



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تحقیق مشتق گیری در حضور سطر تماماً صفر

روش راث هرولتز

مبینا یوسفی مقدم

40124093

مقدمه

روش راث-هرویتز یکی از تکنیک‌های مهم در تحلیل پایداری سیستم‌های کنترلی است. این روش بر اساس تشکیل یک جدول ویژه به نام جدول راث کار می‌کند که از ضرایب چندجمله‌ای مشخصه تشکیل شده است. در برخی موارد، هنگام تشکیل این جدول، ممکن است یک سطر کاملاً صفر ظاهر شود. این وضعیت تحلیل پایداری را با مشکل مواجه می‌کند و نیاز به رویکرد جایگزین دارد.

در این مقاله، ابتدا علت ظهور سطر تماماً صفر را بررسی کرده و سپس روش جایگزینی آن با استفاده از مشتق‌گیری را توضیح می‌دهیم.

۱. علت ظهور سطر تماماً صفر در جدول راث

یک سطر تماماً صفر در جدول راث معمولاً به یکی از دو دلیل زیر رخ می‌دهد:

۱.۱ وجود جفت ریشه‌های متقارن موهومی

اگر چندجمله‌ای مشخصه دارای ریشه‌های متقارن روی محور موهومی باشد، ممکن است در فرایند تشکیل جدول راث، یک سطر کاملاً صفر ظاهر شود. این وضعیت نشان‌دهنده حضور نوسانات دائمی در سیستم است.

مثال: در نظر بگیرید چندجمله‌ای مشخصه زیر را:

$$s^4 + 4s^2 + 9 = 0$$

با حل این معادله، ریشه‌ها به دست می‌آیند:

$$s = \pm j2 \quad s = \pm j3$$

چون این ریشه‌ها متقارن حول محور موهومی هستند، در هنگام تشکیل جدول راث، یک سطر تماماً صفر تولید خواهد شد.

۱.۲ وجود عوامل تکراری در چندجمله‌ای مشخصه

گاهی چندجمله‌ای مشخصه شامل فاکتورهای تکراری به صورت $(s^2 + a^2)(s^2 + a^2)$ است که در جدول راث منجر به ایجاد یک سطر صفر می‌شود. این موضوع نشان‌دهنده قطب‌های مضاعف روی محور موهومی است.

مثال:

$$s^6 + 2s^4 + s^2 = 0 \Rightarrow s^2(s^4 + 2s^2 + 1) = 0$$

که می‌توان آن را به صورت:

$$s^2(s^4 + 2s^2 + 1) = 0 \Rightarrow s^2(s^2 + 1)^2 = 0$$

فاکتورگیری کرد. این معادله نشان می‌دهد که سیستم دارای قطب‌های مضاعف روی محور موهومی است که باعث ایجاد سطر تماماً صفر در جدول راث خواهد شد.

۲. روش جایگزینی سطر تماماً صفر

برای حل مشکل سطر صفر، می‌توان از روش مشتق‌گیری از چندجمله‌ای کمکی استفاده کرد. این روش به صورت زیر انجام می‌شود:

۲.۱ نحوه جایگزینی سطر صفر

۱. چندجمله‌ای کمکی (Auxiliary Polynomial) را از ضرایب سطر بالایی سطر صفر تشکیل دهید. این چندجمله‌ای معمولاً از جمله‌های با درجه زوج استخراج می‌شود. ۲. مشتق این چندجمله‌ای را نسبت به متغیر s بگیرید. ۳. مقادیر جدید به دست آمده را به جای سطر صفر در جدول راث قرار دهید و تحلیل را ادامه دهید.

شناخت چندجمله‌ای کمکی

در روش راث-هرویتز، گاهی پیش می‌آید که یکی از سطرها جدول به طور کامل صفر می‌شود، در این شرایط از چندجمله‌ای کمکی برای ادامه تحلیل استفاده می‌شود. این چندجمله‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dots + {}^{n-4}a_{n-4}s + {}^{n-2}a_{n-2}s + {}^na_n s = A(s)$$

در واقع، این چندجمله‌ای با استفاده از ضرایب اولین ستون جدول و سطر بالایی ساخته می‌شود و ویژگی‌های خاصی دارد که در بررسی پایداری سیستم اهمیت دارد.

ویژگی‌های کلیدی چندجمله‌ای کمکی

یکی از خصوصیات قابل توجه این چندجمله‌ای این است که ریشه‌های آن، ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی اصلی نیز هستند. اما نکته‌ی مهم اینجاست که اگر سیستمی دارای ریشه‌هایی روی محور موهومی باشد، این ریشه‌ها

به صورت زوج‌های متقارن ظاهر می‌شوند. به عبارت دیگر، اگر $s=j\omega$ یک ریشه باشد، آنگاه $s=-j\omega$ نیز بدون شک در میان ریشه‌ها خواهد بود. این ویژگی نقش مهمی در بررسی رفتار دینامیکی سیستم ایفا می‌کند.

چگونه ریشه‌های متقارن را ثابت کنیم؟

مرحله اول: تحلیل ضرایب متقارن

چندجمله‌ای کمکی تنها شامل توان‌های زوج از s است. این موضوع سبب می‌شود که اگر یک مقدار مختلط مانند $s=j\omega$ ریشه‌ی معادله باشد، مقدار متقارن آن یعنی $s=-j\omega$ نیز باید یکی از ریشه‌ها باشد. این نتیجه‌گیری به ما کمک می‌کند تا ساختار کلی ریشه‌های سیستم را درک کنیم.

مرحله دوم: بررسی شرایط صفر شدن یک سطر

زمانی که در جدول راث، سطری به طور کامل صفر می‌شود، نشان‌دهنده‌ی آن است که چندجمله‌ای کمکی دارای ریشه‌هایی روی محور موهومی است. این وضعیت به این معنی است که سیستم دارای رفتار نوسانی خالص یا در حال مرزی است. در چنین شرایطی، وجود این سطر صفر نشان‌دهنده‌ی حضور ریشه‌های متقارن روی محور موهومی خواهد بود.

بررسی از طریق مشتق‌گیری

گام اول: مواجهه با سطر صفر در جدول

فرض کنیم در یک مرحله، سطر $(k+1)(k+1)(k+1)$ به طور کامل صفر شود. این وضعیت می‌تواند نشانه‌ای از وجود ریشه‌های موهومی یا چندگانگی در سیستم باشد.

گام دوم: معادل‌سازی چندجمله‌ای کمکی

اگر چندجمله‌ای $P(s)P(s)P(s)$ شامل عبارتی از نوع $(s^2+\omega^2)^m$ باشد، این نشان می‌دهد که سیستم دارای ریشه‌های تکراری روی محور موهومی است، یعنی نوعی ناپایداری یا حالت مرزی را تجربه می‌کند.

گام سوم: تحلیل جایگاه ریشه‌ها

از آنجایی که یک سطر کاملاً صفر شده است، می‌توان این نتیجه را گرفت که این سطر ترکیبی خطی از ضرایب چندجمله‌ای دیگر مانند $B(s)B(s)B(s)$ است که بخشی از چندجمله‌ای مشخصه‌ی اصلی به شمار می‌رود. در واقع، این سطر نشانه‌ای از وجود ریشه‌های خاص در سیستم است که باید مورد بررسی قرار گیرد.

گام چهارم: استفاده از مشتق برای ادامه تحلیل

زمانی که $P(s)P(s)P(s)$ دارای عاملی از نوع $m(s^2 + \omega^2)$ باشد، این شرایط را به وجود می‌آورد که هم $P(j\omega) = OP(j\omega) = 0$ برقرار باشد و هم $P'(j\omega) = OP'(j\omega) = 0$. مشتق‌گیری به ما کمک می‌کند تا پایداری سیستم را با دقت بیشتری تحلیل کنیم.

گام پنجم: جایگزینی سطر صفر با مشتق ضرایب

برای اینکه تحلیل ادامه پیدا کند، به جای سطر صفر، از مشتق ضرایب چندجمله‌ای $B(s)B(s)B(s)$ یعنی $B'(s)B'(s)B'(s)$ استفاده می‌شود. این جایگزینی، امکان بررسی دقیق‌تر اثر ریشه‌های تکراری را فراهم می‌کند و کمک می‌کند تا تعداد ریشه‌های دارای قسمت حقیقی مثبت یا منفی به درستی مشخص شود.