计算机图形学第二次试验报告

杨伯宇 18340189

2020 年 10 月 11 日

目录

1 Job1、编译我们提供的代码并运行，将运行的结果截图

结果如下

图 1: 任务一图片

结果解释，只截取了三角形 $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$ 的部分，而原图像在该部分只有一条 $y = 0$ 直线，故在屏幕中央贯穿整个屏幕

2 Job2、构建透视投影矩阵，将编译运行结果截图，并简述一下矩阵是如何构建。

结果如下

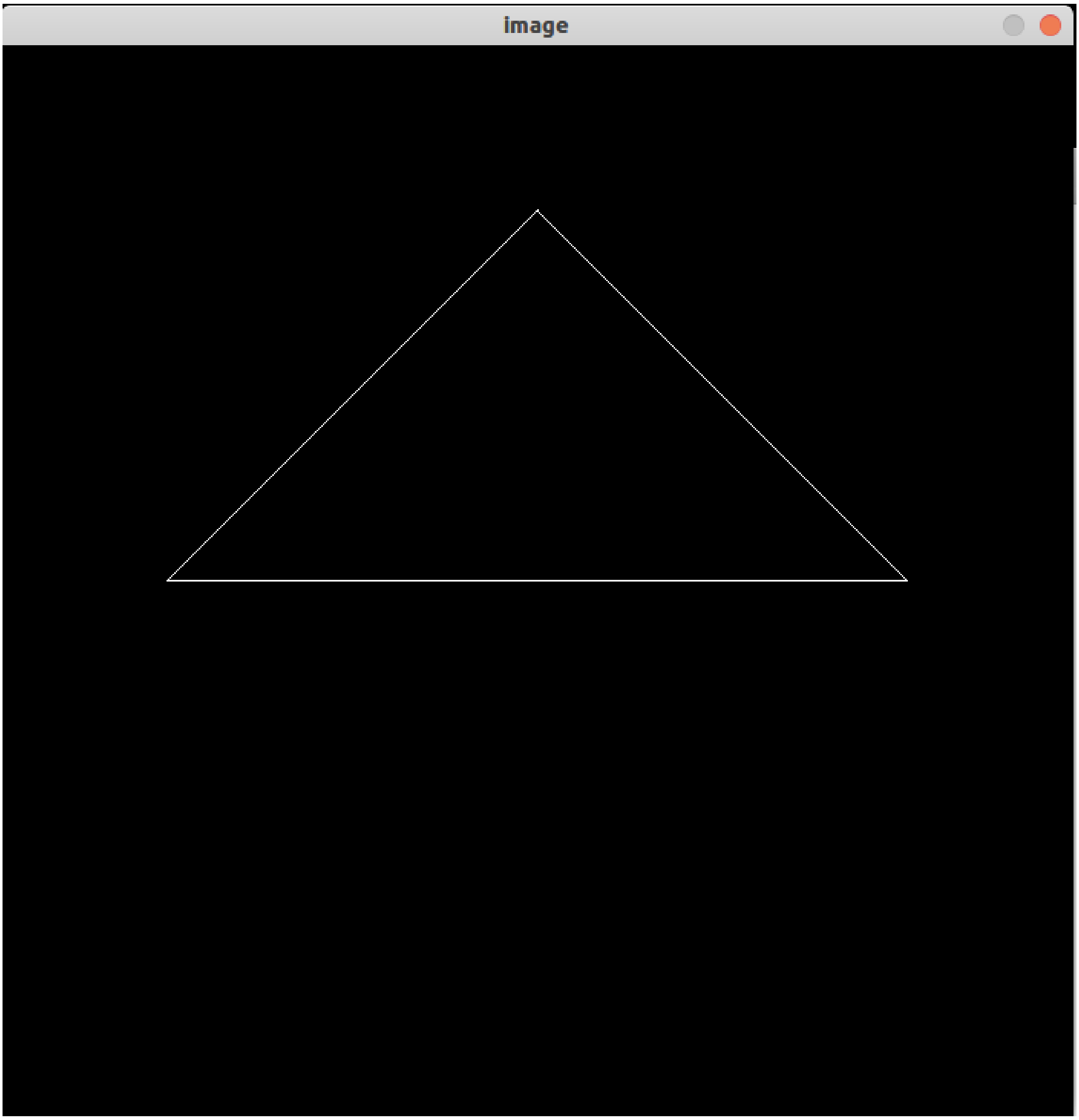


图 2: 任务二图片

现在说明矩阵构建原理。最基本原理如下图所示，就时把视角范围内的点映射到在近 z 平面 $x \in [-1,1], y \in [-1,1]$ 的范围内

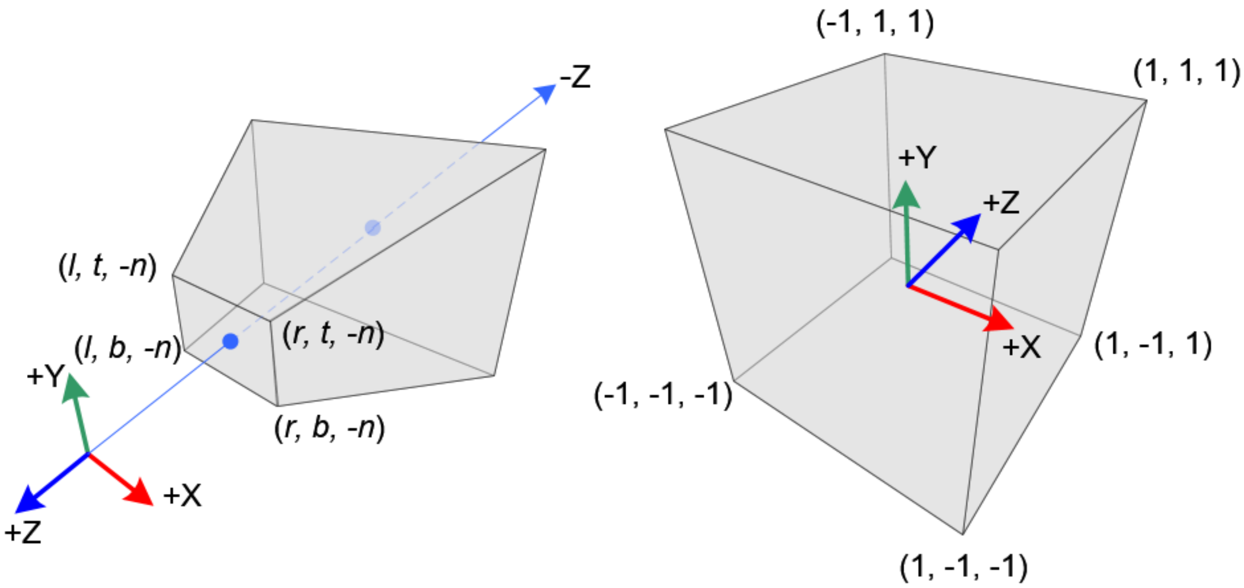
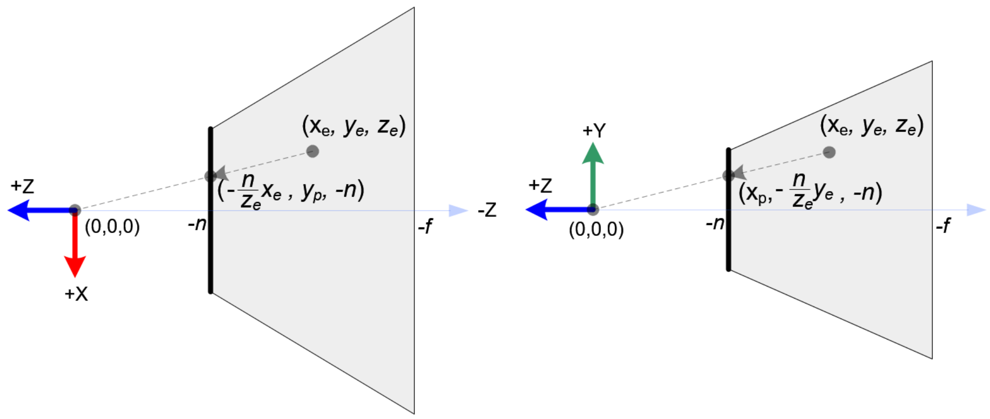


图 3: 原理图

在该图中具体来讲，就是把 x 轴的 $[l, r]$ 映射到 $[-1, 1]$，把 y 轴的 $[b, t]$ 也映射到 $[-1, 1]$，当然，都是 $z = -n$ 处的平面



(a) Top View of Frustum　　(b) Side View of Frustum

图 4: 投影视图

根据相似三角形的原理，我们易知

$$\begin{cases} \dfrac{x_p}{x_e} = \dfrac{-n}{z_e} & \Rightarrow \quad x_p = \dfrac{n \cdot x_e}{-z_e} \\ \dfrac{y_p}{y_e} = \dfrac{-n}{z_e} & \Rightarrow \quad y_p = \dfrac{n \cdot y_e}{-z_e} \end{cases}$$

而 z_p 的值不容易求，所以我们直接求映射到 $[-1, 1]$ 的值，可以发现 $z_e \in [-f, -n]$，对应 $z_c \in [-1, 1]$，故可知

$$\begin{cases} \dfrac{z_e - n}{f - n} = -\dfrac{z_c + 1}{2} \\ z_c = -\dfrac{z_e - n}{f - n} \cdot 2 + 1 \end{cases}$$

而这里传入的 z_e 是正值，所以投影矩阵可写成

$$\begin{vmatrix} \frac{n \cdot x_e}{-z_e \cdot r} \\ \frac{n \cdot y_e}{-z_e \cdot t} \\ -\frac{z_e - n}{f - n} \cdot 2 + 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 0 \end{vmatrix}$$

但是这样发现不是线性组合，所以给左侧矩阵的 w_c 乘 $-z_e$

$$\begin{vmatrix} \frac{n \cdot x_e}{r} \\ \frac{n \cdot y_e}{t} \\ (\frac{z_e - n}{f - n} \cdot 2 - 1) \cdot (-z_e) \\ -z_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 0 \end{vmatrix}$$

但是这样发现仍然不是线性组合不是线性组合。这就很麻烦。只能换一种思路，x，y 的坐标时定死的，但 z 的不是，只要变换完后能辨别出距离远近就可以，或者说，只要有一种从 z_e 到 z_c 的对应函数，并且是单调的，就可以满足这里可能存在的遮挡关系。所以可以想到以下的 z_c 算法，$-z_e \in [1/f, 1/n]$，$z_c \in [-1, 1]$

$$\frac{z_c + 1}{2} = -\frac{1/z_e - 1/f}{1/n - 1/f}$$
$$z_c = -\frac{-2nf - z_e(f + n)}{z_e(f - n)}$$

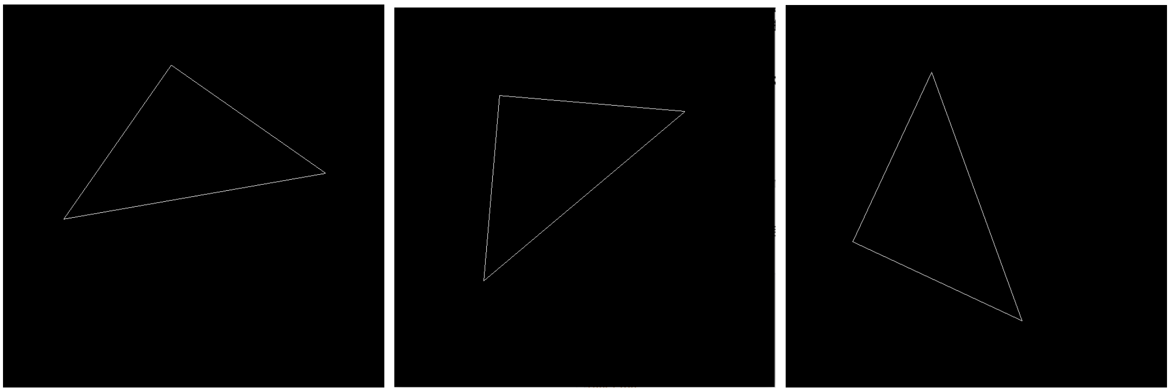
所以矩阵就变成了

$$\begin{vmatrix} \frac{n \cdot x_e}{r} \\ \frac{n \cdot y_e}{t} \\ \frac{-2nf - z_e(f+n)}{(f-n)} \\ -z_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 0 \end{vmatrix}$$

容易解得矩阵为

$$\begin{vmatrix} n/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -2fn(f-n) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

3 Job3、构建旋转变换矩阵，截图三张旋转结果，并简述一下矩阵是如何构建的



(a) one (b) two (c) three

图 5: 投影视图

这个矩阵的构建就很简单了。首先 z 和 w 不变。只需要考虑 x 和 y，假设变换后的坐标为 x',y'，设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,α 为 (x,y) 与 $(1,0)$ 所成的角，θ 为转动的角度，那么满足

$$x = r\cos(\alpha) \quad y = r\sin(\alpha)$$

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = \cos(\theta)x - \sin(theta)y$$

$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = \sin(\theta)x + \cos(theta)y$$

容易解得矩阵为

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4 Job4、谈谈你对四维齐次坐标的理解

一方面，如果只有三维，就不只用一个矩阵能构建出能对点进行平行变换的操作，虽然多加一维向量也可以做到，但是这样会非常不美观，而且有很多操作的时候，矩阵相乘进行化简也不容易实现。所以提出四维坐标，最后一维 w 就可以用来用作平移的常量。如果让我想，我就直接把最后一维设为 0 或 1。1 表示点，0 表示向量。但是并不是这样，实际上，当 $w\neq 0$ 时，四维坐标映射到对应的三维点为 $x/w, z/w, z/w$。这个东西看起来没什么用，但时就如 job2 中构建投影矩阵中用到的法那个法一样，如果没有这样，那个变换就不能成为线性变换，从而导致无解。而关于为什么 1 表示点，0 表示向量，可以想象作平移时候，点时可以移动的，而向量移动后完全不改变本身的属性