1. 排列问题 ⇒ 考虑顺序

1.1 线排列

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

推论：$2\le r\le n$ 时 $p(n,r)=n\,p(n-1,r-1)$

$$=r\,p(n-1,r-1)+p(n-1,r)$$

例题：9 个字母单词 FRANGMENTS 进行排列，要求字母 A 总是紧跟在 R 的右边，则共有多少排法？

解：AR 可以是看成是一个字母

即 8个字母排列

$p(8,8)=8!$

1.2 圆排列 从 n 个元素中取出 r 个元素，排成一个圆

$$p(n,r)/r=\frac{n!}{r(n-r)!}$$

例题：8 个人围成圆桌就餐，一共有多少种就坐方式？如果有两个人不愿意坐在一起又存在多少种就坐方式？

解：(1) $p(8,8)/8$

(2) $p(8,8)/8\ \underbrace{-2}_{\text{两个人的顺序不同}}\times p(7,7)/7$

$=5\cdot p(7,7)$

例题：四男四女圆桌交替就坐方式？

解：$\underbrace{\frac{p(4,4)}{4}}_{\text{4个男生圆排列}}\times\underbrace{p(4,4)}_{\text{剩下的4个女生插空坐}}$

1.3 重排列问题 每个元素允许出现多次

重集 $\{\infty\cdot b_1,\ \infty\cdot b_2,\ \infty\cdot b_3,\ \dots\}$ 的 r 排列数 n^r

例题：由 1,2,3,4,5,6 这六个数字能够组成多少个五位数？又能组成多少个大于 34500 的五位数？

解：(1) $n^r = 6^5$

(2) $4 \times 3 \times 2 \times 6 \times 5$

带约束的重排列

$n = n_1 + n_2 \cdots + n_k$

重集 $B = \{n_1 \cdot b_1, n_2 \cdot b_2, \cdots, n_k \cdot b_k\}$ 的全排列个数是 $n! / (n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!)$

例题：使用字母 A, B, C 组成五个字母的符号，要求在每一个符号中，A 至多出现 2 次，B 至多出现 1 次，C 至多出现 3 次，求此类符号的个数.

解：重集 $\{2 \cdot A, 1B \cdot 3C\}$ 全排列个数为

重集 $\{2A, B, 2C\}$，$\{2A, 3C\}$，$\{1A, 1B, 3C\}$ 的全排列和

即 $\frac{5!}{2! \times 2!} + \frac{5!}{2! \times 3!} + \frac{5!}{3!}$

2. 组合问题

从集中A $\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ 中取 r 个元素进行组合一共有 $C(n,r)$ 种方式

不考虑顺序

$C(n,r) = C(n, n-r)$

$C(n,r) = P(n,r)/r! = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$C(n,r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)$ Pascal 公式

$\sum_{i=0}^{n} C(n,i) = 2^n$

例题：请问数字 510510 可以被多少不同的奇数整除？

解：$510510 = 2 \times 5 \times 7 \times 3 \times 11 \times 13 \times 17$

$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6$

例题：从 1,2,...,1000 中选出三个整数，有多少种选法使得所选的三个整数的和能够被 3 整除？

解：首先根据对3取模的值对 1-1000中的数进行分类

A：取模得 0的有 333个数

B：取模得 1的有 334个数

C：取模得2的有333个数

① 从A中取3个：C_{333}^{3}

② 从B中取3个：C_{334}^{3}

③ 从C中取3个：C_{333}^{3}

④ 从A,B,C中各取一个：$C_{333}^{1} \times C_{334}^{1} \times C_{335}^{1}$

2.1 重复组合问题

$B=\{\infty \cdot b_1, \infty b_2, \infty b_3 \cdots \infty \cdot b_n\}$ 中重复的取r个数

$F(n,r) = C(n+r-1, r) = \frac{P(n+r-1, r)}{r!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

例题：某一个餐厅有7种不同的菜，为了招待朋友一个顾客需要买14个菜，请问共有多少种买法？

解：$B\{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, \cdots \infty b_7\}$ 中的14组合问题

其中 $n=7, r=14$

$F(n,r) = C(n+r-1, r) = C(20,14)$

例题：求 n 个无区别的球放入 r 个有标志的盒子中 $(n \geq r)$ 而无一空盒的放法.

解：问题可等价为 n-r个球 放入 r个有标志的盒子中

即 $B\{\infty b_1, \infty b_2, \cdots \infty b_r\}$ 的 n-r 组合数

为 $F(r, n-r)$

由r个盒子中取 n-r 个数

例题：求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 的非负整数解的个数. 其中 r, n 均为正整数.

解：对于重集 $B\{\infty b_1, \infty b_2, \cdots \infty b_n\}$ 的r组合数

任意的一个r组合 $\{x_1 b_1, x_2 b_2, \cdots x_n b_n\}$ 都满足

$x_1 + x_2 + \cdots x_n = r$ 且 x_i 是非负数

故 $x_1 + x_2 + \cdots x_n = r$ 的非负数解个数就是 $F=(n,r)$