1　瞬時復号可能な符号

瞬時復号可能な符号とは, 名前の通り, 符号がやってきたらそれを瞬時に復号可能な符号のことをいう．これはつまり, 全てのメッセージを受信してから復号を行うのではなく, 来た時点で遅延なく復号可能な符号のことをいうのである．厳密に言えば, 符号 $\mathcal{C}$ が**瞬時復号可能な符号** (instantaneously decodable code) あるいは**瞬時符号** (instantaneous code) であるとは, 各符号列 $w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_n}$ に対し, $\boldsymbol{t} = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_n} \cdots$ で始まる全ての符号列が $\boldsymbol{s} = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_n} \cdots$ として一意に復号され, その後に続く $\boldsymbol{t}$ のシンボル列に無関係なことをいう．

例 **1.** *2* 元符号 $\mathcal{C}$

$$s_1 \mapsto 0, s_2 \mapsto 10, s_3 \mapsto 11$$

は瞬時復号可能な符号, つまり, メッセージ $\boldsymbol{t}$ を受信しながら復号できる．なぜならば, 0 が来れば s_1 に復号可能であるし, 1 が来れば, 次に来る符号を見てすぐに s_2 なのか s_3 なのかを判定できる．

例 **2.** *2* 元符号 $\mathcal{C}$

$$s_1 \mapsto 0, s_2 \mapsto 01, s_3 \mapsto 11$$

は瞬時復号可能ではない． たとえば, $\boldsymbol{t} = 01111\cdots$ というメッセージが来たとき, $\boldsymbol{t} = 0.11.11.11.\cdots$ なのか $\boldsymbol{t} = 01.11.11.11.\cdots$ なのかはすぐには判定できず, メッセージ長が奇数か偶数かを見なければ判定することはできない．

一般に, 瞬時符号であれば一意復号可能な符号であることは成立するが, 逆は成立しない．例えば, 例 1 で定義する符号は一意復号可能だが, 既に見たように瞬時復号可能ではない．

符号 $\mathcal{C}$ が**語頭符号** (prefix code) であるとは, どの符号語 w_i も他の符号 w_j $(i \neq j)$ の語頭にないことをいう．すなわち

$$\forall w \in T^*, w_j \neq w_i w$$

である．また, $C_1 = \emptyset$ とも言い換えることもできる．この語頭符号と瞬時符号との間には次のような関係がある．

定理 1. 符号 $\mathcal{C}$ が瞬時符号であることと, 語頭符号であることは同値.

Proof. まず, $\mathcal{C}$ が瞬時符号であるとして, 語頭符号となることを示す. $\mathcal{C}$ が語頭符号でないとする. このとき, ある w_j の語頭に w_i という符号列が含まれる. すると,$\boldsymbol{t} = w_i \cdots$ で始まる符号列は $\boldsymbol{s} = s_i \cdots$ にも $\boldsymbol{s} = s_j \cdots$ にも復号化される. よって, 符号 $\mathcal{C}$ は瞬時符号ではないが, $\mathcal{C}$ が瞬時符号であることに矛盾. 以上から, 符号 $\mathcal{C}$ は瞬時符号であれば, 語頭符号となる.

次に, $\mathcal{C}$ が語頭符号であれば, 瞬時符号でもあることを確認する. $\mathcal{C}$ が語頭符号なので, $\boldsymbol{t} = w_i \cdots$ であれば, この符号列は $\boldsymbol{s} = s_i \cdots$ に復号化されなければならない. これは w_i は他の w_j $(i \neq j)$ の語頭とはならないために, 一意に復号化されるためである. よって, どの符号列に対してもこの事実が成立するので, 全てのシンボル列は $\boldsymbol{t}$ の後続のシンボル列とは無関係となる. 以上から, $\mathcal{C}$ は瞬時符号となる. $\square$