1. 常系数线性齐次递归关系式

$\underbrace{\text{常系数}}_{\text{系数是常数}}\underbrace{\text{线性}}_{a_n\text{的系数是 }1}$

例 求递归关系式 $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$

解：① 定义特征方程

$$x^2 = x + 1$$

② 解特征根

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

③ 得到的通解为

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

④ 确立 c_1 和 c_2

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解得 $c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$c_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

⑤ 得到 $F(n)$

$$F_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

例2：$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} \\ a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0 \end{cases}$

解：① 定义特征方程

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

② 解特征根

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^2-1)(x-2) = 0$$

$$q_1 = 1,\ q_2 = -1,\ q_3 = 2$$

③ 得到通解为

$$F_n = c_1 + c_2 \cdot (-1)^n + c_3 \cdot 2^n$$

④ 确立 c_1, c_2, c_3

$$c_1+c_2+c_3=1$$
$$c_1-c_2+2c_3=2$$
$$c_1+c_2+4c_3=0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

可得 $c_1=2 \quad c_2=-\frac{2}{3} \quad c_3=-\frac{1}{3}$

⑤ $F(n)=2+(-1)^n\cdot(-\frac{2}{3})+(-\frac{1}{3})\cdot 2^n$

例3 求递归关系式 $\begin{cases} a_n=2a_{n-1}-a_{n-2} \\ a_1=2,\ a_2=3 \end{cases}$ 有重根的情况

解 ① 定义特征方程

$x^2-2x+1=0$

② 解特征根

$q_1=q_2=1$

③ 得到通解为

$a_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n n$

$=c_1+c_2n$

④ 确定 c_1, c_2

$\begin{cases} c_1+c_2=2 \\ c_1+2c_2=3 \end{cases}$ 解得 $c_1=c_2=1$

⑤ $F_n=n+1$

2. 常系数线性非齐次关系式

在齐次的基础上加一个 $f(n)$

求解方法：非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解

$a_n = a_n^* + \overline{a_n}$

只有当 $f(n)$ 满足某些条件时 才有规范解法

(1) $f(n)$ 是 n 的 k 次多项式

① 1不是导出齐次关系式的特征根

$\overline{a_n} = A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k$

② 1是导出齐次关系式的m重特征根

$\overline{a_n} = (A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots A_k) \cdot n^m$

(2) $f(n)$ 是 β^n 的形式

① β不是导出齐次关系式的特征根

$\overline{a_n} = A \cdot \beta^n$

② β是导出齐次关系式的k重特征根

$\overline{a_n} = A n^k \beta^n$

例：求 $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2) \\ a_1 = 1 \end{cases}$ 的关系式

解

① 导出非齐次递归关系式的特征方程

$x = 2$

② 求特征根

$q = 2$

③ 求导出非齐次递归关系式的通解

$a^* = c \cdot 2^n$

④ 求齐次递归关系式的特解

$\overline{a_n} = A$

⑤ 代入 a_n 关系式得

$A = 2A + 1 \Rightarrow A = -1$

$\overline{a_n} = -1$

⑥ 写出 a_n 通解

$a_n = a_n^* + \overline{a_n} = c \cdot 2^n - 1$

⑦ 确立 c

$a_1 = 2c - 1 = 1 \Rightarrow c = 1$

⑧ $a_n = 2^n - 1$

例 $\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} + n + 3 \\ a_0 = 3 \end{cases}$ 求递推关系.

解 导出非齐次递归关系式特征方程为

$x = -2$

特征根 $q = -2$

通解 $a_n^* = c \cdot (-2)^n$

特解 $\overline{a_n} = A_0 n + A_1$

$A_0 n + A_1 = -2(A_0(n-1) + A_1) + n + 3$

$= (-2A_0 + 1)n - 2A_1 + 3 + 2A_0$

可得: $\begin{cases} A_0 = -2A_0 + 1 \\ A_1 = -2A_1 + 3 + 2A_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{1}{3} \\ A_1 = \frac{11}{9} \end{cases}$

即 $\overline{a_n} = \frac{1}{3}n + \frac{11}{9}$

$a_n = a_n^* + \overline{a_n} = c(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{11}{9}$

代入 a_0 可得: $c = \frac{16}{9}$

$a_n = \frac{16}{9}(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{11}{9}$

例 求递推关系. $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$

解: 导出的非齐次特征方程

$x = 1$

特征根 $q = 1$

则 $a_n^* = c(1)^n = c$

特解 $\overline{a_n} = (A_0 n + A_1)n^1$

$A_0 n^2 + A_1 n = A_0(n-1)^2 + A_1(n-1) + 2n - 2$

$= A_0(n^2 - 2n + 1) + A_1(n-1) + 2n - 2$

可得 $\begin{cases} A_1 - 2A_0 + 2 = A_1 \\ A_0 - A_1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = -1 \end{cases}$

$\overline{a_n} = n^2 - n$

可得通解为 $a_n = \overline{a_n} + a_n^* = n^2 - n + c$

代入a_1可得：$c=2$

$a_n=n^2-n+2$

例 求递归关系 $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=2^n$ 的通解

解：导出非齐次关系式的特征方程为

$x^2-4x+4=0$

特征根 $q_1=q_2=2$

$a_n^*=c_1\cdot q_1^n+c_2\cdot n\cdot q_2^n$

$=c_1\cdot 2^n+c_2\cdot n\cdot 2^n$

特解：$\overline{a_n}=An^2\cdot 2^n$

$An^2\cdot 2^n-4A2^{n-1}\cdot(n-1)^2+4A2^{n-2}\cdot(n-2)^2=2^n$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{1}{2}n^2\cdot 2^n+c_1\cdot 2^n+c_2\cdot n\cdot 2^n$