FACULTE DES SCIENCES DE TUNIS

Projet de simulation

Polynome de Lagrange et de Tchebychev

Faculte de science de Tunis

Ouerghi Youssef
Ben Trad Moataz
Dridi Siwar
Louati Imen

24/02/2022

Presentation

Introduction géneral

Même s'ils le font très vite, il n'y a guère qu'une chose que les ordinateurs sachent faire avec des nombres : les ajouter et les multiplier, donc évaluer des fonctions polynômes. Si on doit effectuer des calculs sur une fonction quelconque, il est important de pouvoir l'approcher par des fonctions polynômes. Selon le sens précis que l'on donne à approcher, il existe une grande variété de techniques, et autant de familles de polynômes qui leur sont adaptées. Nous traitons ici une des questions les plus simples : comment construire un polynôme de degré minimal, dont le graphe passe par certains points du plan. C'est le problème de l'interpolation.

Definition

Soient n+1 points distincts x0, x1, ...,xn d'un intervalle fermé borné [a,b] de , et une fonction f définie sur [a,b] à valeurs dans , il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n, tel que P(xi) = f(xi) pour i = 0, 1, ...,n. Ce polynôme est donné par :
P(X)=$\sum_{j=0}^{n} y_j(\prod_{i=0} \frac{(X-a_i)}{(a_i-a_j)})$
i$\neq j$

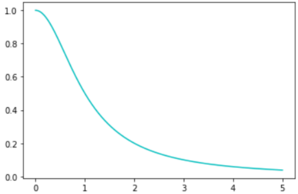
les differentes forme du Polynome

theoreme

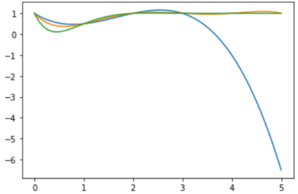
$L_i(x) = (\prod_{i=0} \frac{(X-a_i)}{(a_i-a_j)})$
i$\neq j$ sont appelés des polynômes de Lagrange, sont de degré n et forment une base de l'ensemble des polynômes de degré n de P[X]. Ce script ne fonctionne qu'avec des valeurs rationnelles.

Execution en Python

```
#ex2
#1)
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x) :
    return 1/(1+x*x)

x= np.linspace (0,5,400)
plt.plot (x,f(x),'c')
plt.show ()

#2)
def lagrange(f,a,b,n) :
    x= np.linspace(a,b,n+1)
    x= np.poly1d ([1,0])

    s=0
    for i in range (n+1):
        li = 1
        for j in range (n+1):
            if (i==j) :
                continue
            else:
                li = li*(x-x(j))/(x(i)-x(j))
        s=s+li*f(x[i])
    return s

k = [lagrange (f,0,5,n) for n in [3,5,10]]
for n in range(3):
    print (k[n])

for n in range (3):
    plt.plot(x, np.polyval (k[n], x))
```




```
       3        2
-0.25 x + 1.25 x - 1.5 x + 1
         5          4         3         2
-0.02083 x + 0.2917 x - 1.479 x + 3.208 x - 2.5 x + 1
           10           9            8           7          6
1.378e-06 x  - 7.44e-05 x + 0.001744 x - 0.02326 x + 0.1941 x
         5         4         3         2
 - 1.049 x + 3.659 x - 7.928 x + 9.645 x - 5 x + 1
```



les fonctions utilisees en Python

linspace(start, stop, num=)
plt.plot(x, y):Tracer la courbe représentant y en fonction de x
plt.show():Afficher le graphe
La méthode numpy.polyval (p, x) évalue un polynôme à des valeurs spécifiques.
poly1d: les coefficients polynomiaux sont donnés par ordre décroissant de puissances et 1 signifie un seul inconnu
Par exemple: poly1d (3, 2, 6) $= 3x^2 + 2x + 6$

Definition

En mathématiques, un polynôme de Tchebychev est un terme de l'une des deux suites de polynômes orthogonaux particulières reliées à la formule de Moivre . Les polynômes de Tchebychev sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev.

theoreme

theoreme

Il existe deux suites de polynômes de Tchebychev, l'une nommée polynômes de Tchebychev de première espèce et notée Tn et l'autre nommée polynômes de Tchebychev de seconde espèce et notée Un (dans les deux cas, l'entier naturel n correspond au degré). Ces deux suites peuvent être définies par la relation de récurrence :

$\mathrm{P}_{n+2} = 2X \ P_{n+1} - P_n$

et les deux premiers termes :

$\mathrm{T}_0 = 1 et T_1 = X pour la suite T$

$\mathrm{U}_0 = 1, / U_1 = 2X pour la suite U$

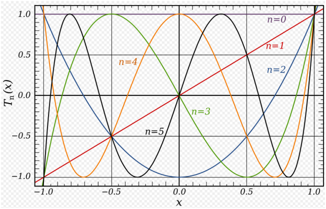
les differentes forme du Polynome

theoreme

Une définition de ces polynômes peut être donnée par les relations trigonométriques : $T_n(x) = cos(n(\theta$ arccosx) $T_n(cos\theta)$=cos(n)θ $U_n(cos(\theta)$= (sin((n+1) θ) / (sin(θ))

Polynome de Tchebychev du 1ere espece

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont les uniques polynômes $(Tn)_n \geq 0 (Tn)_n \geq 0$ définis sur [-1,1][-1,1] par
1- la relation de récurrence indiquée ci-dessus



Courbes représentatives des premiers polynômes de Tchebychev de première espèce sur le domaine -1 $\prec$ x $\prec$ 1
La fonction constante T0 et T1, T2, T3, T4 et T5.

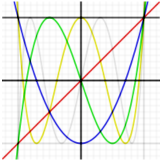
Polynome de Tchebychev du 1ere espece

2-*Les polynômes de Tchebychev forment une famille orthogonale pour le produit scalaire

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0. \end{cases}$$

*TnTn admet nn racines simples qui sont ak,n=cos((2k1)/2n)(θ), k=1,. . . ,n.

Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce sont les uniques polynômes (Un)n≥0(Un)n≥0 définis sur]1,1[par
1- $U_{n+2}(X) = 2XU_{n+1}(X) - Un(X)$



Les premiers polynômes de Tchebychev de première espèce sur le domaine $1 \prec x \prec 1, -1 \prec y \prec 1; lafonctionconstante T0, et T1, T2, T3, T4 et T5.$

Polynome de Tchebychev du 2éme espece

2-Un(cos (θ))=sin((n+1)(θ))sin $[\theta]$.
*Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce forment une famille orthogonale pour le produit scalaire

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

*Un admet n racines simples qui sont
ak,n=cos(k/n)(θ), k=1,. . . ,n.

Ses applications

1ere application

*ils sont particulièrement utiles en analyse numérique pour l'interpolation polynomiale de fonction:.
étant donné un ensemble de points on cherche un polynôme qui passe par tous ces points

Ses applications

2eme application

C'est l'un des intérêts principaux des polynômes de Tchebychev.
Rappelons une expression de l'erreur commise dans l'interpolation de Lagrange.
Si f est une fonction de classe
$C^{n+1} sur[a,b], si x_0 < ... < x_n sont n+1 réels deux à deux distincts de [a,b]$
et si Lf est le polynôme d'interpolation de Lagrange en x0,. . . , xn
alors, pour tout réel x de [a, b], il existe un réel c dans]a, b[tel que
f(x) Lf(x) = N(x)f(n+1)(c)(n + 1)! où N(x) = Ynk=0(x xk), On se place sur [a, b] = [1, 1].

Ses applications

3eme application

*Ils sont notamment utilisés pour le calcul des éphémérides astrononomiques (les éphémérides sont des tables astronomiques par lesquelles on détermine, pour chaque jour, la valeur d'une grandeur caractéristique d'un objet céleste)

Merci pour votre attetion