ملحوظاتي على المحاضرة (٥) التي شرحتها اليوم السبت ٢٧/٧/٢٠٢٤ :-

① غياب بعض الطلاب وبالأخص الطالب/ محمد محمود عبدالمنعم برنامج ر/ما بالمستوى الرابع رغم أنها محاضرة في غاية الأهمية القصوى إن شاء الله في امتحان نهاية الترم الصيفي بل أكاد أجزم سؤالاً منها مستحق جداً جداً ......

② سأعيد لكم شرح Lemma(1) مرة أخرى كتابياً :-

المعطيات :- S l. indep.

المطلوب :- $\forall x \in V : x \notin \langle S \rangle = L(S) : S \cup \{x\}$ l. indep.

البرهان

Since $x \notin \langle S \rangle$, i.e., x cannot be written as a linear combinition of S, i.e., $\nexists\, \alpha_i \in F :$

$$x = \sum_i \alpha_i \cdot v_i \quad , v_i \in S. \text{ Then}$$

Suppose that $\sum_i a_i \cdot v_i + \beta \cdot x = \underline{0}$ (1) and we

Show that $\beta = a_i = 0 \ \forall i$, i.e., $S \cup \{x\}$ is l. indep., Now, we have 4 cases of β and a_i as

(i) $\beta \neq 0$ and $a_i = 0 \ \forall i$:-

Eq$\underline{n}$ (1) becomes $\beta \cdot x = \underline{0}$, but $\beta \neq 0$, then $x = \underline{0}$. Since $\langle S \rangle$ is the smallest subsp. contains S, then $\underline{0} = x \in \langle S \rangle$ which gives a contraduction with $x \notin \langle S \rangle$.

(ii) $\beta = 0$ and $a_i = 0 \ \forall i$:- Eq$\underline{n}$ (1) becomes $\sum_i 0 \cdot v_i + 0 \cdot x = \underline{0}$. Then $S \cup \{x\}$ is l. indep

(iii) $\beta \neq 0$ and one of the scalars a_i not equal zero, say $a_1 \neq 0$:- Eq$\underline{n}$ (1) becomes

$$\sum_i a_i \cdot v_i = \underline{0} \text{ and } a_1 \neq 0, \text{ then}$$

S is l. dep., which gives a contradiction with assumption that S l. indep.

(iv) $\beta \neq 0$ and one of $a_i \neq 0$, say a_1:

Eq$\underline{n}$ (1) becomes

$$\sum a_i \cdot v_i + \beta \cdot x = \underline{0}, \text{ or } \beta x = -\sum a_i \cdot v_i$$

Since $\beta \neq 0$ and $\beta \in F$, then there exist $\beta^{-1} \cdot \beta = 1$.

Then

$$\underline{0} \neq x = \sum_i \left(\frac{-a_i}{\beta}\right) \cdot v_i = \sum_i b_i \cdot v_i, \text{ where } b_i = \frac{-a_i}{\beta} \in F$$

$v_i \in S$ and not all zeros, i.e., $x \in \langle S \rangle$ which gives a contr. with the summption that $x \notin \langle S \rangle$. Hence $S \cup \{x\}$ is l. indep.

3) نظرية (4) ص 7 في غاية الأهمية وعلى كل طالب برهنتها بطريقته الخاصة وفق فهمه ولكن على كل طالب ترتيب برهانه كما يحلو له لأن [illegible].

والفكرة هي:

1- نعلم أن $U+W$ هو فراغ جزئي من V و $U\cap W$ هو فراغ جزئي من U ، W لأن $U\cap W \subseteq U$ و $U\cap W \subseteq W$ وبالتالي فإن $\dim(U\cap W) \leq \dim U$ و $\dim(U\cap W) \leq \dim W$

2- نفرض $\dim(U\cap W) = r$ ، $\dim U = m$ ، $\dim W = n$

أي أن في الفراغ الجزئي $U\cap W$ يوجد عدد r من المتجهات التي تكون أساس (مستقلة خطيا ومولدة) له ويوجد عدد m من المتجهات في الفراغ U تكون أساس له لأن $\dim U = m$ ويوجد عدد n من المتجهات في الفراغ W تكون أساس له لأن $\dim W = n$

3- بما أن $U\cap W \subseteq U$ and $U\cap W \subseteq W$

إذن

$$\dim(U\cap W) \leq \dim U \text{ and } \dim(U\cap W) \leq \dim$$

اي ان $r \leq m$ and $r \leq n$

4- نفرض $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_r\}$ هي أساس في الفراغ $U \cap W$ ونضيف متجهات فيه لكي يكون أساس لـ U اي ان
نفرض $\{\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_r}_{r}, \underbrace{u_1, u_2, \dots, u_{m-r}}_{m-r}\}$ وعددهم m من المتجهات المكونه أساس لـ W وبالمثل مادام $r \leq n$ و $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ أساس لـ $U \cap W$ فيمكن أستزادة (اي بالاضافه متجهات غير صفريه ومختلفه) حتى $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$ تكون أساس لـ U وعددهم هو $n = r + n - r$.

5- سنثبت أن المجموعه

$$B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_{m-r}, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$$

يكون أساس للفراغ $U + W$ وعددهم هو

$$\dim(U+W) = r + m - r + n - r =$$
$$= m + n - r = \dim U +$$
$$+ \dim W - \dim(U \cap W)$$

اي ان المطلوب أثباته B هو أساس لـ $U+W$ اي ان

1) B هو مستقل خطيا في الفراغ $U+W$
2) B مولدات للفراغ $U+W$.

---

4) المسائل التي على شكل المثال (3) والمحاضرة (6) صف 5 والمثال (2) من المحاضرة (6) صف 3 في غاية الأهمية "بعد الأفلام واكل معروف"