PERSAMAAN LANJAR (LINEAR)

Metode Gauss Seidel

Teknik Informatika
Politeknik Negeri Malang
2025

Persamaan Lanjar

Persamaan lanjar atau linear adalah persamaan matematis yang menggambarkan hubungan antara variabel yang memiliki pangkat tertinggi satu. Dalam bentuk umum, persamaan linear dapat dituliskan sebagai:

$$ax + b = 0$$

atau dalam bentuk yang lebih umum untuk dua variabel:

$$ax + by + c = 0$$

di mana:

- a, b, dan c adalah konstanta (angka tetap),
- x dan y adalah variabel,
- a dan b tidak boleh keduanya sama dengan nol

Persamaan Lanjar

Persamaan lanjar merupakan suatu bentuk persamaan-persamaan yang menyajikan banyak variabel bebas

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Penyelesaian

LANJAR

METODE GAUSS

METODE GAUSS - JORDAN

METODE GAUSS - SEIDEL

Metode Gauss - Seidel

- Merupakan metode iterasi
- Prosedur umum:
  - Selesaikan secara aljabar variabel tidak diketahui x_i masing-masing persamaan linier
  - Asumsikan suatu nilai awal pada setiap penyelesaian
  - Selesaikan masing-masing x_i dan ulangi
  - Hitung nilai mutlak dari kesalahan perkiraan relatif setelah masing-masing iterasi sehingga kurang dari nilai toleransi.

Metode Gauss - Seidel

- Metode Gauss-Seidel Method membolehkan pengguna untuk mengkontrol *round-off error*.
- Juga, bila bentuk dari masalah dapat dipahami, dapat ditentukan nilai perkiraan awal yang lebih dekat, sehingga menghemat waktu iterasi.

Metode Gauss - Seidel

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & + & \ldots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & + & \ldots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\
a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & + & \ldots & + & a_{3n} & x_n & = & b_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & a_{n3} & x_3 & + & \ldots & + & a_{nn} & x_n & = & b_n
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boldsymbol{x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1})}$$

Metode Gauss - Seidel

- Selesaikan bilangan yang tidak diketahui.
- Asumsikan suatu nilai perkiraan untuk [X] $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$
- Gunakan persamaan yang telah ditulis ulang untuk menyelesaikan masing-masing nilai x_i.
- Penting:
  - ***Gunakan nilai terbaru x_i untuk setiap iterasi persamaan berikutnya***

Metode Gauss Seidel

Tinjau sistem 3 persamaan dengan 3 variabel yang tidak diketahui:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Metode ini diterapkan hanya jika elemen diagonal lebih besar dari jumlah semua elemen pada persamaan tersebut, yaitu:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

Metode Iterasi Gauss Seidel

Kita mulai dengan men-set nilai awal x_1, x_2 dan x_3 sebagai nol. Selesaikan x_1, x_2 dan x_3 sebagai variabel lain, yaitu:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)$$

Nilai di atas adalah nilai awal $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ dan $x_3^{(0)}$.

Kita lanjutkan dengan nilai awal $x_2^{(0)}$ dan $x_3^{(0)}$ dari persamaan pertama, yaitu:

Metode Iterasi Gauss Seidel

Kita lanjutkan dengan nilai awal $x_2^{(0)}$ dan $x_3^{(0)}$ dari persamaan pertama, yaitu:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right)$$

Kemudian kita hitung $x_2^{(1)}$ dengan menggunakan nilai baru $x_1^{(1)}$ dan $x_3^{(0)}$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}\right)$$

Dengan cara yang sama, kita hitung $x_3^{(1)}$ dengan menggunakan nilai baru $x_1^{(1)}$ dan $x_2^{(1)}$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(1)}x_2 - a_{32}x_2^{(1)}\right)$$

Metode Iterasi Gauss Seidel

Kemudian, dengan menggunakan nilai baru $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ dan $x_3^{(1)}$, kita lakukan iterasi berikutnya:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)}\right)$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(2)} - a_{23}x_3^{(1)}\right)$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(2)}x_2 - a_{32}x_2^{(2)}\right)$$

Metode Iterasi Gauss Seidel

Ulangi proses dengan cara yang sama, sehingga nilai iterasi ke-r adalah $x_1^{(r)}$, $x_2^{(r)}$ dan $x_3^{(r)}$:

$$x_1^{(r+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(r)} - a_{13}x_3^{(r)}\right)$$

$$x_2^{(r+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(r+1)} - a_{23}x_3^{(r)}\right)$$

$$x_3^{(r+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(r+1)} - a_{32}x_2^{(r+1)}\right)$$

Iterasi tersebut terus dilakukan hingga dua nilai yang dihasilkan berturut-turut sama.

Metode Iterasi Gauss Seidel

Contoh 1:

Selesaikan sistem persamaan linier berikut:

$$2x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 + 4x_2 = 12$$

dengan nilai awal: $x_1 = 1$ dan $x_2 = 1$.

Buatlah persamaan di atas menjadi:

$$x_1 = (10 - x_2)/2$$
$$x_2 = (12 - x_1)/4$$

$$x_1 = (10 - 1)/2 = 4.5$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - 4.5) = 1.875$$

$$x_1 = (10 - 1.875)/2 = 4.0625$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - 4.0625) = 1.984375$$

$$x_1 = (10 - 1.984)/2 = 4.008$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - 4.008) = 1.998$$

$$x_1 = (10 - 1.998)/2 = 4.001$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - 4.001) = 1.99975$$

$$x_1 = (10 - 1.99975)/2 = 4.000125$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - 4.000125) = 1.9999687$$

$$x_1 = (10 - 1.9999687)/2 = \mathbf{4.000016}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(12 - 4.000016) = \mathbf{1.999996}$$

Metode Iterasi Gauss Seidel

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metoda Gauss-Seidel:

$$10x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3$$

$$4x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -3$$

$$x_1 + 6x_2 + 10x_3 = -3$$

Solusi: Untuk menerapkan metoda ini, pertama harus dicek bahwa elemen diagonal melebihi nilai elemen lainnya $\rightarrow$ 10 > 5 + 2 ; 10 > 4 + 3 ; 10 > 1 + 6. Sehingga metode iterasi ini dapat diterapkan

Metode Iterasi Gauss Seidel

$10x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3$

$4x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -3$

$x_1 + 6x_2 + 10x_3 = -3$

$$x_1 = \frac{1}{10}(3 + 5x_2 + 2x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{-10}(-3 - 4x_1 - 3x_3) \leftrightarrow x_2 = \frac{1}{10}(3 + 4x_1 + 3x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{10}(-3 - x_1 - 6x_2)$$

Iterasi pertama: dimulai dengan $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(3) = 0{,}3 \ldots .(1)$$

Gunakan nilai baru x_1 untuk perhitungan selanjutnya, yaitu:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(3 + 4(0{,}3) + 3(0)) = 0{,}42$$

Gunakan nilai $x_1 = 0{,}3$ dan $x_2 = 0{,}42$ untuk mencari x_3

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(-3 - 0{,}3 - 6(0{,}42)) = -0{,}582$$

Metode Iterasi Gauss Seidel

Iterasi kedua: gunakan $x_2^{(1)} = 0{,}42$ dan $x_3^{(1)} = -0{,}582$ di persamaan pertama

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}\big(3 + 5(0{,}42) + (-0{,}582)\big) = 0{,}3936$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}(3 + 4(0{,}3936) + 3(-0{,}582)) = 0{,}28284$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\big(-3 - 0{,}3936 - 6(0{,}28284)\big) = -0{,}509064$$

Iterasi ketiga: masukkan nilai $x_1^{(2)} = 0{,}3936$, $x_2^{(2)} = 0{,}28284$ dan $x_3^{(2)} = -0{,}509064$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{10}(3 + 5(0{,}28284) + (-0{,}509064)) = 0{,}3396072$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{10}(3 + 4(0{,}3396072) + 3(-0{,}509064)) = 0{,}28312368$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10}(-3 - 0{,}3396072 - 6(0{,}28312368)) = -0{,}503834928$$

Metode Iterasi Gauss Seidel

Hasil dari iterasi berikutnya ditampilkan pada tabel berikut:

Iterasi ke-	x_1	x_2	x_3
4	0,34079485	0,28516746	-0,50517996
5	0,3415547	0,28506792	-0,505196229
6	0,3414947	0,2850390	-0,5051728
7	0,3414849	0,28504212	-0,5051737

Sehingga solusinya adalah $x_1 = 0{,}341$, $x_2 = 0{,}285$ dan $x_3 = -0{,}505$

Tugas

Selesaikan sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan metode Gauss-Seidel

$$\boxed{\begin{aligned} &4x_1 + 2x_2 = 20 \\ &x_1 + 4x_2 = 12 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &6x - 2y + 3z = -19 \\ &2x - 5y + z = -11 \\ &x + 2y - 5z = 18 \end{aligned}}$$

Referensi

Munir, Rinaldi. 2008. Metode Numerik Revisi Kedua. Informatika Bandung: Bandung

Cahya Rahmad, ST, M.Kom. Dr. Eng, “Diktat Kuliah Matematika Numerik”, Program Studi Manajemen Informatika, Politeknik Negeri Malang

TERIMA KASIH