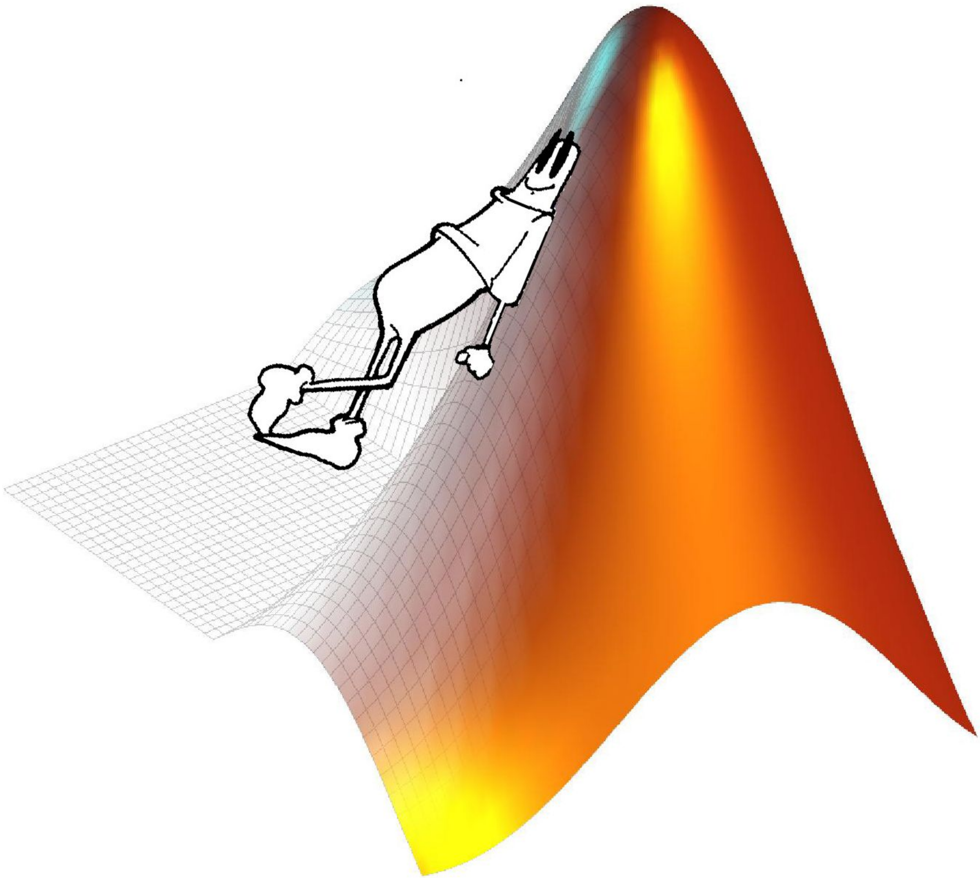
Cálculo simbólico em MATLAB



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

Conteúdo

1 Introdução **2**

2 Operações com variáveis simbólicas **3**

3 Gráficos **5**

4 Limites e séries **7**

5 Derivadas **9**

6 Integrais e Áreas **11**

7 Transformadas **13**

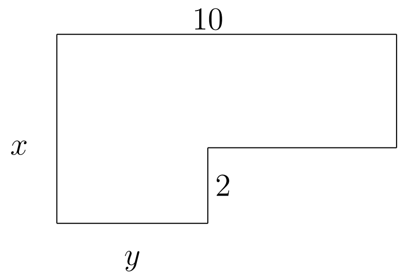
8 Equações Diferenciais **15**

Capítulo 1

Introdução

Considere o seguinte problema

Na figura seguinte está representado o jardim do Rui. Os valores estão em metros.



1. *Determine a expressão simplificada que permite calcular a área do jardim.*

2. *Considerando $x = 7$ e $y = 4$, calcule a área do jardim.*

3. *Se x for o dobro de y, qual a área do jardim?*

4. *Sabendo que a área é $46m^2$ e que x é o dobro de y, calcule o valor de y.*

Neste problema os valores de x e de y não são conhecidos, então para realizarmos os cálculos consideramos x e y variáveis. No Matlab este tipo de variáveis chamam-se variáveis simbólicas. Antes de qualquer operação, onde se tem x, y ou qualquer outra letra como variável, é preciso definir essas variável, para isso usa-se o comando:

```
>>syms x y
```

Dessa forma estará a indicar que quaisquer x e y que for colocado nas funções é uma variável simbólica e não um número conhecido.

Capítulo 2

Operações com variáveis simbólicas

O Matlab realiza todas as operações elementares entre expressões simbólicas utilizando a sintaxe comum, como mostra a figura 2.1.

Para além das operações elementares por vezes é necessário indicar explicitamente o que se

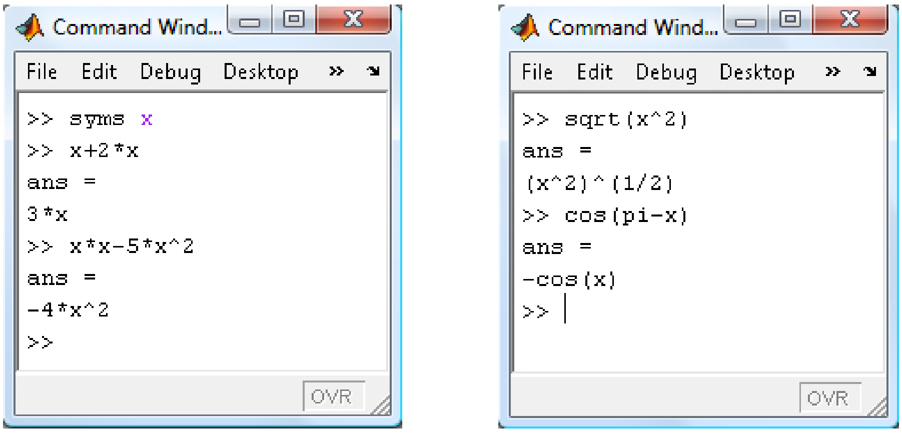


Figura 2.1: Operações matemáticas

pretende pois, por exemplo, $2x(2x+2)-4(x+1)$ é equivalente a $4x^2-4$ mas também é equivalente a $4(x-1)(x+1)$. Umas vezes é mais conveniente a primeira representação e outras vezes a segunda. Para resolver esta ambiguidade existem os comandos `simplify`, `expand`, `factor` e `collect`, entre

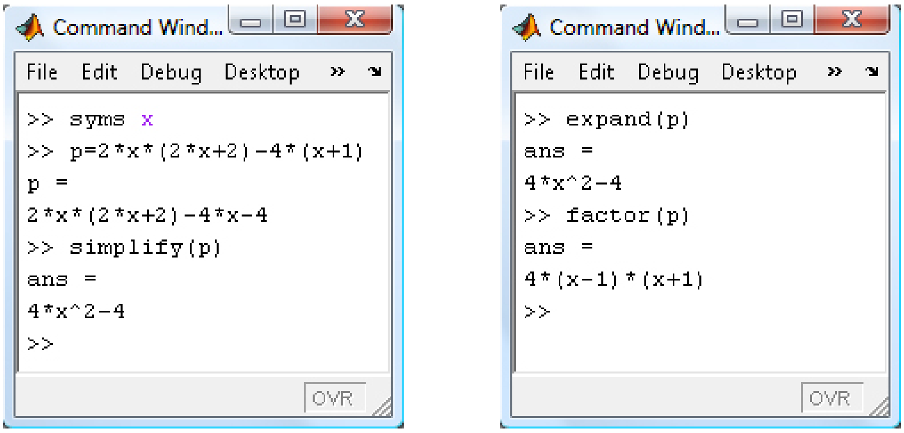


Figura 2.2: Comandos simplify, expand e factor

outros. A figura 2.2 mostra como se utilizam e o resultado.

Para substituir uma variável numa expressão simbólica o Matlab possui o comando `subs`. A forma de o utilizar é `subs(expressão,variável,valor)`, por exemplo

`>>subs(4*x^2-4,x,2)`

Um problema bastante comum com variáveis é o seu cálculo através de equações. Para este problema existe no Matlab o comando `solve`.

`>>solve(x^2-2*x+1)` calcula as soluções da equação $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Exercícios

1. Factorize o seguinte polinómio
$$x^3 - 13x + 12$$

2. Num deserto, existem camelos e dromedários, num total de 63 bossas. O número de camelos é igual ao triplo do número de dromedários. Quantos animais de cada espécie existem nesse deserto?

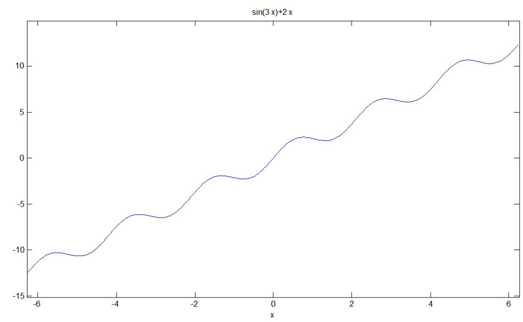
3. Quando o Tomé nasceu, o pai tinha 31 anos. Há cinco anos, o pai do Tomé tinha o dobro da idade do filho. Determine a idade actual do pai e do filho?

4. A Ana, o Pedro e o Vítor foram colher tangerinas. A Ana colheu três vezes mais do que o Pedro, e o Vítor colheu mais quatro do que os outros dois em conjunto. No total colheram 212 tangerinas. Quantas colheu cada um?

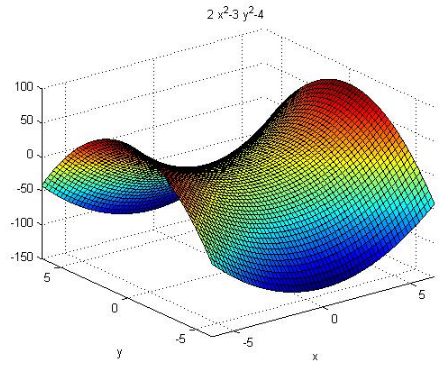
Capítulo 3

Gráficos

Aproveitando as capacidades simbólicas e gráficas do matlab existe o comando `ezplot`.
Este comando desenha, de uma forma simples, o gráfico de uma função $y = f(x)$, por exemplo
`>>ezplot(sin(3*x)+2*x)`
apresenta o gráfico da função $f(x) = sin(3x) + 2x$ no intervalo, por defeito, $[-2\pi, 2\pi]$. No gráfico



anterior o eixo das abcissas foi definido automaticamente, mas pode ser introduzidos pelo utilizador da forma:
`>>ezplot(sin(3*x)+2*x,[1,2])`
Podemos também representar funções implícitas, por exemplo o comando
`>>ezplot(y^2-6*y-x+5)`
representa a região definida por $y^2 - 6y - x + 5 = 0$.
Todos os comandos para alterar o aspecto do gráfico que existiam para o comando `plot`, também funcionam para este comando.
Para gráficos de superficies a 3 dimensões o comando é `ezsurf`. A sua utilização é semelhante à do comando `surf`, mas mais simples.
A instrução
`>>ezsurf(2*x^2-3*y^2-4)`.
Desenha o gráfico da função $z = 2x^2 - 3y^2 - 4$, como mostra a figura.
Todos os comandos para alterar o aspecto do gráfico que existiam para o comando `surf`, também funcionam para este comando.



Exercícios

Resolva graficamente os problemas seguintes.

1. Um cavalo e um burro caminhavam juntos, levando no lombo sacos muito pesados, todos com o mesmo peso. Lamentava-se o cavalo da sua pesada carga, quando o burro lhe disse:" De que te queixas? Se eu levasse um dos teus sacos a minha carga seria o dobro da tua. E se eu te desse um saco, a tua carga seria igual à minha!".
   Quantos sacos levava cada animal?

2. Um fabricante de cestos ganha 3 euros por cada cesto que fabrica sem defeito e perde 5 euros por cada cesto que fabrica com defeito.
   Numa semana fabricou 160 cestos e obteve um lucro de 400 euros.
   Quantos cestos com defeito foram produzidos?

3. Numa experiência laboratorial verificou-se, durante 240 horas, que a taxa de crescimento de uma colónia de bactérias, t horas após o início da experiência, era de:
   $C(t) = -0.0001t^3 + 0.02t^2 + 0.2t + 0.2$ bactérias por hora $(0 \leq t \leq 240)$.
   Recorrendo às capacidades gráficas do Matlab, esboce o gráfico da função C e recolha os valores que lhe permitem responder, com aproximações às unidades, às questões seguintes.

   (a) Quantas horas tinham decorrido quando se verificou que a taxa de crescimento da colónia era nula?

   (b) Qual foi a taxa de crescimento máxima?
   Em que instante se verificou?

4. Num pomar, a quantidade de fruta apanhada depende do número de pessoas empregues, n, e do número de horas que elas trabalham, t, segundo a fórmula

$$f(n,t) = 4nte^{-0.1n-0.2t}$$

   Encontre graficamente o número de pessoas e o tempo gasto de modo que apanhem o máximo de fruta.

Capítulo 4

Limites e séries

Para calcular o limite de uma função ou sucessão no MATLAB, o comando que se deve utilizar é `limit`.

A forma mais simples é

```
>>limit(f(x),x,a)
```

onde `f(x)` é a função para a qual se quer calcular o limite, `x` é a variável e `a` e o valor para o qual o `x` está a tender ($x \to a$).

Por exemplo para calcular o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{sin(x-1)}{1-x}$$

o comando é

```
>>limit(sin(x-1)/(1-x),x,1)
```

Existe também a opção dos limites laterais. Basta indicar qual a direcção da forma

```
>>limit(f(x),x,a,'left')
```

ou

```
>>limit(f(x),x,a,'right')
```

onde `left` indica o limite à esquerda e `right` o limite à direita. Se pretendermos calcular a soma de alguns, ou todos os termos de uma sucessão temos o comando `symsum`.

O comando utiliza-se da forma

```
>>symsum(u(n),n,a,b)
```

onde `u(n)` é o termo geral da sucessão, `n` é a variável simbólica, `a` é a ordem do primeiro termo e `b` a ordem do último termo.

Se pretendêssemos calcular a soma dos 100 primeiros termos da sucessão $u_n = \frac{4n+1}{n+3}$ o comando seria

```
>>symsum((4*n+1)/(n+3),n,1,100)
```

Exercícios

1. Calcule os seguintes limites.

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{1-x^2}$

(c) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-1}{(x-3)^3}$

2. Calcule as seguintes somas.

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{20}$

(b) $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2$

(c) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$

3. Uma mancha circular de crude é detectada a 5 km da costa.

O comprimento, em quilómetros, do raio dessa mancha, t horas após ser detectada é dado por

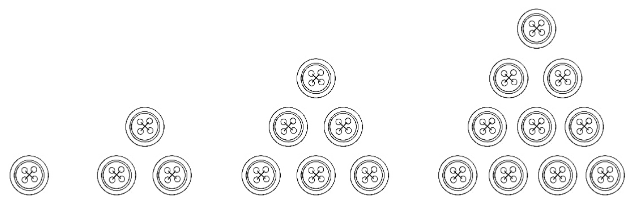
$$r(t) = \frac{1+4t}{2+t}$$

Se não for tratada a mancha vai chegar à costa?

4. Um cliente maçador sempre aborrecia o seu alfaiate com pedidos insistentes de descontos. Certa vez, tratava-se dum fato de 250 euros. O alfaiate, já farto, disse-lhe: " *Pois então leve o fato de graça e pague-me só os 12 botões do casaco: 1 euro pelo primeiro botão, 2 pelo segundo, 4 pelo terceiro, 8 pelo quarto e assim sucessivamente...*" Encantado, o cliente aceitou o negócio. Quem ficou a lucrar?

5. Aquiles e uma tartaruga partem numa corrida. Como Aquiles corre dez vezes mais depressa que a tartaruga deu um avanço de 100 metros à tartaruga. Será que Aquiles alcança a tartaruga? Se sim , ao fim de quantos metros?

6. A Mariana está a brincar com os botões que a mãe tem guardados. Começou a construir as seguintes figuras:



Quantos botões tem a figura numero 6? Quantos botões são necessários para fazer as primeiras 20 figuras?

Capítulo 5

Derivadas

Para se calcular a derivada o comando é `diff`.

A forma mais simples de o utilizar é:

```
>>diff(f(x))
```

onde `f(x)` é a função que se pretende derivar.

Por exemplo, o comando

```
>>diff(sin(2*x))
```

Devolve a resposta `ans=2*cos(2*x)` que é a derivada de $sin(2x)$. Para se calcular as derivadas de ordem superior deve-se indicar qual a ordem da derivada, da forma

```
>>diff(f(x),n)
```

onde `f(x)` é a função que se pretende derivar e `n` a ordem da derivada.

Por exemplo, o comando

```
>>diff(sin(2*x),2)
```

Devolve a resposta `ans=-4*sin(2*x)` que é a 2ª derivada de $sin(2x)$.

É de notar que a função pode ter outras variáveis. Nesse caso o Matlab procura primeiro qual a variável simbólica que existe na expressão de f. Se existirem mais que uma variável ele possui uma lista de ordenação.

Exercícios

1. Calcule a primeira derivada das seguintes funções.

   (a) $f(x) = 2x^2 + 3x$

   (b) $g(x) = tan(3x + 5)$

   (c) $h(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

2. Calcule a segunda derivada das seguintes funções.

   (a) $f(x) = 2x^3 - 3x$

   (b) $g(x) = ln(3x + 5)$

(c) $h(x) = \frac{e^{2x}}{x-1}$

3. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.

   Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por:

   $$v(t) = -3ln(1 - 0.005t) - 0.01t$$

   A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.

   Indique uma expressão para a aceleração em cada instante.

4. Numa fábrica, o custo de produção mensal de p milhares de peças é dado por

   $$c(p) = 10p^3 - 210p^2 + 1350p + 270 \quad \text{em milhares de euros}$$

   O custo marginal da produção de p peças é igual a $c'(p)$.

   Determine o custo marginal quando se produzem 4000 peças.

Capítulo 6

Integrais e Áreas

No cálculo de primitivas o comando a utilizar é `int`.

A utilização deste comando é

`>>int(f(x))`

Onde $f(x)$ é a função que se pretende primitivar.

Por exemplo, se pretendermos calcular a primitiva de $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 1$ a instrução é:

`>>int(6*x^3-2*x^2+1)`

Se o que pretendemos calcular é o integral do tipo

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

Simplesmente temos de indicar os extremos da forma

`>>int(f(x),a,b)`

por exemplo

`>>int(6*x^3-2*x^2+1,1,2)`

Obs: Os valores `a` e `b` também podem ser infinitos. Por exemplo a instrução

`>>int(exp(-x),0,inf)`

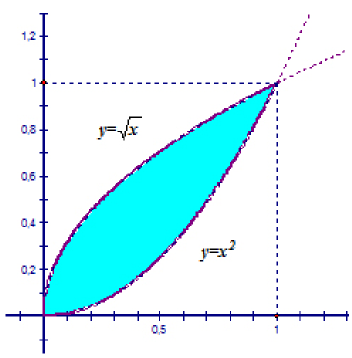
devolve a resposta `ans=1` pois

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = 1$$

O comando `int` pode ser utilizado para calcular áreas limitadas por curvas.

Por exemplo se pretendermos calcular a área sombreada da figura

basta escrever



```
>>int(sqrt(x)-x^2,0,1)
```

Exercícios

1. Calcule uma primitiva das seguintes funções.

   (a) $f(x) = 2x^2 + 3x$

   (b) $g(x) = ln(3x + 5)$

   (c) $h(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

2. Calcule o valor dos seguintes integrais.

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{(x-3)^2}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 sin(x^2)\, dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2}\, dx$

3. Um móvel desloca-se em linha recta de modo que em cada instante a velocidade é determinada pela função:

$$v(t) = t^2 + 3t - 3 \quad (m/s)$$

   (a) Indique uma expressão que nos permite saber a posição no instante t.

   (b) Determine a distância à origem ao fim de 12 segundos.

4. Determine a área da superfície limitada pela parábola $y = \frac{x^2}{2} + 2$ e pela recta $y = x + 2$.

Capítulo 7

Transformadas

Transformada de Laplace
A transformada de Laplace de uma dada função $f(t)$ é outra função definida por

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt$$

O comando do Matlab para o cálculo da transformada de Laplace é: `>>laplace(f)`
por exemplo
`>>laplace(exp(-2*t))`
devolve o resultado `ans = 1/(s+2)` pois

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{-2t}\ dt = \frac{1}{s+2}$$

Transformada de Fourier
A transformada de Fourier de uma dada função $f(x)$ é outra função definida por

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} f(x)\ dx$$

O comando do Matlab para o cálculo da transformada de Laplace é: `>>fourier(f)`
por exemplo
`>>fourier(exp(-x^2))`
devolve o resultado `ans = pi^(1/2)*exp(-1/4*w^2)` pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx} e^{-x^2}\ dt = \sqrt{\pi} e^{\frac{-w^2}{4}}$$

Transformada em Z
A transformada em Z de uma dada sucessão $u(n)$ é uma função definida por

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(n)}{z^n}$$

O comando do Matlab para o cálculo da transformada de em Z é: `>>ztrans(u)`
por exemplo

```
>>ztrans(n^4)
```

devolve o resultado

`ans = z*(z^3+11*z^2+11*z+1)/(z-1)^5` pois

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{z^n} = \frac{z(z^3 + 11z^2 + 11z + 1)}{(z-1)^5}$$

Exercícios

1. Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções.

   (a) $f(t) = t^4 - 2t^2 + 1$

   (b) $f(t) = e^{2t} - cos(t)$

   (c) $f(t) = t^2 e^{3t}$

2. Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções.

   (a) $f(x) = e^{-2|x|}$

   (b) $f(x) = x^2 e^{|x|}$

3. Calcule a transformada em Z das seguintes sucessões.

   (a) $u(n) = n^2 + 2n$

   (b) $u(n) = cos(3\pi n)$

Capítulo 8

Equações Diferenciais

Quando se pretende resolver uma equação diferencial o comando a utilizar deve ser `dsolve`. Como o símbolo `'` está reservado para indicar texto não pode ser utilizado para indicar as derivadas. Então utiliza-se um `D`, da forma

```
y' -> Dy
y''-> D2y
y''' -> D3y
```

...

por exemplo

```
>>y=dsolve('Dy=1+y^2')
```

devolve o resultado

`y = tan(t+C1)` pois se $y(t) = tan(t + C_1)$

$$y' = 1 + tan(t + C_1)^2 = 1 + y^2$$

Se a equação diferencial tem valores iniciais, basta indicar, depois da equação, essa condição. por exemplo

```
>>y=dsolve('Dy=1+y^2','y(0)=1')
```

devolve o resultado

`y = tan(t+1/4*pi)` pois se $y(t) = tan(t + \frac{\pi}{4})$

$$y' = 1 + tan(t + \frac{\pi}{4})^2 = 1 + y^2 \text{ e } y(0) = tan(\frac{\pi}{4}) = 1$$

No caso de pretendermos resolver várias equações diferenciais simultâneas só temos de indicar todas as equações e as condições iniciais separadas por vírgulas. por exemplo

```
>>[x,y]=dsolve('Dx=y','Dy=-x','x(0)=2','y(0)=1')
```

devolve o resultado

```
x =2*cos(t)+sin(t)
y =-2*sin(t)+cos(t)
```

Exercícios

1. Calcule a solução das seguintes equações diferenciais.

   (a) $y' = \frac{y}{1-t^2}$

   (b) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$

   (c) $y'' - 2ty' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

2. Calcule a solução do sistema seguinte.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}, \quad \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array}$$