دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکدهٔ مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

کنترل خطی

پاسخ تمرین ۳

نام و نام خانوادگی	مبینا جمالی
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۲۱۶۳۶۳
تاریخ	آبان ۱۴۰۴

فهرست مطالب

۱ پرسش اول ۲
۱.۱ (الف) ۲
۲.۱ (ب) ۲
۳.۱ (ج) ۳

۲ پرسش دو ۴

۳ پرسش سه ۵

۴ پرسش چهارم ۸
۱.۴ (الف) ۸
۲.۴ (ب) ۱۰

۵ پرسش پنجم ۱۱
۱.۵ آ. ۱۱
۲.۵ ب. ۱۲
۳.۵ ج. ۱۲
۴.۵ د. ۱۳
۵.۵ ه. ۱۳

۱ پرسش اول

۱.۱ (الف)

تابع انتقال مورد نظر برابر است با:

$$H(s) = (1 + k_1 s)\left(\frac{3}{s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 6s + k_2}\right)$$

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 6s + k_2$$

جدول راث برای $\Delta(s)$:

ردیف	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳
s^4	1	5	k_2
s^3	3	6	0
s^2	$\frac{3\cdot 5 - 1\cdot 6}{3} = 3$	$\frac{3\cdot k_2 - 1\cdot 0}{3} = k_2$	0
s^1	$\frac{3\cdot 6 - 3\cdot k_2}{3} = 6 - k_2$	0	0
s^0	k_2		

میدانیم که برای پایداری همهٔ اعضای ستون اول باید هم علامت باشند که اینجا به معنی مثبت بودن است:

$$\begin{aligned}
&1 > 0,\\
&3 > 0,\\
&3 > 0,\\
&6 - k_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 < 6,\\
&k_2 > 0.
\end{aligned}$$

بنابراین شرط نهایی برای پایداری:

$$\boxed{0 < k_2 < 6}$$

ضریب k_1 در تأثیری روی جای قطب‌ها ندارد، پس شرط پایداری فقط وابسته به k_2 است.

۲.۱ (ب)

تابع انتقال:

$$H(s) = \frac{(1 + k_1 s)G(s)}{1 + (1 + k_1 s)G(s)}$$

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 6s + k_2 + 3 + 3k_1 s$$

برابر است با:

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + (6 + 3k_1)s + (k_2 + 3)$$

جدول راث (بررسی پایداری):

ردیف	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳
s^4	1	5	$k_2 + 3$
s^3	3	$6 + 3k_1$	0
s^2	$\frac{3 \cdot 5 - 1(6 + 3k_1)}{3} = \frac{15 - 6 - 3k_1}{3} = 3 - k_1$	$\frac{3(k_2 + 3) - 1 \cdot 0}{3} = k_2 + 3$	0
s^1	$\frac{(3 - k_1)(6 + 3k_1) - 3(k_2 + 3)}{3 - k_1} = \frac{3\big(3 + k_1 - k_1^2 - k_2\big)}{3 - k_1}$	0	0
s^0	$k_2 + 3$		

برای پایداری باید همهٔ اعضای ستون اول مثبت باشند:

$$\begin{aligned}
&1 > 0,\\
&3 > 0,\\
&3 - k_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 < 3,\\
&\frac{3\big(3 + k_1 - k_1^2 - k_2\big)}{3 - k_1} > 0,\\
&k_2 + 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 > -3.
\end{aligned}$$

از انجایی که $3 - k_1 > 0$ ، کافی است شرط مثبت بودن صورت کسر را بررسی کنیم

$$3 + k_1 - k_1^2 - k_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 < 3 + k_1 - k_1^2.$$

در نتیجه شرط‌های نهایی پایداری عبارت‌اند از:

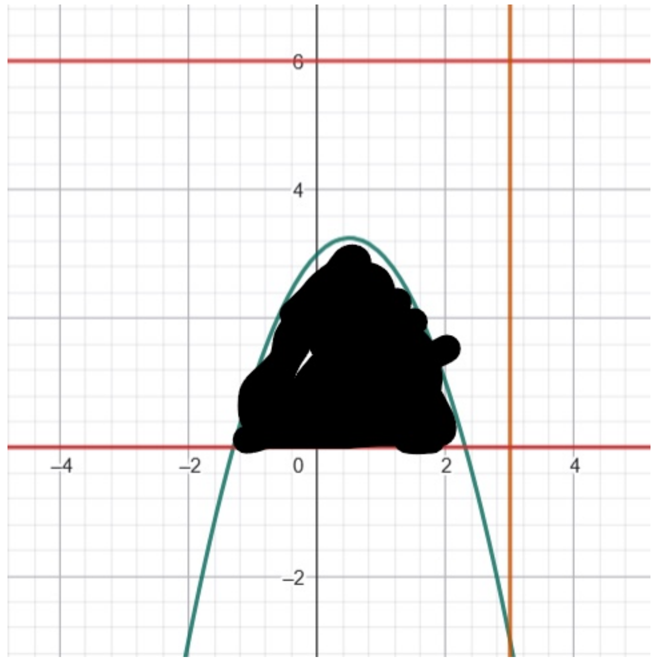
$$\boxed{k_1 < 3, \qquad -3 < k_2 < 3 + k_1 - k_1^2}$$

۳.۱ (ج)

برای اینکه هم سیستم حلقه بسته و هم سیستم حلقه ی باز پایدار باشد باید دو شرط هم زمان برقرار باشد پس داریم:

$$\boxed{0 < k_2 < 6 \qquad k_1 < 3, \qquad -3 < k_2 < 3 + k_1 - k_1^2}$$

ناحیه ی رنگ شده نقاطی هستند که در دو حالت حلقه ی باز و بسته سیستم را پایدار میکنند.



۲ پرسش دو

ابتدا چند جمله ای مخرج را مشخص میکنیم و بعد ان را گسترش می دهیم:

$$\Delta(s) = (s^2 - a^2)(s^2 + b^2)(s + c).$$

$$\begin{aligned}(s^2 - a^2)(s^2 + b^2) &= s^4 + (b^2 - a^2)s^2 - a^2b^2,\\ \Delta(s) &= \big(s^4 + (b^2 - a^2)s^2 - a^2b^2\big)(s + c)\\ &= s^5 + cs^4 + (b^2 - a^2)s^3 + c(b^2 - a^2)s^2 - a^2b^2s - ca^2b^2.\end{aligned}$$

سپس جدول راث را برای بررسی پایداری مشخص می کنیم.

ردیف	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳
s^5	1	b^2-a^2	$-a^2b^2$
s^4	c	$c(b^2-a^2)$	$-ca^2b^2$
s^3	$4c$	$2c(b^2-a^2)$	0
s^2	$\frac{4c\cdot c(b^2-a^2)-c\cdot 2c(b^2-a^2)}{4c}=\frac{c(b^2-a^2)}{2}$	$-ca^2b^2$	0
s^1	$\frac{\frac{c(b^2-a^2)}{2}\cdot 2c(b^2-a^2)-4c(-ca^2b^2)}{\frac{c(b^2-a^2)}{2}}=\frac{2c(a^2+b^2)^2}{b^2-a^2}$	0	0
s^0	$-ca^2b^2$		

سطر s^3 در محاسبهٔ مستقیم مقدار صفر به‌وجود آمد؛ بنابراین از چندجمله‌ای زیر استفاده می‌کنیم و مشتق ان را حساب می کنیم:

$$A(s)=c\big(s^4+(b^2-a^2)s^2-a^2b^2\big)$$

$$A'(s)=c\big(4s^3+2(b^2-a^2)s\big)$$

میدانیم : $a,b,c>0, p>0$ با این نکته و جدول راث علامت ها را به راحتی تعیین میکنیم:

$$\begin{aligned}
s^5 &:\ 1=x \quad\ \ >0,\\
s^4 &:\ c=y>0,\\
s^3 &:\ 4c=z>0,\\
s^2 &:\ \frac{c(b^2-a^2)}{2}=p>0,\\
s^1 &:\ \frac{2c\,(a^2+b^2)^2}{b^2-a^2}=q>0,\\
s^0 &:\ -ca^2b^2=r<0.
\end{aligned}$$

۳ پرسش سه

ابتدا معادله مشخصه ها ساده می کنیم و انها را به فرم $1+KG(s)$ در می آوریم.

$$G(s)=\frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}.$$

نقاط شکست:

$$\frac{dG(s)}{ds}=0 \quad\Rightarrow\quad s\approx\{-5.52,\ -0.65\pm 0.46j,\ -3.33\pm 1.20j\}.$$

مجانب‌ها:

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(0-5-6-1-1)-(-3)}{5-1} = \frac{-13+3}{4} = -2.5.$$

زاویه‌های مجانب برای:

$: K > 0$

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$:K < 0$

$$\theta = \frac{2k\pi}{n-m} = \frac{2k\pi}{4}, \qquad \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

زاویهٔ خروج از قطب مختلط:

$$\tan^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \left(135^\circ + \tan^{-1}\tfrac{1}{4} + \tan^{-1}\tfrac{1}{5} + \theta\right) = (2k+1)\pi.$$

$$\Theta \approx -43^\circ.$$

پیدا کردن فرکانس نوسانات دایمی:

$$1 + kG(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60+k)s + 3k = 0.$$

s^5	1	54	$60+k$
s^4	13	82	$3k$
s^3	$\frac{620}{13}$	$60+\frac{10}{13}k$	0
s^2	$\frac{2035}{31}-\frac{13}{62}k$	$3k$	0
s^1	$\frac{10(k^2+652k-24420)}{13k-4070}$	0	0
s^0	$3k$		

برای عبور ریشه‌ها از محور موهومی، سطر s^1 باید صفر شود:

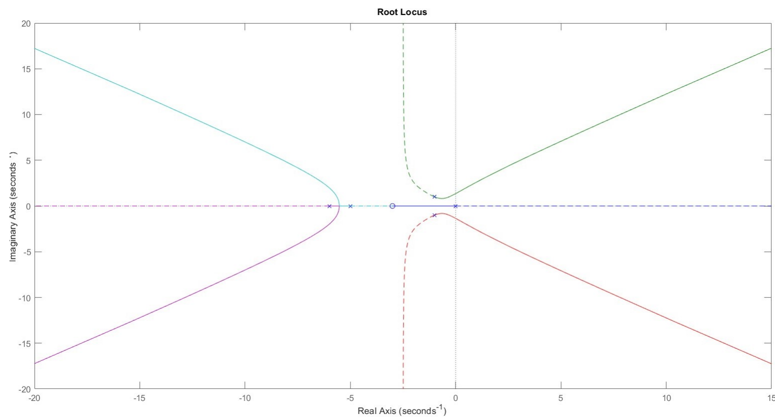
$$10(k^2 + 652k - 24420) = 0.$$

$$k^2 - 625k - 2440 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 36.89, -661.89\times$$

$$(\frac{2035}{31} - \frac{13}{62}k)s^2 + 3k = 0 \qquad \Rightarrow s = \pm 1.38j$$

بنابراین فرکانس نوسانات برابر است با:

$$\omega = 1.38$$



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+1)(5+s)}$$

نقاط شکست:

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{-15s^3+69s^2+43s+6}{s^3(s+1)^2(s+5)^2}$$

$$s = \{-3.8 \pm 1.2j,\ -3.5\}$$

مجانب ها:

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(-1-5)-(-1)}{4-1} = \frac{-29}{15}.$$

زاویه های مجانب برای:

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{3} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \qquad K>0$$

$$\theta = \frac{(2k)\pi}{n-m} = \frac{(2k)\pi}{3} \qquad \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \qquad K<0$$

معادلهٔ مشخصه برابر است با:

$$1+kG(s)=0 \quad \Rightarrow \quad s^4+6s^3+5s^2+5ks+k=0$$

جدول راث را برای بررسی پایداری میسازیم:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 5 & k \\
s^3 & 6 & 5k & 0 \\
s^2 & 5-\frac{5}{6}k & k & 0 \\
s^1 & \frac{5k-6k}{5-\frac{5}{6}k} & 0 & 0 \\
s^0 & k & &
\end{array}$$

برای عبور ریشه‌ها از محور موهومی، سطر s^1 باید صفر شود:

$$5k - 6k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{6 \times 19}{25}$$

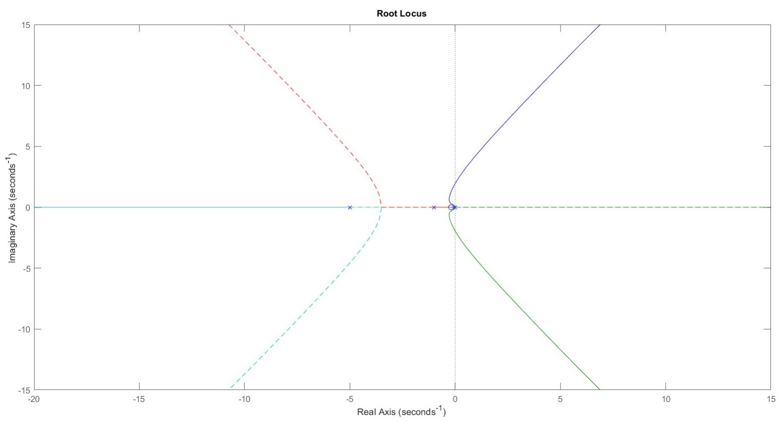
$$s^2 \left(5 - \frac{5}{6}k\right) + k = 0$$

جایگذاری مقدار k:

$$s^2 = \frac{19}{5} \quad \Rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{\frac{19}{5}}$$

بنابراین فرکانس نوسان برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{19}{5}}.$$



۴ پرسش چهارم

۱.۴ (الف)

سیستم ما دارای دو قطب در $0, -z$ و دو صفر در $2, -p$ است.
همچنین می دانیم که برای پایدار بودن نیاز است تا قطبی در سمت راست وجود نداشته باشد . در مکان هندسی ریشه ها نیز قطب ها به سمت صفر ها حرکت میکنند . در نتیجه میتوان برای پایدار سازی ،دو قطب را در سمت راست گذاشت در این صورت به ازای مقادیری از k تمام قطب ها در سمت چپ قرار میگیرند و سیستم پایدار میشود.
برای مثال یک حالت میتواند این باشد که داریم: $p = -2, z = 2$

$$L(s) = G_c(s)G_p(s)$$

$$L(s) = \frac{(s-2)(s+p)}{s(s+2)}$$

$$p = -2 \quad , \quad z = 2$$

داریم:

$$L(s) = \frac{(s-2)^2}{s(s+2)}$$

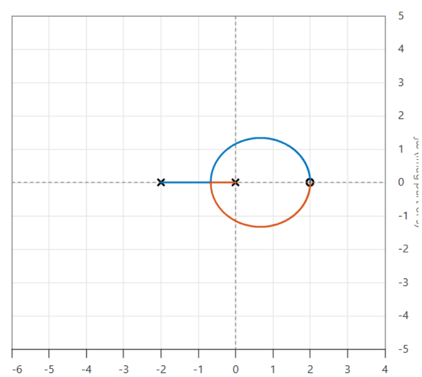
$$\Delta(s) = 1 + kL(s)$$

$$\Delta(s) = s^2 + 2s + 5 + k(s^2 - 4s + 4)$$

$$\Delta(s) = (k+1)s^2 + (2-4k)s + 4k$$

شرایط پایداری:

$$\begin{cases} k > -1 \\ k < \frac{1}{2} \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 < k < \frac{1}{2}$$

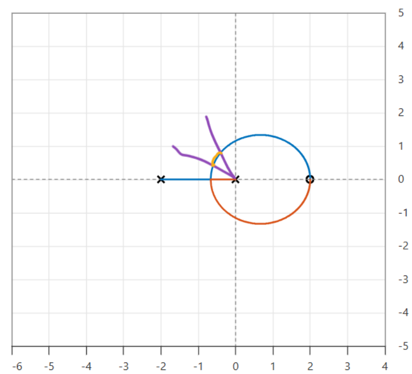


۲.۴ (ب)

در این قسمت باید نسبت میرایی بین $0.4, 0.6$ باشد.

$$\cos\theta = \zeta$$

در نتیجه، تمام نقاطی که $\zeta = 0.4$ دارند روی خطی از مبدأ قرار می‌گیرند که با محور منفی x زاویهٔ $76°$ می‌سازد.
همچنین تمام نقاطی که $\zeta = 0.6$ دارند روی خطی قرار می‌گیرند که با محور منفی x زاویهٔ $53°$ می‌سازد.
در نتیجه تمام نقاط بین این خط که روی مکان هندسی ریشه ها قرار دارند قابل قبول است.



حال باید k محل برخورد دو خط را با مکان هندسی ریشه ها پیدا کنیم.
هر نقطه روی خط $\zeta = 0.4$ به فرم مقابل است:

$$\tan\theta = \tan(\arccos 0.4) = 2.29 \qquad s = -\beta + 2.29\beta j$$

$$1 + k\,G(s) = 0$$

$$G(s) = \frac{(s-2)^2}{s(s+2)}$$

$$\Rightarrow \Delta = (k+1)s^2 + (2-4k)s + 4k = 0$$

باید s را درون معادله جایگذاری کنیم تا مقدار k, β بدست بیاید.

$$(k+1)(\beta + 0.4\beta j)^2 + (2-4k)(\beta + 0.4\beta j) + 4k = 0$$

قسمت حقیقی و موهومی را جدا می‌کنیم و مقدار k, β را بدست میاوریم.

$$\beta_1 = 0, \qquad k_1 = 0,$$
$$\beta_2 = -0.36, \qquad k_2 = 0.26,$$
$$\beta_3 = 0.58, \qquad k_3 = 1.11.$$

واضح است که k مد نظر ما برابر با 0.26 و مقادیر دیگر k یا از مبدا گذر میکند و یا در ربع چهارم صفحه مختصات قرار میگرد که مورد تایید نیست چرا که سیستم ناپایدار میشود.
فرکانس طبیعی مینیمم در نقاط برخورد رخ میدهد و بخش حقیقی نقاط برخورد همان β است.

$$-\zeta\omega_n = \beta \Rightarrow \qquad \omega_n = \frac{-0.36}{-0.4} = 0.9$$

همین مراحل را برای زتای 0.6 تکرار میکنیم.

$$\tan\theta = \tan(\arccos 0.6) = \frac{4}{3} \qquad s = --\beta + \frac{4}{3}\beta j$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0, & k_1 &= 0, \\ \beta_2 &= 0.49, & k_2 &= 0.20, \\ \beta_3 &= -0.97, & k_3 &= 1.92. \end{aligned}$$

باز هم مشابه ی قبل تنها k_3 مورد تایید است.

$$-\zeta\omega_n = \beta \Rightarrow \qquad \omega_n = \frac{-0.97}{-0.6} = 1.61$$

در نتیجه فرکانس طبیعی مینیمم برای حالت اول است و مقدار آن برابر با 0.9 است.

۵ پرسش پنجم

۱.۵ آ.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+6)}$$

نقاط شکست:

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{3s^2 + 18s + 18}{s^2(s+3)^2(s+6)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -1.26,\ -4.73$$

مجانب ها:

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-3-6}{3} = -3$$

زاویه خروج:

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \left\{\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}\right\}$$

$$\Delta = 1 + kG(s)$$

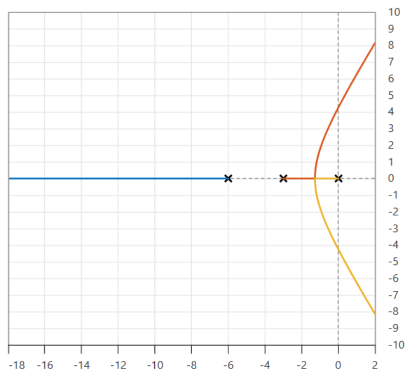
$$\Delta = s^3 + 9s^2 + 18s + k$$

جدول راث برای بررسی پایداری:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 18 \\ s^2 & 9 & k \\ s^1 & \frac{18-k/9}{} & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

$$k = 18 \times 9 = 162$$

$$0 < k < 162$$



۲.۵ ب.

$$M_p < 20\% \ \Rightarrow \ e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 0.2 \ \Rightarrow \ \zeta > 0.45 \ \Rightarrow \ \cos\theta > 0.45 \ \Rightarrow \ -63^\circ < \theta < 63^\circ$$

$$t_s < 2 \ \Rightarrow \ 3\omega_n > \frac{-\ln\left[0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right]}{2} \ \Rightarrow \ \zeta\omega_n > 2.01$$

با توجه به دو رابطه بدست آمده مکان هندسی ریشه ها باید در ناحیه کشیده شده باشد.

مشاهده میکنیم که به ازای هیچ مقداری از k ، ۳ ریشه در ناحیه ی مد نظر ما قرار نمیگیرد.

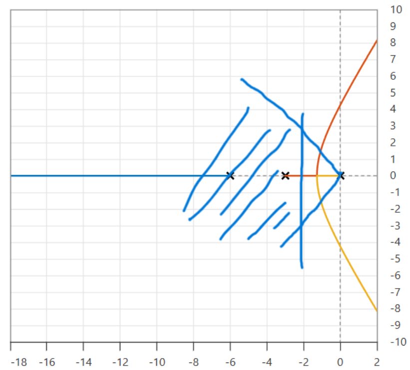
۳.۵ ج.

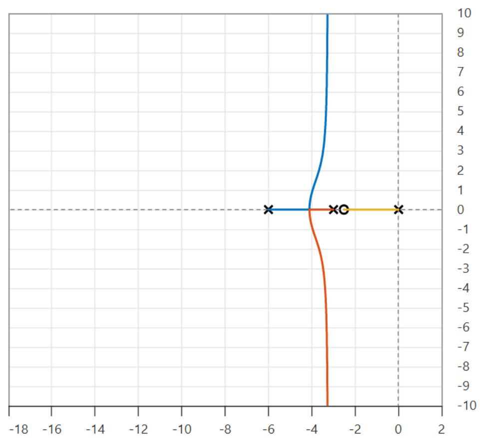
یک کنترل کننده pd اضافه میکنیم.

یک صفر به ناحیه سمت چپ اضافه میکنیم به طوریکه قطب ها را به ناحیه مطلوب مان بکشد.

برای مثال یک صفر در منفی2.5اضافه میکنیم و بار دیگر مکان هندسی ریشه ها را رسم میکنیم.

این بار مشاهده میکنیم که نقاطی وجود دارند که هر دو شرط بدست آمده را فراهم میکنند.





۴.۵ د.

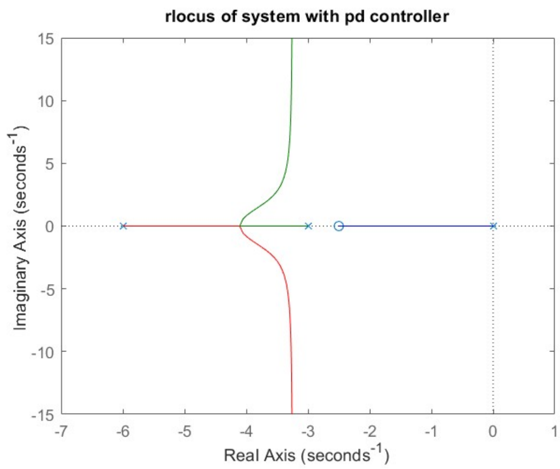
تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

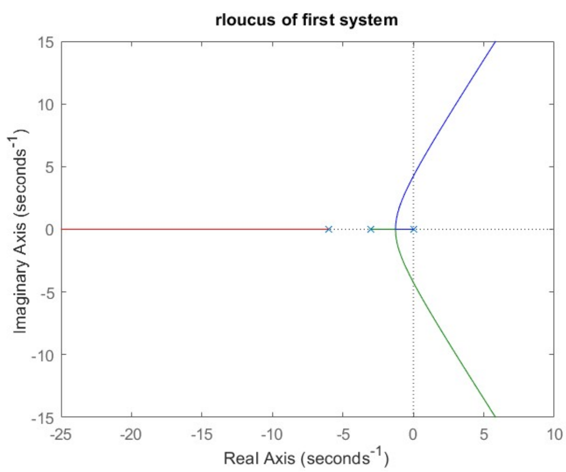
$$G(s) = \frac{s+2}{s(s+3)(s+6)}$$

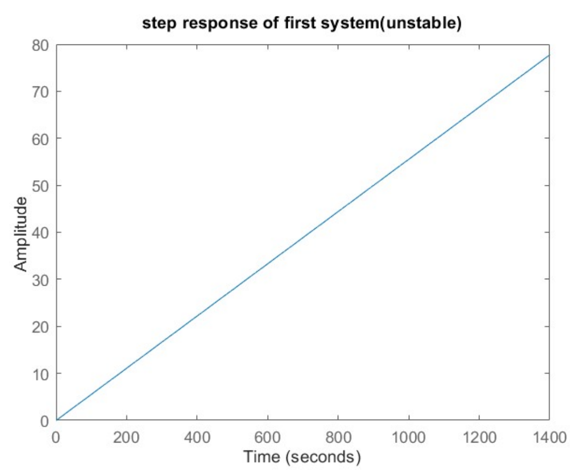
$$L(s) = \frac{G(s)}{1+KG(s)} =$$

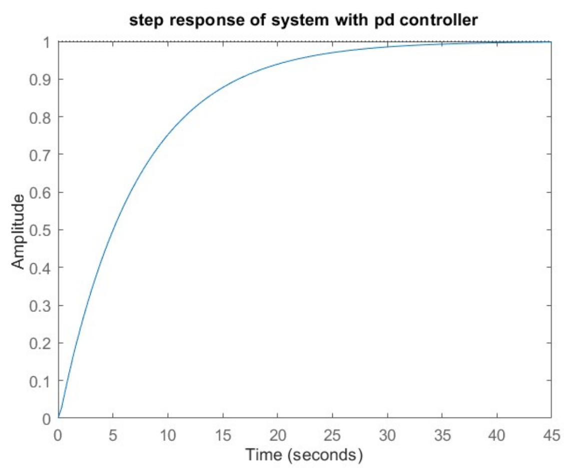
در اینجا سیستم اصلا مرتبه ی دو نیست که زتا و فرکانس طبیعی تعریف شود. با این فرض که یک قطب غیر قالب داشته باشیم که از آن صرف نظر کنیم میتوان مقادیری برای زتا و فرمانس طبیعی متصور بود.

۵.۵ ه.


rlocus of system with pd controller
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)
15
10
5
0
-5
-10
-15
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1


rloucus of first system
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)
15
10
5
0
-5
-10
-15
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10


step response of first system(unstable)
Amplitude
Time (seconds)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
200
400
600
800
1000
1200
1400


step response of system with pd controller
Amplitude
Time (seconds)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45