Chapter 2 凸集合 (convex sets)

mznh

第 2 章

凸集合 (convex sets)

用語は初出の場合は日本語訳 (英語名) で記す。また章や節の題名の場合は常に英語名を添える。

2.1 アフィン集合 (affine set) と凸集合 (convex set)

2.1.1 直線 (line) と線分 (line segment)

$\mathbb{R}^2$ 上の相異なる点 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ で表現される点 y を考える。

$$y = \theta x_1 + (1-\theta) x_2, (\theta \in \mathbb{R})$$

これは点 x_1, x_2 を通る直線を表している。パラメータ $\theta = 0$ のとき $y = x_2$、$\theta = 1$ のとき $y = x_1$ となる。θ が $[0, 1]$ の中を動くとき、それを x_1, x_2 間の線分と呼ぶ。y を、

$$y = x_2 + \theta(x_1 - x_2)$$

と表してみる。これは y は基点 (base point)x_2 とパラメータ θ で調整された (scaled) 方向ベクトル (direction)$x_1 - x2)$ を足したものであると解釈できる。θ を 0 から 1 へ動かすと、それに伴い y は x_2 から x_1 へ移動し、$\theta > 1$ となると y は x_1 を超える。

2.1.2 アフィン集合 (affine set)

C がアフィン集合であるとは、C 上の任意の相異なる点を通る直線が全て C に含まれていることを指す。つまり、

$$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

を満たす。これは「集合 C は任意の 2 点の係数の和が 1 となる線形結合を全て 自身に含む」とも表せる。この考え方を一般化しよう。k 個の点に対して以下で表す点を考える。

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k, \quad \left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \right)$$

これを $x_1, x_2, \cdots, x_k$ のアフィン結合 (affine combination) と呼ぶ。アフィン結合を用いることで、アフィン集合は次のように定義できる。

定義 1. アフィン集合は、それ自身の点からなるアフィン結合を全て含む集合である。

$$C \text{ がアフィン集合} \iff \forall k \in \mathbb{N}, \forall x_1, x_2, \cdots, x_k \in C, \forall \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k, \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \implies \sum_{i=0}^{k} \theta_i x_i \in C$$

次にアフィン集合 C と、その要素 $x_0 \in C$ によって定義される集合 V を考える。

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 | x \in C\}$$

V は部分空間になっている。(つまり和と定数倍で閉じている)

Proof. $v_1, v_2 \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする。$\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$ を示したい。 V の定義より、

$$v_1 + x_0 \in C,\ v_2 + x_0 \in C \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha v_1 + \beta v_2 + x_0 &= \alpha v_1 + \beta v_2 + x_0 + (\alpha + \beta)x_0 - (\alpha + \beta)x_0 \\ &= \alpha(v_1 + x_0) + \beta(v_2 + x_0) + (1 - \alpha - \beta)x_0 \end{aligned}$$

ここで式 (2.1) と $x_0 \in C$, 係数の和が 1 であること $(\alpha + \beta + (1 - \alpha - \beta) = 1)$ から
$\alpha v_1 + \beta v_2 + x_0$ は v_1, v_2, x_0 のアフィン結合であり、C に含まれる。よって V の定義より、$\alpha v_1 + \beta v_2$ は V に含まれる。よって V は部分空間である。 □

また、この結果からアフィン集合 C は部分空間 V とオフセット x_0 によって表せる。

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 | v \in V\}$$

この部分空間 V は x_0 に依存してない。よって x_0 は C から任意に選ぶ事ができる。ここでアフィン集合 C の次元を以下で定義する。

定義 2. アフィン集合 C の次元:= C から任意に選んだオフセット x_0 を引いた部分空間 V の次元

気持ちを切り替えて新たに $C \subseteq \mathbb{R}^n$ をとり、C の点で構成される全てのアフィン結合の集合を考える。これを集合 C のアフィン包 (affine hull) と呼び affC と記す。

定義 3. $\mathrm{affC} = \{\theta_1 \mathrm{x_1} + \theta_2 + \mathrm{x_2} + \cdots + \theta_\mathrm{k} \mathrm{x_k} | \mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \cdots, \mathrm{x_k} \in \mathrm{C}, \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \mathrm{x_i} = 1\}$

C のアフィン包は C を含む最小のアフィン集合になる。

Proof. どうせ背理法でしょ □

2.1.3 アフィン次元 (affine dimension) と相対的内点 (relative interior)

集合 C のアフィン次元を、C のアフィン包の次元と定義する。アフィン次元は凸解析や凸最適化の文脈において、使い勝手が良いのでよく用いられる。例えば $\mathbb{R}^2$ 上の単位円 $\{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ を考える。これのアフィン包は $\mathbb{R}^2$ 全体になり、アフィン次元は 2 になる。しかし、ほとんどの次元の定義においては $\mathbb{R}^2$ 上の単位円の次元は 1 と定義されることが多い。

例 1.

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ のアフィン次元が n より小さいとき、$\mathrm{aff}C \neq \mathbb{R}^n$ となる。ここで集合 C の相対的内点 $\mathrm{relint}C$ を定義しよう。

定義 4. $\mathrm{relint}C = \{x \in C | B(x,r) \cap \mathrm{aff}C \subseteq C, \exists r \geq 0\}$

ここで $B(x,r) = \{y | ||y-x|| \leq r\}$ は x を中心とした半径 r のボールを表している。また、$||\cdot||$ は任意のノルムを用いても相対的内点は定義できる。また、集合 C の相対的境界 (relative boundary) を以下で定義する。

定義 5. $C \in \mathbb{R}^n$の相対的境界 $:= \mathrm{cl}C \setminus relintC$

ここで $\mathrm{cl}C$ は C の閉包 (closure) であり、$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus C)$ で定義される。

アフィン (affine) はラテン語で「類似・関連」を意味する affinis に由来するらしいよ。