دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکدهٔ مهندسی برق - گروه مهندسی کنترل

کنترل خطی

پاسخ تمرین ۲

نام و نام خانوادگی	مبینا جمالی
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۲۱۶۳۶۳
تاریخ	آبان ۱۴۰۴

فهرست مطالب

۱ پرسش یک

در یک سیستم حلقه بسته با بازخور واحد قصد شناسایی سیستم حلقه باز مسیر پیشرو را داریم. با دادن ورودی پله با دامنه واحد به سیستم حلقه بسته به فرم زیر:

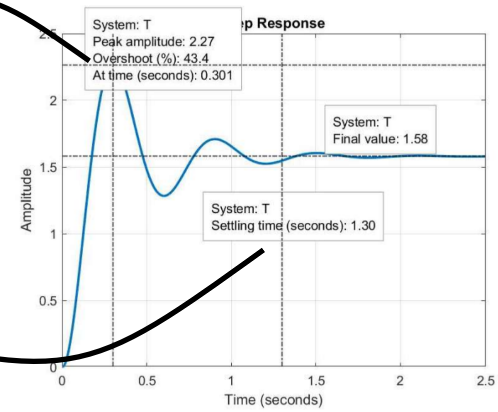
$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه باز مسیر پیشرو را به دست آورید.

حالا با توجه به اطلاعات سوال که از تصویر در اورده ایم مقادیر را به دست می اوریم:

(overshoot%) $$e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.434$$

(زمان نشست با معیار ۲%) $$\frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.3$$



حالا از اطلاعات داده شده مقدار ζ را به صورت تقریبی به دست می اوریم:

$$\zeta \approx 0.256$$

حالا در مرحله بعد با قرار دادن مقدار ζ که از رابطه قبل بدست اوردیم در رابطه زمان نشست مقدار فرکانس طبیعی را به دست می اوریم:

$$\frac{4}{0.256\,\omega_n} = 1.3$$

$$\omega_n \approx 12.02$$

پس با جاگذاری در تابع تبدیل داریم:

$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{144.48k}{s^2 + 6.15s + 144.48}$$

حالا مقدار k را با قرار دادن ζ در رابطه اول به دست می اوریم:

$$1+e^{-\frac{\pi(0.256)}{\sqrt{1-(0.256)^2}}} \approx 1+0.435=1.435$$

با توجه به اینکه مقدار پیک در شکل 2.27 است، مقدار k برابر است با:

$$k=\frac{2.27}{1.435}\approx 1.58$$

پس برای $T(s)$ داریم:

$$T(s)=\frac{228.27}{s^2+6.15s+144.48}$$

حالا می‌توانیم $G(s)$ را حساب کنیم.پس:

$$T(s)=\frac{G(s)}{G(s)+1} \Rightarrow G(s)=\frac{T(s)}{1-T(s)}$$

$$T(s)=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \qquad H(s)=1$$

$$G(s)=\frac{T(s)}{1-T(s)}=\frac{\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}{1-\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2-k\omega_n^2}.$$

$$\zeta=0.256, \quad \omega_n=12.02, \quad k=1.58$$

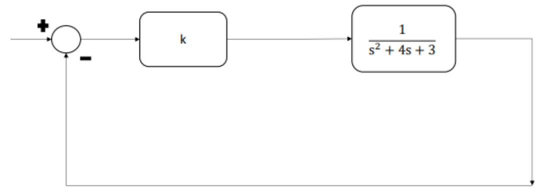
$$\omega_n^2=(12.02)^2=144.4804, \qquad k\omega_n^2=1.58\times 144.4804=228.279032,$$

$$2\zeta\omega_n=2\times 0.256\times 12.02=6.15424, \qquad \omega_n^2-k\omega_n^2=144.4804-228.279032=-83.798632.$$

$$G(s)=\frac{228.279032}{s^2+6.15424\,s-83.798632}$$

۲ پرسش دو

به‌ازای چه مقداری از K نسبت میرایی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ به‌دست می‌آید؟



در نتیجه داریم:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{KG(s)+1}$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{k}{s^2+4s+3+k}$$

$$2\zeta\omega_n = 4 \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega_n = 2\sqrt{2}$$

$$(3+k) = \omega_n^2 = 8$$

$$[\ k = 5\ ]$$

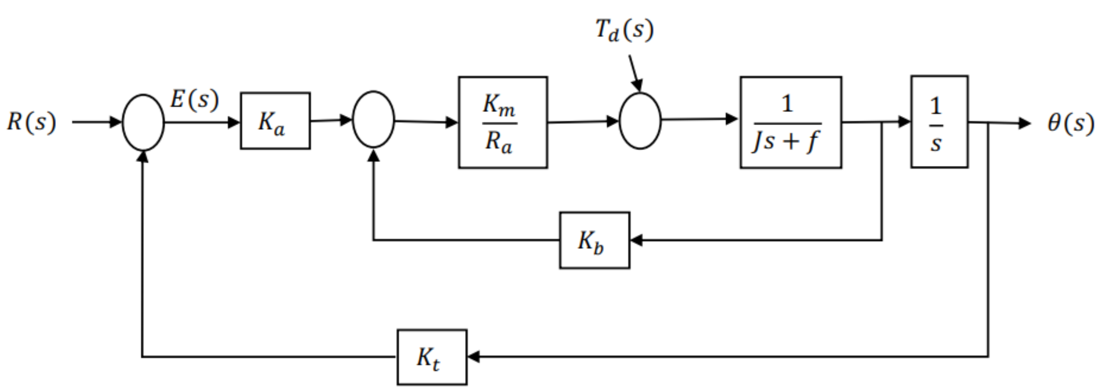
پس نسبت میرایی انچه خواسته شده بود بدست می اید.

۳ پرسش سه

یک سیستم کنترل وضعیت موتور DC مطابق شکل ۳ در نظر گرفته می‌شود. مقادیر پارامترهای سیستم برابرند با:

$$K_t = 1, \quad K_b = 0.5, \quad f = 0.2, \quad J = 1, \quad R_a = 2, \quad K_m = 0.8, \quad K_a = 0.05$$

توجه کنید که برای حلقهٔ باز $(K_t = 0)$ و برای حلقهٔ بسته $(K_t = 1)$ در نظر بگیرید.



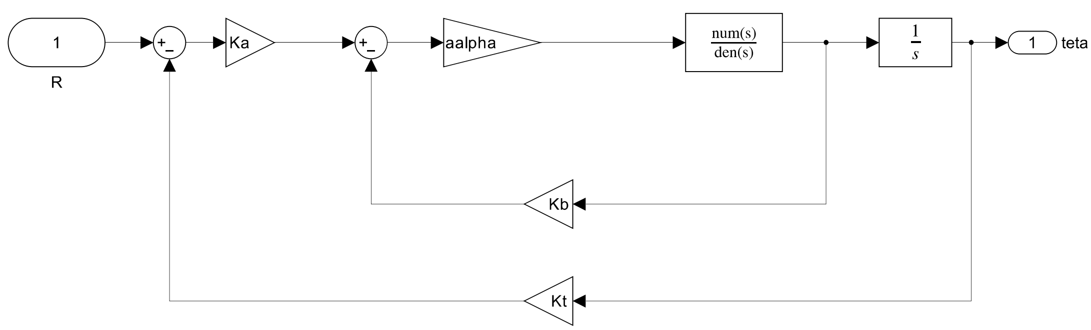
شکل ۱: بلوک دیاگرام سیستم کنترل وضعیت موتور DC

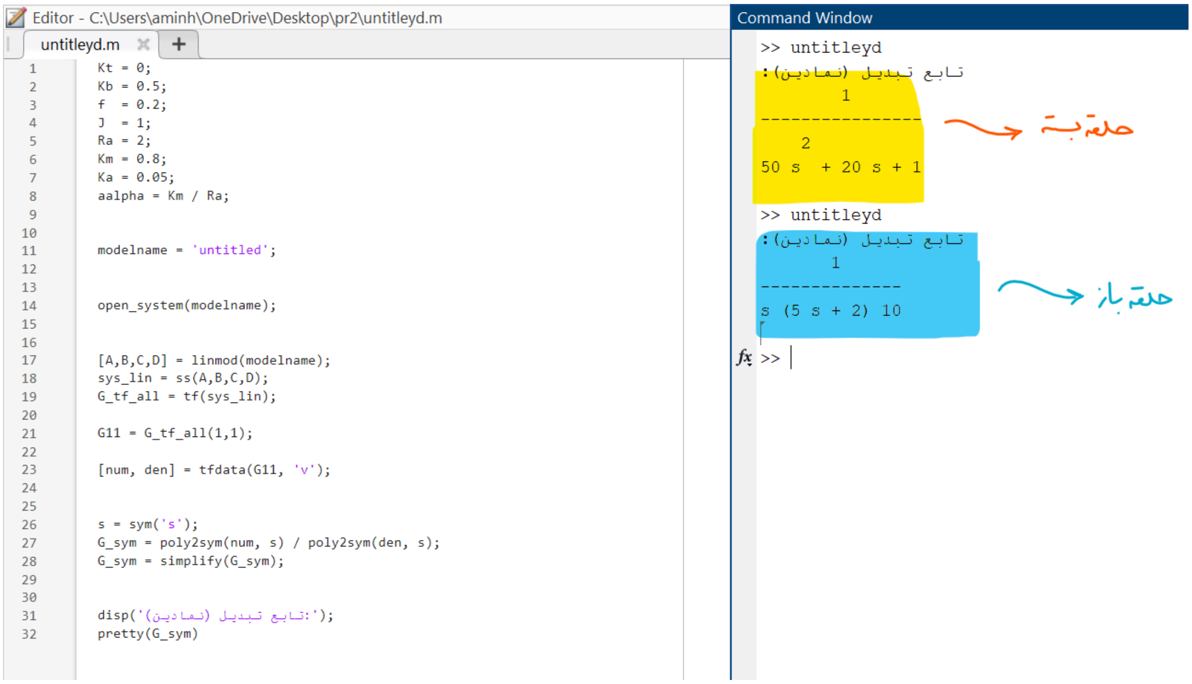
(آ) تابع تبدیل $\Theta\frac{\Theta(s)}{R(s)}$ را در دو حالت حلقه باز ($K_t = 0$) و حلقه بسته ($K_t = 1$) به‌دست آورید. ابتدا حل دستی انجام شود و سپس با استفاده از سیمولینک و دستور `linmod` مطلب محاسبه و نتایج مقایسه شوند.
(ب) پاسخ پلهٔ سیستم را برای دو مقدار $K_a = 0.1$ و $K_a = 0.05$ در حالت حلقه باز و حلقه بسته رسم کنید و نوع میرایی را مشخص نمایید. همچنین در این حالت مقدار چهارپارپر با چه مقداری است؟ بخش اول با مطلب و بخش بعدی به‌صورت دستی حل شود.
(ج) اگر ورودی سیستم حلقه بسته واحد باشد، خطای حالت ماندگار و ثابت خطای شتاب در این حالت چه مقدار است؟ مقدار خطا را با رسم شکل در مطلب نشان دهید.
(د) اگر بخواهیم ماکزیمم فراجهش کمتر از ۵% باشد، محدودیت مقدار K_a چیست؟ درستی محاسبهٔ خود را با رسم پاسخ پله در مطلب نشان دهید.

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{K_a \frac{K_m}{R_a} \frac{1}{Js+f} \frac{1}{s}}{1 - (\frac{K_m}{R_a} \cdot \frac{-1}{Js+f} . k_b + K_a . \frac{K_m}{R_a} \cdot \frac{-1}{Js+f} \cdot \frac{1}{s} . k_t)} = \frac{0.02}{s^2 + 0.4s + 0.02} \qquad \text{(حلقه بسته)}$$

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{K_a \frac{K_m}{R_a} \frac{1}{Js+f} \frac{1}{s}}{1 - (\frac{K_m}{R_a} \cdot \frac{-1}{Js+f} . k_b)} = \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{0.02}{s(s+0.4)} \qquad \text{(حلقه باز)}$$

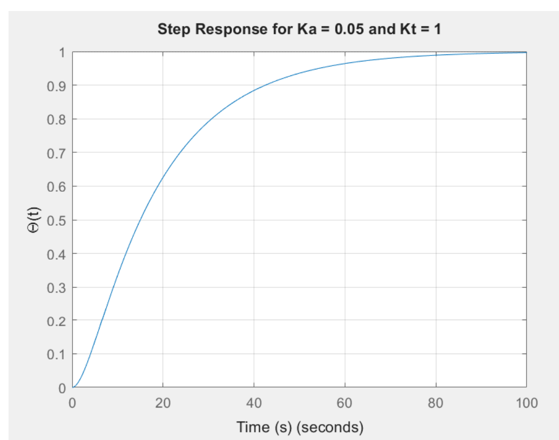
۱.۳ شبیه سازی شده



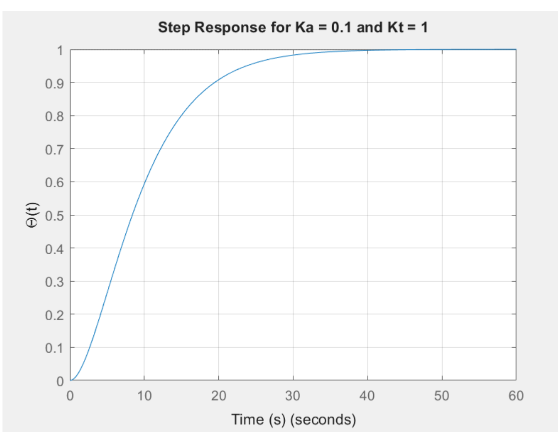


مشاهده میشود که نتایج متلب با حل دستی یکسان است فقط در متلب صورت و مخرج هر دو تابع تبدیل در ۵۰ ضرب شده

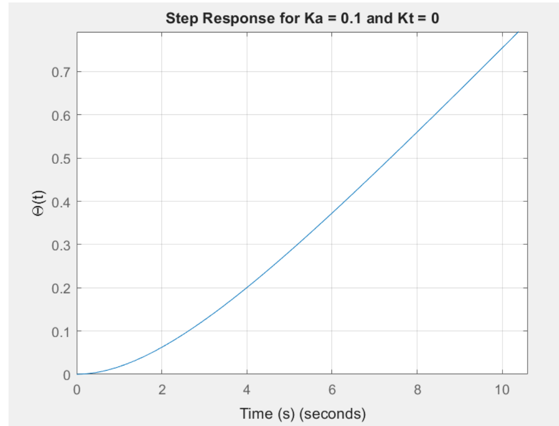
۲.۳ پاسخ پله سیستم



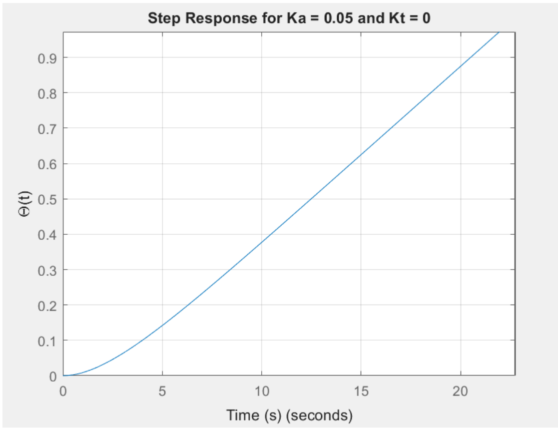
شکل ۲: فرامیرایی



شکل ۳: میرایی مرزی



شکل ۴: نامیرا و ناپایدار



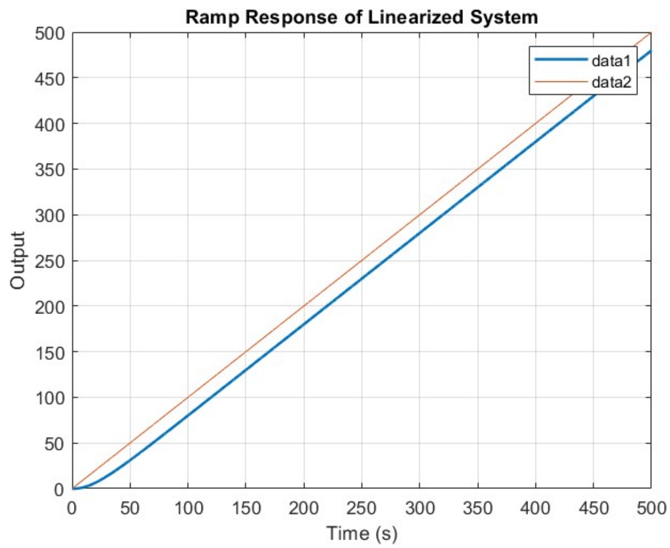
شکل ۵: نامیرا و ناپایدار

۳.۳ خطای ماندگار و ثابت خطای شیب

$$L(s) = \frac{0.02}{s^2 + 0.4s}$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \lim_{s \to 0} \frac{0.02}{s^2 + 0.4s} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 20$$

خروجی با تابع شیب حدود ۲۰ واحد فاصله دارد.



۴.۳ محدودیت مقدار ka

فراجهش برابر است با $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

واضح است که مقدار فراجهش تنها به ζ وابسته است .

بار دیگر تابع تبدیل کل سیستم را بر حسب پارامتر K_a مینویسیم.

$$\frac{0.8K_a}{s^2 + 0.4s + 0.4K_a}$$

$$\omega_n^2 = 0.4K_a \qquad 2\omega_n\zeta = 0.4 \qquad \Rightarrow \zeta = \frac{0.2}{\sqrt{0.4K_a}}$$

$$M_p < 5 \quad \rightarrow \quad e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 0.05 \quad \rightarrow \quad \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} < \ln 0.05 \quad \Rightarrow \zeta > 0.68$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{0.2}{\sqrt{0.4K_a}} > 0.68 \Rightarrow K_a < 0.21$$

پاسخ پله را در متلب به ازای مقادیر مختلف ka مشاهده میکنید.

همانطور که محاسبه کردیم به ازای k_a بزرگتر از 0.21 overshoot بزرگتر از ۵ درصد خواهد بود.