凸最適化

第2回？

やる範囲

- 2.1章からできるところまで

2.1 凸集合の重要な例

凸集合の定義

集合Cが凸集合であるとは、

$$\forall x_1, x_2 \in C, \theta \in [0,1], \theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \in C$$

を満たす事

凸集合の例

- 空集合
- 要素が一つのみの集合 $|\{x\}| = 1$
- n次元空間全体 R^n

復習

アフィン集合の定義

集合Cがアフィン集合であるとは、

$$\forall x_1, x_2 \in C, \theta \in \mathrm{R}\,, \theta x_1 + (1\ - \theta) x_2 \in C$$

を満たす事

錐の定義

集合Cが錐であるとは、

$$\forall x_1 \in C, \theta \in R_+\,, \theta x_1 \in C$$

を満たす事

特に、 $\forall x_1, x_2 \in C, \theta_1, \theta_2 \in R_+, \theta_1 x_1 + \theta_2\, x_2 \in C$

を満たす時、凸錐という。

復習

部分空間の定義

集合Cが部分空間であるとは、

- $\forall x_1, x_2 \in C, x_1 + x_2 \in C$
- $\forall x_1 \in C, \theta \in R, \theta x_1 \in C$

を満たす事をいう

凸集合の例(続き)

- 直線 $\{x_1 + kx_2 \mid k \in R\}$
  アフィン集合でもある
  特に、$x_1 = 0$を含む時、直線は部分空間、かつ凸錐

- 線分 $\{x_1 + \theta(x_2 - x_1) \mid \theta \in [0,1]\}$
  凸集合ではあるけど、アフィン集合ではない

凸集合の例(続き)

- 半直線 $\{x_1 + kx_2 \mid k \geq 0\}$
  $x_2 \neq 0$ のとき、凸集合だが、アフィン集合ではない
  特に、$x_1 = 0$の時、凸錐

- 部分空間はアフィン集合かつ、凸錐

超平面

$a \in R^n, a \neq 0, b \in R$が与えられた時、
次の様な集合を超平面と呼ぶ。

$$\{x \mid a^t x = b\}$$

また、$a^t x_0 = b$となるx_0を用いて

$$\{x | a^t (x - x_0) = 0\}$$

超平面はxについての線形不等式の解であり、
超平面は、アフィン集合である。

直交補空間

ベクトル $a \in R^n$が与えられた時、

$$\{v \in R^n |\, a^t v = 0\}$$

を直交補空間と定義する。

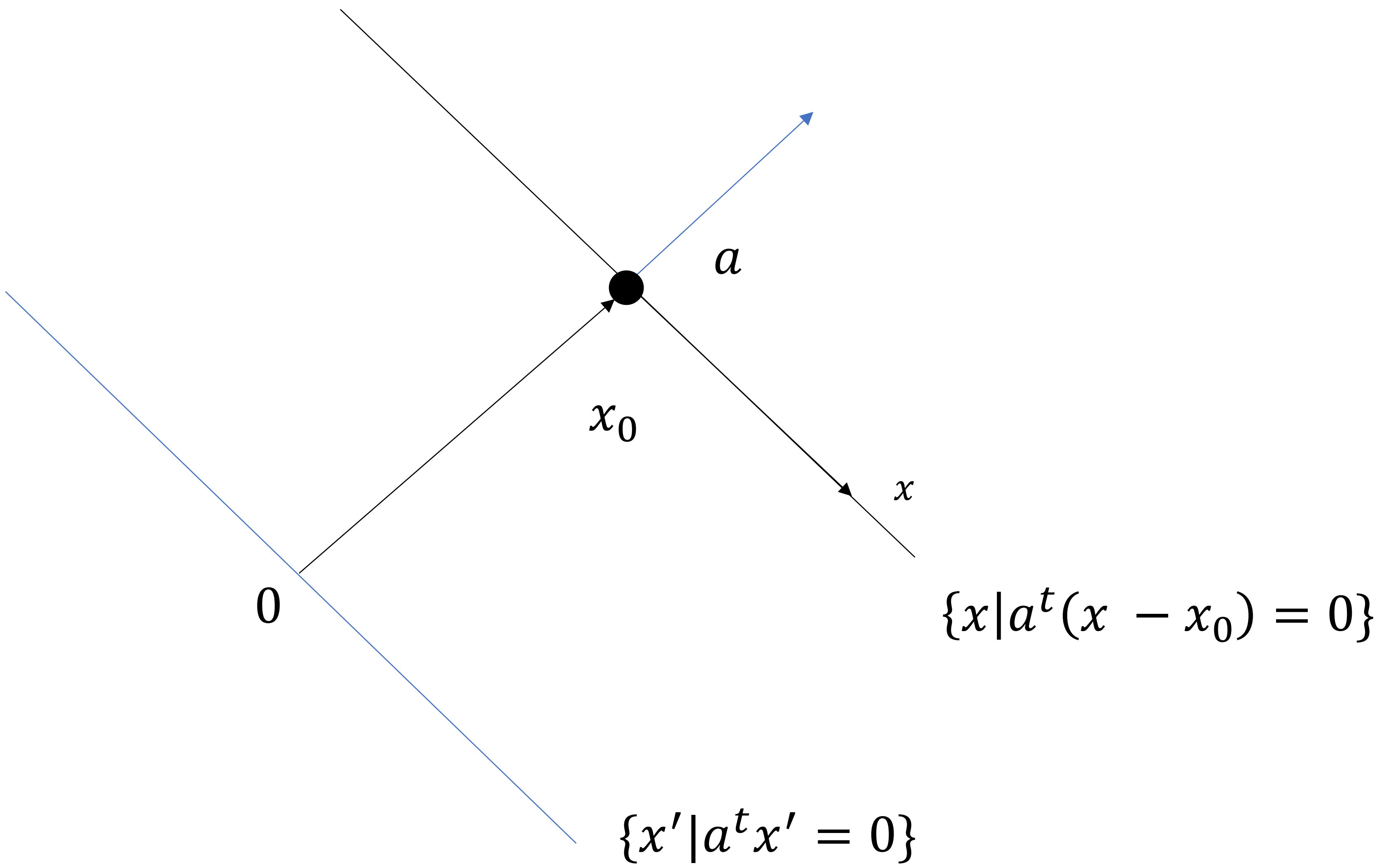
また、これを$a^{\perp}$と表記する。

先ほどの超平面を$\{x | a^t(x\ - x_0) = 0\}$を$a^{\perp}$を用いて

$$\{x | a^t(x\ - x_0) = 0\} =\ a^{\perp} + x_0$$

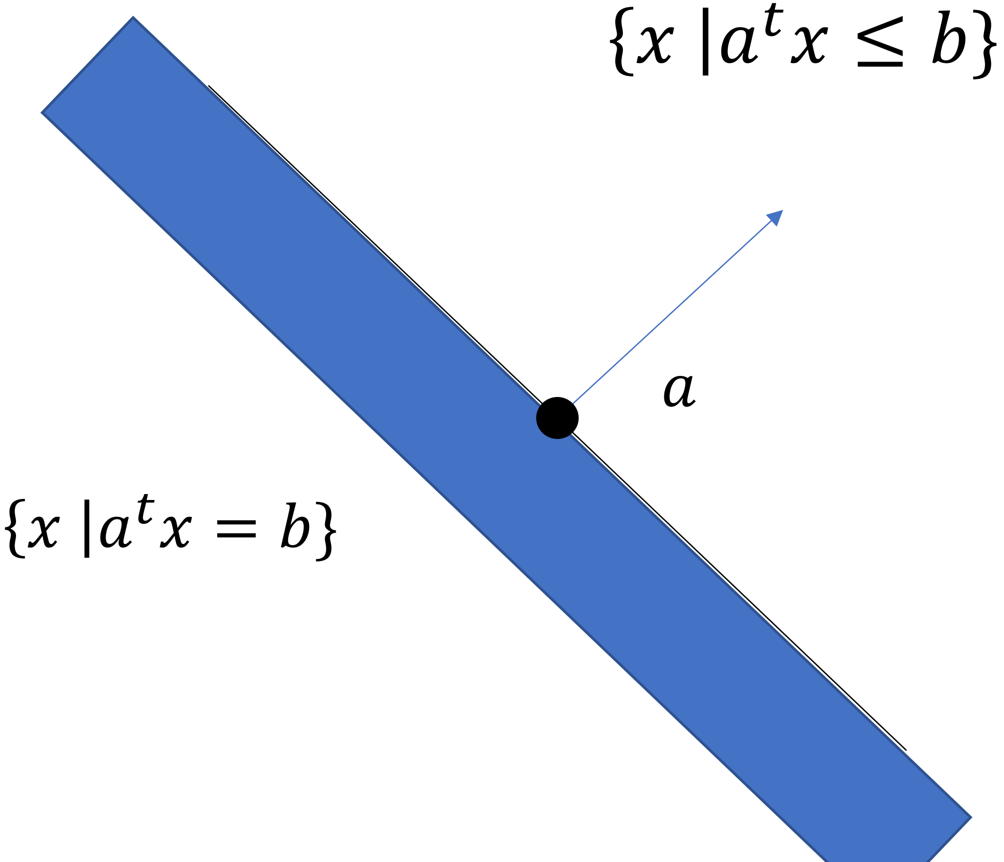
と書く。

$\{x|a^t(x - x_0) = 0\}$を図で示すと



半空間

$\mathrm{a} \in R^n, a \neq o, b \in R$が与えられた時、
次の様な集合を超平面と呼ぶ。



半空間の性質

半空間の内部の点x_2は、垂直ベクトルaとは
直交もしくは、90度以上で交わる。