

«به نام خداوند بخشنده مهربان»



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نام و نام خانوادگی: مبینا یوسفی مقدم

شماره دانشجویی: ۴۰۱۲۴۰۹۳

موضوع: ارتباط بین حوزه زمان و فرکانس

درس: سیستم های کنترل خطی

نام استاد: دکتر تقی‌راد

پاییز ۱۴۰۳

در این تحقیق قصد داریم درباره‌ی ارتباط بین حوزه زمان و فرکانس در حد فهم اینجانب اطلاعات کسب کنیم. در آغاز با تعریف این دو حوزه شروع می‌کنیم، با توضیحات مختصری مبنی بر چرایی زندگی انسان در بعد زمان خواهیم داد و ارتباط بین زمان و فرکانس بررسی خواهیم کرد و به بررسی دو تبدیل معروف می‌پردازیم، نهایتاً برتری های حوزه فرکانس از زمان را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

- تعاریف حوزه زمان و فرکانس

زمان یک بعد خطی و متوالی است که به ما اجازه می‌دهد اتفاقات زندگی را به ترتیب وقوع آنها توصیف کنیم و در کنار سه بعد فضایی می‌توان ترتیب این وقایع را نیز نمایش داد و برای انسان قابل احساس کردن است زیرا انسان به حوزه زمان به دلیل طبیعت تجربی و فیزیکی زندگی انسان و همچنین محدودیت‌های ادراکی و شناختی او محصور شده است.

با توجه به تعریف ابعاد مبنی بر استقلال آنها از یکدیگر، نمی‌توان حوزه فرکانس را یک بعد جدید دانست. فرکانس به معنای میزان تغییرات در یک واحد زمان است پس در نتیجه به زمان وابسته است اما این وابستگی به ما توانایی ارتباط برقرار کردن بین این دو حوزه را می‌دهد. درواقع با استفاده از فرکانس می‌توانیم یک نوع خاصیت به بیان دیگر سرعت نوسانات در واحد زمان را بررسی کنیم که ابزار هایی مانند تبدیل فوریه و لاپلاس به ما در این ساده سازی های ریاضی کمک می‌کنند.

- چرا انسان به حوزه زمان محصور است؟

انسان‌ها زمان را به صورت خطی تجربه می‌کنند. ما نمی‌توانیم به گذشته برگردیم یا آینده را به طور مستقیم تجربه کنیم. هر لحظه‌ی زندگی ما در حال حاضر اتفاق می‌افتد و گذشته و آینده به ترتیب به عنوان خاطرات و پیش‌بینی‌ها در ذهن ما وجود دارند.

انسان‌ها از طریق حواس پنج‌گانه خود اطلاعات را در طول زمان جمع‌آوری می‌کنند. این ادراکات به ما اجازه می‌دهند تا تغییرات را در زمان مشاهده کنیم، اما نمی‌توانیم آن‌ها را به صورت همزمان در تمام زمان‌ها تجربه کنیم. مغز انسان اطلاعات را به صورت مرحله‌ای پردازش می‌کند، و این امر به ما امکان می‌دهد تا الگوهای زمانی را تشخیص دهیم، اما در عین حال، باعث محدودیت در توانایی ما برای تجربه‌ی همزمان همه‌ی جوانب یک موقعیت می‌شود. حتی از لحاظ فیزیکی هم هر گونه تغییر و حرکت در دنیایی که ما در ام زندگی می‌کنیم نیاز به زمان دارد.

با وجود تمام این محدودیت‌ها ما تلاش می‌کنیم با ابزار های ریاضی چشم‌هایمان را بشویم و جوری دیگر به جهان نگاه کنیم.

یک سیگنال در حوزه زمان توالی مقادیر مختلفی هستند که می‌توانند از فرکانس های گوناگون تشکیل شده باشد به این معنی که با چه سرعتی از یک مقدار مشخص دامنه به مقدار دیگری رسیده‌ایم. در لینک زیر می‌توانید نمونه ای از دو سیگنال را ببینید دارای یک و دو فرکانس هستند و با وجود پیوستگی آنها در حوزه زمان در حوزه فرکانس گسسته اند.

https://www.researchgate.net/publication/280923204_OulmaneLakisMureithi_2013/figures?lo=1

هرچه تغییرات در حوزه زمان سریع تر رخ دهد به معنی فرکانس بالاتر است. در کلاس یکی از مثال های فیدبک مثبت (نزدیک شدن میکروفن و بلند گو صدای جیغ) به من نشان داد که ورودی اغتشاش چه پیک زیادی در دامنه سیگنال صوتی سریعاً ایجاد کرد و در نتیجه می‌توانستیم معنی فرکانس بالا را در آن مثال مشاهده کنیم که هر لحظه به دلیل فیدبک مثبت و افزایش پیک سیگنال صوت در زمان تقریباً ثابت حتی بیشتر هم می‌شد.

متقابلاً فرکانس های پایین نشانه‌کننده‌ی در اعمال تغییرات است و در حوزه زمان تغییرات دامنه سیگنال با شیب خیلی کمتری اتفاق می‌افتد.

از جمله ابزارات ارتباط دهنده حوزه فرکانس و زمان می‌توان به تبدیل فوریه و لاپلاس که برای تحلیل سیگنال و سیستم کاربرد دارند اشاره کرد. در این بخش قصد داریم به جای تکرار روابط ریاضی، برداشت خود را از این دو تبدیل قدرتمند بیان کنیم. در ادامه لینک روابط ریاضی در اختیار شما قرار گرفته است.

<https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/baug/ibk/structural-mechanics-dam/education/identmeth/fourier.pdf>

https://tutorial.math.lamar.edu/pdf/laplace_table.pdf

همانطور که می‌دانید تبدیل لاپلاس اپراتور مشتق و انتگرال در زمان را به ترتیب به ضرب و تقسیم s در حوزه فرکانس تبدیل می‌کند. از طرفی می‌توان تعداد کثیری از سیستم‌ها را با معادلات دیفرانسیل توصیف کرد که با استفاده از لاپلاس و تبدیل آنها به معادلات جبری ساده سازی اتفاق می‌افتد.

تبدیل فوریه در واقع با استفاده از وزن دهی مناسب به دامنه سیگنال در فرکانس‌های خاص توصیف فرکانسی از آن را به ما می‌دهد. اما چه چیزی باعث برتری تبدیل لاپلاس به فوریه می‌شود؟ جواب ساده است تسلط بیشتر لاپلاس به صفحه صفر و قطب (اعداد مختلط).

برای پاسخ به این سوال ابتدا باید مفهوم قطب را توضیح دهیم، قطب‌ها در صفحه اعداد مختلط، مقادیری هستند که اصطلاحاً تابع تبدیل یک سیستم را بی‌نهایت می‌کنند (مانند ریشه‌های مخرج). اگر یک صفحه اعداد مختلط را در نظر داشته باشید که چیزی شبیه به یک صفحه دو بعدی با محور فرکانس به عنوان موهومی و زمان به عنوان حقیقی است؛ در تبدیل فوریه تنها مقادیر فرکانس بررسی می‌شوند و ما فقط روی محور $j\omega$ جابه‌جا می‌شویم در نتیجه قطب‌هایی که همزمان دارای مقدار حقیقی غیر صفر هستند بررسی نخواهند شد و به این معنی است که رفتار دینامیکی سیستم ما به طور کامل بررسی نشده است اما تبدیل لاپلاس گنجایش قطب‌های مختلط را دارد به این معنی که می‌توان در اطراف یک قطب رفتار سیستم را در حالت گذرا با استفاده از بخش حقیقی تحلیل کرد و پاسخ فرکانسی را نیز به طور همزمان با استفاده از بخش موهومی به دست آورد.

فاصله این قطب‌ها از یک دیگر، از صفر، از صفرهای تابع تبدیل سیستم که خروجی را صفر می‌کنند معنای مختلفی دارند، هر چه یک قطب به مرکز صفحه مختلط نزدیکتر باشد نشان دهنده این است که این سیستم دارای ثابت زمانی بزرگتری است در واقع سیستم به ورودی که به آن وارد شده کند تر از سیستمی واکنش میدهد که ثابت زمانی کوچک تری دارد به اصطلاح قطب‌های آن از صفر دور ترند.

اگر صفر و قطب یک سیستم به هم نزدیک باشند، صفر می‌تواند تاثیر قطب را از بین ببرد که به خودی خود ممکن است باعث پایدار سازی هم بشود یا صفری از تابع تبدیل که از دیگر صفر و قطب‌ها فاصله خیلی زیادی دارد عملاً هرگز اتفاق نمی‌افتد (در بی‌نهایت اتفاق می‌افتد) و نیاز نیست نگران از بین رفتن خروجی توسطش باشیم.

یکی از قضایایی که در لاپلاس وجود دارد قضیه مقدار اولیه و نهایی است که در ادامه لینک آن در اختیاران قرار خواهد گرفت.

https://www.rcet.org.in/uploads/academics/rohini_86939877510.pdf

خاصیت تبدیل مشتق زمانی به ضرب در لاپلاس و همچنین اهمیت صفر و قطب در واکنش‌های دینامیکی سیستم به ورودی باز هم بیانگر مفهوم فرکانس هست و حالا سعی داریم بتوانم مفهوم برداشتی خود را بیان کنم.

در حوزه زمان مشتق به تغییرات یک تابع، که در کنترل تابع توصیف کننده سیستم است، نسبت به زمان می‌پردازد که می‌توان ارتباطش را با حوزه فرکانس به خوبی احساس کرد و به نوعی همان مفهوم فرکانس است. حال در این دو قضیه s به بی‌نهایت و صفر میل می‌کند که به خودی خود معانی متفاوت دارد. هنگامی که s را به بی‌نهایت میل می‌دهیم از قطب‌هایی با فاصله بیشتر از صفر عبور می‌کنیم که نشان دهنده بخش‌هایی از یک سیستم است که واکنش نسبتاً سریعی به ورودی‌ها می‌دهند و به عبارتی ثابت زمانی‌های کوچک را بررسی می‌کنیم و هنگامی که s به صفر میل می‌کند در واقع از قطب‌هایی عبور کرده‌ایم که فاصله کمتری از صفر دارند و نشان دهنده جوهی از سیستم است که نسبتاً کندتر به ورودی پاسخ می‌دهند یا به عبارتی ثابت زمانی بزرگتری دارند. حال با ترکیب این دو مفهوم می‌توان به این نتیجه رسید که رفتار اولیه سیستم مستقیماً وابسته به ثابت‌های زمانی کوچکتر ($s \rightarrow \infty$) یا همان فرکانس‌های بزرگتر) و میزان تغییرات آن که همان مفهوم مشتق است که در لاپلاس به صورت ضرب تابع تبدیل در s نمایش داده می‌شود وابسته است. همچنین مقادیر

نهایی رفتار دینامیکی یک سیستم وابسته به تغییرات آن سیستم در فرکانس های نزدیک به صفر که همان ثابت های زمانی بزرگ که در زمان کند تری واکنش سیستم را نشان می دهند وابسته است. لطفا توجه داشته باشید که این برداشت شخصی من از این قضیه است و بابت خطا احتمالی پیشاپیش پوزش می طلبم.

پس به طور کلی می توان گفت تغییرات شدید در حوزه زمان با شیب زیاد (همان مفهوم مشتق و نتیجتاً فرکانس) نشان می دهد که اجزای فرکانسی با فاصله زیاد از صفر قرار دارند و تغییرات آهسته، اجزای فرکانسی بیشتری در فرکانس های پایین دارد.

• فرکانس یا زمان

تحلیل در حوزه فرکانس نسبت به زمان مزایای قابل توجهی دارد که به درک بهتر و پردازش سیگنال ها کمک می کند. یکی از اصلی ترین دلایل برتری تحلیل فرکانسی، توانایی آن در نمایش ویژگی های سیگنالها به صورت واضح و دقیق تر است. در تحلیل فرکانسی، سیگنال ها به اجزای فرکانسی خود تجزیه می شوند، که این امر امکان شناسایی و تفکیک نوسانات مختلف را فراهم می آورد. به عنوان مثال، در سیگنال های پیچیده ای که شامل چندین فرکانس هستند، تحلیل فرکانسی می تواند به ما کمک کند تا بفهمیم کدام فرکانس ها بیشتر تأثیر گذارند و چگونه با یکدیگر تعامل میکنند.

علاوه بر این، تحلیل فرکانسی به ما این امکان را می دهد که رفتار سیستم ها را در شرایط مختلف بررسی کنیم. بسیاری از سیستم ها و فرآیندها در دنیای واقعی، مانند سیستم های الکترونیکی یا مکانیکی، به طور طبیعی پاسخ های فرکانسی خاصی دارند. با استفاده از تحلیل فرکانسی، میتوانیم پاسخ این سیستم ها را به ورودی های مختلف بررسی کرده و نقاط ضعف و قوت آنها را شناسایی کنیم. این نوع تحلیل به ما اجازه می دهد تا پیش بینی های دقیقی درباره رفتار آینده سیستم ها انجام دهیم.

از سوی دیگر، تحلیل زمان معمولاً به صورت نقطه ای و لحظه ای عمل می کند و قادر به ارائه اطلاعات جامع درباره تغییرات در طول زمان نیست. این محدودیت می تواند منجر به از دست رفتن اطلاعات مهمی شود که تنها در دامنه فرکانس قابل مشاهده اند. به عنوان مثال، در تحلیل سیگنال های صوتی، ممکن است تغییرات ناگهانی در زمان قابل توجه باشند، اما برای درک عمیق تری از ساختار صوتی، نیاز به تجزیه و تحلیل فرکانسی داریم.

در نهایت، یکی دیگر از مزایای مهم تحلیل فرکانسی قابلیت فشرده سازی اطلاعات است. با تبدیل سیگنال ها به حوزه فرکانس، می توانیم اطلاعات غیرضروری را حذف کرده و تنها بر روی اجزای مهم تمرکز کنیم. این امر به ویژه در پردازش سیگنال های دیجیتال و ذخیره سازی داده ها اهمیت دارد، زیرا می تواند حجم داده ها را کاهش دهد و کارایی پردازش را افزایش دهد.

به طور کلی، تحلیل در حوزه فرکانس به دلیل توانایی در شناسایی و تجزیه و تحلیل دقیق نوسانات و رفتار های سیستم ها، برتری قابل توجهی نسبت به تحلیل زمانی دارد. این ویژگیها باعث می شود که تحلیل فرکانسی ابزاری حیاتی در علوم مهندسی، فیزیک و حتی علوم اجتماعی باشد.

نهایتاً می توان حوزه فرکانس را جهانی ناشناخته دانست که هر کس تلاش می کند به اندازه خودش آن را درک کند.