1. 一般鸽笼原理

如果把$n+1$个物体放到n个盒子中去，则至少有一个盒子中放有两个或更多的物体

推论 $n(r-1)+1$个物体放入n个盒子中，则至少存在一个盒子放有不少于r个物体

2.1 在某中学 A 班有 50 名学生，其中年龄最小的是 15 岁，最大的是 18 岁．证明这个班中至少有两个学生是同年同月生的．

证明：$50 > 49 = 4\times(13-1)+1$

由鸽笼原理推论可得

50个人中至少有13个人同年生

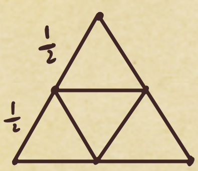
$13 = 12(2-1)+1$

由鸽笼原理推论可得

13个人中至少有两个人同月生

2.3 在边长为 1 的正三角形内任意放置 5 个点，则其中至少有两个点的距离$\leq 1/2$．

解：将正三角形如图划分4个小正三角形（边长为$\frac{1}{2}$）



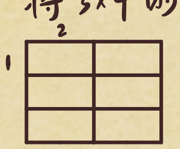
由鸽笼原理可得：

5个点至少有2个点会在同一个小三角形内

在同一个小三角形内的2点距离一定 $\leq \frac{1}{2}$

在 3×4 的长方形内任意放置 7 个点，则其中至少有两点的距离$\leq\sqrt{5}$．

解：将3×4的长方形如下划分成6个小长方体



由鸽笼定理可得

在长方体中放置7个点，一定会有两个点，

在同一个小长方体内

这两个点的距离一定小于对角线距离

2.6 任给 5 个整数，则必能从中选出 3 个，使得它们的和能被 3 整除.

解：任取一个整数对 3 取余，结果一定在 0,1,2 中
将 0 1 2 看作 3 个盒子，5 个数的余数看作 5 个个体
可分下列 3 种情况讨论
① 若两个盒子是空的
② 若一个盒子是空的
③ 三个盒子都不空

① 5 个数的余数相同任选 3 个的和肯定能被 3 整除
② 5 个数放入两个盒子中
$5 \geq 2\times(r-1)+1 = 2\times(3-1)+1$
由鸽笼原理推论 1 可得 至少有 3 个数在一个盒子里
选择在同一个盒子里的 3 个数的和肯定能被 3 整除
③ 5 个数放入 3 个盒子中
每个盒子选一个数，之和一定能被 3 整除

2.7 一个学生打算用 37 天总共 60 学时自学一本书，他计划每天至少自学 1 学时，证明：无论他怎样安排自学时间表，必然存在相继的若干天，在这些天内其自学总时数恰好为 13 学时（假定每天自学学时数为整数）.

证明：设 a_i 是前 i 天学习时长的和
显然 a_i 是严格递增的 且 $a_i \geq 1$ $a_{37}=60$
故 $a_1+13, a_2+13, \cdots a_i+13$ 也是严格递增的 $a_{37}+13=73$
$a_1, a_2, \cdots a_{37}, a_1+13, a_2+13, \cdots a_{37}+13$ 一共 74 个数
数值在 1 到 73 之间
由鸽笼原理可得 一定有两个数相等
由于 $a_1 \sim a_{37}$ 和 $a_1+13 \sim a_{37}+13$ 都是严格递增的即不存在相等的数
故一定存在 $a_i = a_j + 13$ 即第 i 天到第 j 天学习总时长为 13 学时
综上得证

2. Ramsey 定理

Ramsey定理就解决一个问题 即 要想要 a个人相识或b个人不相识需要有多少个人：$R(a,b)$

$R(a,b)$ 给出的是一个上界 不一定是最好的结果

$R(a,b) \le R(a-1,b) + R(a,b-1)$

常用的Ramsey数

$R(a,b) \le R(a-1,b) + R(a,b-1) - 1$

$R(3,3) = 6$

$R(3,4) = R(4,3) = 9$

$R(3,5) = R(5,3) = 14$

$R(a,2) = a$

3. 求证：24 个人中有 4 个人相识或 4 个人不相识。

证明：$R(4,4) \le R(3,4) + R(4,3)$

$= 9+9 = 18 < 24$

由Ramsey定理可得

18个人中一定有4个人相识或4个人不相识

故得证