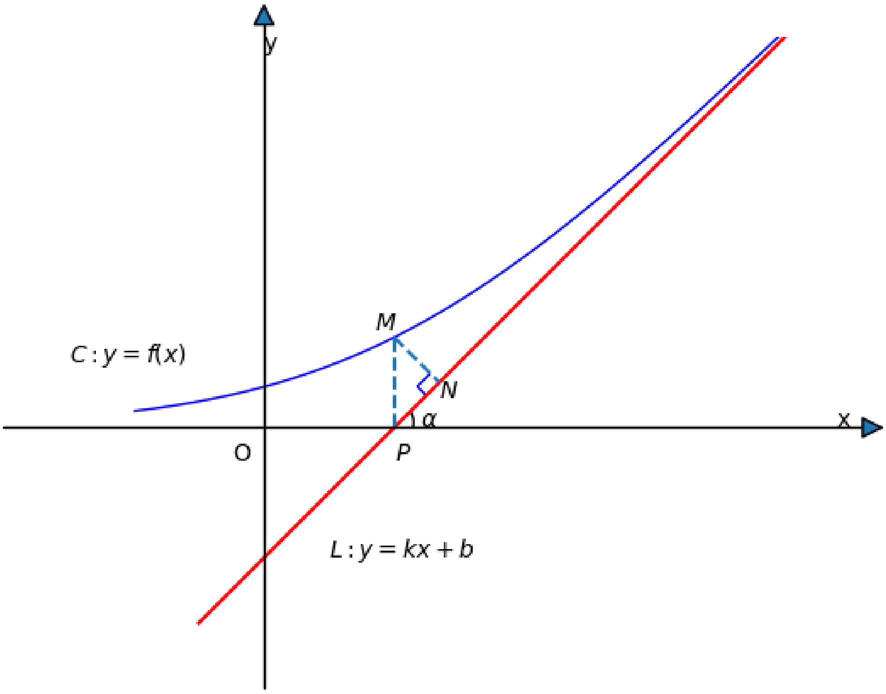
(4) 对每一个点$x_i(i=1,2,\cdots,k)$判定二阶导数在x_i的左右两侧是否异号，确定点$(x_i,f(x_i))$是否为拐点。

拐点的第二判别法：若$y=f(x)$在x_0的某邻域内有三阶导数，且$f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$，则$(x_0,f(x_0))$是拐点。

第6节 函数图像的描绘

一、曲线的渐近线

渐近线的定义：当曲线C上的动点M沿着曲线无限远离坐标原点时，动点M与某一直线L的距离趋向于零，则称直线L为曲线C的渐近线。



设有曲线C：$y=f(x)$，设有直线L：$y=kx+b$，直线的倾角$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，曲线C上的动点$M(x,f(x))$到直线的距离为$|MN|$，设L是C的渐近线，按定义，有$\lim_{x\to+\infty}|MN|=0$。设直线L上与点M有同一横坐标的点$P(x,kx+b)$。在直角三角形MNP中，$|MP|=|\frac{MN}{\cos\alpha}|$。$\lim_{x\to+\infty}|MN|=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}|MP|=\lim_{x\to+\infty}|\frac{MN}{\cos\alpha}|=0$（$\cos\alpha$是常数）。$|MP|=|f(x)-(kx+b)|\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}|f(x)-(kx+b)|=0$，所以$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0$，其中$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$，必有$\lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}-k]=0\Longrightarrow k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$。代入$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0\Longrightarrow b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$。

推理过程：若直线L：$y=kx+b$是曲线C：$y=f(x)$的渐近线$\Longrightarrow k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$；反过来，若$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx],\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]-b=b-b=0$，即$\lim_{x\to+\infty}|MP|=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}|MN|=0$。所以直线$L$：$y=kx+b$是曲线$C$：$y=f(x)$的渐近线。

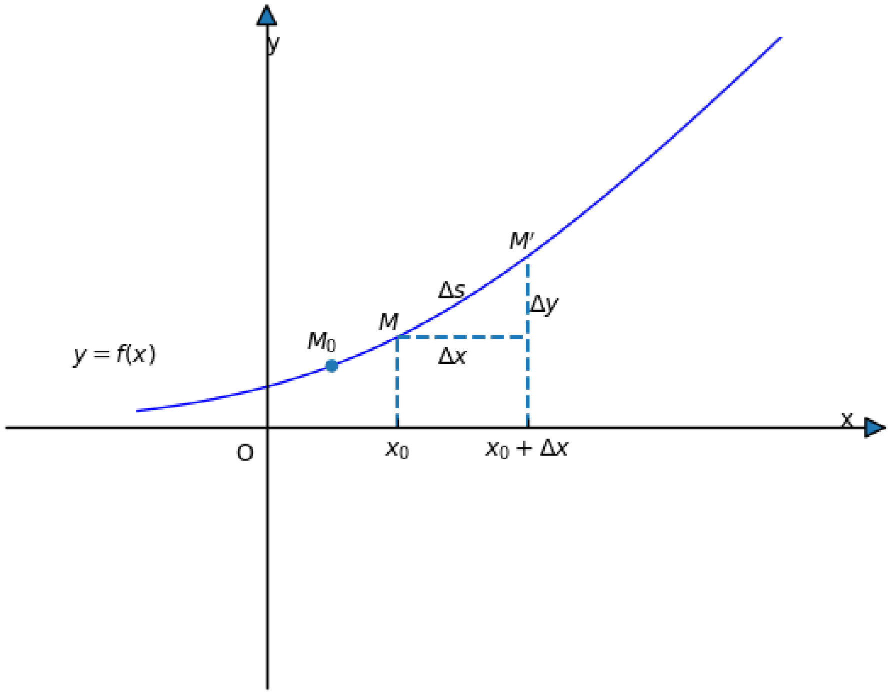
当$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$时，$x=x_0$是$f(x)$的垂直渐近线。

当$\lim_{x\to\infty}f(x)=a$时，$y=a$是$f(x)$的水平渐近线。

第7节 曲率

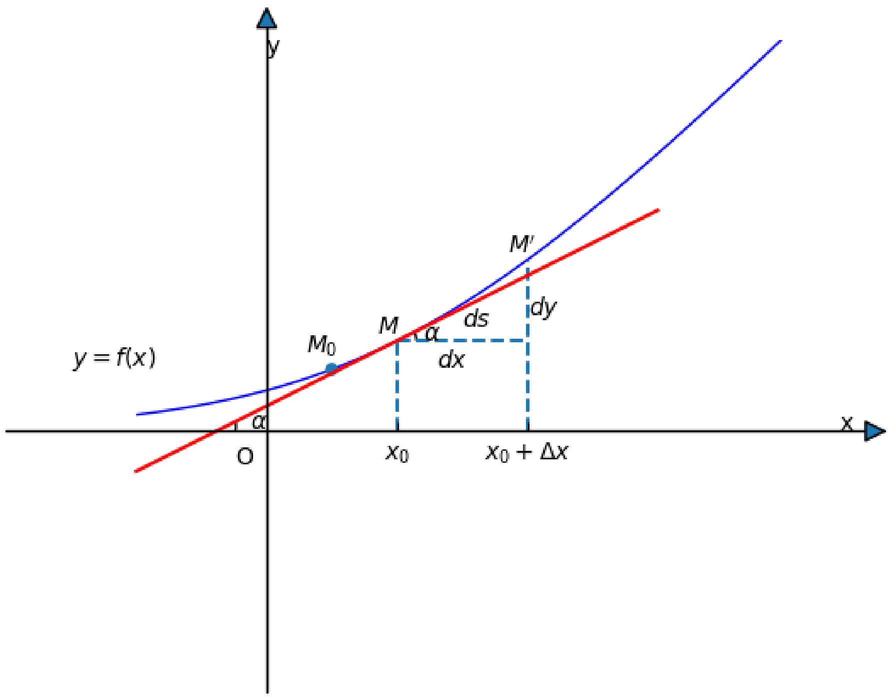
一、弧微分

光滑曲线：设$f(x)\in C[a,b]$，且$f(x)$具有连续的一阶导数$f'(x)$，则曲线$y=f(x)$为光滑曲线。



有向光滑曲线弧长的度量：在光滑曲线$y=f(x)$上任定一点M_0作为度量弧长的基点，规定依x增大的方向为曲线的正向，在曲线上取一点$M(x,y)$，以M_0为起点，沿着x轴正向量出的弧长为正数，沿着x反向量出的弧长为负数。这样量出的弧长s就是x的函数，记$s=s(x), a\le x\le b$。因为曲线的正向与x增大的方向一致，所以$s=s(x)$是单调增函数。设$M(x,y)$是光滑曲线的任一点，其邻近一点$M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$，弧长的增量$\Delta s=\overset{\frown}{M_0M'}-\overset{\frown}{M_0M}=\overset{\frown}{MM'}$，以$|MM'|$表示弦$MM'$的长度，于是有$(\frac{\Delta s}{\Delta x})^2=(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x})^2=(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|})^2\cdot(\frac{|MM'|}{\Delta x})^2=(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|})^2\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}=(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|})^2\cdot[1+\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}]$。开方得：
$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\frac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|MM'|}\cdot\sqrt{[1+\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}]}$，当$\Delta x\to 0$时，点$M'\to M$，$\lim_{M'\to M}\frac{|\overset{\frown}{MM'}|}{|MM'|}=1$，又因为$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$，所以$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{1+(y')^2}$。因为$s=s(x)$是单调增函数，所以$\frac{ds}{dx}\ge 0$，根号前应取正号，所以$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+(y')^2}\Longrightarrow ds=\sqrt{1+(y')^2}dx$。其中，$ds$称为弧微分。式子左右两边平方得：$(ds)^2=[(1+y')^2]\cdot(dx)^2=(dx)^2+(dy)^2$。

微分三角形：



可得到$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\frac{dy}{ds}=\sin\alpha$。若曲线由参量方程表示：

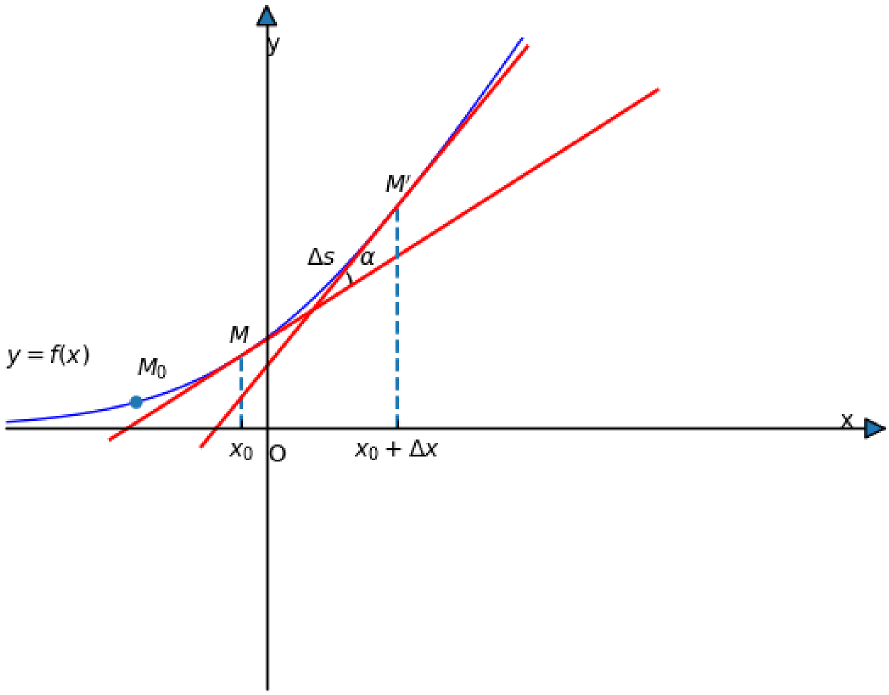
$$L:\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \phi(t) \\ y & = & \psi(t)\end{array}\right. \tag{1}$$

其中$\phi'(t),\psi'(t)$连续，则$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\sqrt{1+(y')^2}\cdot\phi'(t)=\sqrt{1+(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)})^2}\cdot\phi'(t)=\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$，所以$ds=\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$。

二、曲率及其计算公式

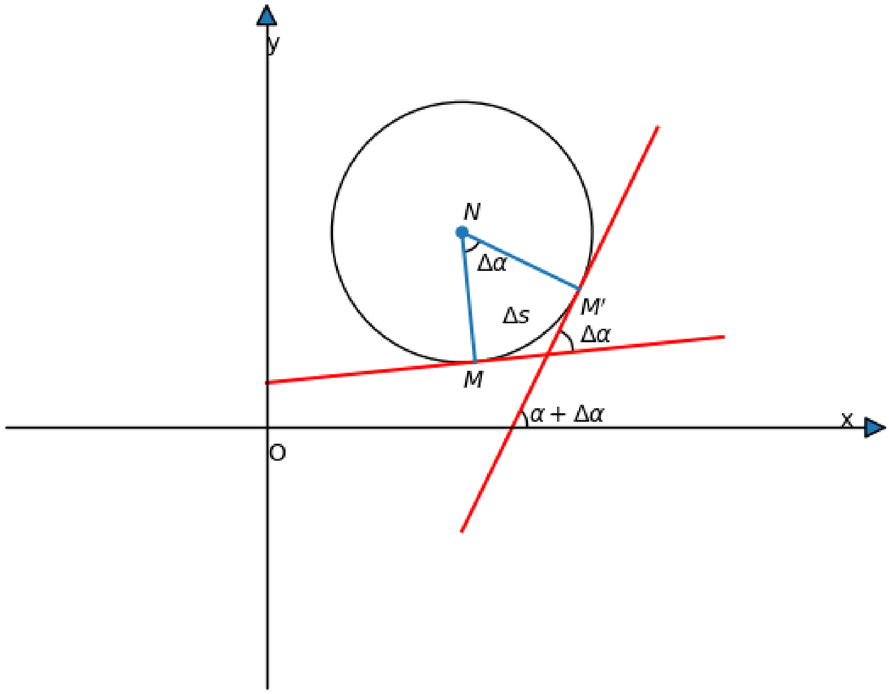
对直线L：直线上各点处的切线就是直线本身，在直线上从一点A移动到另一点B，切线方向不变。对曲线C：在C上一点A作切线AT，AT的倾角为α，在L上另一点B，作切线BT'，由切线AT到切线BT'有转角$\Delta\alpha$。曲线的弯曲程度与$\overset{\frown}{AB}$弧长Δs，切线AT到切线BT'的转角$\Delta\alpha$有关。切线转角大者弯曲得厉害，即曲线的弯曲程度与切线的转角$\Delta\alpha$成正比，与弧长Δs成反比。

曲率的概念：$\overset{\frown}{M_0M}=S,M=(x,y),M'(x+\Delta x,y+\Delta y),\overset{\frown}{MM'}=\Delta S$。切线$MT$与切线$M'T'$的转角为$\Delta\alpha$。$\overset{\frown}{MM'}$的弯曲程度与$\Delta S,\Delta\alpha$相关，即弯曲程度与$\Delta\alpha$成正比，与$\Delta S$成反比，用比值$|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}|$表示，即单位弧长切线的转角表示$\overset{\frown}{MM'}$的平均弯曲程度，在数学上称$|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}|$为$\overset{\frown}{MM'}$的平均曲率。当$M'$沿着曲线上趋近于点$M$时，$\Delta S\to 0$。若$\lim_{\Delta S\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}|$存在，称此极限为曲线上点$M$处的曲率，通常曲率记为$k$，即$k=\lim_{\Delta S\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}|=|\frac{d\alpha}{dS}|$。



例1、求半径为R的圆周上任一点处的曲率。

圆周上任一点M处切线倾角为α，点M附近一点M'的切线的倾角为$\alpha+\Delta\alpha$，由几何关系可知：MN与$M'N$的夹角为$\Delta\alpha$，$\overset{\frown}{MM'}$的弧长$\Delta S=\Delta\alpha\cdot R$。$|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}|=|\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha\cdot R}|=\frac{1}{R},k=\lim_{\Delta S\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}|=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{R}=\frac{1}{R}$。



设由光滑曲线：$y=f(x)$，其中$f(x)$具有二阶导数，$f(x)$为连续函数，根据导数的几何意义，$\tan\alpha=y'$，其中α是曲线上一点$(x,f(x))$处切线的倾斜角。对上式两边对x求导：$\frac{d(\tan\alpha)}{dx}=\frac{d(y')}{dx}=y''$，$\frac{d(\tan\alpha)}{dx}=\frac{d(\tan\alpha)}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}=y''$，即$(\sec\alpha)^2\cdot\frac{d\alpha}{dx}=y''$，所以$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{y''}{(\sec\alpha)^2}=\frac{y''}{1+(\tan\alpha)^2}=\frac{y''}{1+(y')^2}$，$\frac{dS}{dx}=\sqrt{1+(y')^2}$，所以有曲率$k=|\frac{d\alpha}{dS}|=|\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{dS}|=|\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dS}{dx}}|=|\frac{y''}{1+y'}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}|=|\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}|$

例2、计算等边双曲线$x\cdot y=1$在点$M(1,1)$处的曲率。

解：双曲线的方程$y=\frac{1}{x},y'=-\frac{1}{x^2},y''=\frac{2}{x^3}$，$y'|_{x=1}=-1,y''|_{x=1}=2,k|_{(1,1)}=\frac{2}{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

例3、抛物线$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$上哪一点处的曲率最大?

解：在$y=ax^2+bx+c$上任取一点(x,y)，有$y'=2ax+b,y''=2a$，曲线上任一点(x,y)处的曲率$k|_{(x,y)}=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}$，$k$的分子是常数$2|a|$，当分母最小时，$k$取最大值。显然，当$2ax+b=0$时，分母取最小值，由$2ax+b=0\Longrightarrow x=-\frac{b}{2a},y|_{x=-\frac{b}{2a}}=\frac{4ac-b^2}{4a}$，抛物线$y=ax^2+bx+c$在点$M(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$处的曲率最大，点$M$为抛物线的顶点。