数学の基礎

nessinverse

2019 年 5 月 19 日

まえがき

内容

ZFC により展開される, 公理的集合論の初歩について扱う.

モチベーション

前提知識

[1] 程度の素朴集合論. すなわち, 素朴な集合, 関数, 関係, 順序の概念について既知であることが望ましい.

記法

- **ON** のように, クラスは太字で記述する. 通常の字体で記述されているものは集合である.
- インフォーマルな議論, すなわち「気持ち」を述べた正確でない議論には下線をつける.
  <u>これはインフォーマルな議論です.</u>

目次

1　数学の公理化

そもそも, 数学とはどのような行為かを思い返してみると,

- 数学的な対象を定義する
- 定義された対象が満たす, 定理を証明する

ことの繰り返しでした. 証明には一切の曖昧さを排し, 定義やこれまでに示した定理しか用いてはいけません. しかし素朴集合論の教えるところでは, そもそも集合の定義が厳密には与えられていませんでした.
今回は完全に公理化された集合論の体系を構築することで, 曖昧さを一切取り除くことにしましょう. この方法で数学は, 集合とは何か, 元が集合に属するとは何かについて言及することなしに証明という手続きによって定式化されます.

1.1　式と文

定義 1.1. 次に列挙するものを総称して**記号**という.

1. $\forall$ 全称量化
2. $\exists$ 存在量化
3. $\wedge$ 論理積
4. $\vee$ 論理和
5. $\neg$ 論理否定
6. $\to$ 含意
7. $=$ 等号
8. $\in$ 所属
9. (,) 括弧
10. $x_1, x_2, \ldots$ 変数

量化子と言えば $\forall, \exists$, **結合子**と言えば $\wedge, \vee, \neg, \to$, **述語**と言えば $=, \in$ を表す.

定義 1.2. 次の規則によって再帰的に定まる記号の列を**式**という.

1. 「変数, 述語, 変数」の形の記号列. （原子式）
2. 「(, 式, ）, 結合子, （, 式,)」の形の記号列. （結合）
3. 「量化子, 変数, （, 式,)」の形の記号列. （量化）

式が変数から始まっているか, 括弧から始まっているか, 量化子から始まっているかに注目すると, 式が 2 通り以上のやり方で形成されることはないことがわかる. この一意的な式の形成の途中の式のことを, 元の式の**部分式**という.

定義 1.3. 式 F の中に量化子 Q が現れているとする. Q の F における**スコープ**とは, 式 F の形成において Q が量化の手順で導入されたときの, 「Q, 変数, （, 式,)」なる F の部分式のこと.

定義 1.4. 式の中のある変数 x について, それが**束縛されている**とは, ある量化子のスコープにあることをい

う. それが**自由である**とは, 束縛されていないことをいう.
式が**文**であるとは, その式の中の全ての変数が自由であることをいう.

1.2 証明

定義 1.5.

2 順序数論

3 基数論

4 応用

参考文献

[1] 松坂和夫, 『集合・位相入門』, 岩波書店, 1968.