Université Sultan Moulay Slimane
Faculté des Sciences et Techniques
de Béni-Mellal
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse 4

PARCOURS : MIPC
PROFESSEUR : H. MOUSSA

Année universitaire : 2020/2021

Table des matières

1 Séries Numériques **4**

1.1 Définitions générales 4

1.2 Convergence d'une série numérique 5

1.2.1 Nature d'une série numérique 5

1.2.2 Reste d'une série convergente 6

1.2.3 Opération sur les séries numériques 8

1.3 Série à termes positifs 9

1.3.1 Cas des séries à termes réels positifs 9

1.3.2 Comparaison des séries à termes positifs 10

1.4 Règles de référence 13

1.4.1 Série de Riemann 13

1.4.2 Série géométriques 15

1.4.3 Règle de d'Alembert 16

1.4.4 Séries alternées et leur critère de convergence 17

1.5 Série-Intégrale impropre 17

1.5.1 Étude générale 17

1.5.2 Applications. Étude des séries de Bertrand 19

2 Suites et Séries de fonctions **20**

2.1 Suites de fonctions 20

2.1.1 Convergence Simple 20

2.1.2 Convergence uniforme 22

2.1.3 Théorèmes fondamentaux 28

2.2 Séries de fonctions 32

2.2.1 Les quatre types de convergence 32

2.3 Les grands théorèmes 36

2.3.1 Le théorème d'interversion des limites pour les séries de fonctions . . 36

2.3.2 Continuité de la somme d'une série de fonctions 37

2.3.3 Le théorème de dérivation terme à terme 38

2.3.4 Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment 40

3 Séries entières **42**

3.1 Définitions et Rayon de convergence 42

3.1.1 Définitions et généralités 42

3.1.2 Opérations sur les séries entières. 43

3.1.3 Convergence et rayon de convergence. 43

3.1.4 Techniques de calcul du rayon de convergence. 44

3.2 Propriétés de la somme d'une série entière. 47

3.2.1 Continuité de la somme d'une série entière. 47

3.2.2 Intégration de la somme d'une série entière. 48

3.2.3 Dérivation de la somme d'une série 48

3.3 Développement en séries entières 49

3.3.1 Définitions et généralités 49

3.3.2 Développements obtenus par la formule de Mac-Laurin. 50

3.3.3 Fonction exponentielle complexe. 51
3.3.4 Développement en série entière des fonctions usuelles. 51
3.3.5 Développements obtenus par équation différentielle. 52

4 Séries de Fourier **53**
4.1 Fonctions continues par morceaux ou $\mathcal{C}^k$ par morceaux 53
4.2 Séries trigonométriques 54
4.2.1 Définitions 54
4.2.2 Quelques formules trigonométriques 55
4.2.3 Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas réel 58
4.3 Séries de Fourier 59
4.3.1 Coefficients de de Fourier 60
4.3.2 Études de quelques exemples. 62
4.3.3 Convergence des séries de Fourier 63
4.3.4 Convergence d'une série trigonométrique. 64
4.3.5 Convergence simple. 65
4.3.6 Convergence normale 66
4.3.7 Égalité de Parseval et inégalité de Bessel 68

Chapitre 1

Séries Numériques

On désigne par $\mathbb{K}$, les ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions générales

Définition 1.1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique à valeur dans $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ avec*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k. \tag{1.1}$$

Cette série est notée $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$. Le terme S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

Exemple 1.1.1. ***[Série arithmétique]***

La série $\sum_{n\geq 0} n$ est la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 1.1.2. ***[Série géométrique]***

La série $\sum_{n\geq 0} q^n$ *est la suite des sommes partielles*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ si } q \neq 1.$$

Exemple 1.1.3. ***[Série harmonique]***

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est la suite des sommes partielles*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \text{ avec } n \geq 1.$$

Exemple 1.1.4. ***[Série télescopique]***
Soit (v_n) *une suite à valeur dans* $\mathbb{K}$. *Posons* $u_0 = v_0$ *et* $u_n = v_n - v_{n-1}$. *La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est la suite des sommes partielles*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = v_n.$$

Ainsi, la suite (v_n) *se confond avec la série* $\sum u_n$.

On suppose désormais les séries étudiées définies à partir du rang $n_0 = 0$. On peut s'y ramener quitte à poser les premiers termes de la série comme étant nuls si non définis.

1.2 Convergence d'une série numérique

1.2.1 Nature d'une série numérique

Définition 1.2.1. *On dit que la série* $\sum u_n$ *converge si la suite* $(S_n)_n$ *des sommes partielles converge dans* $\mathbb{K}$. *On note alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

cette limite. En général, on note également S *cette limite, et on appelle* S *somme de la série.*

Exemple 1.2.1.
Étudions $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$, *pour* $n \geq 2$.

La somme partielle associée à cette série est

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exemple 1.2.2. ***[Série harmonique]***
Étudions $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. *Pour* $n \geq 1$, *la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *étant décroissante, on a la somme partielle associée à cette série est minorée par :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ainsi, la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Exemple 1.2.3. ***[Série harmonique alternée]***
Étudions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. *Pour* $n \geq 1$, *la somme partielle associée à cette série est :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_{0}^{1} x^{k-1} \, dx = \int_{0}^{1} \sum_{k=1}^{n} (-1 \times x)^{k-1} \, dx = \int_{0}^{1} \frac{1-(-x)^n}{1+x} \, dx.$$

Or

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x} \, dx = \ln(2), \text{ et } 0 \leq \int_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x} \, dx \leq \int_{0}^{1} x^n \, dx = \frac{1}{n+1},$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \to \ln(2) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge et* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

1.2.2 Reste d'une série convergente

Définition 1.2.2. *Si la série* $\sum u_n$ *converge, on peut introduire la somme*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n.$$

Ce terme est appelé reste de rang n *de cette série.*

Théorème 1.2.1. *Si* $\sum u_n$ *converge, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

De plus

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. Pour $n < N$,

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{N} u_k.$$

Quand $N \to +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

i.e $S = S_n + R_n$, passant à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve $R_n = S - S_n \to 0$.

Théorème 1.2.2. *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors* $u_n \to 0$.

Preuve :

Posons $\sum_{k=0}^{n} u_k$, si $(S_n)_n$ converge vers S quand n tend vers $+\infty$, alors

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

Définition 1.2.3. *Si* $(u_n)_n$ *ne tend pas vers 0 alors on dit que la série de terme général* u_n *diverge grossièrement (DVG).*

Exemple 1.2.4. *La série* $\sum \cos(n)$ *diverge grossièrement, en effet, si* $\cos(n) \to 0$, *alors la relation* $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$ *donne à la limite l'absurdité* "$0 = -1$".

Exemple 1.2.5. *La série* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge, mais pas grossièrement.*

Remarque 1.2.6. *Si* $\sum u_n$ *converge, alors*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On peut alors retrouver la divergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *en exploitant*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

1.2.3 Opération sur les séries numériques

Théorème 1.2.3. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries numériques convergentes alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*, les séries* $\sum \lambda u_n$ *et* $\sum u_n + v_n$ *convergent et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k, \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Corollaire 1. *L'ensemble constitué des suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^N$ *telles que la série* $\sum u_n$ *converge est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^N$*. L'application* $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *y définit une forme linéaire.*

Exemple 1.2.7. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum (u_n + v_n)$ *convergent alors* $\sum v_n$ *converge.*
En effet, on peut écrire

$$v_n = (u_n + v_n) + (-1)u_n.$$

Remarque 1.2.8. • *Pour écrire*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

il faut vérifier la convergence d'au moins deux des séries engagées. Ceci interdit d'écrire des aberrations du type

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1),$$

- *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge, alors* $\sum (u_n + v_n)$ *diverge.*
- *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent, on ne peut rien conclure sur la nature de* $\sum (u_n + v_n)$*.*

Même si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent, la série* $\sum (u_n + v_n)$ *peut être convergente, par exemple,* $\sum 2^n$ *et* $\sum \frac{1}{2^n} - 2^n$ *divergent, mais leur somme, converge, sa somme est 2.*

Théorème 1.2.4. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle. Si* $\sum u_n$ *converge et si tous les termes de la suite sont positifs, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0.$$

Corollaire 2. *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles vérifiant* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Proposition 1.2.9. ***(Convergence d'une série complexe)***
Une série complexe $\sum z_n$ *converge si et seulement si les séries* $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ *et* $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ *convergent toutes les deux, et dans ce cas*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_k) + i \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_k).$$

1.3 Convergence par comparaison à une série positive

1.3.1 Cas des séries à termes réels positifs

Définition 1.3.1. *Une série à termes positifs est une série dont le terme général est un élément de* $\mathbb{R}^+$.

Théorème 1.3.1. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. On a l'équivalence entre :*

- $\sum u_n$ *converge,*
- $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq M.$

Preuve : La suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est croissante car $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$. Ainsi, cette suite converge si, et seulement si, elle est majorée.

Remarque 1.3.1. *Si* $\sum u_n$ *est une série à termes positifs divergente alors*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \to +\infty \quad \textit{quand } n \to \infty$$

.

1.3.2 Comparaison des séries à termes positifs

Théorème 1.3.2. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

(a) *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*

(b) *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Preuve :

(a) $\sum u_n$ converge car c'est une série à terme positif, donc la suite S_n des sommes partielles est croissante de plus elle est majorée car :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

et puisque $\sum v_n$ converge donc $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \leq M.$

d'où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \leq M.$$

(b) En utilisant un raisonnement par contra-posée, on montre facilement le résultat.

Exemple 1.3.2. *Déterminons la nature de* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *pour* $n \geq 2$.

On a

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

Or $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ *converge donc, par comparaison de série à termes positifs, la série* $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ *converge, puis la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Exemple 1.3.3. *Déterminons la nature de* $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n+1}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} n\frac{\ln(n)}{n+1} = +\infty$ *, donc*

$\forall A > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \left|n\frac{\ln(n)}{n+1}\right| > A,$ *en particulier pour* $A = 1$*, on a*

$$n\frac{\ln(n)}{n+1} > 1.$$

Ce qui donne

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n+1} > \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge donc, par comparaison de série à termes positifs, la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n+1}$ *diverge.*

Théorème 1.3.3. ***(Critère d'équivalence)***
Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. Si* u_n *est équivalente à la suite* v_n $(u_n \sim v_n)$ *quand* $n \to +\infty$ *alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Preuve :

La propriété $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$, signifie qu'on a $u_n = (1+\varepsilon(n))v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$ et donc à partir d'un certain rang N, on a $\frac{1}{2}v_n < u_n < \frac{3}{2}v_n$. On applique alors le théorème précédent.

Exemple 1.3.4. *Déterminons la nature de* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n}$,

On a

$$\frac{1}{n^2+n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\frac{1}{n^2} \geq 0$ *donc par équivalence des séries à termes positifs* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n}$ *converge.*

Exemple 1.3.5. *Déterminons la nature de* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

On a

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\frac{1}{n} \geq 0$ *donc par équivalence des séries à terme positifs* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ *diverge.*

Définition 1.3.2. ***(Convergence absolue)***
Soit (u_n) *une suite réelle ou complexe. On dit que la série* $\sum u_n$ *converge absolument si la série à termes positifs* $\sum |u_n|$ *converge.*

Exemple 1.3.6. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ *converge absolument (CVA).*

En effet, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Théorème 1.3.4. *Si* $\sum u_n$ *converge absolument alors celle-ci converge et*

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Preuve :

Dans le cas où (u_n) est une suite réelle à termes positifs : il n'y a rien à démontrer.
Dans le cas où (u_n) est une suite réelle. On introduit u_n^+ et u_n^- définis par

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0).$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ et } |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

Puisque $0 \leq u_n^+,\ u_n^- \leq |u_n|$, on peut affirmer, par comparaison de séries à termes positifs, la convergence des séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ puis celle de $\sum u_n$ par différence de deux séries convergentes. Cas (u_n) est une suite complexe. On introduit $\mathrm{Re}(u_n)$ et $Im(u_n)$.
On a $|\mathrm{Re}(u_n)|, |\mathrm{Im}(u_n)| \leq |u_n|$ donc les séries réelles $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent puis la série complexe $\sum u_n$ converge aussi.

Remarque 1.3.7. *Il se peut que la série* $\sum u_n$ *converge alors que* $\sum |u_n|$ *diverge.*

Définition 1.3.3. *Une série convergente, mais non absolument convergente, est dite semi-convergente.*

Exemple 1.3.8. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *est semi-convergente.*

Théorème 1.3.5. *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique et* $\sum v_n$ *une série à termes positifs. Si la suite* (u_n) *est dominée par la suite* (v_n) $(u_n = O(v_n))$ *et si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge absolument (et donc converge).*

Preuve :

Puisque la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n), donc il existe $M \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N,\ u_n \leq Mv_n.$$

Quitte à modifier les premiers termes des séries (ce qui ne change pas la nature de celle-ci), on peut supposer la majoration vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\sum Mv_n$ converge et $Mv_n \geq 0$ donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge.

Exemple 1.3.9. *Déterminons la nature de la série* $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$*,*
on a

$$|\frac{\sin(n)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2},$$

donc $\frac{\sin(n)}{n^2} = O(\frac{1}{n^2})$*, or* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\frac{1}{n^2} \geq 0$ *donc, par domination,* $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ *converge absolument et donc converge.*

1.4 Règles de référence

1.4.1 Série de Riemann

Théorème 1.4.1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*, la série à termes positifs* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *:*

- *Converge si,* $\alpha > 1$*.*
- *Diverge si,* $\alpha \leq 1$*.*

Preuve :

Cas $\alpha \leq 1$, puisque pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on obtient par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Cas $\alpha > 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs. Nous allons montrer qu'elle converge en observant que ses sommes partielles sont majorées. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, on a pour tout $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha},$$

alors,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \Big[\frac{-1}{\alpha - 1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\Big]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}\Big(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big),$$

puis

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = M.$$

Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

Exemple 1.4.1. *Déterminons la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2-n+1}$, *on a*

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2-n+1}\right| \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\frac{1}{n^2} \geq 0$ *donc* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2-n+1}$ *converge.*

Exemple 1.4.2. *Déterminons la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$,

On a au voisinage de zéro $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x^3)$. *D'où*

$$\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^3}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n^3}$ *converge et* $\frac{1}{3n^3} \geq 0$ *donc* $\sum_{n\geq 1} \tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$ *converge.*

Exemple 1.4.3. *Déterminons la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} \exp(-n)$,

on a $n^2 \exp(-n) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Donc

$$\exp(-n) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\frac{1}{n^2} \geq 0$ *donc* $\sum_{n\geq 0} \exp(-n)$ *converge absolument et donc converge.*

Exemple 1.4.4. *Nature de* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\ln(n)}$.

On a

$$n\frac{1}{\ln(n)} \to 1, \quad \textit{quand } n \to +\infty.$$

Ce qui donne pour n *assez grand,*

$$n \times \frac{1}{\ln(n)} \geq 1.$$

D'où

$$\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}.$$

Puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\frac{1}{n} \geq 0$ *donc* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\ln(n)}$ *diverge.*

Exemple 1.4.5. *Étudions la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *de terme général :*

$$u_n = \frac{1 \times 6 \times 11 \times 16 \times \cdots \times (5n-4)}{5^n \times n!} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(5k-4)}{5^n . n!}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} u_n &\geq \frac{5 \times (2 \times 5) \times (3 \times 5) \times \cdots \times (5(n-1))}{5^n \times n!} \\ &\geq \frac{5^{n-1}(n-1)!}{5^n n!} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Or nous savons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *diverge donc* $\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *diverge et par conséquent* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *diverge.*

1.4.2 Série géométriques

Théorème 1.4.2. *Soit* $q \in \mathbb{K}$*,*

- *Si* $|q| \geq 1$ *alors* $\sum q^n$ *diverge grossièrement.*
- *Si* $|q| < 1$ *alors* $\sum q^n$ *converge absolument et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve :

Cas $|q| \geq 1$, on a $|q^n| = |q|^n \geq 1$, donc la suite (q^n) ne tend pas vers 0, et la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.

Cas $|q| < 1$, la suite $(q^n)_n$ tend vers 0, et on a

$$\sum_{k=0}^{n} |q|^k = \frac{1-|q|^{n+1}}{1-|q|} \to \frac{1}{1-|q|}, \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

D'où $\sum q^n$ converge absolument, de plus

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}, \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

1.4.3 Règle de d'Alembert

Théorème 1.4.3. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes non nuls.*
On suppose

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

- *Si* $l > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*
- *Si* $l < 1$ *alors* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*
- *Si* $l = 1$ *alors on ne peut rien conclure.*

Preuve :
Cas $l > 1$: A partir d'un certain rang n_0, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$, et donc la suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ est croissante. Elle ne peut alors converger vers 0 que si elle est constante égale à 0 ce qui est exclu.
Cas $l < 1$: Soit $\epsilon > 0$, (qu'on fixera par la suite). A partir d'un certain rang n_0,

$$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| \leq \epsilon.$$

Et donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \epsilon + l.$$

Par récurrence, on a

$$|u_n| \leq (l+\epsilon)^{n-n_0}|u_{n_0}| = M(l+\epsilon)^n, \quad \text{avec } M = (l+\epsilon)^{-n_0}|u_{n_0}|.$$

En choisissant initialement $\epsilon > 0$ pour que $l + \epsilon \in [0, 1[$, on a u_n est dominée par q^n avec $q^n \geq 0$ et $\sum q^n$ converge.
On en déduit que $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.
Cas $l = 1$: Considérons $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
On a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to 1, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Alors que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$, donc on peut rien conclure.

Exemple 1.4.6. *Déterminons la nature de* $\sum_{n\geq 0} u_n$, *avec* $u_n = \frac{1}{\binom{n}{2n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, *On a*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4} < 1, \text{ quand } n \to +\infty.$$

De plus $u_n \geq 0$ *donc* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge absolument puis converge.*

1.4.4 Séries alternées et leur critère de convergence

Une série de terme général u_n est alternée si, pour chaque n, u_{n+1} est de signe opposé à u_n. On a un critère très pratique de convergence pour ce type de séries :

Théorème 1.4.4. ***(Critère des séries alternées)***
On considère une série de terme général u_n telle que :

1. *u_{n+1} est de signe opposé à u_n.*
2. *La suite $(|u_n|)$ décroit, et tend vers 0.*

Alors, la série $\sum u_n$ converge. De plus, si on note R_n son reste, défini par :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Alors,

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Exemple 1.4.7. *Pour tout réel $\alpha > 0$ la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.*

1.5 Comparaison d'une série avec une intégrale impropre

Soit f une fonction définie sur $[1, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$. Dans ce paragraphe, on considère que la fonction f est décroissante continue. On se propose d'étudier la nature de convergence de la série numérique dont le terme général est défini par l'expression $u_n = f(n)$.

1.5.1 Étude générale

Notons que puisque la fonction f est supposée décroissante ceci permet d'écrire pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout réel $x \in [p, p+1]$,

$$f(p+1) \leq f(x) \leq f(p) \Rightarrow f(p+1) \leq \int_p^{p+1} f(t)\, dt \leq f(p).$$

Ainsi, en faisant varier l'entier p entre 1 et n on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} f(2) & \leq & \displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt & \leq & f(1) \\ f(3) & \leq & \displaystyle\int_2^3 f(t)\,dt & \leq & f(2) \\ \vdots & \leq & \vdots & \leq & \vdots \\ f(n+1) & \leq & \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt & \leq & f(n). \end{array}$$

encadrement que l'on peut renverser en un encadrement de u_n

$$\forall n > 0, \quad \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq u_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt,$$

dont la sommation membre à membre nous donne les deux encadrements suivants :

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n.$$

ce qui est équivalent à écrire la double inégalité suivante

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n \leq \int_1^{n} f(t)\,dt + f(1).$$

D'où le théorème :

Théorème 1.5.1. *Si $f\ : [1,+\infty[\mapsto \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante continue alors la série de terme général $u_n = f(n)$ converge (resp. diverge) si et seulement, si l'intégrale simple généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (resp. diverge).*

Exemple 1.5.1. *Cherchons la nature de convergence de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sinh(n)}$.*
Notons que si pour tout réel $x \geq 1$ on pose $f(x) = \dfrac{1}{\sinh(x)}$, on obtient une fonction décroissante et continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Donc, la série $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sinh(n)}$ et l'intégrale simple généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh(x)}$ possèdent la même nature de convergence.
Puisque pour $x > 0$ assez grand la fonction $\dfrac{1}{\sinh(x)}$ est équivalente à la fonction $2\exp(-x)$ et comme l'intégrale simple généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t)\,dt = e$ converge on en déduit que l'intégrale simple généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh(x)}$ converge aussi. Par conséquent, la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sinh(n)}$ converge.

1.5.2 Applications. Étude des séries de Bertrand

On considère les séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ $(n \geq 2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ dites séries de Bertrand.

On remarque que seuls posent problème les cas $\alpha = 1$, avec $\beta > 0$. En effet, d'après les théorèmes de comparaison ou la règle de Riemann $(n^s u_n)$:

Pour $\alpha < 1$, on a $nu_n = n^{1-\alpha} \ln^{-\beta}(n)$ et donc $nu_n \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc à partir d'un certain rang,

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \geq \frac{1}{n}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\frac{1}{n} \geq 0$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Pour $\alpha > 1$ il existe γ vérifiant $1 < \gamma < \alpha$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\gamma-\alpha} \ln^{-\beta}(n) = 0$; donc la série étudiée est de terme général négligeable devant $\dfrac{1}{n^\gamma}$ avec $\gamma > 1$. Cette série est donc convergente.

pour $\alpha = 1$, $\beta \leq 0$ alors on a, pour n assez grand, $\dfrac{1}{n \ln^\beta(n)} \geq \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum u_n$ est divergente.

On considère maintenant le cas : $\alpha = 1$, $\beta > 0$. Les théormes généraux ne permettent pas, en effet, de l'étudier. On associe à la série $\sum u_n$ la fonction, $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln^\beta(x)}$, définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Cette fonction est positive et décroissante. La série est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^\beta(t)}\, dt$, transformée par le changement de variable bijectif $u = \ln(t)$ en l'intégrale $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$. Cette dernière converge si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion :

Les séries de Bertrand, séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ $(n \geq 2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ sont convergentes si et seulement si : $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ avec $\beta > 1$.

Chapitre 2

Suites et Séries de fonctions

2.1 Suites de fonctions

2.1.1 Convergence Simple

Définition 2.1.1. ***(Suite de fonctions)***
Soit D une partie non vide de E, on appelle suite de fonctions numériques définies sur D, toute suite $(f_n)_n$ dont les termes sont des fonctions toutes définies sur E à valeur dans $\mathbb{K}$.

Remarque 2.1.1. *Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies sur $D \in \mathbb{R}$,* toutes *les fonctions f_n sont définies sur le* même *intervalle D.*

Exemple 2.1.2.

$$D = [0, 1] \ et \ f_n : x \mapsto x^n \tag{2.1}$$

$$D = [0, +\infty[\ et \ g_n : x \mapsto \frac{nx}{1 + nx} \tag{2.2}$$

$$D = \mathbb{R} \ et \ h_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & si \ |x| \leq \dfrac{1}{n} \\ x^{-1} & si \ |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$D = [0, +\infty[\ et \ u_n : x \mapsto \sqrt{n}\, x \exp(-nx) \tag{2.4}$$

Définition 2.1.2. ***(Convergence Simple d'une suite de fonction)***
Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définies sur D à valeur dans $\mathbb{K}$.

On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur *D si, et seulement si, pour tout $x \in D$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_n$ converge dans $\mathbb{K}$.*

Dans ce cas, pour tout $x \in D$ on note $f(x)$ la limite de la suite $\big(f_n(x)\big)_n$ et on dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur l'intervalle D vers la fonction f.

$$(f_n)_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } D \iff \forall x \in D, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Exemple 2.1.3.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n$.

Si $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$ et si $x = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 1$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f : x \mapsto \begin{cases} 0 & si\ x \in [0,1[\\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

On peut dire que la fonction f n'est pas continue en 1.

Exemple 2.1.4.

Reprenons les exemples précédents :

$(g_n)_n$ *converge simplement sur* $[0,+\infty[$ *vers* $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

$(h_n)_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers* $h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

$(u_n)_n$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0,+\infty[$.

Remarque 2.1.5.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \Big(\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)\Big) \neq \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\Big)$,

en effet soit $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$ pour $x \in [0,+\infty[$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \Big(\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)\Big) = \lim\limits_{n \to +\infty} \Big(1\Big) = 1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\Big) = \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(0\Big) = 0$,

alors, on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} \Big(\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)\Big) \neq \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\Big)$.

- *Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions, on commence par se donner un réel x du domaine D puis on étudie la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_n$.*

On donne maintenant une définition de la convergence simple « avec des quantificateurs ». Cette définition est peu utilisée dans la pratique. Par contre, c'est à partir de cette définition que l'on pourra comprendre la différence entre convergence simple et convergence uniforme, notion exposée au paragraphe suivant.

Définition 2.1.3.
Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définies sur D à valeur dans $\mathbb{K}$.

On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur *D si, et seulement si,*

$$\forall x \in D,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geq n_0,\ \Rightarrow \Big|f(x) - f_n(x)\Big| < \epsilon\Big)$$

2.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

La norme de la convergence uniforme : $||\ ||_\infty$

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{B}(D,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies sur D, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et bornées sur D. Pour $f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{K})$, on pose $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in D\}$.

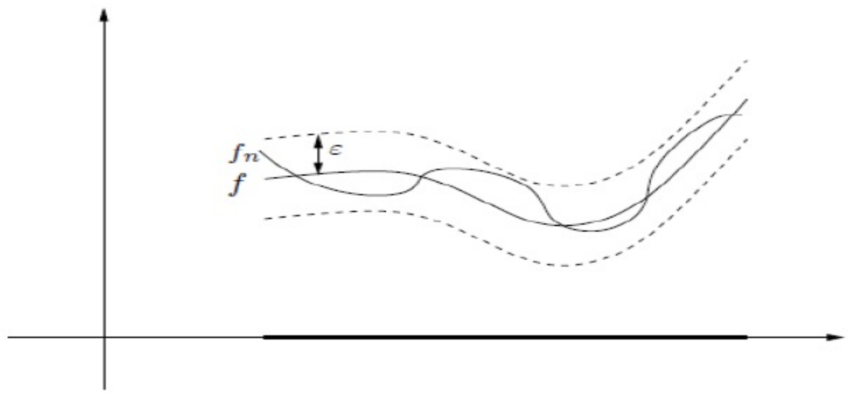
Théorème 2.1.1.
$\mathcal{B}(D,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $||\ ||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(D,\mathbb{K})$.

Preuve :
La preuve est laissée comme un exercice au lecteur.

Définition 2.1.4. ***(Converge uniforme)***
Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f sur D si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,\ \Big(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\Big).$$

Interprétation graphique. Pour $n \geq n_0$, le graphe de la fonction f_n est contenu dans une bande de largeur 2ϵ autour du graphe de f :



Remarque 1.

• *Pour la convergence simple, le rang n_0 est susceptible de dépendre de x alors que pour la convergence uniforme n_0 doit convenir pour tout $x \in D$ (on dit qu'il est uniforme en x).*

• *La convergence simple se comprend comme la convergence des fonctions "point par point". La convergence uniforme se comprend comme la convergence des fonctions "dans leur globalité".*

Théorème 2.1.2.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f sur D si et seulement s'il existe un rang n_0 tel que

1. *Pour $n \geq n_0$, la fonction $f - f_n$ est bornée sur D.*
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f - f_n||_\infty = 0.$

Preuve :

• Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f sur D. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in D$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$. Mais alors, pour $n \geq n_0$, la fonction $f - f_n$ est bornée sur D et $||f - f_n||_\infty \leq \epsilon$. Ainsi, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \Big(n \geq n_0 \Rightarrow ||f - f_n||_\infty \leq \epsilon\Big)$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$.

• Supposons qu'il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, la fonction $f - f_n$ est bornée sur D et $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_1 \leq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $||f - f_n||_\infty \leq \epsilon$.

Pour tout $n \geq n_1$ et $x \in D$, on a $|f(x) - f_n(x)| \leq ||f - f_n||_\infty \leq \epsilon$.

Ainsi, $\forall \epsilon > 0, \; \exists n_1 \in \mathbb{N}, \; \forall x \in D, \; \Big(n \geq n_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\Big)$. et donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f sur D.

Théorème 2.1.3.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f sur D, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f sur D.

Preuve : Trivial.

Remarque 2.

La réciproque de ce théorème est fausse. La convergence simple n'entraîne pas la convergence uniforme. Une convergence peut être simple mais pas uniforme.

Exemple 2.1.6.

Pour $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\{|f_n(x) - 0|,\ x \geq 0\} = \{\dfrac{x}{n},\ x \geq 0\}$ est une ensemble de réels non borné et donc $||f_n||_\infty = +\infty$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $||f_n||_\infty = +\infty$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$. Par contre, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
En effet : Soit $x \in [0, +\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Donc, pour tout réel $x \geq$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.

Théorème 2.1.4.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction qui converge simplement vers la fonction f sur D.
S'il existe une suite réelle (α_n) vérifiant :

$$\forall x \in D,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \textit{et } \alpha_n \to 0, \quad \textit{quand } n \to +\infty.$$

Alors, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f sur D.

Exemple 2.1.7.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x+n}{n(1+x^2)}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, quand $n \to +\infty$,

$$f_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Étudiant $f_n(x) - f(x) = \dfrac{1}{n}\dfrac{x}{1+x^2}$.
En vertu de l'inégalité $2|ab| \leq a^2 + b^2$, *on a*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} = \alpha_n.$$

Puisque $\alpha_n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *on obtient finalement que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers la fonction* f *sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 2.1.8.

Cherchons la nature de convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ *définie par :*

$$f_n(x) = x^n, \quad \textit{pour } x \in [0,1], \quad \textit{et } n \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ *converge simplement vers la fonction,*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \textit{si } x = 1. \end{cases}$$

Étudiant $f_n - f$, *on a*

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n & \textit{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \textit{si } x = 1. \end{cases}$$

donc $||f_n - f||_\infty = 1$ *qui ne tend pas vers* 0, *donc la suite de fonctions* (u_n) *ne converge pas uniformément.*
Cependant, pour $a \in [0, 1[$,

$$||f_n - f||_{\infty,[0,a]} = a^n \to 0, \quad \textit{quand } n \to +\infty,$$

donc, on conclut que la suite de fonctions $(f_n)_n$ *converge uniformément sur le segment* $[0, a]$.
Il ne suffit pas d'écarter la valeur 1 : pas de CVU sur $[0, 1[$ *puisque*
$||f_n - f||_{\infty,[0,1[} = \sup\limits_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1[} x^n = 1.$

Exercice 1.

Soit $\alpha > 0$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0, +\infty[$, *on pose* $f_n(x) = n^\alpha x \exp(-nx)$.

1. *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0, +\infty[$.

2. *Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *sur* $[0,+\infty[$.

Théorème 2.1.5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur un intervalle* D *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* D *vers une fonction* f.

1. *Si chaque fonction* (f_n) *est une fonction croissante sur* D, *alors* f *est une fonction croissante sur* D.
2. *Si chaque fonction* (f_n) *est une fonction décroissante sur* D, *alors* f *est une fonction décroissante sur* D.
3. *Si chaque fonction* (f_n) *est une fonction convexe sur* D, *alors* f *est une fonction convexe sur* D.
4. *Si chaque fonction* (f_n) *est une fonction concave sur* D, *alors* f *est une fonction concave sur* D.

Remarque 2.1.9.

• ***Les limites :***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0,+\infty[$, *posant* $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0,+\infty[$. *Et on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right).$$

• ***La continuité :***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0,+\infty[$, *posant* $f_n(x) = \exp(-nx)$. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement vers la fonction* f *définie sur* $[0,+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0, \\ 0 & si\ x > 0, \end{cases}$$

Chaque fonction f_n *est continue sur* $[0,+\infty[$ *mais la fonction* f *ne l'est pas. Donc, il est possible qu'une suite de e fonctions continues converge simplement vers une fonction non continue. On verra plus loin que la fonction limite est nécessairement continue quand la convergence est uniforme.*

• ***La dérivabilité :***

On va donner ici une suite de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ *convergeant non seulement simplement mais uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction non dérivable.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$*, posant* $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. *Chaque fonction* f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et la suite de fonctions* f_n *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. *La fonction limite* f *n'est pas dérivable en* 0.
Vérifions que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour tout réel* x,

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1/n}{\sqrt{0^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{0^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Alors, $||f_n - f||_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. *On en déduit que* $||f_n - f||_\infty$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini, et donc la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$. *Il est donc possible qu'une suite de fonctions dérivables converge uniformément vers une fonction* f *non dérivable.*

• ***L'intégrale :***

On va construire une suite de fonctions f_n *convergeant simplement sur* $[0, 1]$ *vers la fonction nulle et telle que pour tout entier naturel* $\int_0^1 f_n(x) = 1$.
Pour $n \geq 2$ *et* $x \in [0, 1]$*, posant*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & si\ x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & si\ x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & si\ x \in [\frac{2}{n}, 1], \end{cases}$$

f_n *est une fonction continue sur* $[0, 1]$*, nulle sur* $[\frac{2}{n}, 1]$ *et telle que* $f_n(0) = 0$, $f_n(\frac{1}{n}) = n$.
Soit $n \geq 2$, $\int_0^1 f_n(x)\ \ dx = \int_0^{1/n} n^2 x\ \ dx + \int_{1/n}^{2/n} -n^2(x - \frac{2}{n})\ \ dx = 1/2 - 2 + 4 + 1/2 - 2 = 1$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\ \ dx \right) = 1.$$

Vérifions alors que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0, 1]$. *Déjà pour tout entier naturel* $n \geq 2$, $f_n(0) = 0$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. *Soit alors* $x \in]0, 1]$. *Dès que* $n \geq 2/x$, *on a* $x \geq 2/n$, *et donc* $f_n(x) = 0$. *Ainsi, la suite numérique* $(f_n(x))_{n\geq 2}$ *est nulle à partir d'un certain rang et donc* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
On a montré que pour tout x *de* $[0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ *et donc la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 2}$

converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Mais alors,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx = \int_0^1 0\ dx = 0 \neq 1.$$

Donc, il est possible que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\ dx\right) \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\ dx.$$

2.1.3 Théorèmes fondamentaux

Théorème 2.1.6. ***(Théorème d'interversion des limites)***
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit a un réel adhérent au domaine D. On suppose que :

1. *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction f.*
2. *Chaque fonction f_n a une limite $l_n \in \mathbb{K}$ quand x tend vers a ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$ existe).*

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n$ existe et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, et ces deux limites sont égales i.e :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right).$$

Preuve :

On a la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur D vers f, donc

$$\forall \epsilon >, \exists n_0,\ \forall n, p > n_0,\ \forall x \in D,\ |f_n(x) - f_p(x)| \leq \epsilon.$$

On fait tendre $x \to a$, on trouve

$$\forall \epsilon >, \exists n_0,\ \forall n, p > n_0,\ ,\ |l_n - l_p| \leq \epsilon.$$

Donc, (l_n) est une suite de Cauchy, qui est donc convergente ; soit l sa limite $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - l_n + l_n - l| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|. \end{aligned}$$

$\forall \epsilon$, $\exists n_1 / \forall x \in \mathbb{D}$, $\forall n \geq n_1$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{3}$ (Convergence uniforme de (f_n))
$\exists n_2 /$ $\forall n \geq n_2$ $|l_n - l| \leq \dfrac{\epsilon}{3}$ (Convergence de l_n).
$\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$, $\forall x \in D$, $|f(x) - l| \leq \dfrac{2\epsilon}{3} + |f_n(x) - l_n|$,
d'ailleurs, on a $l_n = \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$, ainsi $\exists \sigma > 0$, $\forall x \in D$, $|x - a| \leq \sigma \Rightarrow |f_n(x) - l_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$.
donc, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0$, $\exists \sigma > 0, / \forall x \in D$, $|x - a| < \sigma \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$.
Ceci prouve que $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Théorème 2.1.7. ***(Limite uniforme d'une suite de fonctions continues)***
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

- *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur D vers la fonction f.*
- *Chaque fonction f_n est continue sur D.*

Alors, la fonction f est continue sur D.

Preuve :
Soit $x_0 \in D$. Soit $D' = D \backslash \{x_0\}$. On note g_n (resp. g) la restriction de f_n (resp. f) à D'.
La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur D et donc la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge uniformément vers g sur D'.
Chaque fonction f_n est continue en x_0 et donc chaque fonction g_n a une limite quand x tend vers x_0, à savoir $l_n = f_n(x)$. De plus, la suite $(l_n)_n$ converge vers $f(x_0)$.
D'après le théorème d'interversion des limites, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe dans $\mathbb{K}$ et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} g_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} l_n = f(x_0).$$

Ceci montre que f est continue en x_0. Puisque f est continue en tout x_0 de D, f est continue sur D.

Théorème 2.1.8. ***(Dérivation de la limite d'une suite de fonctions)***
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- *la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur D vers la fonction f.*
- *Chaque fonction f_n est dérivable sur D.*

• *La suite des dérivées* $(f'_n)_n$ *converge uniformément sur* D *vers une fonction* g. *Alors, Alors, la fonction* f *est continue sur* D *et* $f' = g$ *ou encore, plus explicitement*

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f'_n.$$

Preuve :

• Soit $x_0 \in D$. Pour $x \in D$ on pose $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \in D\backslash\{x_0\} \\ g(x_0) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$

Montrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = g(x_0)$ équivaut à montrer que la fonction φ est continue en x_0. Pour cela, on va montrer que la fonction φ est continue sur D.

Pour $n \in \mathbb{N}$ $x \in D$, on pose $\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \in D\backslash\{x_0\} \\ f'_n(x_0) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$

Chaque fonction f_n est dérivable sur D et en particulier continue sur D. Chaque fonction φ_n est continue sur $D\backslash\{x_0\}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $D\backslash\{x_0\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $D\backslash\{x_0\}$. D'autre part, chaque fonction φ_n est continue en x_n car la fonction f_n correspondante est dérivable en x_0. Finalement, chaque fonction φ_n est continue sur D.

De plus, pour chaque x de D, φ_n tend vers φ (que l'on ait $x \neq x_0$ ou $x = x_0$) ou encore, la suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ converge simplement sur D vers la fonction φ.

On va maintenant montrer que la suite fonctions $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers la fonction φ sur D. Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $x \in D$.

Si $x \neq x_0$, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|\varphi_n(x) - \varphi_p(x)| = \left|\frac{(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_0)}{x - x_0}\right| \leq ||f'_n - f'_p||_\infty$$

(cette inégalité étant valable même si la fonction $f'_n - f'_p$ n'est pas bornée sur D auquel cas $||f'_n - f'_p||_\infty = +\infty$). L'inégalité ci-dessus reste vraie quand $x = x_0$ car $|\varphi_n(x_0) - \varphi_p(x_0)| = |f'_n(x_0) - f'_p(x_0)|$. Finalement

$$\forall x \in D,\ \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, |\varphi_n(x) - \varphi_p(x)| \leq ||f'_n - f'_p||_\infty \quad (*).$$

Soit $\epsilon > 0$ puisque la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément vers la fonction g sur D, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n, p \geq n_0$ et $x \in D$, $|f'_n(x) - g(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Pour $n, p \geq n_0$ et $x \in D$, on a

$$|f'_n(x) - f'_p(x)| \leq |f'_n(x) - g(x)| + |g(x) - f'_p(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

On en déduit que pour tout $n, p \geq n_0$ et $x \in D$, $||f_p' - f_p'||_\infty \leq \epsilon$. D'après $(*)$, d'où

$$\forall x \in D,\ \forall n, p \geq n_0, |\varphi_n(x) - \varphi_p(x)| \leq \epsilon.$$

L'entier n supérieur ou égal à n_0 et le réel $x \in D$ étant fixés, on fait tendre p vers $+\infty$ et on obtient

$$\forall x \in D,\ \forall n \geq n_0, |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon.$$

On a montré que $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 / \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D$, $(n \geq n_0 \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon)$ et donc la suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers la fonction φ sur D.
La fonction φ est continue sur D en tant que limite uniforme sur D d'une suite de fonctions continues sur D. En particulier, la fonction φ est continue en x_0 ou encore la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = g(x_0)$.

Théorème 2.1.9. ***(Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions)***
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\ dx \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)\ dx.$$

Preuve :
On sait déjà que f est continue sur $[a, b]$ en tant que limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Donc $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\ dx$ existe. Puisque la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f, la suite $(||f_n - f||_\infty)_n$ est définie à partir d'un certain rang n_0 et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour $n \geq n_0$,

$$\left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\ dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\ dx \leq (b-a)||f_n - f||_\infty.$$

Puisque $(b - a)||f_n - f||_\infty$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, il en est de même de $\left| \displaystyle\int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right|$, ceci montre que la suite numérique $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x) \right)_n$ converge et a pour limite $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

2.2 Séries de fonctions

2.2.1 Les quatre types de convergence

a) Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 2.2.1. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
La série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers la fonction f sur D si et seulement si pour chaque x de D, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge vers le nombre $f(x)$. On dit dans ce cas que f est la somme sur D de la série de fonctions de terme général f_n et on écrit

$$\forall x \in D,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Exemple 2.2.1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + x > 0$ et en particulier $n + x \neq 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ existe, d'autre part, $\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{n+x}$ tend vers 0 en décroissant. Donc, la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Puisque pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement (vers sa somme) sur $]0, +\infty[$.*

b) Convergence absolue d'une série de fonctions

Définition 2.2.2. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
La série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D si et seulement si pour chaque x de D, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument.

Théorème 2.2.1. *Si la série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D, alors la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D.*

Preuve :

Supposons que la série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur D. Alors, pour tout x de D, la série de terme général $f_n(x)$ converge absolument et en particulier converge. Mais alors, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D.

Remarque 2.2.2. *La réciproque est fausse. Une série de fonctions peut converger simplement sans être absolument convergente.*

Exemple 2.2.3. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\dfrac{(-1)^n}{n+x}| = \dfrac{1}{n+x}$. Comme $\dfrac{1}{n+x}$ est équivalente à $\dfrac{1}{n} > 0$ quand n tend vers $+\infty$ et que la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, on en déduit que la série numérique de terme général $f_n(x)$ n'est pas absolument convergente. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n ne converge pas absolument sur $]0,+\infty[$ (mais converge simplement sur $]0,+\infty[$).*

Exemple 2.2.4. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}$. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}\right| = \dfrac{1}{(n+x)^2}$. Comme $\dfrac{1}{(n+x)^2}$ est équivalente à $\dfrac{1}{n^2} > 0$ quand n tend vers $+\infty$ et que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général f_n converge absolument sur $]0,+\infty[$ et en particulier converge simplement sur $]0,+\infty[$.*

c) Convergence uniforme d'une série de fonction

Définition 2.2.1. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers la fonction f surD si et seulement si la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D.*

Théorème 2.2.2. *Si la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D, alors la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D*

Preuve :

Supposons que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D vers une certaine fonction f. Il revient au même de dire que la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur D. En particulier, la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur D ou encore la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur D.

Exemple 2.2.5. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. On sait déjà que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ sur $]0,+\infty[$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > 0$, la suite $\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$\forall x > 0,\ |R_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}\Big| \leq \Big|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x}\Big| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ce qui donne,

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||R_n||_\infty \leq \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $||R_n||_\infty = \Big|\Big|f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\Big|\Big|_\infty$. Ceci montre que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction f.

Remarque 2.2.6. • *Pour $x > 0$ fixé, la série numérique de terme général $\Big|\dfrac{(-1)^n}{n+x}\Big| = \dfrac{1}{n+x}$ diverge. Par suite, la série de fonctions de terme général f_n n'est pas absolument convergente sur $]0,+\infty[$. Ceci montre que la convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.*

Théorème 2.2.3. *La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D (vers la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$) si et seulement si la suite des restes à l'ordre n, $(R_n)_n = \Big(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\Big)_n$ est définie à prtir d'un certain rang sur D et converge uniformément sur D vers la fonction nulle.*

d) Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 2.2.3. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

La série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur D si et seulement si toutes les fonctions f_n sont bornées sur D et la série numérique de terme général $||f_n||_\infty$ converge.

Exemple 2.2.7. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, posons $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+n)^3}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, +\infty[$,*

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(x+n)^3} \leq \frac{x+n}{(x+n)^3} = \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{(0+n)^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Ceci montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ ||f_n||_\infty \leq \frac{1}{n^2},$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, converge, il en est de même de la série numérique de terme général $||f_n||_\infty$. Ceci montre que la série de fonctions de terme général f_n $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[0, +\infty[$.

Remarque 2.2.8. *Pour démontrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n sur D, on majore $|f_n(x)|$, $x \in D$, par une expression indépendante de x, dépendant de n et terme général d'une série numérique convergente.*

Théorème 2.2.4. *Si la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur D, alors la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur D.*

Preuve : Par hypothèse, chaque fonction f_n est bornée sur D et $\sum_{n=0}^{+\infty} ||f_n||_\infty < +\infty$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout x de D,

$$|R_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_n||_\infty,$$

$\sum_{n+1}^{+\infty} ||f_n||_\infty$ est le reste à l'ordre n d'une série numérique convergente et on sait que $\sum_{n+1}^{+\infty} ||f_n||_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en est de même de $||R_n||_\infty$. On a montré que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers la fonction f sur D.

Remarque 2.2.9. *La réciproque est fausse. Pour s'en convaincre, reprenons l'exemple de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, $n \in \mathbb{N}$. On sait que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $]0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ Pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{x+n}$. Si $n = 0$, pour tout $x > 0$, $|f_0(x)| = \dfrac{1}{x}$ et donc $||f_0||_\infty = +\infty$. Ceci montre déjà que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$ n'est pas normalement convergente sur $]0, +\infty[$ bien qu'uniformément convergente sur $]0, +\infty[$. On peut noter que pour $n > 1$,*

$||f_n||_\infty \geq |f_n(x)| = \dfrac{1}{x+n}$ *pour tout* $x > 0$ *et donc* $||f_n||_\infty \geq \dfrac{1}{n}$ *(obtenu en faisant tendre* x *vers* 0*). Puisque la série numérique de terme général* $\dfrac{1}{n}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, diverge, on en déduit que la série de fonctions de terme général* f_n*,* $n \geq 1$*, n'est pas davantage normalement convergente sur* $]0, +\infty[$ *bien qu'uniformément convergente sur* $]0, +\infty[$*.*

2.3 Les grands théorèmes

2.3.1 Le théorème d'interversion des limites pour les séries de fonctions

Théorème 2.3.1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur une partie non vide* D *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Soit* f *une fonction définie sur* D *à valeurs dans* $\mathbb{K}$*. Soit* a *un réel adhérent à* D*.*
On suppose que :
• *La série de fonctions de terme général* f_n $n \in \mathbb{N}$ *converge uniformément sur* D *vers la fonction* f*.*
• *Chaque fonction* f_n *a une limite* $l_n \in \mathbb{K}$ *quand* x *tend vers* a*.*
Alors,
• *La série numérique de terme général* l_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, converge dans* $\mathbb{K}$*,*
• *La fonction* f *a une limite* $l \in \mathbb{K}$ *quand* x *tend vers* a*,*
• $l = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} l_n$ *ou encore, plus explicitement,*

$$\lim_{x\mapsto a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\mapsto a} f_n(x)\right)$$

Preuve :
La suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D et chaque fonction f_n a une limite dans $\mathbb{K}$ à savoir $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} l_k$ quand x tend vers a. D'aprés le théorème d'interversion des limites pour les suites de fonctions, on en déduit que f a une limite l dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou encore que la série de terme général

$l_n, n \in \mathbb{N}$, converge et que
$$l = \lim_{n \mapsto +\infty} L_n = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n.$$

Remarque 2.3.1. *Comme pour les suites de fonctions, ce théorème est encore valable si* $a = \pm\infty$.

Exemple 2.3.2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x > 0$, *posons* $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. *On a vu que la série de fonctions de terme général* f_n, $n \in \mathbb{N}$ *converge uniformément sur* $]0, +\infty[$ *vers la fonction* $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+k}$. *De plus, chaque fonction* f_n *a une limite réelle quand* x *tend vers* $+\infty$ *à savoir* 0. *D'aprés le théorème d'interversion des limites,* $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \right) = 0$ *De même, la série de fonctions de terme général* f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, *converge uniformément sur* $]0, +\infty[$ *vers la fonction* $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$. $k \geq 1$, . *De plus* $\displaystyle\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{(-1)^k}{k}$ *on en déduit que* $\displaystyle\lim_{x \mapsto 0^+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$. *Puisque d'autre part, pour tout* $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, *on en déduit que* $\displaystyle\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = +\infty$.

2.3.2 Continuité de la somme d'une série de fonctions

Théorème 2.3.2. *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur une partie non vide* D *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* f *une fonction définie sur* D *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
On suppose que :
- *La série de fonctions de terme général* f_n, $n \in \mathbb{N}$ *converge uniformément sur* D *vers la fonction* f,
- *Chaque fonction* f_n *est continue sur* D.

Alors, la fonction f *est continue sur* D.

Preuve :
On applique le théorème correspondant pour les suites de fonctions à la suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 2.3.3. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x > 0$, *on pose* $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

• *Pour chaque* $x > 0$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir* $\dfrac{1}{n^x}$, *tend vers* 0 *en décroissant.*

Donc, pour chaque $x > 0$, *la série numérique de terme général* $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ *converge ou encore la série de fonctions de terme général* f_n *converge simplement sur* $]0, +\infty[$ *vers la fonction* $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$.

• *La série de fonctions de terme général* f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, *ne converge pas uniformément vers* f *sur* $]0, +\infty[$. *En effet, dans le cas contraire, puisque chaque fonction* f_n *a une limite réelle quand* x *tend vers* 0, *à savoir* $l_n = (-1)^{n-1}$, *le théorème d'interversion des limites affirme que la série numérique de terme général* l_n *converge ce qui n'est pas.*

• *Soit* $a > 0$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour tout* x *de* $[a, +\infty[$, *d'après une majoration classique du reste à l'ordre* n *d'une série alternée,*

$$|R_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \Big| \leq \Big| \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \Big| = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ||R_n||_\infty \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Puisque $a > 0$, *on en déduit que* $||R_n||_\infty$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$ *et donc que la série de fonctions de terme général* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $[a, +\infty[$.

• *Soit* $a > 0$. *Chaque fonction* f_n *est continue sur* $[a, +\infty[$ *et la série de fonctions de terme général* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $[a, +\infty[$. *Donc* f *est continue sur* $[a, +\infty[$. *Ceci étant vrai pour tout* $a > 0$, f *est continue sur* $]0, +\infty[$.

2.3.3 Le théorème de dérivation terme à terme

Théorème 2.3.3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur un partie non vide* D *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* f *une fonction définie sur* D *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.

On suppose que :

• *La série de fonctions de terme général* f_n, $n \in \mathbb{N}$ *converge simplement sur* D *vers la fonction* f, *chaque fonction* f_n *est dérivable sur* D,

• *La série de fonctions de terme général* f'_n, $n \in \mathbb{N}$ *converge uniformément sur* D *vers une certaine fonction* g.

Alors, la fonction f est dérivable sur D et $f^{'} = g$. Plus explicitement, la dérivée de f s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)^{'} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{'}$$

Preuve : On applique le théorème correspondant pour les suites de fonctions à la suite de fonctions $\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2.3.4. *Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. La série de fonctions de terme général $f_n, n \geq 1$, converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$.*
Chaque fonction f_n, $n \geq 1$, est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $|f_n^{'}(x)| = \dfrac{1}{(x+n)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ et donc $||f_n^{'}(x)||_\infty \leq \dfrac{1}{n^2}$. On en déduit que la série de fonctions de terme général $f_n^{'}, n \geq 1$, converge normalement et en particulier uniformément sur $]0, +\infty[$. En résumé,

- *La série de fonctions de terme général $f_n, n \geq 1$, converge simplement vers f sur $]0, +\infty[$,*
- *Chaque fonction f_n $n \geq 1$, est dérivable sur $]0, +\infty[$,*
- *La série de fonctions de terme général $f_n^{'}$, $n \geq 1$, converge uniformément sur $]0, +\infty[$.*

D'aprés le théorème de dérivation terme à terme, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme ou encore

$$\forall x \in]0, +\infty[, f^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Exemple 2.3.5. *Pour $n \geq 0$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$. Pour tout $x > 0$, et donc g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,*

$$g^{'}(x) = -\frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

On peut noter que la série de fonctions de terme général $f_n^{'}$, $n \in \mathbb{N}$ n'est pas normalement convergente sur $]0, +\infty[$ car $||f_0||_\infty = +\infty$. On peut aussi noter que néanmoins la dérivée de g s'obtient par dérivation terme à terme.

Corollaire 2.3.1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur une partie non vide* D *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* f *une fonction définie sur* D *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
On suppose que :
• *La série de fonctions de terme général* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *converge simplement sur* D *vers la fonction* f,
• *Chaque fonction* f_n *est de classe* $\mathbb{C}^1$ *sur* D,
• *La série de fonctions de terme général* f'_n, $n \in \mathbb{N}$ *converge uniformément sur* D *vers une certaine fonction* g.
Alors, la fonction f *est de classe* $\mathbb{C}^1$ *sur* D *et* $f' = g$. *Plus explicitement, la dérivée de* f *s'obtient par dérivation terme à terme :*

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

Corollaire 2.3.2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur une partie non vide* D *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *Soit* f *une fonction définie sur* D *à valeurs dans* $\mathbb{K}$.
On suppose que :
• *La série de fonctions de terme général* f_n, $n \in \mathbb{N}$ *converge simplement sur* D *vers la fonction* f,
• *Chaque fonction* f_n *est de classe* $\mathbb{C}^p$,$p \in \mathbb{N}^*$, *(resp.* $\mathbb{C}^\infty$*) sur* D,
• *Pour tout* $k \in [1,p]$ *(resp.* $k \in \mathbb{N}^*$*), la série de fonctions de terme général* $f_n^{(k)}$, $n \in \mathbb{N}$ *converge uniformément sur* D *vers une certaine fonction* g_k.
Alors, la fonction f *est de classe* $\mathbb{C}^p(resp.\mathbb{C}^\infty)$ *sur* D *et* $\forall k \in [1,p](resp.\forall k \in \mathbb{N}^*), f^{(k)} = g_k$.
Plus explicitement, les dérivées successives de f *s'obtient par dérivation terme à terme :*

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

2.3.4 Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment

Théorème 2.3.4. ***[le théorème d'intégration terme à terme sur un segment]***
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur un segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *Soit* f *une fonction définie sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *On suppose que :*
• *la série de fonctions de terme général* f_n, $n \in \mathbb{N}$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers la fonction* f,

• *Chaque fonction f_n est continue sur $[a, b]$.*

Alors,

• *La fonction f est continue sur $[a, b]$,*

• *La série numérique de terme général $\int_a^b f_n(x)\, dx, n \in \mathbb{N}$ converge,*

• $\int_a^b f(x)\, dx$ *s'obtient par intégration terme à terme :*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \Big)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Preuve :

On applique le théorème correspondant pour les suites de fonctions à la suite de fonctions $\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k \Big)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 2.3.6. *On sait que pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{1}{2}]$, posons $f_n(x) = x^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $||f_n||_\infty = \frac{1}{2^n}$ une série numérique convergente. Donc, la série de fonctions de terme général $f_n, n \in \mathbb{N}$ converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $[0, \frac{1}{2}]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},$$

avec

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(\frac{1}{2}) = \ln(2).$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2)$$

.

Chapitre 3

Séries entières

On souhaite étudier les fonctions de la forme

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Ce sont des sommes de séries de fonctions, on étudiera le problème de convergence, on observera leur régularité et on verra qu'un grand nombre de fonctions usuelles peuvent s'écrire ainsi.

3.1 Définitions et Rayon de convergence

3.1.1 Définitions et généralités

Définition 3.1.1. *On appelle série entière d'une variable complexe (resp. d'une variable réelle) une série de fonctions* $\sum u_n$ *de terme général* $u_n(z) = a_n z^n$, $(z, a_n) \in \mathbb{C}^2$ *(resp.* $u_n(x) = a_n x^n$; $(x, a_n) \in \mathbb{R}^2$*. Les nombres complexes (resp. nombres réels)* a_n *sont appelés : coefficients de la série entière.*

Exemple 3.1.1.
1) $\sum z^n$, $a_n = 1$, 2) $\sum \frac{1}{n} z^n$, $a_n = \frac{1}{n}$ 3) $\sum \frac{1}{n!} z^n$, $a_n = \frac{1}{n!}$
4) $\sum (-1)^n \frac{z^n}{n}$, $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 5) $\sum \frac{1}{n+1} z^{2n+1}$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \frac{1}{n+1}$.

3.1.2 Opérations sur les séries entières.

a) Somme de deux séries entières.

Définition 3.1.2. *La somme de deux séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$, *est la série notée :*

$$\sum a_n z^n + \sum b_n z^n$$

et définie par :

$$\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n.$$

b) Produit d'une série entière par un scalaire

Définition 3.1.3. *Le produit d'une série entière* $\sum a_n z^n$ *par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est la série notèe* $\sum a_n z^n$, *et définie par :*

$$\lambda(\sum a_n z^n) = \sum (\lambda a_n) z^n.$$

c) Produit de deux séries entières

Définition 3.1.4. *Le produit de deux séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$, *est la série entière notée :*

$$(\sum a_n z^n).(\sum b_n z^n),$$

et définie par :

$$(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = \sum c_n z^n,$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

3.1.3 Convergence et rayon de convergence.

Étude de quelques séries classiques pour déduire les définitions.

1. $\sum z^n$, $a_n = 1$. On a $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ converge vers $\frac{1}{1 - z}$ si, et seulement si, $|z| < 1$.

2. $\sum \frac{1}{n} z^n$, $a_n = \frac{1}{n}$: On a : $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{n}{n+1}|z| \mapsto |z|$; donc converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. L'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ est appelé disque de convergence.
3. $\sum \frac{1}{n!} z^n$, $a^n = \frac{1}{n!}$. On a : $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{1}{n}|z| \mapsto 0$ pour tout z ; donc converge pour tout z, ici $D = \mathbb{C}$.
4. $\sum (-1)^n \frac{z^n}{n}$, $a^n = (-1)^n \frac{1}{n}$. On a : $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{n}{n+1}|z| \mapsto |z|$ donc converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.
5. $\sum n! z^n$, $a^n = n!$. On a : $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1)|z| \mapsto +\infty$ quand $n \to +\infty$ et $z \neq 0$, donc pour $z \neq 0$ diverge et pour $z = 0$ converge et dans ce cas $D = \{0\}$.

Définition 3.1.5. *Soit une série entière d'une variable complexe ou réelle.*
On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ *; le réel (bien défini) de* $\bar{\mathbb{R}}$ *:*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ ; \sum |a_n| r^n \textit{converge}\}.$$

L'ensemble $D(0; R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ $(]-R, R[)$ *est appelé disque ouvert (resp. intervalle ouvert) de convergence.*

3.1.4 Techniques de calcul du rayon de convergence.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière :

Proposition 3.1.2 (Formule d'Hadamard 1.)**.**
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, *est le réel* R *défini par :*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \mapsto +\infty} \left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}.$$

Remarque 3.1.3. *On peut utiliser aussi le critère de D'Alembert. Si la suite* $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ *admet une limite* l *alors d'aprèes le critère de D'Alembert on a :*

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \mapsto +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = l|z|$$

donc converge si $l|z| < 1$ *et diverge si* $l|z| > 1$ *ou converge si* $|z| < \frac{1}{l}$ *et diverge si* $|z| > \frac{1}{l}$.
Le rayon de convergence est donc donné par :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n \mapsto +\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Exemple 3.1.4. *Soit* $\sum \frac{1}{n} z^n$ *une série entière : On a :* $\lim_{n \mapsto +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \mapsto +\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$, *donc* $R = 1$.

Remarque 3.1.5.

- *La série de fonctions* $\sum a_n z^{2n}$ *peut se comprendre comme une série entière. En effet*

$$\sum a_n z^{2n} = \sum b_n z^n,$$

avec

$$b_{2p} = a_p, \quad \text{et } b_{2p+1} = 0.$$

Le rayon de convergence d'une telle série peut souvent se déterminer par la démarche précédente.

Exemple 3.1.6. *Rayon de convergence de*

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}.$$

Soit $z \neq 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} = \sum u_n(z)$ *avec* $u_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} \neq 0$.

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{n+1}{n+2} |z|^2 \to |z|^2, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Si $|z| < 1$, *alors* $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}$ *converge.*
Si $|z| > 1$, *alors* $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}$ *diverge. On en déduit* $R = 1$.
Rayon de convergence de

$$\sum \binom{n}{2n} z^{3n},$$

posons $u_n(z) = \binom{n}{2n} z^{3n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{3n}$, *pour* $z \neq 0$,

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left| \frac{z^{3n+3}}{z^{3n}} \right| = 2\frac{2n+1}{n+1} |z|^3 \to 4|z|^3, \text{ quand } n \to +\infty$$

on en déduit $R = \sqrt[3]{1/4}$.

Remarque 3.1.7.

- *Si la suite* $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ *ou bien la suite* $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_n$ *n'admettent pas de limites, par exemple si on considère la série* $\sum z^{n!}$, *alors :*

$$a_p = \begin{cases} 0 \text{ si } p \text{ n'est pas un factorielle d'un entier} \\ 1 \quad \text{si } p = n!. \end{cases}$$

La suite $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_n$ *n'a pas de limite, on cherche la plus grande valeur d'adhérence qui est donnée par :*
$\limsup_{n\mapsto+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\mapsto+\infty} \sup_{p\geq n} |a_p|^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\mapsto+\infty} 1^{\frac{1}{n!}} = 1$, *et* $R = \dfrac{1}{\lim_{n\mapsto+\infty} \sup_{p\geq n} |a_p|^{\frac{1}{p}}} = 1.$

Proposition 3.1.8 (Formule d'Hadamard 2.).
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ *est le rèel* R *défini par :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\mapsto+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

a) Comparaison, Somme et Produit de Rayon de convergence.

Soient $A = \sum a_n z^n$ et $B = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_A et R_B respectivement.

Proposition 3.1.9.

1. *Si pour tout* n *à partir d'un certain rang, on a* $|a_n| \leq |b_n|$, *alors* $R_A \geq R_B$.
2. *Si* $a_n =_{n\to+\infty} O(b_n)$, *alors* $R_A \geq R_B$.
3. *Si* $a_n =_{n\to+\infty} o(b_n)$, *alors* $R_A \geq R_B$.
4. $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$, *alors* $R_A = R_B$.

Exercice 3.1.10. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(e^1 - (1+1/n)^n\Big)x^n, \quad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ \text{où } a_n = \int_0^1 \Big(\frac{1+t^2}{2}\Big)^n dt.$$

Proposition 3.1.11.
Si $A = \sum a_n z^n$ *et* $B = \sum b_n z^n$ *sont convergentes alors la série somme est convergente et son rayon de convergence* R_{A+B} *vérifie :* $R_{A+B} \geq \min(R_A, R_B)$ *et* $R_{A+B} = \min(R_A, R_B)$ *si* $R_A \neq R_B$.

Proposition 3.1.12.
Si $A = \sum a_n z^n$ *et* $B = \sum b_n z^n$ *sont absolument convergentes alors la série produit est convergente et son rayon de convergence* R_{AB} *vérifie :* $R_{AB} \geq \min(R_A, R_B)$.

Remarque 3.1.13.

1. *Si on suppose seulement que les deux séries convergent, on n'est pas assuré que la série produit converge. Ainsi si on considère la série de terme général* $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et qu'on forme son produit avec elle-même, on obtient pour terme général de la série produit :* $c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. *Or* $k(n-k) \leq (n-1)^2$*, si bien que* $|c_n| \geq 1$*, la série est donc grossièrement divergente.*
2. *Soient les séries* $A = \sum z^n$ *et* $B = 1 - z = \sum b_n z^n$ *et* $b_0 = 1; b_1 = -1$*, et* $b_n = 0$*, pour* $n \geq 2$*. On a :* $R_A = 1$ *et* $R_B = +\infty$ *; et* $R_{AB} = +\infty > \min(R_A, R_B)$*.*
3. *Soient les deux séries* $A = \sum(-2^n + 1)z^n$ *et* $B = \sum 2^n z^n$*. On a,* $R_A = \frac{1}{2}$ *et* $R_B = \frac{1}{2}$*. Et on a :* $A + B = \sum z^n$ *et* $R_{A+B} = 1$*.*
4. *Soit la série* $A = \sum z^n$ *de somme* $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$*, avec* $|z| < 1$ *de rayon de convergence* $R_A = 1$*. La série produit définie par :* $A.A = (\sum z^n).(\sum z^n) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum(1+n)z^n$ *a pour rayon de convergence* $R_{AA} = 1$*.*

3.2 Propriétés de la somme d'une série entière.

3.2.1 Continuité de la somme d'une série entière.

Théorème 3.2.1. ***(Théorème d'Abel).***
Soient $\sum a_n z^n$ *une série entière et* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_{n\geq 0}$ *soit bornée. Alors*

1. *Pour tout* $z_1 \in \mathbb{C}$*, tel que* $|z_1| < |z_0|$*, la série* $\sum a_n z_1^n$ *est absolument convergente.*
2. *Pour tout* ρ*, tel que* $0 \leq \rho \leq |z_0|$*, la série de fonction* $\sum a_n z^n$ *est normalement convergente sur le disque fermé* $\bar{D}(0, \rho) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq \rho\}$*.*

Théorème 3.2.2.
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \neq 0$*. Alors l'application* $z \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur le disque ouvert de convergence* $D(0, R)$*. .*

Remarque 3.2.1.
La continuité n'est pas uniforme sur $D(0, R)$*, mais uniforme sur tout disque fermé* $\bar{D}(0, \rho) \subset D(0, R)$*.*

3.2.2 Intégration de la somme d'une série entière.

Théorème 3.2.3.

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière réelle de rayon de convergence* $R \neq 0$. *Alors* $\forall x \in]-R, R[$, *on a*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3.2.3 Dérivation de la somme d'une série

Définition 3.2.1.

Soit la série entière réelle $\sum a_n x^n$ *est convergente et de rayon de convergence* R. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, *la série dérivée d'ordre* p *est définie par :*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

Théorème 3.2.4.

La série dérivée d'ordre p *a le même rayon de convergence que la série initiale* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Théorème 3.2.5.

La somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *d'une série entière réelle* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R *est indéfiniment dérivable (dérivable à tout ordre) et on a :*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

Corollaire 1.

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est la somme d'une série entière d'une variable réelle* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R. *Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

3.3 Développement en séries entières

3.3.1 Définitions et généralités

Définition 3.3.1.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et à valeurs complexes. On dit que f est développable en série entière en z_0 s'il existe une suite $(a_n)_n$ et un voisinage U de z_0 tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ soit convergente sur U et :

$$\forall z \in U, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Si f est une fonction numérique à valeurs réelles on a :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} \text{ et } a_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(0).$$

Définition 3.3.2.

On dit que f est analytique complexe au point z_0 (resp. sur un domaine D) si elle est développable en série entière en z_0 (resp. en chaque point du domaine D).

Définition 3.3.3 (Fonction holomorphe)**.**

Soit f une fonction définie sur un domaine Ddu plan $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes.On dit que f est holomorphe au point $z_0 \in D$ (resp. holomorphe dans D), si : $\lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, existe qu'on note $f^{'}(z_0)$; et on dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 (resp. holomorphe en chaque point de D).

Remarque 3.3.1.

Si on pose $z = x+iy$ et $f(z) = f(x+iy) = P(x,y)+iQ(x,y)$, alors f est holomorphe si est seulement $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Remarque 3.3.2.

On définit de manière analogue la notion de fonction analytique réelle pour les fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Mais il y a une différence. En effet : Une fonction *analytique complexe est $\mathbb{C}$-dérivable donc holomorphe et réciproquement. Une fonction analytique réelle est indéfiniment dérivable, mais une fonction réelle n'est pas nécessairement analytique bien qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Exemple 3.3.3.
$f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$, *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$, *on a* $f^n(0) = 0$ *mais* $f \neq 0$.

3.3.2 Développements obtenus par la formule de Mac-Laurin.

Définition 3.3.4.
Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un voisinage V de 0.
La formule de Mac-Laurin d'ordre n s'écrit :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x), \ \text{avec } 0 < \theta < 1.$$

Théorème 3.3.1.
Pour que la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *converge et ait pour somme $f(x)$, il faut et il suffit que*

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = 0,$$

pour tout $x \in V$.

Théorème 3.3.2.
Soit f une fonction numérique d'une variable réelle indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$. S'il existe une constante $M > 0$, tels que $\forall x \in]-R, R[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$,
alors f est développable en série entière en 0 sur $]-R, R[$, et on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Preuve Pour $x \in]-R, R[$ on a :

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \right| \leq \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} = \alpha_n,$$

et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = r \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc la série $\sum \alpha_n$ converge et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \alpha_n = 0$.

3.3.3 Fonction exponentielle complexe.

Définition 3.3.5.

On appelle fonction exponentielle complexe la somme de la série $\sum \frac{1}{n!} z^n$ *définie sur* $\mathbb{C}$ *par :*

$$f(z) = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Proposition 3.3.4.

1. La fonction $z \mapsto \exp(z)$ *est continue sur* $\mathbb{C}$.

2. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} : \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z'),\ \exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ *et* $(\exp(z))^n = \exp(nz)$.

3.3.4 Développement en série entière des fonctions usuelles.

- $\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$, par définition de la fonction exponentielle.

Par application de la fonction exponentielle on trouve facilement les développement suivants :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \dfrac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \dfrac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh x = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} x^{2n}$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sinh x = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

e) $\forall |z| < 1,\ \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, c'est la somme de la série géométrique de raison z.

Par intégration de la série géométrique termes à termes et sa somme on obtient :

a) $|x| < 1,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n} x^n$.

b) $|x| < 1,\ \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

c) $|x| < 1,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

3.3.5 Développements obtenus par équation différentielle.

Développement en série entière de la fonction : $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$:

• Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $f_\alpha(x)$ est un polynôme de degré n et tous les coefficients sont nuls à partir du rang $n+1$.

• Si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ on a :

$$f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} f_\alpha(x),$$

ou

$$(1+x)f'_\alpha(x) - \alpha f_\alpha(x) = 0.$$

On suppose $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ donc

$$(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n)x^n = 0.$$

On obtient la relation de récurrence pour tout $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(\alpha-n)(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots(\alpha-1)\alpha}{(n+1)n(n-1)\ldots 3.2.1} a_0 \\ &= \frac{(\alpha-n)(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots(\alpha-1)\alpha}{(n+1)!} a_0, \end{aligned}$$

avec $a_0 = f_\alpha(0) = 1$.

On obtient donc

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots(\alpha-1)\alpha}{(n)!} x^n, \quad \text{et } R = 1.$$

Cas particuliers : Pour tout x tel que $|x| < 1$ on déduit pour quelques valeurs de α

1. $\alpha = -1$, on obtient $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.
2. $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on obtient $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.
3. Par intégration on obtient $\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Chapitre 4

Séries de Fourier

4.1 Fonctions continues par morceaux ou $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Rappelons la notion de discontinuité de première espèce.

Définition 4.1.1.
On dit qu'une fonction f, non définie en un point a, admet une discontinuité de première espèce en un point a si les limites à droite et à gauche de a existent et sont finies. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité). Elles sont respectivement notée $f(a^+)$ et $f(a^-)$.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et une subdivision $c_1 = a < c_2, ..., < c_n = b$ de $[a, b]$.

Définition 4.1.2.
Une fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ si f est continue sur chaque $]c_j, c_{j+1}[$ et admet une discontinuité de première espèce en chaque point c_j, notées $f(c_j^+)$ et $f(c_j^-)$.

Définition 4.1.3.
Une foction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ si f est dérivable sur chaque $]c_j, c_{j+1}[$ et que la dérivée f' admet une limite à droite finie $\lim\limits_{h \mapsto 0^+} \dfrac{f(c_j + h) - f(c_j^+)}{h}$ et à gauche finie $\lim\limits_{h \mapsto 0^-} \dfrac{f(c_j + h) - f(c_j^-)}{h}$ à chaque c_j, notées $f'(c_j^+)$ et $f'(c_j^-)$.

Définition 4.1.4.
Une foction f est $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ si f est k fois dérivable sur chaque $]c_j, c_{j+1}[$ et que chaque fonction $f, f', ..., f^{(k)}$ admet une limite à droite et à gauche à chaque c_j .

Définition 4.1.5. ***(Fonction T-périodique)***
On appelle période d'une fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tout nombre réel T tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t+T) = f(t).$$

On dit que f est périodique si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est T-périodique si T est une période strictement positive.

Proposition 4.1.1. *f, T-périodique, est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour $a \in \mathbb{R}$ f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, a+T]$.*

C'est le type de fonctions qu'on rencontrera dans ce chapitre. La période sera d'ailleurs le plus souvent 2π.

4.2 Séries trigonométriques

4.2.1 Définitions

Définition 4.2.1.
On dit que deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ sont orthogonaux sur $[a,b]$ si

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = 0.$$

Exemple 4.2.1.
Les fonctions f et g définies sur $[-1;1]$ par :

$$f(x) = x \ \text{et}\ g(x) = x^2$$

sont orthogonaux.

Définition 4.2.2.

Un système fini ou infini de fonctions continues $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots (n \in \mathbb{N})$ *sur* $[a, b]$*, est dit orthogonal sur* $[a, b]$ *si, pour tout* $(i, j) \in \mathbb{N}^2$

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} *est le symbole de Kronecker défini par*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j, \\ 1 & si\ i = j. \end{cases}$$

Théorème 4.2.1.

Le système trigonométrique réelle défini par :

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx) \ldots\}$$

orthogonal sur $[-\pi, \pi]$*.*

La démonstration est une conséquence des formules trigonométrique.

4.2.2 Quelques formules trigonométriques

Pour tout $x \neq 0$ modulo 2π on a

$$1 + \exp(i\pi) + \exp(2i\pi) + \cdots + \exp(in\pi) = \frac{1 - \exp(i(n+1)x)}{1 - \exp(ix)} = \exp(in\frac{x}{2})\frac{sin((n+1)\frac{x}{2})}{sin(\frac{x}{2})}$$

1. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
2. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.
3. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
4. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
5. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$.
6. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$.

Le moyen le plus rapide pour retrouver ces formules est d'utiliser les formules d'Euler en analyse complexe.

Définition 4.2.3. *On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de terme général*

$$(*) \begin{cases} u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) & \text{si } n \geq 1, \\ u_0(x) = \dfrac{a_0}{2}, \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.2.2. *Supposons que la série converge et posons*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

Sachant que pour tous $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\cos(n\omega(x + \frac{2k\pi}{\omega})) = \cos(n\omega x + 2kn\pi) = \cos(n\omega x).$$

$$\sin(n\omega(x + \frac{2k\pi}{\omega})) = \sin(n\omega x + 2kn\pi) = \sin(n\omega x).$$

Alors la série $(*)$ *converge en tout point de la forme* $x + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$.
Si la série $(*)$ *converge dans* $\mathbb{R}$, *on aura* $f(x) = f(x + \frac{2k\pi}{\omega})$ *et par suite la fonction* f *est périodique de période* $T = \frac{2k\pi}{\omega}$.
En conclusion, les proprétés suivantes sont équivalentes :
P_1 *: La série trigonométrique* $(*)$ *converge dans* $\mathbb{R}$.
P_2 *: La série trigonométrique* $(*)$ *converge dans* $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$.
P_3 *: La série trigonométrique* $(*)$ *converge dans* $[\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{\omega}]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.2.3.
Si les séries numériques $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont absolument convergentes alors la série trigonométrique* $(*)$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$, *donc absolument et uniformément sur* $\mathbb{R}$, *(C'est évident puisque* $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$*).*

Théorème 4.2.1. ***(Critère d'Abel)***
Soient $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *deux suites numériques. On considère une série dont le terme général s'écrit* $u_n = a_n b_n$, *on pose* $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_n$, *et on suppose vérifiés les propriétés suivantes :*

1. *La suite* $(B_n)_n$ *est bornée.*
2. *la suite* $(a_n)_n$ *est une suite décroissante de nombres positifs telle que* $\lim_{n \mapsto +\infty} a_n = 0$.

Alors, la série de terme général u_n est convergente.

Proposition 4.2.4.
Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique $(*)$ est convergente pour $x \neq \dfrac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve

C'est une application directe du théorème d'Abel. Pour cela il suffit tout simplement de montrer que les sommes suivantes sont majorées indépendamment de n.

$$R_n = \sum_{p=0}^{p=n} \cos(p\omega x) \text{ et } I_n = \sum_{p=0}^{p=n} \sin(p\omega x).$$

On utilise pour cela la somme complexe pour $x \neq \dfrac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$:

$$S_n = R_n + iI_n,$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{p=0}^{n} \cos(p\omega x) + i \sum_{p=0}^{n} \sin(p\omega x) = \sum_{p=0}^{n} \exp(ip\omega x) \\
&= \frac{1 - \exp(i(n+1)\omega x)}{1 - \exp(i\omega x)} = \frac{1 - \Big(\cos((n+1)\omega x) + i\sin((n+1)\omega x)\Big)}{1 - \Big(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)\Big)} \\
&= \frac{1 - \cos((n+1)\omega x) - i\sin((n+1)\omega x)}{1 - \cos(\omega x) - i\sin(\omega x)} = \frac{2\sin^2(\frac{(n+1)}{2}\omega x) - 2i\sin(\frac{(n+1)}{2}\omega x)\cos(\frac{(n+1)}{2}\omega x)}{2\sin^2(\frac{\omega x}{2}) - 2i\sin(\frac{\omega x}{2})\cos(\frac{\omega x}{2})} \\
&= \frac{-2i\sin(\frac{(n+1)}{2}\omega x)\Big(\cos(\frac{(n+1)}{2}\omega x) + i\sin(\frac{(n+1)}{2}\omega x)\Big)}{-2i\sin(\frac{\omega x}{2})\Big(\cos(\frac{\omega x}{2}) + i\sin(\frac{\omega x}{2})\Big)} = \frac{\sin(\frac{(n+1)}{2}\omega x)\Big(\cos(\frac{(n+1)\omega x}{2}) + i\sin(\frac{(n+1)\omega x}{2})\Big)}{\sin(\frac{\omega x}{2})\Big(\cos(\frac{\omega x}{2}) + i\sin(\frac{\omega x}{2})\Big)} \\
&= \frac{\sin(\frac{(n+1)}{2}\omega x)\Big(\cos(\frac{n\omega x}{2}) + i\sin(\frac{n\omega x}{2})\Big)}{\sin(\frac{\omega x}{2})}.
\end{aligned}$$

On obtient,

$$R_n = \frac{\sin(\frac{(n+1)}{2}\omega x)\cos(\frac{n\omega x}{2})}{\sin(\frac{\omega x}{2})}, \quad \text{et } I_n = \frac{\sin(\frac{(n+1)}{2}\omega x)\sin(\frac{n\omega x}{2})}{\sin(\frac{\omega x}{2})},$$

et on aura

$$|R_n| \leq \frac{1}{\sin(\dfrac{\omega x}{2})} \text{ et } |I_n| \leq \frac{1}{\sin(\dfrac{\omega x}{2})}.$$

Les deux sommes étant majorées indépendamment de n. D'où la convergence de la série trigonométrique $(*)$ pour $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4.2.3 Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique $(*)$ et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x).$$

Alors

$$f(x)\cos(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(n\omega x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[a_k \cos(k\omega x)\cos(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\cos(n\omega x)\Big].$$

$$f(x)\sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(n\omega x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[a_k \cos(k\omega x)\sin(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\Big].$$

La convergence uniforme permet d'avoir :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega x)\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega x)\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx.\end{aligned}$$

On montre facilement que :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx = 0.$$

On déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x)\, dx.$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x)\, dx.$$

Ces expressions sont valables même pour n = 0.

Lemme 4.2.1.

Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ et intégrable dans l'intervalle $[0, T]$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\, dt.$$

Remarque 4.2.5.

Moyennant de ce lemme, les coefficients de la série trigonométrique peuvent s'écrire, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x)\, dx = \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x)\, dx.$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x)\, dx = \int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x)\, dx.$$

En particulier si f est 2π-périodique (cas où $\omega = 1$)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

4.3 Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analys harmonique.

4.3.1 Coefficients de de Fourier

On cherche à développer f sous la forme :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \frac{a_0}{2} + \lim_{N \mapsto +\infty} \sum_{n=1}^{N}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

La raison pour laquelle le terme constant est $\frac{a_0}{2}$ et non simplement a_0 est la suivante. Si on utilise les exponentielles complexes, on a :

$$\cos(nx) = \frac{\exp(inx) + \exp(-inx)}{2} \text{ et } \sin(nx) = \frac{\exp(inx) - \exp(-inx)}{2i}.$$

La somme partielle $S_N(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[\frac{a_n - ib_n}{2}\exp(inx) + \frac{a_n + ib_n}{2}\exp(-inx)] \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N} c_n \exp(inx). \end{aligned}$$

avec $c_0 = \frac{a_0}{2}$, et pour $n > 0$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.
Le facteur $\frac{1}{2}$ apparaît dans chaque expression.

Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas complexe

On a $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(ik\omega x)$.

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\exp(-in\omega x)\,dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^{2\pi/\omega} \exp(i\omega x(k-n))\,dx.$$

Or

$$\int_0^{2\pi/\omega} \exp(i\omega x(k-n))\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n. \\ 2\pi/\omega & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Les coefficients sont alors donnés par la relation

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x)\exp({}_in\omega x)\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Définition 4.3.1.

On appelle coefficients de Fourier de f continue par morceaux 2π-périodique, les nombres suivants :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,\ \ si\ n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx,\ \ si\ n > 0.$$

Et

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)\ dx,\ \ si\ n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 4.3.1.

On utilise a_n et b_n pour des fonctions à valeurs réelles $\mathbb{R}$ et c_n pour des fonctions à valeurs complexes $\mathbb{C}$.

Cas particuliers : fonctions paires et fonctions impaires

Si f est développable en série de Fourier alors :

$$1. \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \ dx \\ b_n = 0 \end{cases} \qquad \text{si } f \text{ est paire.}$$

$$2. \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\ \ dx \end{cases} \qquad \text{si } f \text{ est impaire.}$$

Définition 4.3.2.

On appelle série de Fourier associée à la fonction f, continue par morceaux 2π-périodique , la série de terme général :

$$\begin{cases} u_n = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \qquad si\ n \geq 1, \\ u_0 = \dfrac{a_0}{2}. \end{cases}$$

Et on la note

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)].$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.$$

a_n et b_n sont appelés coefficient de Fourier de la fonction f.

Définition 4.3.3.

On appelle série de Fourier associée à la fonction f, continue par morceaux T-périodique , la série de terme général :

$$\begin{cases} u_n(x) = a_n \cos(2\pi \frac{n}{T} x) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} x) & si\ n \geq 1, \\ u_0(x) = \frac{a_0}{2}. \end{cases}$$

et on la note

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi \frac{n}{T} x) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} x)].$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(2\pi \frac{n}{T} x)\, dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(2\pi \frac{n}{T} x)\, dx,$$

et

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(2\pi \frac{n}{T} x)\, dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(2\pi \frac{n}{T} x)\, dx.$$

a_n et b_n sont appelés coefficient de Fourier de la fonction f.

Proposition 4.3.2. *Si on note $c_n(f)$ le coefficient de Fourier de f alors*

1. *$c_n(\alpha f) = \alpha c_n(f)$ et $c_n(f + g) = c_n(f) + c_n(g)$.*
2. *Si f et g sont continues, $f = g$ si et seulement si, $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

4.3.2 Études de quelques exemples.

1. Les coefficients de Fourier de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Sont $a_n = 0$ car f est impaire pour tout n, et

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si n est pair ,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

et la série de Fourier associée à f est :

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

2. Calcul des coefficients de Fourier de la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = |x|$$

On a $b_n = 0$ car f est paire pour tout n. De plus $a_0 = \pi$ et

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}[x\frac{1}{n}\sin(nx)]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin((nx)\,dx. \\
&= \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si n est pair ,} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{si n est impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

et la série de Fourier associée à f est :

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

3. Calcul des coefficients de Fourier de la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par : $f(x) = x^2$. On a $b_n = 0$ car f est paire pour tout n, $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$ et $a_n = (-1)^n\frac{4}{n^2}$ et la série de Fourier associée à f est :

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

4.3.3 Convergence des séries de Fourier

Il est néanmoins naturel dans le cas général de définir les coefficients de Fourier par les formules précédentes, puis de se poser la question de savoir si la série obtenue converge bien vers f. Les choses, malheureusement, ne sont pas toujours aussi simples. Les questions qui se posent donc sont

1. Pour quelles fonctions il y a convergence ?
2. La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
3. En cas de convergence, de quel type de convergence s'agit-t-il ?
(a) Convergence pour la norme $||.||_\infty$?
(b) Convergence simple ? si oui pour quelles valeurs de x ?
(c) Convergence uniforme ? si oui sur quel ensemble ?
4. De plus en cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ? Dans le cas

général, la série de Fourier peut converger ou non, et si elle converge, elle peut converger vers f ou non. On a donc cherché à préciser des hypothèses sur f assurant la convergence vers f. Rappelons la notion de discontinuité de première espèce.

Définition 4.3.4.
Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point a si les limites à droite et à gauche de a existent et sont finies. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité.)

Définition 4.3.5. *On dit qu'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ périodique, continue par morceaux est développable en série de fourier si elle est somme de sa série de fourier.*

4.3.4 Convergence d'une série trigonométrique.

On rappelle qu'une série de trigonométrique est de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x),$$

et en notation exponentielle

$$\sum_{n\geq 1} c_n \exp(in\omega x),$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad \text{et } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

et

$$a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Théorème 4.3.1. *la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes. Dans la somme de la série trigonométrique est $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.*

Preuve :
La preuve est une conséquence directe de l'inégalité $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| < |a_n| + |b_n|$.

Corollaire 4.3.1.
1. Si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|$ convergent, la somme de la série trigonométrique $S(x) =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

2. Si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |na_n|$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n|b_n|$ *convergent, la somme* $S(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *à dérivée continue, et*

$$S^{'}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -na_n \sin(n\omega x) + nb_n \cos(n\omega x).$$

3. Plus généralement, si les série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |n^k a_n|$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^k|b_n|$ *convergent, la somme* S *est de classe* C^k.

4.3.5 Convergence simple.

Théorème 4.3.1. ***(Théorème de Dirichlet).***

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction périodique de période* T *de classe* C^1 *par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *(mais non nécessairement continue). Alors la série de Fourier associée a* f *est convergente sur* $\mathbb{R}$ *pour tout réel* x *et on a :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En particulier en tout point x *où* f *est continue la somme de la série de fourier associée à* f *est* $f(x)$*. De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où* f *est continue.*

Exemple 4.3.3.

Les coefficients de Fourier de la fonction f *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x < \pi, \\ -1 & si\ -\pi < x < 0. \end{cases}$$

sont $a_n = 0$ *car* f *est impaire pour tout* n*, et*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\ dx = \begin{cases} 0 & si\ n\ est\ pair\ , \\ \dfrac{4}{n\pi} & si\ n\ est\ impair. \end{cases}$$

et la série de Fourier associée à f *est :*

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Il y aura convergence simple sans convergence uniforme (terme général en* $\frac{1}{n}$*).*

Remarque 4.3.4.

Si f est discontinue, il est impossible qu'il y ait convergence uniforme vers f (puisque les sommes partielles sont continues et pas f).

Théorème 4.3.2. ***(Théorème de Jordan).***

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. *Il existe $M > 0$, tel que $|f(x)| \leq M$ (i.e bornée).*
2. *On peut partager l'intervalle $[\alpha, \alpha+2\pi]$ en sous-intervalles $[\alpha_1, \alpha_2[$, $[\alpha_2, \alpha_3[$ ...$[\alpha_{n-1}, \alpha_n[$, avec $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_n = \alpha + 2\pi$ tels que les restriction $f_{]\alpha_j, \alpha_{j+1}[}$, $1 \leq j \leq n$, soit monotone et continue.*

Alors la série de Fourier associée a f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

4.3.6 Convergence normale

Théorème 4.3.3.

Concéderons une fonction, f, continue par morceaux, périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et sa série de Fourier

$$\sum a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = \sum c_n \exp(in\omega x).$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Les séries convergent, donc les suites $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ tendent vers zéro.

2. Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les coefficients de f et sa dérivée $f^{'}$ sont reliées par les relations :

$$c_n(f^{'}) = in\omega c_n(f),\ a_n(f^{'}) = in\omega b_n(f),\ b_n(f^{'}) = -in\omega a_n(f).$$

3. Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les séries de termes généraux $(na)_n^2$ et $(nb)_n^2$ convergent.

Preuve

1. Notons $P_n(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega x)$. On a

$$\int_0^T (P_n(f)(t))^2 \, dt = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2.$$

Intéressons-nous à la valeur de $\int_0^T P_n(f)(t)[f(t) - P_n(f)] \, dt$. En développant le premier facteur, $P_n(f)$, dans le produit $P_n(f)(t)[f(t) - P_n(f)(t)]$, on obtient une somme de termes de la forme $a_p(f)\cos(p\omega t)[f(t) - P_n(f)(t)]$, avec $1 \leq p \leq n$.

Le calcul donne $\int_0^T \cos(p\omega t)[f(t) - P_n(f)(t)] \, dt = 0$, ce qui implique

$$\int_0^T P_n(f)(t)[f(t) - P_n(f)(t)] \, dt = 0.$$

Et on en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^T (f(t))^2 \, dt &= \int_0^T [f(t) - P_n(f)(t) + P_n(f)(t)]^2 \, dt \\
&= 2\int_0^T P_n(f)[f(t) - P_n(f)(t)] \, dt + \int_T [f - P_n(f)(t)]^2(t) \, dt + \int_0^T [P_n(f)(t)]^2 \, dt \\
&= \int_0^T [f(t) - P_n(f)(t)]^2 \, dt + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 \geq \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum (a_n)^2$ est convergente, car sa suite des sommes partielles est majorée et à termes positifs.

2. En admettant la validité de la formule d'intégration par parties dans le cas où l'une des fonctions est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{T}\Big(\int_0^T [f(t) - P_n(f)(t)]^2 \, dt + \int_0^T \exp(-in\omega x) \, dx\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(\Big[f(t)\frac{f'(t)\exp(-in\omega x)}{-in\omega x}\Big]_0^T - \int_0^T \frac{\exp(-in\omega x)}{-in\omega x} \, dx\Big) \\
&= \frac{1}{in\omega x}\frac{1}{T}\Big(\int_0^T f'(t)\exp(-in\omega x) \, dx\Big) = \frac{1}{in\omega x}c_n(f').
\end{aligned}$$

3. La propriété 3) est une conséquence immédiate des propriétés 1) et 2). Une conséquence de ce théorème est le théorème intéressant suivant :

Théorème 4.3.4.

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier associée a f est convergente normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction f.

Preuve

Dans ce cas simplifié $T = 2\pi$. Comme $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f^{'})$ on a,

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n}|c_n(f^{'})| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + |c_n(f^{'})|^2).$$

(On utilise l'inégalité ($ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$) Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann, $\alpha = 2 > 1$) et la série $|c_n(f^{'})|^2$ est convergente d'après la première propriété du Théorème (4.3.3) puisque la fonction $f^{'}$ est continue par morceaux. Il en est donc de même de la série de terme général $|c_n(f)|$, ce qui signifie que la série de Fourier $\sum c_n \exp(inx)$ est normalement convergente vers une fonction continue F dont les coefficients sont c_n ceux de f et on a $S = f$.

Exemple 4.3.5.

Les hypothéses du théorème s'appliquent à la fonction $f(x) = |x|$ ou $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. On a donc, pour tout x de $[-\pi, \pi]$:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Et

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Pour $x = 0$, les deux formules donnent respectivement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \; et \; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Pour $x = \pi$ la deuxième donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La convergence de la série

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

est normale, donc uniforme.

4.3.7 Égalité de Parseval et inégalité de Bessel

Théorème 4.3.5 (Égalité de Parseval).

Soit f une fonction continue, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, dont la série de Fourier *associée converge normalement sur $\mathbb{R}$, et a pour somme f, alors on a pour α réel quelconque :*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{\omega}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f^2(x)\,dx=2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2,$$

où

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}\ \ et\ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}, n\in\mathbb{N}.$$

Théorème 4.3.6. ***(Inégalité de Bessel)***
Soit f une fonction réelle de la variable réelle, périodique de période T ($T=\dfrac{2\pi}{\omega}>0$) continues par morceaux et admettant un nombre fini de discontinuités de première espèce développable en série de Fourier, alors on a pour α réel quelconque :

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{\omega}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f^2(x)\,dx.$$

Cette inégalité a de nombreuses conséquences pratiques

Corollaire 4.3.2.
Les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent.

Remarque 4.3.6.
1. Si f est de période 2π, on a :

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f^2(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

2. Si f est paire alors f^2 est paire et donc $\dfrac{a_0^2}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$.

3. Si f impaire alors f^2 est paire et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$.

Exemple 4.3.7. *Soit la fonction définie par :*

$$f(x)=\begin{cases}1 & si\ 0<x<\pi,\\ -1 & si\ -\pi<x<0.\end{cases}$$

La série de Fourier associée à f est

$$S_f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

La formule de Parseval donne

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\ dx = 2.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit d'ailleurs une autre sommation

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 4.3.8. *Soit la fonction $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. La séries de Fourier associée est :*

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

La formule de Parseval donne

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4}.$$

On déduit alors :

$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exemple 4.3.9. *Soit f une fonction périodique de période $T = 2\pi$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in]0, \pi[, \\ -1 & si\ x \in]-\pi, 0[. \end{cases}$$

f étant une fonction impaire donc $a_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\, dx = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & si\ n\ est\ pair\ , \\ \dfrac{4}{n\pi} & si\ n\ est\ impair\ . \end{cases}$$

La série de Fourier associée est

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 & si\ x \in]0, \pi[, \\ 0 & si\ x = 0\ ou\ x = \pi. \end{cases}$$

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$S_f(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

On tire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Si on applique l'égalité de Parseval on aura

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\, dt = 2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

et on obtient,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemple 4.3.10. *Soit $f :]-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$.*

1. Les discontinuités de f sont les points $x_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ et sont de première espèce car $f(\pi^+) = \pi$ et $f(\pi^-) = -\pi$.

2. f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :

$$\lim_{x\mapsto\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1\ et\ \lim_{x\mapsto\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1.$$

f vérifie les conditions de Dirichlet, donc développable en série de Fourier. f est impaire donc $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ce qui donne la série de Fourier associée par :

$$S_f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

En appliquant l'égalité de Parseval, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{\pi^2}{3} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 4.3.11. *Soit $f :]-\pi,\pi] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ définie par $f(x) = |x|$.*

1. On a $|f(x)| \leq \pi$.

2.$f_{[-\pi,0]}$ est décroissante et continue et $f_{[0,\pi]}$ est croissante et continue. En ces points nous avons :

$$\lim_{x\mapsto\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1 \ \text{et} \ \lim_{x\mapsto\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = 1,$$

f vérifie les conditions du théorème de Jordan, donc développable en série de Fourier. De plus f est paire donc :

$$b_n = 0.$$

Et

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair },\\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair }.\end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Puisque f est continue, la convergence est uniforme. Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

et par conséquent

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.