x_1とx_2を通る直線

$\{\theta x_1 + (1-\theta)x_2 : \theta \in \mathbb{R}\}$。$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 = \theta(x_1 - x_2) + x_2$から、$x_2$を起点として、$x_1 - x_2$を$\theta$倍したものを足せば、その直線上の任意の点を表すことができる

x_1とx_2を結ぶ線分

$\{\theta x_1 + (1-\theta)x_2 : \theta \in [0,1]\}$。直線において、$\theta$の動く範囲を$[0,1]$に制限すれば、$x_1$と$x_2$を結ぶ線分上の点を表すことができる

基点 $\theta(x_1 - x_2) + x_2$におけるx_2

方向 $\theta(x_1 - x_2) + x_2$における$x_1 - x_2$

アフィン空間

集合内の任意の異なる2点を通る直線を全て含む集合

点$x_1, \ldots, x_k$のアフィン結合

任意の$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$となる$\theta_1, \ldots, \theta_k$を用いて、$\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$と表される点。$x_1$と$x_2$の直線上の点$\theta x_1 + (1-\theta)x_2$という式を一般に$k > 2$に対しても拡張した形

アフィン空間の次元

アフィン空間内の任意の点から、同じアフィン空間内のある点x_0を引いた集合は、$x_0 - x_0 = 0$とアフィン空間が任意の空間内の異なる2点間の直線を含んでいることから線形空間となる。この線形空間の次元のことをいう

集合Cのアフィン包$\operatorname{aff} C$

$\{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k : \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, x_1, \ldots, x_k \in C\}$。集合$C$内の任意の点同士のアフィン結合を集めた集合。$C$を包む最小のアフィン集合でもある

中心がx、半径rの球$B(x,r)$

$\{y : \|y - x\| \leq r\}$。距離がr以下となる点を集めた集合。たとえば、3次元空間内では球、2次元空間内では円

集合Cの相対的内部$\operatorname{relint} C$

$\{x \in C : \exists r > 0; B(x,r) \cap \operatorname{aff} C \subseteq C\}$。$C$の内部を表現したもの。アフィン包$\operatorname{aff} C$との共通部分をとっているのは、アフィン空間の次元が、全体の空間よりも低い場合があるためである。例えば、3次元空間内の平面上の円の内部を表すには、球が存在するかだけではいえない。なぜならば、3次元空間内の球はその定義から、平面から必ず飛び出す点をもってしまう。そこで、アフィン包との共通部分をとることで、平面内の点だけで議論することができるようになる

集合Cの相対的内点

Cの相対的内部$\operatorname{relint} C$内の点

閉集合F

集合F内の任意の点列$\{x_n\} \subseteq F$は収束して、その収束先はまたFに属するような集合のこと。球は閉集合となる

集合Cの閉包$\operatorname{cl} C$

Cを包む最小の閉集合

集合Cの相対的境界

$\operatorname{cl} C - \operatorname{relint} C$。集合$C$の境界をさす

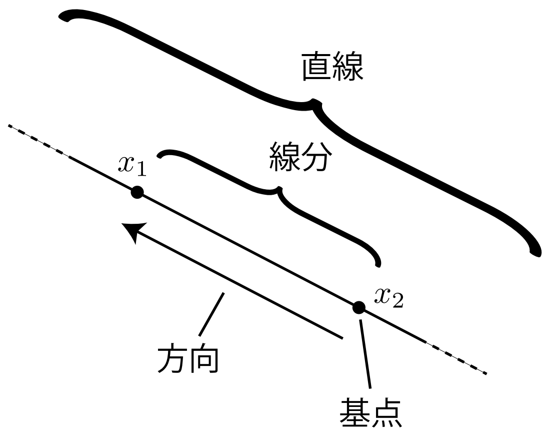

図1　x_1とx_2を 通 る 直 線 は 点 線 部 分 も 続 く。x_1とx_2を結んでいる部分が線分、矢印が方向を、x_2は基点を表す

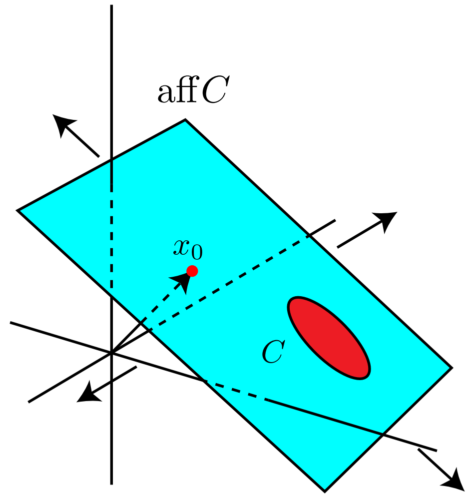

図2　円Cのアフィン包は図の斜めった平面部分となる。アフィン包は無限に縦にも横にも続いている。また、アフィン包はx_0だけ線形空間を移動したものと見ることができる

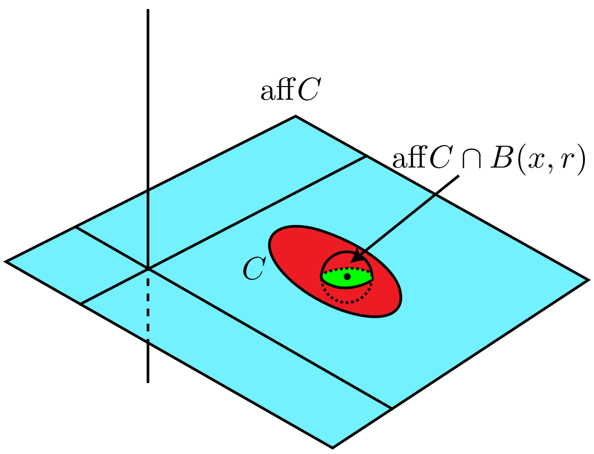

図3　円Cのアフィン包は図の平面部分。アフィン包と円C内の点を中心とした球との共通部分は矢印が指している部分となる。相対的内部は円の境界部分を含まないところで、相対的境界は、円の境界部分となる。

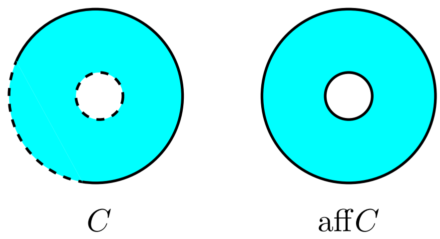

図4　左のドーナツ状の集合の閉包は、右のように点線部分を含めた部分