Convex optimization

2020/01/14

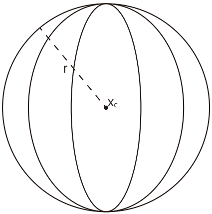
2.2.2 Euclidean balls and ellipsoids

A (Euclidean) ball in $\mathbb{R}^n$

$x_c, x, u \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} B(x_c, r) &= \{x \mid \| x - x_c \|_2 \leq r\} \\ &= \{x \mid (x - x_c)^T (x - x_c) \leq r^2\} \\ &= \{x_c + ru \mid \| u \|_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

- $\| u \|_2 = \sqrt{u^T u}$: Euclidean norm



2.2.2 Euclidean balls and ellipsoids

Euclidean balls is convex set

$\| x_1 - x_c \| \leq r$, $\| x_2 - x_c \| \leq r$, $0 \leq \theta \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} &\| \theta x_1 + (1-\theta) x_2 - x_c \|_2 \\ =&\| \theta (x_1 - x_c) + (1-\theta)(x_2 - x_c) \|_2 \end{aligned}$$

ノルムの定義より (三角不等式)

$$\begin{aligned} &\leq \theta \| x_1 - x_c \|_2 + (1-\theta) \| x_2 - x_c \|_2 \\ &\leq r \end{aligned}$$

よって Euclidean Balls は凸集合である

2.2.2 Euclidean balls and ellipsoids

ノルムの定義 (メモ)

- $\| x \| \leq 0$
- $\| \mathrm{a} x \| = |\mathrm{a}| \, \| x \|$
- $\| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

2.2.2 Euclidean balls and ellipsoids

Euclidean ellipsoids

$P = P^T \succ 0$(対称正定値行列)、$x, x_c \in \mathbb{R}^n$

$$\varepsilon = \{x | (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}$$

x_c は楕円の中心
P は中心 x_c からそれぞれの方向にどれだけ伸びているかを示している
長軸と短軸の長さは P の固有値 λ_i を元に、$\sqrt{\lambda_i}$ で示される

Euclidean ball である $\| x - x_c \|$ に対する線形変換
Affine Mapping(アフィン写像) と呼ぶっぽい?

2.2.2 Euclidean balls and ellipsoids

ex.) balls

$P = r^2 I$ と置くと、

$$\begin{aligned}(x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) &= (x - x_c)^T r^{-2} I (x - x_c) \\ &= r^{-2}(x - x_c)^T (x - x_c) \\ &= \| x - x_c \|_2 \leq r\end{aligned}$$

これは Euclidean balls の定義と一致する。

2.2.2 Euclidean balls and allipsoids

Euclidean ellipsoid is convex

$P = P^T \succ 0,\ P^{-1} = (P^{-1/2})^2$ とすると、$P^{-1/2}$ も P と同様の性質をもつ。Euclidean Ellipsoid の式は以下のようにしてノルム形式に変換できる。

$$
\begin{aligned}
(x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) &= (x - x_c)^T P^{-1/2} P^{-1/2} (x - x_c) \\
&= \{P^{-1/2}(x - x_c)\}^T \{P^{-1/2}(x - x_c)\} \\
&= \| P^{-1/2}(x - x_c) \|_2
\end{aligned}
$$

ノルムは凸であるので Euclidean Ellipsoid もまた凸である

2.2.2 Euclidean balls and ellipsoids

Another common representation

$A, u, x_c \in \mathbb{R}^n$

$$\varepsilon = \{x_c + Au | \parallel u \parallel_2 \leq 1\}$$

ここで A は正方行列かつ非特異行列 (正則) である。
$A = P^{1/2}$ の場合は Euclidean Ellipsoids の定義と一致する
(TODO: 変形を書く)
仮に A が特異行列の場合は変性楕円体と呼ばれる。この時の Affine 次元は $rankA$ と一致し、変性楕円体もまた凸性を持つ。(TODO: 示す)