

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: aktuarialno-finansowa

Michał Ociepa

**Opracowanie i implementacja algorytmu do
kwantylowego hedgingu dla różnych funkcji straty**

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dra Michała Krawca

Wrocław 2022

Opracowanie i implementacja algorytmu do kwantylowego hedgingu dla różnych funkcji straty

Michał Ociepa

5 lutego 2022

Spis treści

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Opis modelu i podstawowe definicje matematyki finansowej | 4 |
| 1.1 | Opis modelu | 4 |
| 1.2 | Wycena europejskich roszczeń warunkowych | 7 |
| 1.3 | Zabezpieczenie opcji europejskich | 9 |
| 2 | Optymalny hedging dla funkcji wypukłej | 10 |
| 2.1 | Minimalizacja oczekiwanego niedoboru | 14 |
| 2.2 | Struktura zmodyfikowanego roszczenia | 16 |
| 2.3 | Potęgową funkcja straty | 19 |
| 3 | Optymalny hedging dla funkcji wklęsłej | 21 |
| 3.1 | Potęgową funkcja straty | 23 |
| 4 | Obliczenia dla modelu Blacka-Scholesa | 25 |
| 4.1 | Opcja kupna | 25 |
| 4.2 | Opcja sprzedaży | 31 |
| 4.3 | Przykład | 35 |
| 5 | Implementacja i analiza numeryczna | 41 |
| 5.1 | Symulacje Monte Carlo | 41 |
| 5.2 | Algorytm finite difference | 44 |
| 5.3 | Wyniki symulacji | 54 |

Wstęp i motywacja

Na rynku zupełnym, dowolne europejskie roszczenie warunkowe ma dokładnie jedną cenę V_0 . Cena ta pozwala nam w pełni zabezpieczyć się na wypłatę tej opcji poprzez stworzenie strategii samofinansującej. Załóżmy, że inwestor nie chce użyć pełnej kwoty V_0 w celu hedgingu opcji, a chce zabezpieczyć się mniejszym kapitałem początkowym oraz jest w stanie zaakceptować pewne ryzyko. W związku z tym potrzebujemy wykonać pewien optymalny częściowy hedging, którego kapitałem początkowym jest pewna ustalona kwota mniejsza od V_0 .

W pracy [1] jako kryterium optymalnego zabezpieczenia uznano minimalizację prawdopodobieństwa tego, że wartość roszczenia opcji w chwili wykonania jest większa od wartości strategii samofinansującej również w momencie wygaśnięcia opcji. W niniejszej pracy za kryterium optymalnego zabezpieczenia będziemy uznawać minimalizację ryzyka straty, czyli wartość oczekiwaną niedoboru ważoną przez pewną funkcję straty (formalna definicja tego kryterium znajduje się w rozdziale 2).

Cel pracy składa się z dwóch części. Pierwsza, związana jest z opracowaniem metod kwantylowego hedgingu dla różnych funkcji straty poprzez uzupełnienie i rozszerzenie dowodów z [3], tak by były bardziej klarowne. Wynikiem tej części poza strukturą optymalnego hedgingu, jest wyznaczenie jawnych wzorów na cenę oraz kwantylowy hedging opcji call i put dla modelu Blacka-Scholesa, sprowadzający się do zabezpieczenia zmodyfikowanych opcji kupna oraz sprzedaży. Drugą część celu pracy stanowi implementacja metod numerycznych pozwalających wykonywać optymalny kwantylowy hedging, dla klasy opcji niezależnych od ścieżki (również dla różnych funkcji straty).

W rozdziale 1 opisujemy model matematyczny, którego używamy do wyceny aktywów oraz przypominamy najważniejsze fakty dotyczące teorii wyceny i zabezpieczenia europejskich roszczeń warunkowych.

Następnie w rozdziale 2 oraz 3 pokazujemy istnienie rozwiązania kryterium optymalnego zabezpieczenia oraz podajemy postać na optymalny hedging dla wypukłej, liniowej oraz wklęsłej funkcji straty dla modelu, który opisaliśmy w rozdziale 1. Rozdziały te oparte są na [3], naszym celem było opisanie metody, za pomocą której otrzymujemy rozwiązanie problemu optymalizacyjnego, a także rozszerzenie najważniejszych dowodów z [3] by były bardziej przejrzyste.

W rozdziale 4 wyznaczyliśmy jawne wzory na cenę oraz zabezpieczenie zmodyfikowanych roszczeń warunkowych dla opcji call i put za pomocą twierdzeń z rozdziałów 2 oraz 3.

W ostatnim rozdziale opisujemy proste metody numeryczne, które pozwalają wyznaczyć postać zmodyfikowanego europejskiego roszczenia warunkowego, które rozwią-

zuje nasze kryterium optymalnego zabezpieczenia dla dowolnej opcji, która nie zależy od ścieżki, tzn funkcja payoffu pierwotnego roszczenia zależy wyłącznie od ostatniej ceny aktywa bazowego. Ponadto te metody pozwalają na wyznaczenie portfela zabezpieczającego na przestrzeni czasu dla tych zmodyfikowanych.

Ponadto na potrzeby pracy stworzony został pakiet w **R**, który pozwala na wycenę zmodyfikowanych opcji call oraz put i wyznaczenie ich zabezpieczeń dla określonych parametrów modelu oraz pozwala na użycie metod numerycznych opisanych w rozdziale 5. Pakiet jest dostępny na githubie pod linkiem: [12]

Zakładamy, że czytelnik ma wiedzę z zakresu teorii prawdopodobieństwa, procesów stochastycznych, teorii testowania hipotez statystycznych (w szczególności zna lemat Neymana-Pearsona) oraz ma podstawową wiedzę na temat matematyki finansowej.

1 Opis modelu i podstawowe definicje matematyki finansowej

1.1 Opis modelu

Założmy, że na odcinku czasu $[0, T]$, na rynku znajduje się niewypłacające dywidend aktywo bazowe. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ oznacza przestrzeń probabilistyczną, a $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ wraz z naturalną filtracją $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s : s \leq t, s \in [0, T])$ oznacza proces ceny aktywa bazowego i założmy, że zmienia się on zgodnie ze standardowym modelem Blacka-Scholesa, ze stałą zmiennością $\sigma > 0$. Oznacza to, że proces ceny tego aktywa jest geometrycznym ruchem Browna:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

z początkową ceną $S_0 > 0$, gdzie B jest procesem Wienera względem miary \mathbf{P} , a μ jest stałą. Ponadto definiujemy instrument wolny od ryzyka $N = (N_t)_{t \in [0, T]}$ równy:

$$N_t = e^{rt},$$

z $N_0 = 1$, gdzie $r > 0$ jest stopą wolną od ryzyka, która na przedziale $[0, T]$ jest stałą.

Korzystając ze wzorów Itô, możemy przedstawić proces ceny aktywa bazowego w postaci jawnej. W związku z tym zdyskontowany proces ceny aktywa bazowego $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ definiujemy jako

$$X_t = \frac{S_t}{N_t} = X_0 \exp \left((\mu - r - 0.5\sigma^2)t + \sigma B_t \right) = X_0 \exp \left((m - 0.5\sigma^2)t + \sigma B_t \right),$$

gdzie $X_0 = S_0$, a $m = \mu - r$.

Do wyceny instrumentów pochodnych potrzebna jest nam wiedza o mierze martyn-
gałowej.

Definicja 1.1.1. *Proces $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ nazywamy martyn-
gałem, gdy:*

- Z_t jest mierzalny względem \mathcal{F}_t ,
- Z_t jest całkowalne, $\mathbb{E}[|Z_t|] < \infty$ dla każdego t ,
- warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s$ dla każdego $s \leq t$.

Definicja 1.1.2. *Miarę \mathbf{P}^* nazywamy równoważną miarą martyn-
gałową, jeśli jest ona bezwzględnie ciągła względem miary rzeczywistej \mathbf{P} oraz zdyskontowany proces
ceny aktywa bazowego $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ jest w mierze \mathbf{P}^* martyn-
gałem.*

Fakt 1. *W modelu Blacka-Scholesa jest dokładnie jedna równoważna miara martyn-
gałowa \mathbf{P}^* .*

Dowód. Korzystając z twierdzenia Girsanowa, (które znajdziemy w podrozdziale 7.3
w [5] oraz w rozdziale 15 z [11]) wiemy, że miara \mathbf{P}^* dla której proces:

$$B_t^* = B_t - \frac{r - \mu}{\sigma} t$$

jest w mierze \mathbf{P}^* standardowym ruchem Browna jest miarą martyn-
gałową. Ponadto twierdzenie Girsanowa daje nam postać pochodnej Radona-Nikodyma do chwili t
równą:

$$\left(\frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}} \right)_t = \exp \left(- \frac{m}{\sigma} B_t - 0.5 \frac{m^2}{\sigma^2} t \right) = \exp \left(0.5 t \left(\frac{m^2}{\sigma^2} - m \right) \right) \left(\frac{X_t}{X_0} \right)^{-\frac{m}{\sigma^2}}.$$

□

Uwaga. *Pochodną Radona-Nikodyma $\frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$ będziemy oznaczać jako ρ .*

Wprowadźmy teraz podstawowe pojęcia i własności matematyki finansowej. De-
finicje zostały zaczerpnięte ze skryptu [5] z rozdziałów 5 oraz 7.

Definicja 1.1.3. *Strategia tradingowa $\bar{\xi} = (\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$ jest przewidywalnym proce-
sem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.*

*Proces bogactwa $V = (V_t)_{t \in [0, T]}$ związany ze strategią tradingową $\bar{\xi}$ w chwili t jest
liniową kombinacją:*

$$V_t = \eta_t N_t + \xi_t S_t.$$

Proces zysków $G = (G_t)_{t \in [0, T]}$ naszego portfela na przestrzeni czasu $[0, t]$ definiujemy jako:

$$G_t = \int_0^t \xi_u dS_u + \int_0^t \eta_u dN_u.$$

Strategia tradingowa w chwili t oznacza, że mamy η_t kwoty, która rośnie zgodnie z procesem wolnym od ryzyka N_t oraz ξ_t ilości aktywa bazowego S_t .

Definicja 1.1.4. Mówimy, że strategia tradingowa $\bar{\xi}$ jest samofinansująca, gdy $V_t = V_0 + G_t$ dla każdego t .

Mówimy, że strategia samofinansująca pozwala na arbitraż, wtedy, gdy proces bogactwa tej strategii spełnia następujące warunki:

- $V_0 \leq 0$;
- $V_T \geq 0$ \mathbf{P} - prawie na pewno;
- $\mathbf{P}(V_T > 0) > 0$.

Fakt 2. Niech

$$\bar{V}_t = \frac{V_t}{N_t} = V_0 + \int_0^t \xi_s dX_s.$$

Wtedy strategia tradingowa $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$ jest samofinansująca.

Dowód. Przyrost procesu \bar{V}_t jest dany przez:

$$d\bar{V}_t = \xi_t dX_t = \xi_t(\mu - r)X_t dt + \xi_t \sigma X_t dB_t.$$

Korzystając ze wzoru Itô dla funkcji $f(\bar{V}_t, t) = \bar{V}_t e^{rt}$ otrzymujemy:

$$dV_t = d(\bar{V}_t e^{rt}) = r\bar{V}_t e^{rt} dt + e^{rt} \xi_t(\mu - r)X_t dt + e^{rt} \xi_t \sigma X_t dB_t,$$

i używając definicji procesu bogactwa otrzymujemy:

$$dV_t = r(\eta_t N_t + \xi_t S_t) dt + \xi_t(\mu - r)S_t dt + \xi_t \sigma S_t dB_t = \eta_t dN_t + \xi_t dS_t.$$

Co całkując obustronnie jest równe procesowi zysków G_t . □

Uwaga. Od teraz strategię samofinansującą będziemy oznaczać poprzez (V_0, ξ) .

1.2 Wycena europejskich roszczeń warunkowych

Przejdźmy teraz do teorii wyceny europejskich roszczeń warunkowych:

Definicja 1.2.1. *Europejskim roszczeniem warunkowym C nazywamy nieujemną funkcję mierzalną względem \mathcal{F}_T . Zdyskontowana wartość europejskiego roszczenia warunkowego oznaczona będzie jako $H = e^{-rT}C$.*

Definicja 1.2.2. *Roszczenie warunkowe C nazywa się osiągalnym (replikowalnym), jeśli istnieje strategia samofinansująca (V_0, ξ) , której proces bogactwa w chwili T jest równy C . Innymi słowy:*

$$H = V_0 + \int_0^T \xi_s dX_s.$$

Strategię (V_0, ξ) nazywamy dopuszczalną, jeśli proces bogactwa V spełnia:

$$V_t \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \mathbf{P} - \text{prawie na pewno.}$$

Definicja 1.2.3. *Model rynku nazywamy zupełnym wtedy i tylko wtedy, gdy każde roszczenie warunkowe jest osiągalne.*

Twierdzenie 1.2.1 (Podstawowe twierdzenie o wycenie aktywów). *Rynek jest wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedna równoważna miara martyngałowa.*

Dowód. Dowód znajduje się w [6] oraz w Rozdziale VII – 4a w książce [9]. \square

Twierdzenie 1.2.2 (Drugie podstawowe twierdzenie o wycenie aktywów). *Model rynku wolny od arbitrażu jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna równoważna miara martyngałowa.*

Dowód. Dowód znajduje się w [6] oraz w Rozdziale VII – 4a w książce [9]. \square

Model Blacka-Scholesa ma jedną równoważną miarę martyngałową, zatem każde roszczenie jest osiągalne. Ponadto proces bogactwa $(\bar{V}_t)_{t \in [0, T]}$ strategii samofinansującej jest \mathbf{P}^* -martyngałem.

Ponieważ każde europejskie roszczenie warunkowe jest osiągalne, istnieje strategia samofinansująca (V_0, ξ) taka, że $V_T = C$. W związku z tym dla każdego $t \in [0, T]$ mamy:

$$\bar{V}_t = \mathbb{E}^*[\bar{V}_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[V_T e^{-rT} | \mathcal{F}_t] = e^{-rT} \mathbb{E}^*[C | \mathcal{F}_t].$$

Zatem cena europejskiego roszczenia warunkowego jest równa:

$$\Pi(C, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[C | \mathcal{F}_t] = V_t.$$

W szczególności mamy: $\Pi(C, 0) = V_0 = \mathbb{E}^*[H]$.

Przykład 1.2.1. Rozważmy europejską opcję kupna z ceną wykonania K , tj. jej wypłata [payoff] wynosi $C = (S_T - K)^+$. Cena tego roszczenia warunkowego w chwili t wynosi:

$$\Pi(C, t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(S_T - K) \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} | \mathcal{F}_t],$$

gdzie $\tau = T - t$. Korzystając z faktu, że $S_T = S_t e^{(r-0.5\sigma)\tau + \sigma(B_T^* - B_t^*)}$ oraz tego, że $S_t \in \mathcal{F}_t$, a $B_T^* - B_t^*$ są niezależne od σ -ciała \mathcal{F}_t mamy:

$$\begin{aligned} e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(S_T - K) \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} | \mathcal{F}_t] &= S_t e^{-0.5\sigma^2\tau} \mathbb{E}^*[e^{\sigma(B_T^* - B_t^*)} \mathbf{1}_{\{B_T^* - B_t^* > \frac{\ln(K/S_t) - (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma}\}}] \\ &\quad - K e^{-r\tau} \mathbf{P}^*(B_T^* - B_t^* > \frac{\ln(K/S_t) - (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma}). \end{aligned}$$

$B_T^* - B_t^*$ w mierze \mathbf{P}^* ma rozkład normalny $N(0, \tau)$, zatem:

$$\mathbf{P}^*(B_T^* - B_t^* > \frac{\ln(K/S_t) - (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma}) = \mathbf{P}^*(Z > -\frac{\ln(S_t/K) + (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) = N(d_2),$$

gdzie Z jest zmienną losową ze standardowego rozkładu normalnego, N jest jego dystrybucją, a

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Pozostaje nam policzyć wartość oczekiwaną. Mamy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[e^{\sigma(B_T^* - B_t^*)} \mathbf{1}_{\{B_T^* - B_t^* > -d_2\sqrt{\tau}\}}] &= \int_{-d_2\sqrt{\tau}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{\sigma x} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} dx = \int_{-d_2\sqrt{\tau}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{0.5\sigma^2\tau} e^{-\frac{(x-\sigma\tau)^2}{2\tau}} dx \\ &= e^{0.5\sigma^2\tau} \mathbf{P}^*(X > -d_2\sqrt{\tau}), \end{aligned}$$

gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie $N(\tau\sigma, \tau)$. Podsumowując, cena europejskiej opcji kupna wynosi:

$$\Pi(C, \tau) = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2),$$

gdzie $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$.

Przykład 1.2.2. Rozważmy europejską opcję sprzedaży z ceną wykonania K , jej payoff wynosi $C = (K - S_T)^+$. Korzystając z parytetu call-put mamy:

$$\Pi(C, t) = \Pi((S_T - K)^+, t) - S_t + K e^{-r\tau} = K e^{-r\tau} N(-d_2) - S_t N(-d_1).$$

1.3 Zabezpieczenie opcji europejskich

W celu zabezpieczenia się przed wypłatą z roszczenia warunkowego należy stworzyć strategię samofinansującą, z kwotą początkową V_0 , której proces bogactwa w chwili T jest równy wypłacie z tego roszczenia. Taką operację nazywamy hedgingiem. Rozważmy dwukrotnie całkowny payoff $C \in L^2(\Omega)$ europejskiego roszczenia warunkowego, którego można zapisać w postaci całki stochastycznej jako:

$$C = \mathbb{E}^*[C] + \int_0^T \zeta_t dB_t^*,$$

gdzie $\zeta = (\zeta_t)_{t \in [0, T]}$ jest dwukrotnie całkownym, adaptowalnym procesem. Poniższy lemat, pozwala nam znaleźć samofinansującą strategię, prowadzącą do hedgingu europejskiego roszczenia C .

Lemat 1.3.1. *Rozważmy roszczenie warunkowe $C \in L^2(\Omega)$ i proces $\zeta = (\zeta_t)_{t \in [0, T]}$. Niech ξ_t, η_t będą dane przez:*

$$\begin{aligned} \xi_t &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma S_t} \zeta_t, \\ \eta_t &= \frac{e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[C | \mathcal{F}_t] - \xi_t S_t}{N_t}. \end{aligned}$$

Wtedy strategia tradingowa $(\xi_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ jest samofinansująca oraz jej proces bogactwa jest równy:

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[C | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

W szczególności mamy: $V_T = C$.

Dowód. Dowód znajduje się w [5] jako dowód *Proposition 7.11*. □

W praktyce problem hedgingu można sprowadzić do obliczenia procesu ζ_t . To obliczenie zwane delta-hedgingiem może być wykonane poprzez zastosowanie formuły Itô oraz własności Markowa.

Poniższy lemat pozwala nam na wyznaczenie procesu ζ w przypadku, gdy payoff roszczenia warunkowego C jest postaci $C = \Phi(S_T)$ dla pewnej funkcji Φ .

Lemat 1.3.2. *Założmy, że Φ jest Lipschitzowską funkcją payoffu. Wtedy funkcja $C(t, x)$ zdefiniowana jako:*

$$C(t, S_t) = \mathbb{E}^*[\Phi(S_T) | S_t],$$

należy do $C^{1,2}([0, T], \mathbb{R})$ oraz całka stochastyczna:

$$\Phi(S_T) = \mathbb{E}^*[\Phi(S_T)] + \int_0^T \zeta_t dB_t^*$$

jest dana przez:

$$\zeta_t = \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) \quad 0 \leq t \leq T.$$

W dodatku mamy:

$$\xi_t = e^{-r(T-t)} \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dowód. Dowód znajduje się w [5] jako dowód *Proposition 7.12*. □

Przykład 1.3.1. W przypadku opcji call z ceną wykonania K mamy:

$$\begin{aligned} \xi_t &= \frac{\partial \Pi}{\partial x}(t, S_t) = N(d_1) + S_t \frac{\partial N}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial x} - K e^{-r\tau} \frac{\partial N}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial x} = \\ &= N(d_1) + \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2} - \frac{K}{S_t \sigma \sqrt{\tau}} e^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_2^2} = N(d_1). \end{aligned}$$

Ponadto mamy:

$$\eta_t = \frac{S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) - \xi_t S_t}{e^{rt}} = -K e^{-rT} N(d_2).$$

Przykład 1.3.2. W przypadku opcji put z ceną wykonania K , korzystając z parytetu call-put otrzymujemy:

$$\xi_t = N(d_1) - 1.$$

Ponadto mamy:

$$\eta_t = \frac{K e^{-r\tau} N(-d_2) + S_t(1 - N(-d_1) - N(d_1))}{e^{rt}} = K e^{-rT} N(-d_2).$$

2 Optymalny hedging dla funkcji wypukłej

Rozważmy zdyskontowane europejskie roszczenie warunkowe. Jak wiemy, w przypadku naszego modelu, by w pełni zabezpieczyć się przed tym roszczeniem, należy mieć kapitał początkowy w wysokości $U_0 = \mathbb{E}^*[H]$.

Założmy, że nie mamy, bądź nie chcemy w chwili 0 wykorzystać kapitału początkowego w wysokości ceny wolnej od arbitrażu U_0 , a do hedgingu tej opcji chcemy użyć

mniejszego kapitału w wysokości $\tilde{V}_0 < U_0$. W [1] rozważano taką strategię (V_0, ξ) , która minimalizuje prawdopodobieństwo nieudanego hedgingu tj. $\mathbf{P}(\bar{V}_T \leq H) = \min$ pod warunkiem, że $V_0 \leq \tilde{V}_0$.

Tym razem chcemy kontrolować wielkość straty $(H - \bar{V}_T)^+$, nie tylko prawdopodobieństwo jej wystąpienia. To podejście zostało zaproponowane w [3], i teraz przedstawimy tą koncepcję.

Wprowadźmy funkcję straty l , która opisuje zachowanie inwestora w stosunku do niedoboru. Zakładamy, że l jest rosnącą funkcją wypukłą zdefiniowaną na $[0, \infty)$ z $l(0) = 0$ oraz taką, że $\mathbb{E}[l(H)] < \infty$.

Definicja 2.0.1. *Definiujemy ryzyko niedoboru (straty) jako wartość oczekiwaną niedoboru ważoną przez funkcję straty l*

$$\mathbb{E}[l((H - \bar{V}_T)^+)].$$

Naszym celem jest znalezienie takiej dopuszczalnej strategii (V_0, ξ) , która minimalizuje ryzyko straty jednocześnie nie używając kapitału początkowego większego niż \tilde{V}_0 . Rozważmy następujący problem optymalizacyjny:

$$\mathbb{E}[l((H - \bar{V}_T)^+)] = \mathbb{E}[l((H - V_0 - \int_0^T \xi_s dX_s)^+)] = \min,$$

pod warunkiem $V_0 \leq \tilde{V}_0$.

Uwaga. *W rzeczywistości wolelibyśmy minimalizować $\mathbb{E}[l((C - V_T)^+)]$, tj. rzeczywistą stratę ważoną przez funkcję l , a nie ryzyko niedoboru $\mathbb{E}[l((H - \bar{V}_T)^+)] = \mathbb{E}[l(e^{-rT}(C - V_T)^+)]$. Zauważmy jednak, że w szczególności, gdy $l(x)$ jest klasą funkcji x^p dla pewnego $p > 0$ (a taką klasą będziemy się później zajmować), te dwa problemy są równoważne.*

Chcemy zredukować nasz problem do poszukiwania elementu $\tilde{\varphi}$ w klasie $\mathcal{R} = \{\varphi : \Omega \rightarrow [0, 1] \mid \varphi \in \mathcal{F}_T\}$ zrandomizowanych testów, które rozwiązują następujący problem optymalizacyjny:

Twierdzenie 2.0.1. *Istnieje rozwiązanie $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}$ problemu:*

$$\min_{\varphi \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[l((1 - \varphi)H)]$$

pod ograniczeniem $\mathbb{E}^[\varphi H] \leq \tilde{V}_0$. Jeśli funkcja l jest ściśle wypukła, wtedy dowolne dwa rozwiązania pokrywają się $\mathbf{P} - p.n$ na $\{H > 0\}$.*

Do dowodu tego twierdzenia potrzebujemy następującego lematu pomocniczego:

Lemat 2.0.1. *Niech (f_n) będzie ciągiem określonych na $[0, \infty)$ mierzalnych funkcji na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Istnieje ciąg $g_n \in \text{conv}(f_n, f_{n+1}, \dots)$ taki, że $(g_n)_{n \geq 1}$ zbiega prawie na pewno do pewnej funkcji $g \in [0, \infty)$. Jeśli otoczka wypukła $\text{conv}(f_n, n \geq 1)$ jest ograniczona w L^0 wtedy g jest skończona $\mathbf{P} - p.n.$ Jeśli istnieje $\alpha > 0, \delta > 0$ takie, że dla każdego n $\mathbf{P}(f_n > \alpha) > \delta$ to $\mathbf{P}(g > 0) > 0$.*

Dowód. Dowód lematu znajduje się w [2] jako dowód *Lemma AI.1*. □

Dowód twierdzenia. Dowód tego twierdzenia jest w [3] jako dowód *Proposition 3.1*, z uwagi na przejrzystość pracy został on przepisany.

Niech \mathcal{R}_0 zawiera te elementy \mathcal{R} , które spełniają $\mathbb{E}^*[\varphi H] \leq \hat{V}_0$.

Niech φ_n będzie ciągiem minimalizującym $\mathbb{E}[l((1 - \varphi)H)]$ w \mathcal{R}_0 . Korzystając z lematu możemy wybrać funkcje $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{R}_0$ należące do otoczki $\text{conv}(\varphi_n, n \geq 1)$ takie, że $(\tilde{\varphi}_n)$ zbiega $\mathbf{P} - p.n.$ do pewnej funkcji $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}$.

Ponieważ $l(H) \in L^1(\mathbf{P})$ możemy użyć twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajorowanej, by stwierdzić, że

$$\mathbb{E}[l((1 - \tilde{\varphi}_n)H)] \rightarrow \mathbb{E}[l((1 - \tilde{\varphi})H)] = \min.$$

Z drugiej strony z lematu Fatou: $\mathbb{E}^*[\tilde{\varphi}H] \leq \liminf \mathbb{E}^*[\tilde{\varphi}_n H] \leq \tilde{V}_0$, zatem $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}_0$.

Niech $\tilde{\varphi}$ będzie rozwiązaniem. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{R}_0$ i dla $\epsilon \in [0, 1]$ definiujemy:

$$\varphi_\epsilon = (1 - \epsilon)\tilde{\varphi} + \epsilon\varphi.$$

Mamy:

$$\mathbb{E}[l((1 - \varphi_\epsilon)H)] = \mathbb{E}[l(H - (1 - \epsilon)\tilde{\varphi}H - \epsilon\varphi H)].$$

Z wypukłości funkcji l otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[l((1 - \epsilon)(1 - \tilde{\varphi})H + \epsilon(1 - \varphi)H)] \leq (1 - \epsilon)\mathbb{E}[l((1 - \tilde{\varphi})H)] + \epsilon\mathbb{E}[l((1 - \varphi)H)].$$

Jeśli l jest ściśle wypukła to powyższa nierówność jest ostra, gdy

$$\mathbf{P}(\{\varphi \neq \tilde{\varphi}\} \cap \{H > 0\}) > 0.$$

□

Niech $\tilde{\varphi}$ będzie rozwiązaniem problemu powyższego twierdzenia. Bez straty ogólności mamy $\tilde{\varphi} = 1$ dla $\{H = 0\}$.

Wprowadźmy zmodyfikowane roszczenie $\tilde{H} = \tilde{\varphi}H$, i zdefiniujmy proces \tilde{U} jako

$$\tilde{U}_t = \mathbb{E}^*[\tilde{\varphi}H | \mathcal{F}_t].$$

Ponieważ rynek jest zupełny, każde roszczenie warunkowe jest osiągalne, więc istnieje strategia samofinansująca (\tilde{V}_0, ξ) która replikuje zmodyfikowane roszczenie \tilde{H} tj

$$\mathbb{E}^*[\tilde{H}|\mathcal{F}_t] = \tilde{V}_0 + \int_0^t \xi_s dX_s \quad \forall t \in [0, T].$$

Definicja 2.0.2. Dla dowolnej dopuszczalnej strategii (V_0, ξ) definiujemy wskaźnik sukcesu [success rate] jako:

$$\varphi_{(V_0, \xi)} = \mathbf{1}_{\{\bar{V}_T \geq H\}} + \frac{\bar{V}_T}{H} \mathbf{1}_{\{\bar{V}_T < H\}}.$$

Twierdzenie 2.0.2. Strategia samofinansująca (\tilde{V}_0, ξ) , która replikuje zmodyfikowane roszczenie warunkowe $\tilde{H} = \tilde{\varphi}H$ rozwiązuje problem optymalizacyjny

$$\mathbb{E}[l((H - \bar{V}_T)^+)] = \mathbb{E}[l((H - V_0 - \int_0^T \xi_s dX_s)^+)] = \min,$$

pod ograniczeniem $V_0 \leq \tilde{V}_0$.

Dowód. Dowód jest oparty na dowodzie z [3] jako dowód *Theorem 3.2*, został on uzupełniony o dodatkowe komentarze.

Niech (V_0, ξ) będzie jakąkolwiek dopuszczalną strategią taką, że $V_0 \leq \tilde{V}_0$ i niech φ oznacza związany z nią wskaźnik sukcesu. Mamy:

$$\varphi H = H \mathbf{1}_{\{\bar{V}_T \geq H\}} + \bar{V}_T \mathbf{1}_{\{\bar{V}_T < H\}} = (H \wedge \bar{V}_T),$$

natomiast niedobór przyjmuje formę

$$(H - \bar{V}_T)^+ = H - (H \wedge \bar{V}_T) = H(1 - \varphi).$$

Proces bogactwa (\bar{V}_t) jest martyngałem w mierze \mathbf{P}^* stąd mamy:

$$\mathbb{E}^*[\varphi H] = \mathbb{E}^*[(H \wedge \bar{V}_T)] \leq \mathbb{E}^*[\bar{V}_T] = V_0 \leq \tilde{V}_0.$$

W związku z powyższym wskaźnik sukcesu spełnia górne ograniczenie wartości oczekiwanej i zgodnie z twierdzeniem 2.0.1 mamy:

$$\mathbb{E}[l((H - \bar{V}_t)^+)] = \mathbb{E}[l(H(1 - \varphi))] \geq \mathbb{E}[l((H(1 - \tilde{\varphi})))] ,$$

gdzie $\tilde{\varphi}$ jest optymalnym rozwiązaniem problemu z twierdzenia 2.0.1.

Strategia (\tilde{V}_0, ξ) jest dopuszczalna ponieważ jej proces bogactwa spełnia:

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^*[\varphi H | \mathcal{F}_t] \geq 0.$$

Ponadto jej wskaźnik sukcesu spełnia:

$$\varphi_{(\tilde{V}_0, \xi)} H = \tilde{V}_t \wedge H \geq \tilde{\varphi} H \quad \mathbf{P} - p.n \quad \text{na } \{H > 0\},$$

ponieważ, gdy $\tilde{V}_T > H$ to $H > \tilde{\varphi} H$, gdyż $\tilde{\varphi}$ ma wartości z przedziału $[0, 1]$, natomiast, gdy $\tilde{V}_T \leq H$ to $\tilde{V}_T = \tilde{\varphi} H$, ponieważ \tilde{V}_T to wartość optymalnej dekompozycji roszczenia $\tilde{\varphi} H$.

Z racji tego, że funkcja l jest rosnąca oraz powyższej nierówności mamy:

$$l(H - \tilde{\varphi} H) \geq l(H - \varphi_{(\tilde{V}_0, \xi)} H) \quad \mathbf{P} - p.n \quad \text{na } \{H > 0\},$$

i nakładając wartość oczekiwaną otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[l(H - \tilde{\varphi} H)] \geq \mathbb{E}[l(H - \varphi_{(\tilde{V}_0, \xi)} H)].$$

Jak wiemy $\tilde{\varphi}$ minimalizuje wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[l(H - \varphi H)]$, zatem $\varphi_{(\tilde{V}_0, \xi)} H = \tilde{\varphi} H$ $\mathbf{P} - p.n$ na $\{H > 0\}$. Ponadto $\varphi_{(\tilde{V}_0, \xi)} = \tilde{\varphi} = 1$ na $\{H = 0\}$, zatem wskaźnik sukcesu zbiega $\mathbf{P} - p.n$ do $\tilde{\varphi}$. W szczególności mamy:

$$(H - \tilde{V}_T)^+ = (1 - \tilde{\varphi})H,$$

i ponieważ $\tilde{\varphi}$ minimalizuje $\mathbb{E}[l((1 - \varphi)H)]$ pod warunkiem $\mathbb{E}^*[\varphi H] \leq \hat{V}_0$ to strategia (\tilde{V}_0, ξ) rozwiązuje problem optymalizacyjny

$$\mathbb{E}[l((H - \tilde{V}_T)^+)] = \min,$$

pod warunkiem $V_0 \leq \tilde{V}_0$. □

Uwaga. *Zauważmy, że w powyższym dowodzie nie korzystaliśmy z wypukłości funkcji l , a jedynie z tego, że jest ona rosnąca. W związku z tym twierdzenie to znajdzie zastosowanie w następnych rozdziałach.*

2.1 Minimalizacja oczekiwanego niedoboru

Rozważmy liniową funkcję straty $l(x) = x$. Chcemy zminimalizować oczekiwaną stratę $\mathbb{E}[(H - \tilde{V}_T)^+]$ pod warunkiem $V_0 \leq \tilde{V}_0$. Twierdzenie 2.0.2 pokazuje, że jest to równoważne minimalizacji

$$\min \mathbb{E}[H(1 - \varphi)] = \min(\mathbb{E}[H] - \mathbb{E}[\varphi H]) = \mathbb{E}[H] - \max \mathbb{E}[\varphi H],$$

pod warunkiem $\mathbb{E}^*[\varphi H] \leq \tilde{V}_0$.

Założmy, że dryf aktywa bazowego jest różny od stopy wolnej od ryzyka tj. $\mu \neq r$. Wyznaczenie $\max \mathbb{E}[\varphi H]$ przyjmuje formę

$$\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\varphi] = \max,$$

pod warunkiem $\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^*}[\varphi] \leq \frac{\tilde{V}_0}{\mathbb{E}^*[H]}$, gdzie miary \mathbf{Q} i \mathbf{Q}^* są zdefiniowane poprzez pochodne Radona-Nikodyma:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \frac{H}{\mathbb{E}[H]}, \quad \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}^*} = \frac{H}{\mathbb{E}^*[H]}.$$

Rozwiązanie tego problemu optymalizacyjnego jest identyfikowane jako znalezienie jednostajnie najmocniejszego zrandomizowanego testu prostej hipotezy \mathbf{Q}^* , przeciwko prostej alternatywie \mathbf{Q} , na poziomie istotności równym $\tilde{V}_0/\mathbb{E}^*[H]$.

Lemat Neymana-Pearsona opisuje strukturę optymalnego testu $\tilde{\varphi}$. Zgodnie z tym lematem mamy:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} > c \\ 0 & \text{gdy } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} < c \end{cases}.$$

Miary $\mathbf{P}, \mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*$ są absolutnie ciągle względem siebie, ponieważ istnieją pochodne Radona-Nikodyma, mamy więc:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}^*} \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{Q}^*} = \frac{\mathbb{E}^*[H]}{\mathbb{E}[H]} (\rho)^{-1},$$

gdzie $\rho = \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$. W związku z tym, gdy opcja nie zależy od ścieżki, zbiór krytyczny przyjmuje postać:

$$\{(\rho)^{-1} > c_1\} = \{X_T^{\frac{m}{\sigma^2}} > c_2\}.$$

Zatem dla $m > 0$ zmodyfikowane roszczenie warunkowe przyjmuje postać

$\tilde{H} = \mathbf{1}_{\{X_T > c\}} H$, a dla $m < 0$ mamy: $\tilde{H} = \mathbf{1}_{\{X_T < c\}} H$, gdzie stałą c otrzymujemy z warunku:

$$\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^*}[\varphi] = \mathbb{E}^*[\varphi H] = \tilde{V}_0.$$

W przypadku, gdy $\mu = r$, miara rzeczywista \mathbf{P} jest sama w sobie miarą martyngałową w związku z tym mamy nie możemy zastosować lematu Neymana-Pearsona. Chcemy wtedy znaleźć $\tilde{\varphi}$ takie, które

$$\min \mathbb{E}[H(1 - \varphi)] = \mathbb{E}[H] - \max \mathbb{E}[\varphi H],$$

pod warunkiem, że $\mathbb{E}[\varphi H] \leq \tilde{V}_0$. Oczywiście w tym przypadku dowolne zmodyfikowane roszczenie warunkowe φH , które spełnia warunek $\mathbb{E}[\varphi H] = \tilde{V}_0$ jest rozwiązaniem tego problemu. W szczególności jednym z tych rozwiązań jest

$$\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{V}_0}{\mathbb{E}[H]}.$$

2.2 Struktura zmodyfikowanego roszczenia

Założmy, że funkcja straty $l \in C^1(0, \infty)$, ponadto jej pochodna l' jest ściśle rosnąca z $l'(0+) = 0$ oraz $l'(\infty) = \infty$. Niech $I = (l')^{-1}$ oznacza funkcję odwrotną do l' . Z twierdzenia 2.0.1 wiemy, że rozwiązanie $\tilde{\varphi}$ problemu optymalizacyjnego istnieje i jest unikalne na $\{H > 0\}$, gdy funkcja straty l jest ściśle wypukła. Na $\{H = 0\}$ ustalamy $\tilde{\varphi} = 1$. Poniższe twierdzenie daje nam dokładną strukturę $\tilde{\varphi}$.

Twierdzenie 2.2.1. *Rozwiązanie φ problemu optymalizacyjnego*

$$\min_{\varphi \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[l((1 - \varphi)H)],$$

pod warunkiem, że $\mathbb{E}^*[\varphi H] \leq \tilde{V}_0$ dane jest przez:

$$\tilde{\varphi} = 1 - \left(\frac{I(c\rho)}{H} \wedge 1\right) \quad \text{na} \quad \{H > 0\},$$

gdzie $\rho = \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$, a stała c jest dana przez warunek $\mathbb{E}^*[\tilde{\varphi}H] = \tilde{V}_0$.

Dowód. Dowód jest oparty na dowodzie z [3] (dowód *Theorem 5.1*), został uzupełniony o komentarze.

Użyjemy metody Karlina [4] w celu zredukowania problemu znalezienia $\tilde{\varphi}$ do zastosowania lematu Neymana-Pearsona.

Dla $\varphi \in \mathcal{R}$ definiujemy:

$$\varphi_\epsilon = (1 - \epsilon)\tilde{\varphi} + \epsilon\varphi.$$

Mamy więc:

$$F_\varphi(\epsilon) = \mathbb{E}[l((1 - \varphi_\epsilon)H)] = \mathbb{E}[l(H - (1 - \epsilon)\tilde{\varphi}H - \epsilon\varphi)],$$

i ponieważ $\tilde{\varphi}$ jest optymalne, funkcja $F_\varphi(\epsilon)$ jest niemalejąca dla każdego $\varphi \in \mathcal{R}$. Pochodna funkcji F_φ przyjmuje postać:

$$F'_\varphi(\epsilon) = \mathbb{E}[l'(H - (1 - \epsilon)\tilde{\varphi}H - \epsilon\varphi)(\tilde{\varphi} - \varphi)H].$$

Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej osobno dla $\{\varphi > \tilde{\varphi}\}$ oraz $\{\varphi < \tilde{\varphi}\}$ pochodna F' istnieje i spełnia:

$$F'_{\varphi}(0+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F'_{\varphi}(\epsilon) = \mathbb{E}[\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} l'(H - (1-\epsilon)\tilde{\varphi}H - \epsilon\varphi)(\tilde{\varphi} - \varphi)H] = \mathbb{E}[l'(H(1-\tilde{\varphi}))(\tilde{\varphi} - \varphi)H].$$

Optymalność $\tilde{\varphi}$ oznacza, że dla dowolnej $\varphi \in \mathcal{R}$ funkcja wypukła F_{φ} na $[0, 1]$ ma swoje minimum dla $\epsilon = 0$. Jest to równoważne $F'_{\varphi}(0+) \geq 0$ dla każdego $\varphi \in \mathcal{R}$, zatem:

$$\mathbb{E}[l'(H(1-\tilde{\varphi}))\tilde{\varphi}H] \geq \mathbb{E}[l'(H(1-\tilde{\varphi}))\varphi H].$$

Zdefiniujmy miary probabilistyczne \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^* poprzez następujące pochodne Radona-Nikodyma:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \text{const} l'((1-\tilde{\varphi})H)H, \quad \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}^*} = \text{const} H.$$

Wtedy powyższa nierówność ma postać:

$$\mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\tilde{\varphi}] \geq \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{R},$$

natomiast ograniczenie na cenę przyjmuje postać:

$$\mathbb{E}^{\mathbf{Q}^*}[\varphi] \leq \text{const} \tilde{V}_0.$$

W związku z powyższym nasz problem optymalizacyjny staje się problemem znalezienia jednostajnie najmocniejszego testu hipotezy \mathbf{Q}^* , przeciwko alternatywie \mathbf{Q} na poziomie istotności $\text{const} \tilde{V}_0$. Ponownie poprzez zastosowanie lematu Neymana-Pearsona otrzymujemy strukturę optymalnego testu $\tilde{\varphi}$ postaci:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} > c \\ 0 & \text{gdy } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} < c \end{cases}.$$

Miary $\mathbf{P}, \mathbf{P}^*, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*$ są absolutnie ciągłe względem siebie, mamy więc:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}^*} \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{Q}^*} = \text{const} l'((1-\tilde{\varphi})H) \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}^*} = \text{const} l'((1-\tilde{\varphi})H)(\rho)^{-1},$$

gdzie $\rho = \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$.

Zatem na zbiorze $\{l'((1-\tilde{\varphi})H)(\rho)^{-1} < c\}$ optymalny test $\tilde{\varphi}$ jest równy 0, natomiast na zbiorze $\{l'((1-\tilde{\varphi})H)(\rho)^{-1} > c\}$ optymalny test jest równy 1. Zauważmy, że gdyby $\tilde{\varphi} = 1$ to $l'((1-\tilde{\varphi})H)(\rho)^{-1} = 0$, ponieważ mamy $l'(0) = 0$, co jest sprzeczne z testem, gdyż $c > 0$. Mamy więc $\tilde{\varphi} < 1$ na $\{H > 0\}$.

Zwykle w lemacie Neymana-Pearsona nie mamy restrykcji na wartość zbioru $\{\frac{dQ}{dQ^*} = c\}$ poza zgodnością z poziomem istotności. W naszej sytuacji musimy wybrać taki test $\tilde{\varphi}$ na tym zbiorze, który spełnia:

$$(1 - \tilde{\varphi})H = I(c\rho),$$

w celu zgodności.

Zdefiniujmy:

$$\varphi_c = 1 - \left(\frac{I(c\rho)}{H} \wedge 1\right), \quad \text{na } \{H > 0\}.$$

Ponieważ pochodna funkcji straty jest rosnąca, to $I(c\rho)$ rośnie wraz ze wzrostem c . W związku z tym:

$$\varphi_c H = H - (I(c\rho) \wedge H),$$

dąży z H do 0, gdy c przebiega z 0 do ∞ . W konsekwencji $\mathbb{E}^*[\varphi_c H]$ przebiega z $\mathbb{E}^*[H]$ do 0 przez twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Ponieważ funkcja I jest ciągła $\mathbb{E}^*[\varphi_c H]$ jest ciągła względem c , zatem istnieje $c \in (0, \infty)$ takie, że $\mathbb{E}^*[\varphi_c H] = \tilde{V}_0 < \mathbb{E}^*[H]$. Dla takiego c definiujemy $\tilde{\varphi} = \varphi_c$.

Pozostaje sprawdzić, czy $\tilde{\varphi}$ spełnia warunki zgodności. Na zbiorze $\{l'((1 - \tilde{\varphi})H) = c\rho\}$ optymalny test $\tilde{\varphi}$ musi spełniać:

$$(1 - \tilde{\varphi})H = (I(c\rho) \wedge H) = I(c\rho).$$

Powyższa równość jest spełniona tylko wtedy gdy:

$$I(c\rho) \leq H \iff c\rho \leq l'(H).$$

Mamy $(1 - \tilde{\varphi})H \leq H$, i korzystając z własności funkcji l' oraz struktury zbioru otrzymujemy:

$$c\rho = l'((1 - \tilde{\varphi})H) \leq l'(H).$$

Na zbiorze: $\{l'((1 - \tilde{\varphi})H) < c\rho\}$ optymalny test powinien być równy 0, co dla testu φ_c jest spełnione dla $I(c\rho) > H$, a to zachodzi na zbiorze $\{l'((1 - \tilde{\varphi})H) < c\rho\}$. Zatem $\tilde{\varphi}$ jest testem jednostajnie najmocniejszym, oraz jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego. \square

Zmodyfikowane zdyskontowane roszczenie warunkowe przyjmuje postać:

$$\tilde{H} = \tilde{\varphi}H = H - (I(c\rho) \wedge H),$$

gdzie stałą c wyznaczamy z warunku $\mathbb{E}^*[\tilde{\varphi}H] = \tilde{V}_0$. Zgodnie z twierdzeniem 2.0.2 strategia samofinansująca, replikująca to zmodyfikowane roszczenie warunkowe, rozwiązuje problem optymalizacyjny:

$$\mathbb{E}[l((H - \bar{V}_T)^+)] = \mathbb{E}[l((H - V_0 - \int_0^T \xi_s dX_s)^+)] = \min,$$

pod ograniczeniem $V_0 \leq \tilde{V}_0$. Ponadto jej ryzyko niedoboru jest równe:

$$\mathbb{E}[l((1 - \tilde{\varphi})H)] = \mathbb{E}[l(I(c\rho) \wedge H)] = \mathbb{E}[(l(I(c\rho)) \wedge l(H))].$$

Uwaga. *Zauważmy, że $\tilde{\varphi}$ jest funkcją od H i ρ . Jeśli H oraz ρ jest funkcją wartości finalnej ceny aktywa X_T , to $\tilde{\varphi}$ jest również funkcją od X_T .*

Uwaga. *W przypadku, gdy $\mu = r$, miarą martyngałową jest \mathbf{P} . Wtedy $\rho = 1$, oraz zmodyfikowane roszczenie ma postać:*

$$\tilde{H} = H - (I(c) \wedge H).$$

2.3 Potęgowa funkcja straty

Rozważmy specjalny przypadek, gdzie funkcja straty jest równa:

$$l(x) = \frac{x^p}{p}, \quad \text{dla pewnego } p > 1.$$

Mamy więc $l'(x) = x^{p-1}$, $I(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$, i korzystając z twierdzenia 2.2.1, optymalny hedging otrzymamy poprzez replikację zmodyfikowanego roszczenia warunkowego:

$$\tilde{H} = \tilde{\varphi}H = H - ((c\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H) = H - (c_p(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H),$$

gdzie stałą c_p otrzymujemy z warunku $\mathbb{E}^*[\tilde{\varphi}H] = \tilde{V}_0$. Ryzyko niedoboru jest równe:

$$\mathbb{E}[l((1 - \tilde{\varphi})H)] = \mathbb{E}[(l(I(c\rho)) \wedge l(H))] = \frac{1}{p} \mathbb{E}[(c_p^p(\rho)^{\frac{p}{p-1}} \wedge H^p)].$$

Rozważmy granicę przy $p \rightarrow \infty$ odpowiadającą coraz większej awersji do ryzyka ze względu na duże straty.

Fakt 3. *Mamy następujące własności:*

1. dla $p \rightarrow \infty$ zmodyfikowane roszczenie $\tilde{\varphi}H$ zbiega do $(H - c)^+$ $\mathbf{P} - p.n$ i w $L^1(\mathbf{P}^*)$, gdzie c jest unikalną stałą, która spełnia $\mathbb{E}^*[c \wedge H] = \mathbb{E}^*[H] - \tilde{V}_0$;

2. jeśli H oznacza opcję kupna z ceną wykonania K , to dla $p \rightarrow \infty$ zmodyfikowane roszczenie warunkowe w granicy jest ponownie opcją kupna z ceną wykonania $\tilde{K} = K + c$;
3. jeśli H oznacza opcję sprzedaży z ceną wykonania K , to dla $p \rightarrow \infty$ zmodyfikowane roszczenie warunkowe w granicy ponownie jest opcją sprzedaży z ceną wykonania $\tilde{K} = K - c$.

Dowód. Dowód 1, 2 znajduje się w [3] jako dowód *Proposition 5.3*, natomiast 3 jest rozwinięciem tego faktu na opcję put.

1. Jak stała c przebiega od 0 do ∞ , to $(c \wedge H)$ przebiega z 0 do H , i korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej $e(c) = \mathbb{E}^*[(c \wedge H)]$ przebiega z 0 do $\mathbb{E}^*[H]$. Funkcja $e(\dots)$ jest ciągła i malejąca dla $c \in [0, H]$ stąd stała c jest unikalna.

Teraz pokażemy, że $\lim_{p \rightarrow \infty} c_p = c$. Rozważmy podciąg c_{p_n} taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{p_n} = \bar{c} \in [0, \infty]$. Wtedy:

$$c_{p_n}(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H \rightarrow \bar{c} \wedge H \quad \mathbf{P} - p.n.,$$

ponieważ $(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \rightarrow 1 \quad \mathbf{P} - p.n.$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej mamy:

$$\mathbb{E}^*[c_{p_n}(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H] \rightarrow \mathbb{E}^*[\bar{c} \wedge H].$$

Stąd

$$\mathbb{E}^*[\tilde{\varphi}H] = \mathbb{E}^*[H - (c_{p_n}(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H)],$$

i korzystając z ograniczenia na kapitał początkowy otrzymujemy:

$$\mathbb{E}^*[\bar{c} \wedge H] = \mathbb{E}^*[H] - \tilde{V}_0.$$

W związku z tym $\bar{c} = c$, ponieważ c jest unikalne. Używając tego argumentu do \liminf i \limsup widzimy, że $\liminf c_p = c = \limsup c_p$, zatem $\lim_{p \rightarrow \infty} c_p = c$.

2. Mamy $(c_p(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H) \rightarrow (c \wedge H) \quad \mathbf{P} - p.n.$ W związku z tym:

$$\tilde{\varphi}H = H - (c_p(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H) \rightarrow H - (c \wedge H) = ((X_T - K)^+ - c)^+ \quad \mathbf{P} - p.n.,$$

gdzie:

$$((X_T - K)^+ - c)^+ = \begin{cases} 0 & \text{gdy } X_T < K \\ 0 & \text{gdy } X_T < K + c \\ X_T - K - c & \text{gdy } X_T \geq K + c \end{cases}$$

Ponadto korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej (ponieważ $H \in L^1(\mathbf{P}^*)$) mamy:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{E}^*[(c \wedge H) - (c_p(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H)] = 0.$$

Zatem przy $p \rightarrow \infty$, opcja kupna z ceną K zbiega $\mathbf{P} - p.n$ oraz w $L^1(\mathbf{P}^*)$ do opcji kupna z ceną wykonania $\tilde{K} = K + c$.

3. Podobnie jak w przypadku opcji kupna mamy:

$$\tilde{\varphi}H \rightarrow (H - c)^+ = (K - c - X_T)^+ \quad \mathbf{P} - p.n,$$

i przy $p \rightarrow \infty$, opcja sprzedaży z ceną wykonania K zbiega w $L^1(\mathbf{P}^*)$ do opcji sprzedaży z ceną wykonania $\tilde{K} = K - c$, co wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej.

Zauważmy, że w tej sytuacji $c \in [0, K)$, gdyż dla $c \geq K$, opcja ta nigdy się nie wykonuje, więc jej cena wynosi 0.

□

3 Optymalny hedging dla funkcji wklęsłej

Założmy teraz, że nasz inwestor zamiast być standardową osobą z awersją do ryzyka, jest w rzeczywistości do niego skłonny. W naszym modelu oznacza to wklęsłą zamiast wypukłej funkcji straty.

Niech $k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ będzie rosnącą i ściśle wklęsłą funkcją z $k(0) = 0$. Nasz problem optymalizacyjny się nie zmienia, chcemy znaleźć strategię samofinansującą (V_0, ξ) taką, że

$$\mathbb{E}[k((H - \bar{V}_T)^+)] = \min,$$

pod warunkiem $V_0 \leq \tilde{V}_0$.

Podobnie jak w przypadku funkcji wypukłej, chcemy zredukować nasz problem do poszukiwania elementu $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}$.

Twierdzenie 3.0.1. *Istnieje rozwiązanie $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}$ problemu:*

$$\min_{\varphi \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[k((1 - \varphi)H)],$$

pod ograniczeniem $\mathbb{E}^*[\varphi H] \leq \tilde{V}_0$. Ponadto rozwiązanie $\tilde{\varphi}$ jest jedyne na zbiorze $\{H > 0\}$.

Dowód. Istnienie rozwiązania $\tilde{\varphi}$ zapewnia dowód twierdzenia 2.0.1.

Niech $\tilde{\varphi}$ będzie rozwiązaniem. Dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{R}_0$ oraz dla $\epsilon \in [0, 1]$ definiujemy:

$$\varphi_\epsilon = (1 - \epsilon)\tilde{\varphi} + \epsilon\varphi.$$

Mamy więc:

$$\mathbb{E}[k((1 - \varphi_\epsilon)H)] = \mathbb{E}[k((1 - \epsilon)(1 - \tilde{\varphi})H + \epsilon(1 - \varphi)H)].$$

Korzystając z wklęsłości funkcji k otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[k((1 - \varphi_\epsilon)H)] \geq (1 - \epsilon)\mathbb{E}[k((1 - \tilde{\varphi})H)] + \epsilon\mathbb{E}[k((1 - \varphi)H)] \geq \mathbb{E}[k((1 - \tilde{\varphi})H)],$$

ponieważ $\tilde{\varphi}$ jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego. Powyższa nierówność jest ostra, dla ściśle wklęsłej funkcji k , na zbiorze $\{H > 0\}$, zatem rozwiązanie $\tilde{\varphi}$ jest jedyne na tym zbiorze. \square

Korzystając z twierdzenia 2.0.2 oba powyższe problemy są równoważne, zatem na $\{H = 0\}$ ustalamy $\tilde{\varphi} = 1$, natomiast na $\{H > 0\}$ poniższe twierdzenie daje nam strukturę $\tilde{\varphi}$.

Twierdzenie 3.0.2. *Rozwiązanie φ problemu optymalizacyjnego*

$$\min_{\varphi \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[k((1 - \varphi)H)],$$

pod warunkiem, że $\mathbb{E}^*[\varphi H] \leq \tilde{V}_0$ dane jest przez:

$$\tilde{\varphi} = \mathbf{1}_{\{k(H) > cH\rho\}},$$

gdzie $\rho = \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$, a stała c jest taka, że $\mathbb{E}^*[\tilde{\varphi}H] = \tilde{V}_0$.

Dowód. Dowód tego twierdzenia znajduje się w [3], dla przejrzystości pracy został przepisany.

Z wklęsłości funkcji k , oraz tego, że $k(0) = 0$ mamy:

$$\mathbb{E}[k((1 - \varphi)H + \varphi 0)] \geq \mathbb{E}[k(H)] - \mathbb{E}[\varphi k(H)].$$

Jeśli zminimalizujemy dolną granicę powyższej nierówności, to będzie ona mniejsza bądź równa niż $\mathbb{E}[k((1 - \varphi)H)]$ dla każdego $\varphi \in \mathcal{R}$. Minimalizacja dolnej granicy, jest równoważna:

$$\max_{\varphi \in \mathcal{R}} \mathbb{E}[\varphi k(H)],$$

pod warunkiem $\mathbb{E}^*[\varphi H] \leq \tilde{V}_0$. Możemy znaleźć rozwiązanie powyższego problemu optymalizacyjnego, poprzez zastosowanie lematu Neymana-Pearsona. Niech miary probabilistyczne \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^* będą zdefiniowane poprzez następujące pochodne Radona-Nikodyma:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \text{const} k(H), \quad \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}^*} = \text{const} H.$$

Wtedy nasz problem sprowadza się do znalezienia jednostajnie najmocniejszego testu hipotezy \mathbf{Q}^* przeciwko alternatywie \mathbf{Q} na poziomie istotności $\tilde{V}_0/\mathbb{E}^*[H]$. Korzystając z lematu Neymana-Pearsona, mamy następującą strukturę optymalnego testu $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} > c \\ 0 & \text{gdy } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} < c \end{cases},$$

gdzie $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*}$ jest równe:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{Q}^*} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}^*} \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{Q}^*} = \text{const} \frac{k(H)}{H} (\rho)^{-1},$$

gdzie $\rho = \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$. Zatem optymalny test jest równy:

$$\tilde{\varphi} = \mathbf{1}_{\{\frac{k(H)}{H}(\rho)^{-1} > c\}} \quad \text{na } \{H > 0\},$$

gdzie stała c jest dana z warunku $\mathbb{E}^*[\tilde{\varphi} H] = \tilde{V}_0$. Zatem, $\tilde{\varphi}$ minimalizuje dolną stronę nierówności. Dla takiego $\tilde{\varphi}$ mamy:

$$\mathbb{E}[k((1 - \tilde{\varphi})H)] = \mathbb{E}[(1 - \tilde{\varphi})k(H)],$$

więc $\tilde{\varphi}$ jest rozwiązaniem naszego problemu optymalizacyjnego. □

Uwaga. W przypadku, gdy $\mu = r$, pochodna Radona-Nikodyma $\rho = 1$ i optymalny test ma postać:

$$\tilde{\varphi} = \mathbf{1}_{\{\frac{k(H)}{H} > c\}}.$$

3.1 Potęgowa funkcja straty

Rozważmy wklęsłą funkcję straty równą:

$$k(x) = x^p, \quad \text{dla pewnego } p \in (0, 1).$$

Wtedy na zbiorze $\{\frac{k(H)}{H}(\rho)^{-1} > c\} \cup \{H = 0\}$ optymalny test przyjmuje formę:

$$\varphi_p = \mathbf{1}_{\{H^{1-p}\rho < a_p\}},$$

gdzie stała a_p wyznaczana jest z warunku na kwotę początkową.

Założmy, że istnieje unikalna stała a_0 taka, że $\mathbb{E}^*[\varphi_0 H] = \tilde{V}_0$, gdzie φ_0 oznacza indykator funkcji na zbiorze $\{a_0 > H\rho\}$. Przy $p \rightarrow 0$ mamy następujący fakt:

Fakt 4. Dla $p \rightarrow 0$ rozwiązanie φ_p zbiega do rozwiązania kwantylowego hedgingu rozważanego w [1] tj.

$$\varphi_p \rightarrow \varphi_0 = \mathbf{1}_{\{a_0 > H\rho\}}$$

zarówno $\mathbf{P} - p.n$ jak i w $L^1(\mathbf{P}^*)$.

Dowód. Dowód znajduje się w [3] jako dowód Proposition 5.4. □

Fakt 5. Dla $p \rightarrow 1$ rozwiązanie φ_p zbiega do rozwiązania φ_1 , które jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego w przypadku liniowej funkcji straty. Zbieżność ta jest $\mathbf{P} - p.n$ oraz w $L^1(\mathbf{P}^*)$.

Dowód. Przypomnijmy, że w przypadku liniowej funkcji straty, optymalny test ma postać:

$$\varphi_1 = \mathbf{1}_{\{(\rho)^{-1} > c\}} = \mathbf{1}_{\{(\rho) < a_1\}},$$

gdzie a_1 jest dana przez $\mathbb{E}^*[\varphi_1 H] = \tilde{V}_0$, i oczywiście jest unikalna.

Rozważmy zbieżny podciąg a_{p_n} taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_n} \rightarrow a^*$. Ponieważ $H^{1-p_n} \rightarrow 1$ mamy:

$$\mathbf{1}_{\{H^{1-p_n}\rho < a_{p_n}\}} \rightarrow \mathbf{1}_{\{\rho < a^*\}}, \quad \mathbf{P} - p.n.$$

Ponadto korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej mamy:

$$\mathbb{E}^*[H \mathbf{1}_{\{H^{1-p_n}\rho < a_{p_n}\}}] \rightarrow \mathbb{E}^*[H \mathbf{1}_{\{\rho < a^*\}}],$$

i stąd mamy: $\mathbb{E}^*[H \mathbf{1}_{\{\rho < a^*\}}] = \tilde{V}_0$. Z unikalności a_1 dostajemy $a^* = a_1$ i używając tego argumentu odpowiednio do \limsup oraz \liminf mamy $\lim_{p \rightarrow 1} a_p = a_1$. W konsekwencji

$$\varphi_p = \mathbf{1}_{\{H^{1-p}\rho < a_p\}} \rightarrow \mathbf{1}_{\{\rho < a_1\}} = \varphi_1,$$

$\mathbf{P} - p.n$ oraz w $L^1(\mathbf{P}^*)$. □

4 Obliczenia dla modelu Blacka-Scholesa

Powróćmy teraz do modelu Blacka-Scholesa, który został wprowadzony w rozdziale 1. Przypomnijmy, że tym modelu dynamika zmian ceny aktywa bazowego jest geometrycznym ruchem Browna, natomiast pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}}$, jest równa:

$$\rho = \exp\left(0.5t\left(\frac{m^2}{\sigma^2} - m\right)\right)\left(\frac{X_T}{X_0}\right)^{-\frac{m}{\sigma^2}},$$

gdzie $m = \mu - r$.

Uwaga. Poprzez \tilde{C} będziemy oznaczać zakumulowaną wypłatę roszczenia warunkowego \tilde{H} tzn:

$$\tilde{C} = e^{rT} \tilde{H}.$$

4.1 Opcja kupna

Rozważmy opcję kupna (call) z ceną wykonania K tj. jej wypłata w chwili T wynosi $(S_T - K)^+$.

Liniowy przypadek W sytuacji, gdy funkcja straty jest linowa, zgodnie z podrozdziałem 2.1, zmodyfikowane roszczenie warunkowe dla $m > 0$ ma postać

$$\tilde{H} = \mathbf{1}_{\{X_T > c_1\}} H = e^{-rT} (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_T > c_2\}}.$$

Cena zmodyfikowanego roszczenia warunkowego \tilde{C} wynosi:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_T > c\}} | \mathcal{F}_t],$$

gdzie $\tau = T - t$. Oczywiście w przypadku, gdy $c \leq K$, powyższa opcja staje się zwykłą opcją kupna. Dla pozostałych c mamy:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(S_T - c)^+ + (c - K) \mathbf{1}_{\{S_T \geq c\}} | \mathcal{F}_t] = \Pi((S_T - c)^+, t) + e^{-r\tau} (c - K) N(d_2(c, t)),$$

gdzie N jest dystrybucją rozkładu standardowego normalnego, natomiast

$$d_2(c, t) = \frac{\ln(\frac{S_t}{c}) + (r - 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Stałą c otrzymujemy z warunku $\Pi(\tilde{C}, 0) = \tilde{V}_0$. Zgodnie z podrozdziałem 1.3 w celu znalezienia procesu $\xi = (\xi_t)_{t \in [0, T]}$ należy policzyć pochodną ceny tego roszczenia względem aktywa bazowego. Mamy więc:

$$\xi_t = N(d_1(c, t)) + \frac{c - K}{c\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(c, t)}.$$

Ponownie korzystając z podrozdziału 2.1 dla $m < 0$ zmodyfikowane roszczenie ma postać $\tilde{H} = e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_T < c\}}$. Dla $c \leq K$ roszczenie to jest równe 0. W przeciwnym przypadku cena roszczenia \tilde{C} wynosi:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = \mathbb{E}^*[(S_T - K)^+ - (S_T - c)^+ + (K - c)\mathbf{1}_{\{S_T > c\}}].$$

Jej wartość jest równa:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = \Pi((S_T - K)^+, t) - \Pi((S_T - c)^+, t) + (K - c)e^{-rT}N(d_2(c, t)),$$

gdzie c wyznaczamy z warunku początkowego $\Pi(\tilde{C}, 0) = \tilde{V}_0$. W tym przypadku proces ξ jest dany jako:

$$\xi_t = N(d_1(K, t)) - N(d_1(c, t)) + \frac{K - c}{c\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(c, t)}.$$

W przypadku gdy $m = 0$ zmodyfikowane roszczenie ma postać:

$$\tilde{C} = \varphi(S_T - K)^+,$$

a jego cena jest równa:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = \varphi \Pi((S_T - K)^+, t),$$

gdzie $\varphi = \tilde{V}_0 / \Pi((S_T - K)^+, 0)$.

Wypukła funkcja straty Rozważmy teraz wypukłą funkcję straty $l(x) = \frac{x^p}{p}$ dla pewnego $p > 1$. Z rozdziału 2 wiemy, że optymalny hedging otrzymujemy poprzez zabezpieczenie następującego roszczenia:

$$\tilde{H} = H - (c_{p_1}(\rho)^{\frac{1}{p-1}} \wedge H) = H - (c_{p_2} X_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \wedge H) = e^{-rT}(C - (c_{p_3} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \wedge C)),$$

gdzie $C = (S_T - K)^+$. Opcja ta jest różna od 0, gdy $c_{p_3} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} < C$. Zbadamy więc kiedy jest to spełnione.

Dla $m > 0$, $c_{p_3} x^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}$ jest funkcją wypukłą i malejącą (względem x), zatem istnieje co najwyżej jeden punkt wspólny L z $(x - K)^+$, który jest związany ze stałą c_{p_3} równaniem:

$$(L - K)L^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} = c_{p_3}.$$

Powyżej tego punktu roszczenie wypłaca dodatni payoff, zatem opcja ma postać:

$$\tilde{H} = e^{-rT} (S_T - K - (L - K) L^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}) \mathbf{1}_{\{S_T \geq L\}}.$$

Cena roszczenia warunkowego \tilde{C} wynosi:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(S_T - K - (L - K) L^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}) \mathbf{1}_{\{S_T > L\}} | \mathcal{F}_t].$$

Korzystając z mierzalności S_t względem \mathcal{F}_t oraz z niezależności $B_T^* - B_t^*$ od tego σ -ciała otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[S_T \mathbf{1}_{\{S_T \geq L\}} | \mathcal{F}_t] &= S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau} \mathbb{E}^*[e^{\sigma(B_T^* - B_t^*)} \mathbf{1}_{\{B_T^* - B_t^* > -\sqrt{\tau}d_2(L, t)\}}] \\ &= S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\tau} \int_{-\sqrt{\tau}d_2(L, t)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{\sigma x} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} dx = S_t e^{r\tau} \mathbf{P}^*(Z > -\sqrt{\tau}d_2(L, t)), \end{aligned}$$

gdzie Z jest zmienną losową z rozkładu $N(\sigma\tau, \tau)$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathbb{E}^*[S_T \mathbf{1}_{\{S_T \geq L\}} | \mathcal{F}_t] = S_t e^{r\tau} N(d_1(L, t)),$$

gdzie $d_1(L, t) = d_2(L, t) + \sigma\sqrt{\tau}$. Pozostaje nam policzyć:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \mathbf{1}_{\{S_T > L\}} | \mathcal{F}_t] &= S_t^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} e^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}(r-0.5\sigma^2)\tau} \mathbb{E}^*[e^{-\frac{m}{\sigma(p-1)}(B_T^* - B_t^*)} \mathbf{1}_{\{(B_T^* - B_t^*) > -\sqrt{\tau}d_2(L, t)\}}] \\ &= S_t^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} e^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}(r-0.5\sigma^2)\tau} \int_{-\sqrt{\tau}d_2(L, t)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{m}{\sigma(p-1)}x} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} dx. \end{aligned}$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku całkę możemy zamienić na prawdopodobieństwo przeżycia zmiennej losowej z pewnego rozkładu normalnego. Mamy więc:

$$S_t^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} e^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}(r-0.5\sigma^2)\tau + 0.5\frac{m^2}{\sigma^2(p-1)^2}\tau} \mathbf{P}^*(Z > -\sqrt{\tau}d_2(L, t)),$$

gdzie $Z \sim N(-\frac{m}{\sigma(p-1)}\tau, \tau)$. Podsumowując cena zmodyfikowanego roszczenia w chwili t wynosi:

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{C}, t) &= (K - L) \left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} e^{-r\tau} e^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}(0.5\sigma^2 - r + 0.5\frac{m}{(p-1)})\tau} N(d_2(L, t) - \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) \\ &\quad + S_t N(d_1(L, t)) - K e^{-r\tau} N(d_2(L, t)), \end{aligned}$$

gdzie L jest dana z warunku $\Pi(\tilde{C}, 0) = \tilde{V}_0$. Różniczkując powyższą funkcję względem aktywa bazowego, otrzymujemy postać procesu ξ :

$$\begin{aligned}\xi_t = & N(d_1(L, t)) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L, t)} - \frac{K}{L\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L, t)} \\ & - \frac{m}{\sigma^2(p-1)} (K - L) \left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \frac{1}{S_t} e^{-r\tau} e^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}(0.5\sigma^2 - r + 0.5\frac{m}{(p-1)})\tau} N(d_2(L, t) - \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) \\ & + (K - L) \left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} e^{-r\tau} e^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}(0.5\sigma^2 - r + 0.5\frac{m}{(p-1)})\tau} \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(d_2(L, t) - \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)})^2}.\end{aligned}$$

Dla $m < 0$ w przypadku, gdy $-\frac{m}{\sigma^2(p-1)} \in (0, 1]$, funkcja $c_{p_3} x^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}$ jest rosnąca i wklęsła (liniowa), zatem ma co najwyżej jeden punkt wspólny z $(x - K)^+$. Cena tej opcji jest taka sama jak w poprzednim przypadku.

Jeśli $-\frac{m}{\sigma^2(p-1)} \in (1, \infty)$, funkcja $c_{p_3} x^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}$ jest rosnąca i wypukła, zatem ma dokładnie dwa punkty wspólne z $(x - K)^+$ (w przypadku, gdyby ich nie miała, to cena zmodyfikowanego roszczenia wyniosła by 0). W związku z tym roszczenie ma postać:

$$\tilde{H} = e^{-rT} (S_T - K - (L_1 - K) L_1^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}) \mathbf{1}_{\{S_T \in (L_1, L_2)\}} \quad \text{równoważnie}$$

$$\tilde{H} = e^{-rT} (S_T - K - (L_2 - K) L_2^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}) \mathbf{1}_{\{S_T \in (L_1, L_2)\}}.$$

Cena opcji \tilde{C} jest równa:

$$\begin{aligned}& (K - L_1) \left(\frac{L_1}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} e^{-r\tau} e^k \left(N(-d_2(L_2) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) - N(-d_2(L_1) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) \right) \\ & + S_t \left(N(-d_1(L_2)) - N(-d_1(L_1)) \right) - K e^{-r\tau} \left(N(-d_2(L_2)) - N(-d_2(L_1)) \right),\end{aligned}$$

gdzie $k = \frac{m}{p-1} \tau (0.5 - \frac{r}{\sigma^2} + 0.5 \frac{m}{\sigma^2(p-1)})$, a $(L_1 - K) L_1^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} = (L_2 - K) L_2^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}$. Licząc pochodną po cenie akcji powyższego wyrażenia otrzymujemy postać procesu ξ w

chwili t :

$$\begin{aligned}\xi_t &= N(-d_1(L_2)) - N(-d_1(L_1)) - \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-0.5d_1^2(L_2)} - e^{-0.5d_1^2(L_1)}) \\ &\quad + \frac{K}{L_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L_2)} - \frac{K}{L_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L_1)} \\ &\quad - \frac{m}{\sigma^2(p-1)} (K - L_1) \left(\frac{L_1}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \frac{1}{S_t} e^{-r\tau} e^k \left(N(-d_2(L_2) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) - N(-d_2(L_1) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) \right) \\ &\quad - (K - L_1) \left(\frac{L_1}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \frac{1}{S_t} e^{-r\tau} e^k \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-0.5(-d_2(L_2) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)})^2} - e^{-0.5(-d_2(L_1) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)})^2} \right).\end{aligned}$$

W przypadku, gdy $m = 0$ zmodyfikowane roszczenie warunkowe ma postać:

$$\tilde{H} = e^{-rT}((S_T - K)^+ - (c_p \wedge (S_T - K)^+)) = e^{-rT}(S_T - (c_p + K))^+.$$

Cena tej opcji jest równa cenie opcji call z ceną wykonania $c_p + K$.

Wklęsła funkcja straty Rozważmy teraz wklęsłą funkcję straty $l(x) = x^p$, dla $p \in (0, 1)$. Zgodnie z rozdziałem 3 mamy następujące zmodyfikowane roszczenie warunkowe:

$$\tilde{H} = e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{((S_T - K)^+)^{1-p} < a_p S_T^{\frac{m}{\sigma^2}}\}}.$$

Funkcja $f(x) = ((x - K)^+)^{1-p}$ jest równa 0 dla $x \leq K$ oraz jest rosnąca i wklęsła dla $x > K$.

Gdy $m < 0$, to funkcja $g(x) = cx^{\frac{m}{\sigma^2}}$ jest wypukła i malejąca, zatem istnieje dokładnie jeden punkt wspólny L z funkcją f . Powyżej tego punktu $f(x) > g(x)$, zatem payoff zmodyfikowanego roszczenia warunkowego przyjmuje wartość 0 dla $x \geq L$. Podsumowując dla $m < 0$ mamy:

$$\tilde{H} = e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_T < L\}},$$

gdzie L spełnia warunek $(L - K)^{1-p} = a_p L^{\frac{m}{\sigma^2}}$. Cena roszczenia \tilde{C} w chwili t wynosi:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = \Pi((S_T - K)^+, t) - \Pi((S_T - L)^+, t) + (K - L)e^{-r\tau} N(d_2(L, t)),$$

gdzie $\tau = T - t$, a stała L jest dana z warunku $\Pi(\tilde{C}, 0) = \tilde{V}_0$. Różniczkując otrzymujemy strategię hedgingową:

$$\xi_t = N(d_1(K, t)) - N(d_1(L, t)) + \frac{K - L}{L\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L, t)}.$$

Gdy $\frac{m}{\sigma^2} \in (0, 1 - p]$, funkcja g jest wklęsła i rosnąca, wykładnik w potęgach funkcji g jest mniejszy od wykładnika funkcji f , zatem ponownie istnieje co najwyżej jeden punkt L , w którym te funkcje są równe. Powyżej tego punktu wypłata zmodyfikowanej opcji jest równa zero, zatem zarówno zmodyfikowane roszczenie jak i jego cena jest taka sama co w przypadku, gdy $m < 0$.

Dla $\frac{m}{\sigma^2} \in (1 - p, 1]$, funkcja g ma większy wykładnik w potęgach od funkcji f zatem istnieją dokładnie dwa punkty L_1 i L_2 , w którym te funkcje są równe. Na przedziale $x \in [L_1, L_2]$ mamy $f(x) \geq g(x)$, i wtedy payoff $\tilde{H} = 0$. Podsumowując, zmodyfikowane roszczenie przyjmuje postać:

$$\tilde{H} = e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_T \leq L_1\} \cup \{S_T > L_2\}} = e^{-rT}(S_T - K)^+ (\mathbf{1}_{\{S_T \leq L_1\}} + \mathbf{1}_{\{S_T > L_2\}}),$$

a stałe L_1, L_2 związane są ze sobą warunkiem $(L_1 - K)^{1-p} L_1^{-\frac{m}{\sigma^2}} = (L_2 - K)^{1-p} L_2^{-\frac{m}{\sigma^2}}$. Cena roszczenia jest równa:

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{C}, t) &= \Pi((S_T - K)^+, t) - \Pi((S_T - L_1)^+, t) + (K - L_1)e^{-r\tau} N(d_2(L_1, t)) \\ &\quad + \Pi((S_T - L_2)^+, t) + e^{-r\tau}(L_2 - K)N(d_2(L_2, t)), \end{aligned}$$

natomiast

$$\begin{aligned} \xi_t &= N(d_1(K, t)) - N(d_1(L_1, t)) + N(d_1(L_2, t)) \\ &\quad + \frac{K - L_1}{L_1\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L_1, t)} + \frac{L_2 - K}{L_2\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L_2, t)}. \end{aligned}$$

Dla $\frac{m}{\sigma^2} \in (1, \infty)$, funkcja g jest wypukła i rosnąca, istnieją więc dokładnie dwa punkty L_1, L_2 w których $f(x) = g(x)$ i zmodyfikowane roszczenie warunkowe przyjmuje taką samą postać jak w przypadku, gdy $\frac{m}{\sigma^2} \in (1 - p, 1]$.

Gdy $m = 0$, to zmodyfikowane roszczenie ma postać:

$$\tilde{H} = e^{rT}(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{((S_T - K)^+)^{1-p} < a_p\}} = e^{-rT}(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_T < L\}}.$$

W związku z tym cena tego roszczenia jest taka sama jak w przypadku, gdy $m < 0$.

4.2 Opcja sprzedaży

Rozważmy opcję sprzedaży (put) z ceną wykonania K tj. jej payoff w chwili T wynosi $(K - S_T)^+$.

Liniowy przypadek Zgodnie z podrozdziałem 2.1 w przypadku liniowej funkcji straty, gdy $m > 0$ zmodyfikowane roszczenie warunkowe ma postać:

$$\tilde{H} = e^{-rT}(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T > c\}},$$

dla $c \in [0, K)$, w przypadku, gdy $c \geq K$ payoff powyższej opcji jest równy 0. Cena zmodyfikowanego roszczenia \tilde{C} wynosi:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T > c\}} | \mathcal{F}_t] = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(K - S_T)^+ - (c - S_T)^+ + (c - K) \mathbf{1}_{\{S_T < c\}} | \mathcal{F}_t].$$

Po policzeniu warunkowej wartości oczekiwanej otrzymujemy:

$$\Pi(\tilde{C}, t) = \Pi((K - S_T)^+, t) - \Pi((c - S_T)^+, t) + (c - K)e^{-r\tau} N(-d_2(c, t)),$$

gdzie stałą c otrzymujemy z warunku początkowego $\Pi(\tilde{C}, 0) = \tilde{V}_0$. Różniczkując otrzymujemy proces ξ postaci:

$$\xi_t = N(d_1(K, t)) - N(d_1(c, t)) - \frac{c - K}{c\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(c, t)}.$$

Dla $m < 0$ wypłata zmodyfikowanego roszczenia ma formę:

$$\tilde{C} = (K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T < c\}}.$$

W związku z tym cena opcji w chwili t jest równa:

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{C}, t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T < c\}} | \mathcal{F}_t] = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(c - S_T)^+ + (K - c) \mathbf{1}_{\{S_T < c\}} | \mathcal{F}_t] \\ &= \Pi((c - S_T)^+, t) + (K - c)e^{-r\tau} N(-d_2(c, t)), \end{aligned}$$

gdy $c < K$. W przeciwnym przypadku, payoff tej opcji jest równy payoffowi standardowej opcji put. Stałą c wyznaczamy z warunku $\Pi(\tilde{C}, 0) = \tilde{V}_0$, natomiast w celu hedgingu potrzebujemy:

$$\xi_t = N(d_1(c, t)) - 1 - \frac{K - c}{c\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(c, t)}$$

aktywa bazowego w portfelu. Dla $m = 0$ zmodyfikowane roszczenie przyjmuje postać: $\tilde{C} = \varphi(K - S_T)^+$, natomiast jego cena w chwili t jest równa

$$\Pi(\tilde{C}, t) = \varphi \Pi((K - S_T)^+, t),$$

gdzie $\varphi = V_0 / \Pi((K - S_T)^+, 0)$.

Wypukła funkcja straty Podobnie jak w przypadku opcji call, rozważmy wypukłą opcję straty $l(x) = \frac{x^p}{p}$ dla $p > 1$. Zgodnie z podrozdziałem 2.3, mamy następujące zmodyfikowane roszczenie warunkowe:

$$\tilde{H} = e^{-rT}((K - S_T)^+ - (c_p S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \wedge (K - S_T)^+)).$$

Dla $-\frac{m}{\sigma^2(p-1)} \in (0, 1]$ funkcja $g(x) = cx^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}$ jest rosnąca i wklęsła (liniowa dla $-\frac{m}{\sigma^2(p-1)} = 1$), więc ma dokładnie jeden punkt wspólny L z funkcją $f(x) = (K - x)^+$. Powyżej tego punktu, payoff roszczenia \tilde{H} jest równy 0, mamy więc:

$$\tilde{H} = e^{-rT} \left((K - S_T) - (K - L) L^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \right) \mathbf{1}_{\{S_T < L\}}.$$

Korzystając z obliczeń dla opcji call otrzymujemy cenę opcji \tilde{C} w chwili t równą:

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{C}, t) = (L - K) \left(\frac{L}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} e^{-r\tau} e^{\frac{m}{p-1} \tau (0.5 - \frac{r}{\sigma^2} + 0.5 \frac{m}{\sigma^2(p-1)})} N(-d_2(L, t) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) \\ + K e^{-r\tau} N(-d_2(L, t)) - S_t N(-d_1(L, t)), \end{aligned}$$

gdzie stałą L wyznaczamy z warunku $\Pi(\tilde{C}, 0) = \tilde{V}_0$, natomiast proces ξ dany jest jako:

$$\begin{aligned} \xi_t = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L, t)} - N(-d_1(L, t)) - \frac{K}{L\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L, t)} \\ - \frac{m}{\sigma^2(p-1)} (L - K) \left(\frac{L}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \frac{1}{S_t} e^{-r\tau} e^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)} (0.5\sigma^2 - r + 0.5 \frac{m}{(p-1)})\tau} N(-d_2(L, t) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) \\ - (L - K) \left(\frac{L}{S_t} \right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} e^{-r\tau} e^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)} (0.5\sigma^2 - r + 0.5 \frac{m}{(p-1)})\tau} \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(-d_2(L, t) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)})^2}. \end{aligned}$$

Dla $-\frac{m}{\sigma^2(p-1)} \in (1, \infty)$ funkcja $g(x) = cx^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}$ jest rosnąca i wypukła, zatem ma dokładnie jeden punkt wspólny L z funkcją $f(x) = (K - x)^+$. Zmodyfikowane roszczenie oraz jego cena w chwili t ma tą samą postać co w poprzednim przypadku.

Dla $m > 0$ funkcja $g(x)$ jest malejąca i wypukła, ma więc co najwyżej dwa punkty wspólne L_1, L_2 z funkcją f takie, że $0 \leq L_1 < L_2 \leq K$ oraz są ze sobą związane warunkiem $(K - L_1) L_1^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} = (K - L_2) L_2^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}$. W związku z tym roszczenie warunkowe ma postać:

$$\tilde{H} = e^{-rT} (K - S_T - (K - L_1) L_1^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}) \mathbf{1}_{\{S_T \in (L_1, L_2)\}} \quad \text{równoważnie}$$

$$\tilde{H} = e^{-rT}(K - S_T - (K - L_2)L_2^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}})\mathbf{1}_{\{S_T \in (L_1, L_2)\}}.$$

Licząc warunkową wartość oczekiwaną roszczenia \tilde{C} otrzymujemy cenę opcji równą:

$$(L_1 - K)\left(\frac{L_1}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}e^{-r\tau}e^k\left(N(-d_2(L_2, t) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) - N(-d_2(L_1, t) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)})\right) \\ - S_t\left(N(-d_1(L_2, t)) - N(-d_1(L_1, t))\right) + Ke^{-r\tau}\left(N(-d_2(L_2, t)) - N(-d_2(L_1, t))\right),$$

gdzie $k = \frac{m}{p-1}\tau(0.5 - \frac{r}{\sigma^2} + 0.5\frac{m}{\sigma^2(p-1)})$.

Licząc pochodną po cenie akcji powyższego wyrażenia otrzymujemy postać procesu ξ w chwili t :

$$\xi_t = N(-d_1(L_1)) - N(-d_1(L_2)) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-0.5d_1^2(L_2)} - e^{-0.5d_1^2(L_1)}) \\ - \frac{K}{L_2}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5d_1^2(L_2)} + \frac{K}{L_1}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5d_1^2(L_1)} \\ - \frac{m}{\sigma^2(p-1)}(L_1 - K)\left(\frac{L_1}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}\frac{1}{S_t}e^{-r\tau}e^k\left(N(-d_2(L_2) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)}) - N(-d_2(L_1) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)})\right) \\ - (L_1 - K)\left(\frac{L_1}{S_t}\right)^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}\frac{1}{S_t}e^{-r\tau}e^k\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-0.5(-d_2(L_2) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)})^2} - e^{-0.5(-d_2(L_1) + \frac{m\sqrt{\tau}}{\sigma(p-1)})^2}\right).$$

Dla $m = 0$, zmodyfikowana opcja ma postać:

$$\tilde{H} = e^{-rT}((K - S_T)^+ - (c_p \wedge (K - S_T)^+)) = e^{-rT}(K - c_p - S_T)^+,$$

natomiast cena opcji \tilde{C} jest równa cenie opcji put z ceną wykonania $K - c_p$.

Wklęsła funkcja straty Rozważmy teraz wklęsłą funkcję straty $l(x) = x^p$, dla $p \in (0, 1)$. Zgodnie z podrozdziałem 3.1, zmodyfikowane roszczenie warunkowe dla optymalnego hedgingu przyjmuje postać:

$$\tilde{H} = e^{-rT}(K - S_T)^+\mathbf{1}_{\{((K - S_T)^+)^{1-p} < a_p S_T^{\frac{m}{\sigma^2}}\}}.$$

Funkcja $f(x) = ((K - x)^+)^{1-p}$ jest równa 0 dla $x \geq K$ oraz jest malejąca i wklęsła dla $x < K$.

Dla $\frac{m}{\sigma^2} \in (0, 1]$ funkcja $g(x) = cx^{\frac{m}{\sigma^2}}$ jest rosnąca i wklęsła zatem istnieje dokładnie jeden punkt $L \in (0, K]$ taki, że $f(x) = g(x)$. Dla $x \in (0, L)$ mamy $g(x) < f(x)$, zatem opcja przyjmuje formę:

$$\tilde{H} = e^{-rT}(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T > L\}}.$$

W chwili t cena roszczenia \tilde{C} wynosi:

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{C}, t) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T > L\}} | \mathcal{F}_t] = e^{-r\tau} \mathbb{E}^*[(K - S_T)^+ - (L - S_T)^+ + (L - K) \mathbf{1}_{\{S_T < L\}} | \mathcal{F}_t] \\ &= \Pi((K - S_T)^+, t) - \Pi((L - S_T)^+, t) + (L - K)e^{-r\tau} N(-d_2(L, t)), \end{aligned}$$

gdzie stała L jest dana z warunku na cenę opcji w chwili 0. Licząc pochodną względem aktywa bazowego otrzymujemy wzór na proces ξ potrzebny do zabezpieczenia opcji:

$$\xi_t = N(d_1(K, t)) - N(d_1(L, t)) - \frac{L - K}{L\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L, t)}.$$

Dla $\frac{m}{\sigma^2} \in (1, \infty)$ funkcja $g(x) = cx^{\frac{m}{\sigma^2}}$ jest rosnąca i wypukła zatem istnieje dokładnie jeden punkt $L \in (0, K]$ taki, że $f(x) = g(x)$. Dla $x \in (0, L)$ mamy $g(x) < f(x)$, zatem zarówno wypłata zmodyfikowanego roszczenia \tilde{C} jak i jej cena przyjmuje formę taką samą jak w poprzednim przypadku.

Dla $m < 0$ funkcja $g(x)$ jest malejąca i wypukła zatem istnieją co najwyżej dwa punkty L_1, L_2 dla których funkcje $g(x), f(x)$ są równe. Dla $x \in [L_1, L_2]$ mamy $f(x) \geq g(x)$ i zmodyfikowane roszczenie jest wtedy równe 0. Oznacza to, że w tym przypadku opcja przyjmuje formę:

$$\tilde{H} = (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_T \leq L_1\} \cup \{S_T > L_2\}},$$

a stałe L_1, L_2 związane są ze sobą warunkiem $(K - L_1)^{1-p} L_1^{-\frac{m}{\sigma^2}} = (K - L_2)^{1-p} L_2^{-\frac{m}{\sigma^2}}$. Cena opcji \tilde{C} w chwili t jest równa:

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{C}, t) &= \Pi((K - S_T)^+, t) - \Pi((L_2 - S_T)^+, t) + (L_2 - K)e^{-r\tau} N(-d_2(L_2, t)) \\ &\quad + \Pi((L_1 - S_T)^+, t) + (K - L_1)e^{-r\tau} N(-d_2(L_1, t)), \end{aligned}$$

natomiast proces ξ jest dany przez:

$$\begin{aligned}\xi_t = & N(d_1(K, t)) - N(d_1(L_2, t)) - \frac{L_2 - K}{L_2 \sigma \sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L_2, t)} \\ & + N(d_1(L_1, t)) - 1 - \frac{K - L_1}{L_1 \sigma \sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5d_1^2(L_1, t)}.\end{aligned}$$

Dla $m = 0$ zmodyfikowane roszczenie \tilde{C} jest równe:

$$\tilde{C} = (K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{((K - S_T)^+)^{1-p} < a_p\}} = (K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T > L\}}.$$

Cena powyższego roszczenia w chwili t przyjmuje taką samą formę, jak cena opcji dla $\frac{m}{\sigma^2} \in (0, 1]$, a stałą L wyznaczamy z warunku na cenę tej opcji w chwili 0.

4.3 Przykład

W celu zobrazowania wyników hedgingu zmodyfikowanego roszczenia, rozważmy aktywo bazowe z ceną początkową $S_0 = 0$, dryfem $\mu = 0.1$, zmiennością $\sigma = 0.3$ oraz wygasającą za rok opcję kupna z ceną wykonania $K = 100$. Przyjmijmy, że stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 0.05$. Zgodnie z modelem Blacka-Scholesa, cena tej opcji wynosi 14.2313. Załóżmy, że w celu zabezpieczenia opcji call, mamy kapitał początkowy \tilde{V}_0 w wysokości 90% ceny opcji call, tj. $\tilde{V}_0 = 12.8081$.

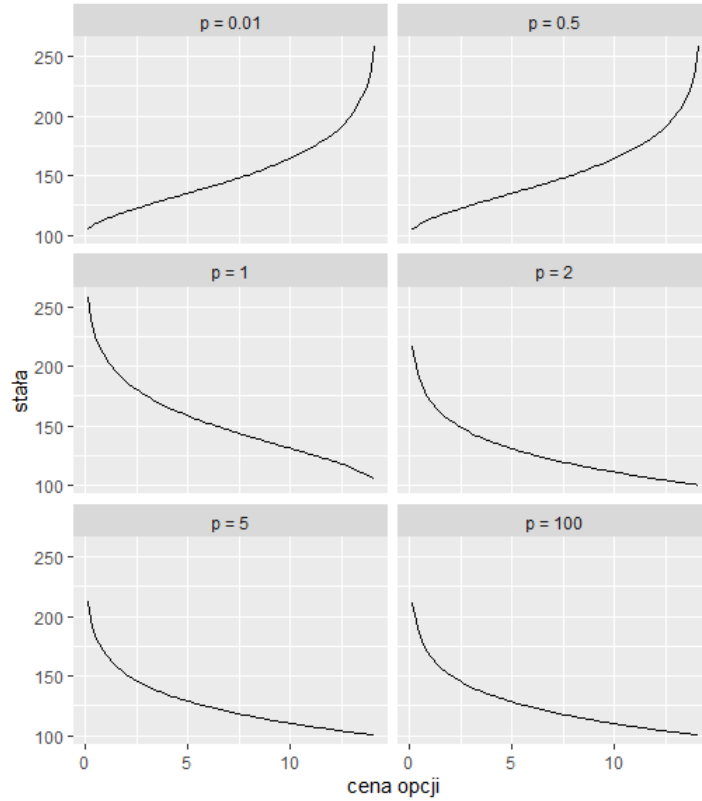
Będziemy minimalizować ryzyko straty, dla potęgowych funkcji straty z wykładnikiem równym kolejno 0.01, 0.5, 1, 2, 5, 100, zgodnie ze wzorami wyprowadzonymi w podrozdziale 4.1.

Najpierw za pomocą numerycznych metod wyznaczania miejsc zerowych funkcji (między innymi metodą bisekcji, której opis znajduje się w [10] w rozdziale 3.1) ustaliliśmy stałą z warunku początkowego na cenę zmodyfikowanego roszczenia warunkowego. Przypomnijmy, że stała ta dla dowolnej funkcji straty znajduje się w indykatorze wypłaty zmodyfikowanej opcji, ponadto dla wypukłej funkcji straty stała ta znajduje się w samej wypłacie. Mamy więc:

- Dla $p = 0.01$ zmodyfikowana opcja ma stałą równą $L = 196.8459$;
- Dla $p = 0.5$ zmodyfikowana opcja ma stałe równe $L_1 = 196.8459$ oraz $L_2 = 115651.7$;
- Dla $p = 1$ zmodyfikowana opcja ma stałą równą $c = 116.2422$;
- Dla $p = 2$ zmodyfikowana opcja ma stałą równą $L = 103.4746$;

- Dla $p = 5$ zmodyfikowana opcja ma stałą równą $L = 103.1746$;
- Dla $p = 100$ zmodyfikowana opcja ma stałą równą $L = 103.0797$.

W przypadku gdy $p = 0.5$ mamy do czynienia z dwoma stałymi, gdzie jedna z nich została wyznaczona z algorytmu Newtona, któremu poświęcony został rozdział 3.3 w [10].



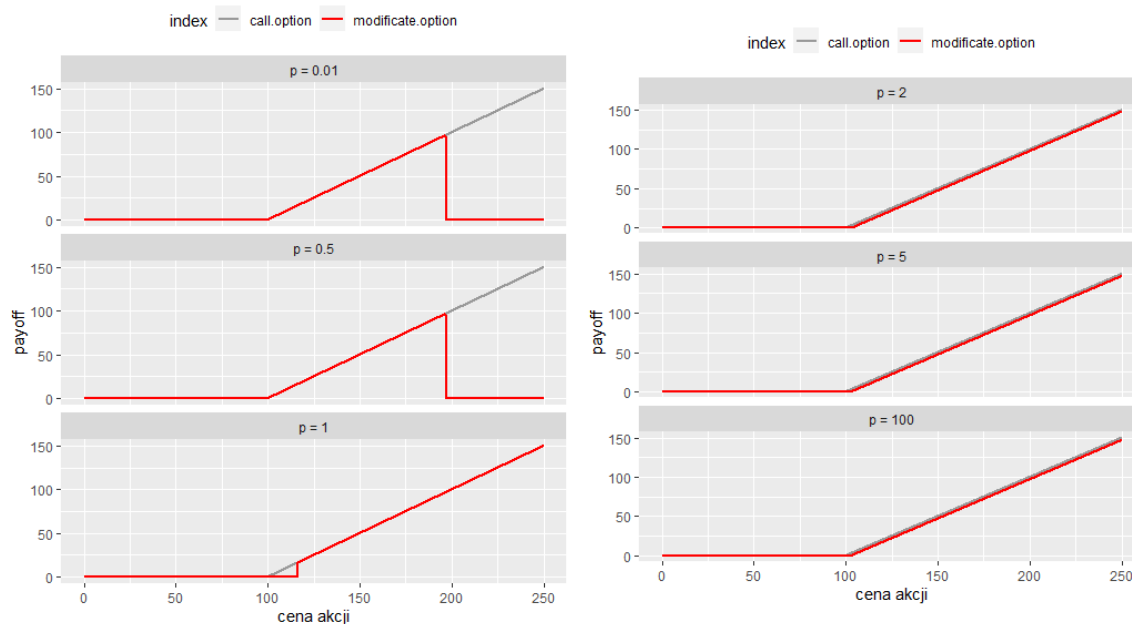
Rysunek 1: Wyznaczone stałe w zależności od ceny opcji.

Rysunek 1 przedstawia wykres wyznaczonej stałej w zależności od kwoty początkowej. Jak można było wywnioskować z samych wzorów na cenę opcji, w przypadku funkcji wklęsłej wraz ze wzrostem kwoty początkowej zwiększa się stała, natomiast dla $p \geq 1$ maleje. Gdy $p = 0.5$, stałe L_1 i L_2 zbiegają do stałej równej:

$$x = -\frac{\frac{m}{\sigma^2}K}{1 - p - \frac{m}{\sigma^2}},$$

gdy cena zbiega co ceny opcji call. Wykres zależności stałej L_2 od ceny opcji nie znajduje się na powyższym wykresie z uwagi na duże wartości stałej dla małych cen opcji, przez co dla większych wartości opcji nie widać na nim żadnych zmian.

Payoffy zmodyfikowanych roszczeń w porównaniu do standardowej opcji call są następujące:



Rysunek 2: Payoffy dla $p = 0.05$, $p = 0.5$, $p = 1$, $p = 2$, $p = 5$, $p = 100$.

W przypadku, gdy $p = 0.01$ opcja kupna nie jest w ogóle zabezpieczana dla dużych cen akcji, dla $p = 0.5$ jest podobnie, z tą różnicą, że dla cen akcji większej niż 115651.7 ponownie zabezpieczamy całą opcję kupna wykonując zabezpieczenie zmodyfikowanej opcji. Dla liniowej funkcji straty opcja call nie jest zabezpieczona na przedziale $[K, 116.2422]$.

Dla wypukłych funkcji straty poza przedziałem $[0, K]$ zabezpieczenie zmodyfikowanego roszczenia nigdy nie starcza do zabezpieczania opcji kupna, jednak straty wynikające z wykonania standardowej opcji są cały czas dość małe.

W celu wizualizacji rezultatów zasymulowaliśmy trajektorie przyszłych cen aktywa bazowego poprzez dyskretyzację stochastycznego równania różniczkowego, które opi-

suje zmianę ceny akcji tj.

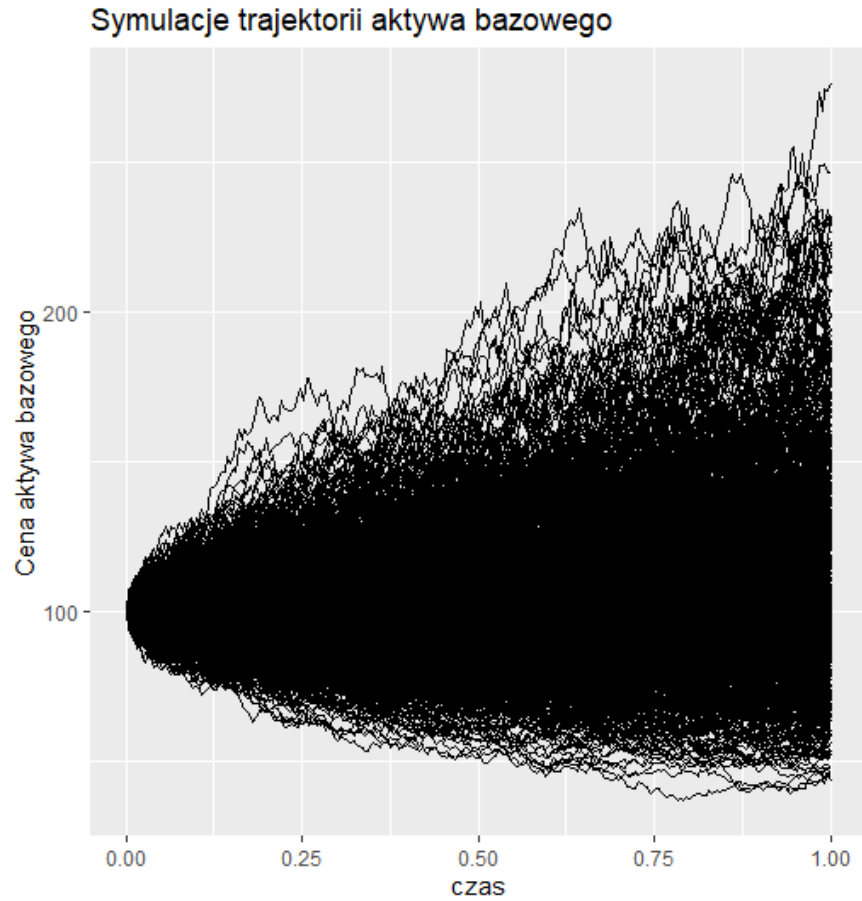
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Otrzymujemy zatem rekurencyjny wzór na kolejne ceny akcji jako:

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \exp \left((\mu - 0.5\sigma^2)\delta t + \sigma Z_i \right),$$

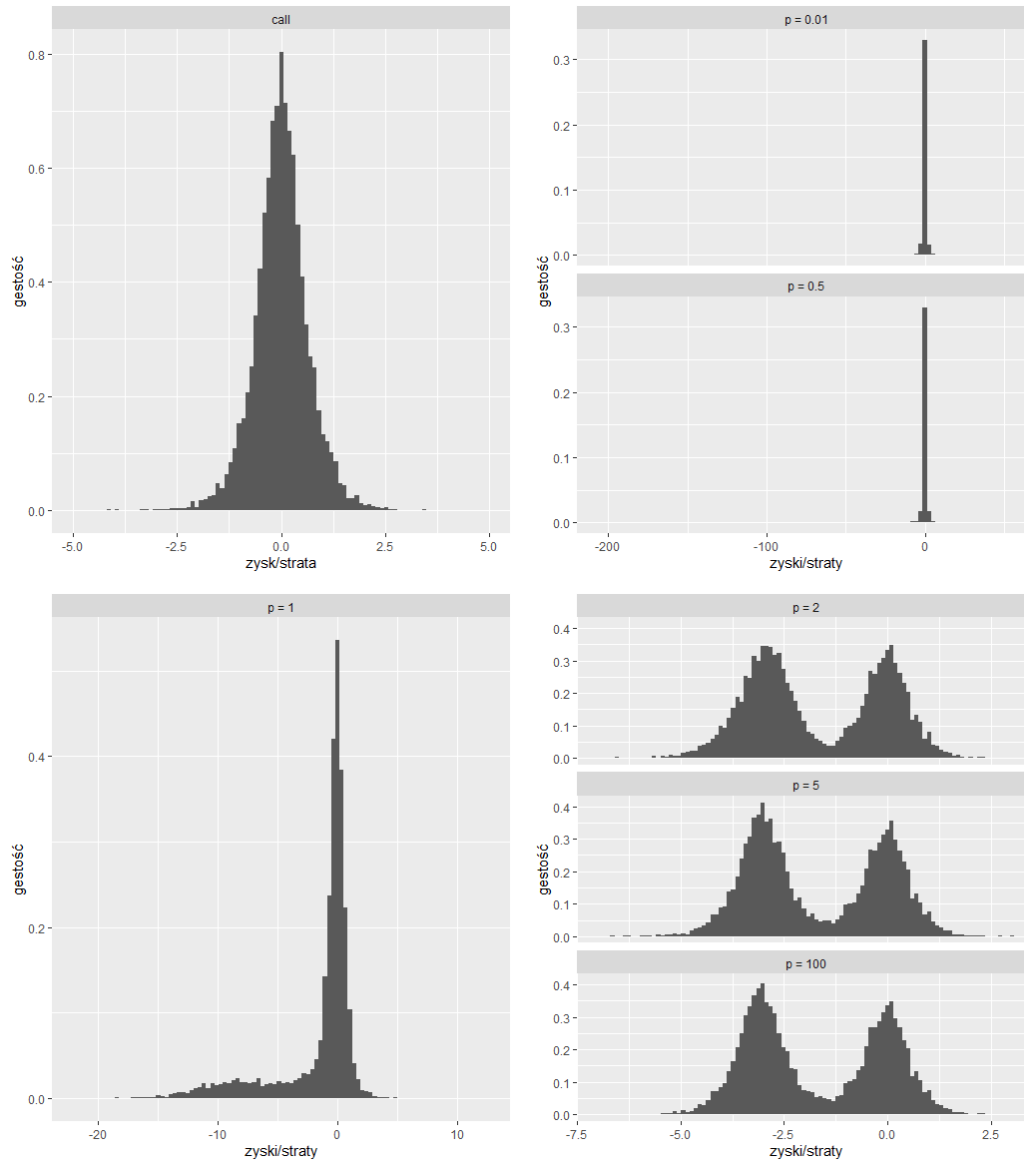
dla $i = 0, \dots, (\delta t)^{-1}$, gdzie Z_i są i.i.d zmiennymi losowymi z rozkładu $N(0, \delta t)$, a $t_{i+1} - t_i = \delta t$, natomiast przez δt oznaczamy podział czasu, w naszym przypadku uznajemy, że wynosi on $\frac{1}{250}$ w skali roku.

Zasymulowaliśmy w ten sposób 10000 trajektorii. Pierwsze 1000 z nich wygląda następująco:



Rysunek 3: Trajektorie pierwszych 1000 symulacji cen akcji.

Następnie zbadaliśmy zyski/straty całego portfela w przypadku, gdy zabezpieczamy opcję call standardowo, używając pełnej kwoty początkowej, jak i korzystając ze zmodyfikowanych roszczeń. Histogramy zysków strat z portfela są następujące:



Rysunek 4: Histogramy zysków/strat portfela dla pełnego zabezpieczenia opcji call, oraz zabezpieczeń kwantylowych z 90% kapitałem początkowym dla potęgowych funkcji straty o potęgach $p = 0.01$ i $p = 0.5$, $p = 1$ i $p = 2$, $p = 5$ i $p = 100$.

Oczywiście w przypadku zabezpieczenia standardowego, wszystkie zyski bądź straty są bliskie 0, i wynikają one z dyskretyzacji geometrycznego ruchu Browna. W przypadku wklęsłych funkcji straty często jesteśmy dobrze zabezpieczeni, lecz czasem zmodyfikowana opcja nie daje zabezpieczenia i to rodzi duże straty (na wykresie nie widać ich, gdyż występują bardzo rzadko, w tym przypadku wtedy, gdy cena akcji jest większa niż 196.8459).

Dla liniowej funkcji straty jest podobnie co w wklęsłym przypadku, z tym, że straty wynikające z braku hedgingu są mniejsze, występują one jednak częściej.

Dla wypukłych opcji, mamy bardzo często małe straty co ponownie wynika bezpośrednio z payoffu - gdy zabezpieczamy się minimalizując wypukłą funkcję straty, tylko dla cen akcji mniejszych od ceny wykonania jesteśmy w pełni zabezpieczeni.

| Statystyki | $p = 0.01$ | $p = 0.5$ | $p = 1$ | $p = 2$ | $p = 5$ | $p = 100$ | call |
|------------|------------|-----------|----------|---------|---------|-----------|---------|
| minimum | -204.7759 | -204.7759 | -22.0559 | -6.9707 | -6.6311 | -6.5226 | -4.1842 |
| 1 kwartyl | -0.4578 | -0.4578 | -1.2426 | -3.0292 | 3.0907 | -3.1193 | -0.3636 |
| mediana | -0.0089 | -0.0089 | -0.2447 | -2.1298 | -2.1691 | -2.1771 | 0.00742 |
| średnia | -2.4025 | -2.4025 | -1.5496 | -1.6686 | -1.6817 | -1.6861 | 0.0058 |
| 3 kwartyl | 0.4006 | 0.4006 | 0.2401 | -0.0897 | -0.0888 | -0.0887 | 0.3688 |
| maksimum | 55.7709 | 55.7709 | 12.4435 | 2.9966 | 2.9948 | 2.9944 | 3.4814 |

Tabela 1: Podstawowe statystyki zysków i strat z portfela - porównanie podstawowych statystyk dla różnych potęg oraz podstawowych statystyk zysków/strat przy pełnym zabezpieczeniu opcji call.

Jak widzimy w tabeli 1 podstawowe statystyki podczas hedgingu zmodyfikowanej opcji, która minimalizuje wklęsłą funkcję straty, są takie same co wynika z faktu, że zarówno cena tych zmodyfikowanych opcji jak i ilość aktywów potrzeba do zabezpieczania się dla potęg $p = 0.01$ oraz $p = 0.5$ jest w przybliżeniu taka sama. Przypomnijmy, że w przypadku gdy $p = 0.5$ cena zmodyfikowanej opcji jest równa:

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{C}, t) = & \Pi((S_T - K)^+, t) - \Pi((S_T - L_1)^+, t) + (K - L_1)e^{-r\tau}N(d_2(L_1, t)) \\ & + \Pi((S_T - L_2)^+, t) + e^{-r\tau}(L_2 - K)N(d_2(L_2, t)). \end{aligned}$$

Gdy L_2 jest duże (jak w naszym przypadku, gdzie $L_2 = 115651.7$), składniki w powyższym równaniu z nim związane są niewielkie stąd cena tej opcji jest równa cenie opcji w przypadku, gdy $p = 0.01$. Podobnie jest dla procesu ξ . W wypukłym przypadku dla różnych wykładników są niewielkie różnice w podstawowych statystykach.

5 Implementacja i analiza numeryczna

W tym rozdziale zajmiemy się implementacją i sprawdzeniem jak działają algorytmy, pozwalające numerycznie wyceniać i zabezpieczać zmodyfikowane roszczenia warunkowe dla ogólniejszych opcji.

W przypadku, gdy roszczeniem warunkowym jest opcja kupna lub sprzedaży, a my posługujemy się modelem Blacka-Scholesa, w rozdziale 4 wyznaczyliśmy jawne wzory na cenę i proces ξ pozwalające wycenić i zabezpieczyć te zmodyfikowane opcje w dowolnym momencie czasu. W przypadku innych opcji europejskich, które chcemy optymalnie zabezpieczyć, ponownie musielibyśmy, korzystając z warunkowej wartości oczekiwanej wycenić ją teoretycznie, co w przypadku niektórych opcji może być problematyczne. Z pomocą przychodzą nam metody numeryczne, które pozwalają na estymację ceny zmodyfikowanych roszczeń oraz procesu ξ na przestrzeni czasu.

W tym rozdziale opiszemy metodę Monte Carlo służącą do wyceny dowolnej europejskiej opcji w chwili 0, a także metodę finite difference, służącą do dynamicznego zabezpieczenia opcji niezależnej od ścieżki. Obie te metody, jak również wszystkie wzory wyprowadzone w rozdziale 4 zostały zaimplementowane w pakiecie, dostępnym pod linkiem [12].

5.1 Symulacje Monte Carlo

Powróćmy do uogólnionych wzorów na zmodyfikowane roszczenia warunkowe dla modelu Blacka-Scholesa. Przypomnijmy, że dla dowolnej zdyskontowanej opcji nie zależnej od ścieżki z payoffem H mamy następujące zmodyfikowane roszczenia warunkowe:

- Dla funkcji wklęsłej tzn. $p < 1$:

$$\tilde{H} = \mathbf{1}_{\{H^{1-p}\rho < a_p\}} H = e^{-rT} \mathbf{1}_{\{C^{1-p} S_T^{-\frac{m}{\sigma^2}} < a\}} C,$$

gdzie C jest wypłatą opcji, którą chcemy optymalnie zabezpieczyć, natomiast a pewną stałą.

- W przypadku liniowej funkcji straty mamy:

$$\tilde{H} = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{S_T > c\}} e^{-rT} C & \text{gdy } m > 0 \\ \mathbf{1}_{\{S_T < c\}} e^{-rT} C & \text{gdy } m < 0 \end{cases},$$

natomiast $\tilde{H} = ce^{-rT} C$, gdy $m = 0$, gdzie c jest stałą.

- Dla wypukłej funkcji straty tzn. $p > 1$ otrzymujemy:

$$\tilde{H} = H - (c_p \rho^{\frac{1}{p-1}} \wedge H) = e^{-rT} (C - (c S_T^{-\frac{m}{\sigma^2(p-1)}} \wedge C)),$$

gdzie c jest stałą.

Jak łatwo zauważyć ceny powyższych zmodyfikowanych roszczeń są monotoniczne ze względu na tą stałą. W przypadku wklęsłej funkcji straty wraz ze wzrostem stałej a cena opcji $\tilde{C} = e^{rT} \tilde{H}$ rośnie, w przypadku liniowym dla $m \leq 0$ cena opcji rośnie wraz ze wzrostem c , natomiast maleje, gdy $m > 0$. Dla wypukłej funkcji straty, gdy stała c rośnie to cena opcji maleje. W związku z tym we wszystkich przypadkach istnieje dokładnie jedna stała taka, że cena zmodyfikowanego roszczenia warunkowego jest równa \tilde{V}_0 .

Do znalezienia tych stałych posłużą nam symulacje Monte Carlo. Teoretyczne zagadnienia dotyczące metod Monte Carlo znajdują się z skrypcie [7].

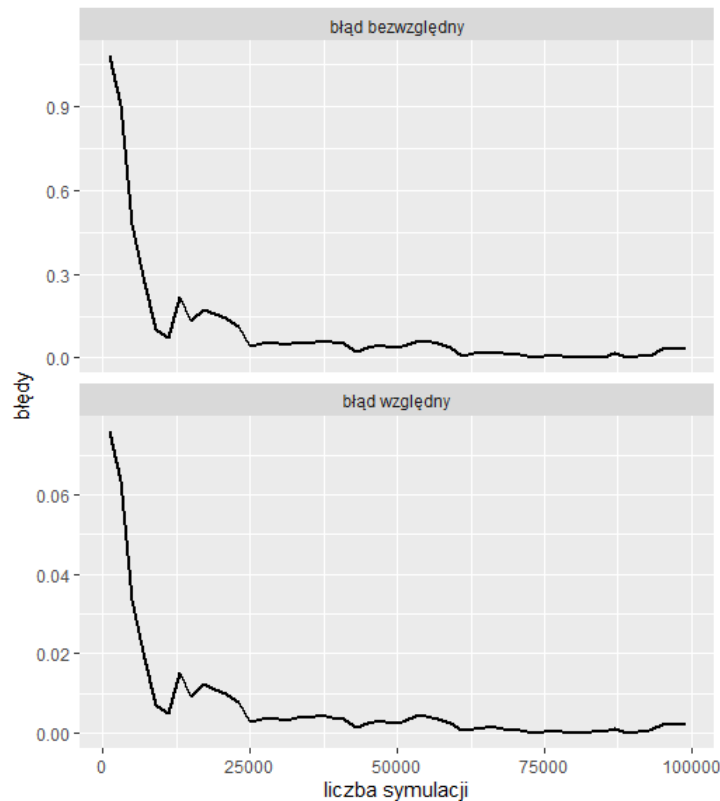
Dla dowolnej opcji C , chcemy estymować wartość oczekiwaną:

$$\Pi(C, t) = e^{-rT} \mathbb{E}^*[C].$$

Niech C_1, \dots, C_N będą payoffami, które zostały wyznaczone z kolejnych realizacji trajektorii procesu ceny $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ w mierze martyngałowej \mathbf{P}^* , opisanej w sekcji 1.2. Algorytm symulacji trajektorii aktywa bazowego został opisany w podrozdziale 4.3, w tym przypadku, w celu otrzymania trajektorii w mierze \mathbf{P}^* zamiast μ w algorytmie jest stopa wolna od ryzyka r . Wtedy:

$$\bar{\Pi} = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N C_i$$

jest estymatorem ceny opcji w chwili 0.



Rysunek 5: Wykresy błędów w wycenie opcji call w zależności od ilości symulacji.

Wykres 5 pokazuje błąd względny oraz bezwzględny w wycenie ceny opcji call, względem ilości zasymulowanych trajektorii aktywa bazowego. Błędy względne oraz bezwzględne porównują wynik otrzymany wzorem na opcję call do wyniku estymacji z danej liczby symulacji trajektorii.

Z wykresów 5 widzimy, że wraz ze wzrostem ilości symulacji maleje nam błąd w estymacji opcji call metodą Monte Carlo. Już przy 25000 symulacji błąd ten jest wystarczająco niski.

W przypadku zmodyfikowanej opcji \tilde{C} jej payoff zależy od pewnej stałej, którą ustalimy z warunku początkowego (tj, że cena tego roszczenia jest równa \tilde{V}_0). Zrobimy to za pomocą metod numerycznych (np. za pomocą metody bisekcji), które jako wartości funkcji wezmą cenę opcji wyznaczoną za pomocą metod Monte Carlo.

Przykład W celu porównania wyników naszych metod numerycznych, sprawdzimy wartości wyznaczonych stałych metodą Monte Carlo do wyliczonych stałych za

pomocą wzorów z podrozdziału 4.1.

Rozważmy aktywo bazowe i opcję kupna z takimi samymi parametrami jak w przypadku podrozdziału 4.3. Ponownie rozważmy funkcję straty z wykładnikami kolejno $p = 0.01, 0.5, 1, 2, 5, 100$.

| metoda | $p = 0.01$ | $p = 0.5$ | $p = 1$ | $p = 2$ | $p = 5$ | $p = 100$ |
|----------------------|------------|-----------|---------|---------|---------|-----------|
| teoretyczne wartości | 4.91706 | 0.52303 | 116.242 | 45.7365 | 6.0443 | 3.1609 |
| Monte Carlo | 4.91411 | 0.52294 | 116.334 | 45.9113 | 6.0663 | 3.1741 |

Tabela 2: Porównanie stałych wyznaczonych metodą Monte Carlo, i rozwiązaniami teoretycznymi.

W Tabeli 2 ukazane są stałe wyznaczone metodą Monte Carlo (z liczbą symulacji trajektorii równą 100000), w sposób opisany powyżej oraz stałe wyznaczone za pomocą metody bisekcji korzystającej ze wzorów analitycznych. W przypadku wklęsłej i wypukłej funkcji straty po wyznaczeniu stałej L , obliczono stałą występującą w ogólnym wzorze na zmodyfikowane roszczenie, za pomocą wzorów kolejno dla wklęsłej i wypukłej funkcji straty:

$$a = (L - K)^{1-p} L^{-\frac{m}{\sigma^2}}, \quad c = (L - K) L^{\frac{m}{\sigma^2(p-1)}}.$$

Jak widzimy w powyższej tabeli stałe z metody Monte Carlo dość dobrze estymują wartości z podejścia teoretycznego. Oczywiście celem lepszej dokładności można zwiększyć ilość symulacji. Warto również ją zwiększyć przy bardziej skomplikowanej pierwotnej opcji, bądź dużo większej zmienności w modelu.

5.2 Algorytm finite difference

Dzięki metodzie opisanej w poprzednim rozdziale dla dowolnej opcji otrzymujemy dokładną postać wypłaty ze zmodyfikowanego roszczenia. W celu wykonania optymalnego hedgingu potrzebujemy znać cenę zmodyfikowanej opcji na przestrzeni czasu (a nie tylko w chwili 0) oraz wartości procesu ξ w trakcie trwania życia opcji. Metoda Monte Carlo w tym przypadku zawodzi.

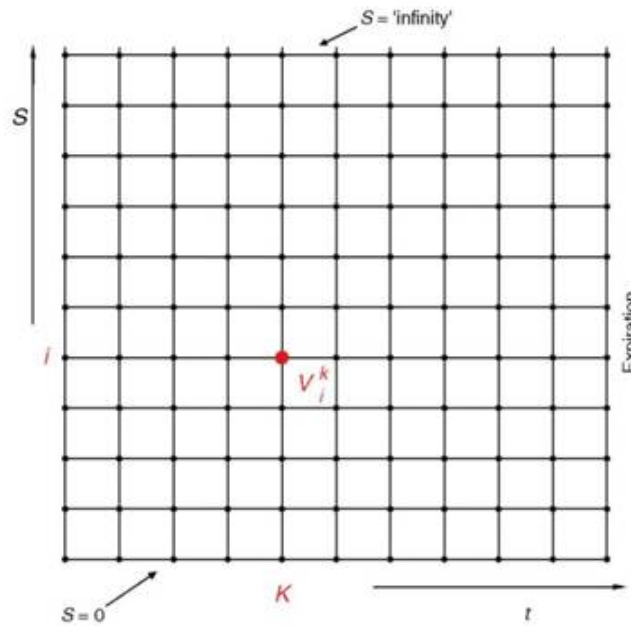
Rozważmy opcje niezależne od ścieżki. W tym przypadku jedną ze skutecznych metod wyznaczania cen opcji i jej zabezpieczenia jest metoda finite difference.

Niech cena akcji będzie równa $S = i\delta S$ dla $i = 0, \dots, I$, gdzie δS oznacza wielkość kroku ceny akcji, natomiast I będzie taką liczbą, dla której $I\delta S$ aproksymuje cenę akcji w nieskończoności.

Niech $t = T - k\delta t$, dla $k = 0, \dots, J$ będą kolejnymi krokami na osi czasu, gdzie J jest takie, że $T - J\delta t = 0$. Dla ceny akcji $i\delta S$, oraz czasu $T - k\delta t$ oznaczmy, cenę opcji jako:

$$V_i^k = V(i\delta S, T - k\delta t) = \Pi(C, i\delta S, T - k\delta t).$$

W związku z powyższym mamy $(I+1)(J+1)$ wartości opcji, które można przedstawić w formie siatki



Rysunek 6: https://ebrary.net/7100/business_finance/what_finite-difference_method

To podejście, które poniżej opiszemy znane jest jako *explicit finite difference*, więcej o tej metodzie i jej modyfikacjach jest w rozdziale 77 w [8]. Znając warunki początkowe (wypłaty w chwili T) chcemy wyznaczać kolejne ceny opcji w sposób rekurencyjny.

Niech payoff roszczenia warunkowego C jest postaci $C = \Phi(S_T)$. Rozważmy uogólnione równanie Blacka-Scholesa, które nasz model, opisany w rozdziale 1 spełnia.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a(S, t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + b(S, t) \frac{\partial V}{\partial S} + c(S, t) V = 0.$$

Korzystając z rozwinięcia wzoru Taylora mamy:

$$V_{i+1}^k = V_i^k + \frac{\partial V}{\partial S} \delta S + \frac{(\delta S)^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{(\delta S)^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} + O((\delta S)^4),$$

oraz

$$V_{i-1}^k = V_i^k - \frac{\partial V}{\partial S} \delta S + \frac{(\delta S)^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{(\delta S)^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} + O((\delta S)^4).$$

Odejmując V_{i-1}^k od V_{i+1}^k otrzymujemy przybliżoną wartość pochodnej $\frac{\partial V}{\partial S}$:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta S},$$

z błędem przybliżenia rzędu $O((\delta S)^2)$. Podobnie, dodając obustronnie otrzymujemy

$$V_{i+1}^k + V_{i-1}^k = 2V_i^k + (\delta S)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + O((\delta S)^4).$$

Mamy więc następujące przybliżenie drugiej pochodnej:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{(\delta S)^2},$$

z błędem przybliżenia rzędu $O((\delta S)^2)$.

Analogicznie można wyznaczyć $\frac{\partial V}{\partial t}$. Przybliżona wartość tej pochodnej ma postać:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t},$$

z błędem przybliżenia rzędu $O(\delta t)$.

W przypadku naszego modelu wyprowadzonego w rozdziale 1 mamy: $a(S, t) = 0.5\sigma^2 S^2$,

$b(S, t) = rS$, $c(S, t) = -r$. Podsumowując otrzymujemy uogólnione równanie Blacka-Scholesa w postaci numerycznej:

$$\frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t} + a_i^k \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{(\delta S)^2} + b_i^k \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta S} + c_i^k V_i^k = O(\delta t, (\delta S)^2),$$

gdzie $a_i^k = 0.5\sigma^2 i \delta S$, $b_i^k = i \delta S$, $c_i^k = -r$.

Ponieważ znamy dokładne wartości opcji w chwili T , podczas wykonywania algorytmu chcemy cofać się w czasie, aż do chwili 0. Zatem z powyższego wzoru chcemy wyznaczyć wartość V_i^{k+1} . Przekształcając to numeryczne równanie otrzymujemy:

$$V_i^{k+1} = \left(\frac{\delta t}{(\delta S)^2} a_i^k - \frac{\delta t}{2\delta S} b_i^k \right) V_{i-1}^k + \left(1 - 2 \frac{\delta t}{(\delta S)^2} a_i^k - \delta t c_i^k \right) V_i^k + \left(\frac{\delta t}{(\delta S)^2} a_i^k + \frac{\delta t}{2\delta S} b_i^k \right) V_{i+1}^k.$$

Warunki początkowe i stabilność Algorytm finite difference musimy zacząć od warunków początkowych. Oczywiście w naszym przypadku jest to

$$V_i^0 = \Phi(i\delta S).$$

Za pomocą algorytmu przedstawionego powyżej nie jesteśmy w stanie policzyć V_0^k oraz V_I^k dla $k > 0$, zatem musimy te wartości wyznaczyć w inny sposób. Gdy $S = 0$ w przypadku naszego modelu, $a(S, t) = b(S, t) = 0$, zatem równanie Blacka-Scholesa ma postać:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(0, t) - rV(0, t) = 0$$

co w postaci numerycznej zapisujemy jako:

$$V_0^{k+1} = (1 - r\delta t)V_0^k.$$

Dla V_I^k mamy dwa podejścia. To pierwsze bardziej teoretyczne zaczerpnięte jest z rozdziału 77 z [8]. Jeśli opcja ma wypłatę która, jest co najwyżej liniowa dla dużych S mamy $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \rightarrow 0$. W postaci numerycznej oznacza to:

$$V_I^k = 2V_{I-1}^k - V_{I-2}^k.$$

Drugie podejście, które zaimplementowaliśmy w pakiecie jest nieco inne. Zakłada ono bowiem, że parametry I oraz δS są w taki sposób dobrane, by cena opcji zachowywała się "stabilnie" dla ceny akcji $I\delta S$ tzn. dla tej wartości aktywa nie nieoczekiwanego się z ceną tej opcji nie dzieje i zmiana tej ceny w czasie δt jest taka sama jak zmiana dla ceny aktywa równej $(I - 1)\delta S$. W postaci numerycznej możemy to zapisać jako:

$$V_I^k = V_I^{k-1} + V_{I-1}^k - V_{I-1}^{k-1}.$$

W celu stabilności algorytmu [8] w rozdziale 77 podaje, następujące restrykcje na δt i δS :

$$\delta t \leq \frac{1}{\sigma^2 I^2}, \quad \delta S \leq \frac{2a}{|b|} = \sigma^2 S.$$

W przypadku naszego modelu ograniczenie na δS nie robi zbyt dużej różnicy w praktyce, chyba, że zmienność jest bardzo mała. Sporym ograniczeniem jest natomiast wielkość kroku czasowego δt . Dowody na te ograniczenia w celach stabilności oraz więcej informacji o metodzie finite difference znajdują się w [8] w rozdziale 77.

Ilość akcji, która w danym momencie potrzebna jest do zabezpieczenia roszczenia warunkowego, dla $i = 1, \dots, I - 1$ wyznaczamy z przybliżonej wartości pochodnej $\frac{\partial V}{\partial S}$, tzn.

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta S},$$

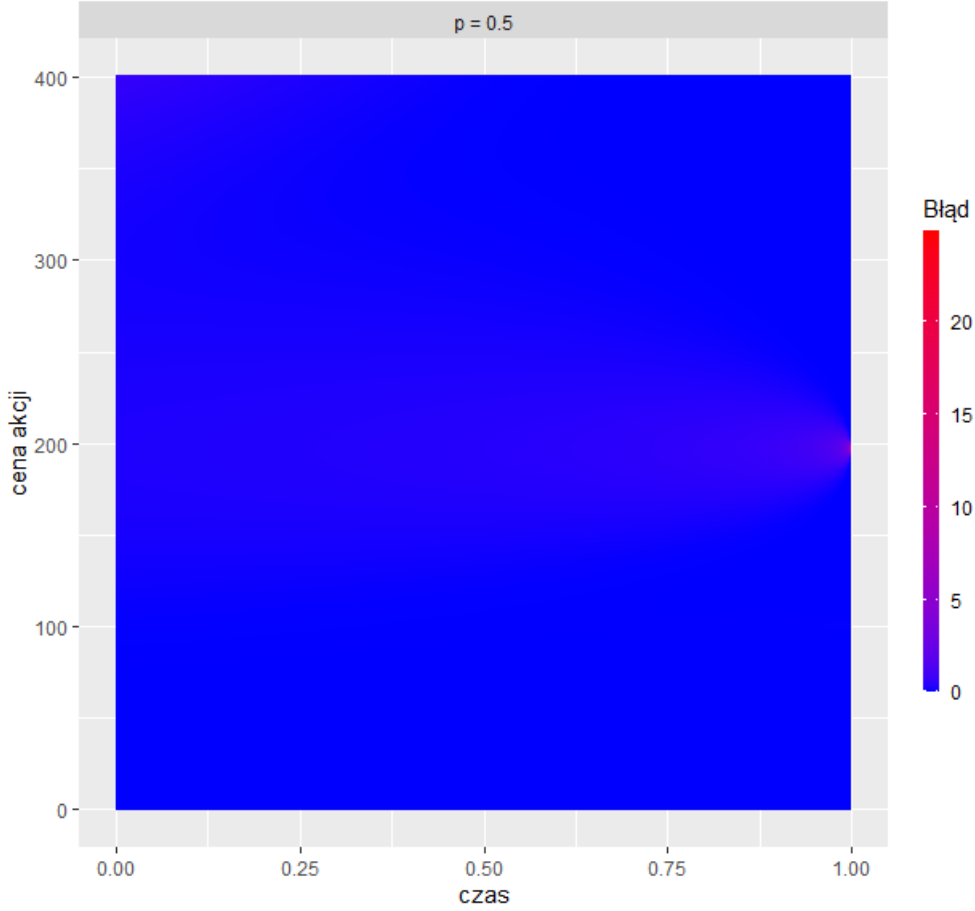
z błędem przybliżenia rzędu $O((\delta S)^2)$, natomiast dla $i = 0, I$ mamy kolejno:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{V_1^k - V_0^k}{\delta S}, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{V_I^k - V_{I-1}^k}{\delta S},$$

z błędami przybliżenia rzędu $O(\delta S)$.

Przykład Ponownie rozważmy przykład opcji call z ceną wykonania $K = 100$ na aktywo bazowe, którego parametry opisane są w podrozdziale 4.3. Rozważamy również wklęsłą, liniową i wypukłą funkcję straty wykładnikami kolejno $p = 0.5$, $p = 1$, $p = 2$. Ustalmy ilość kroków w cenie akcji na $I = 400$ oraz wielkości kroków na $\delta S = 1, \delta t = 6.8966e - 05$.

Błąd bezwzględny w liczeniu zmodyfikowanej opcji z parametrem $p = 0.5$ dany jest na poniższej mapie ciepła:



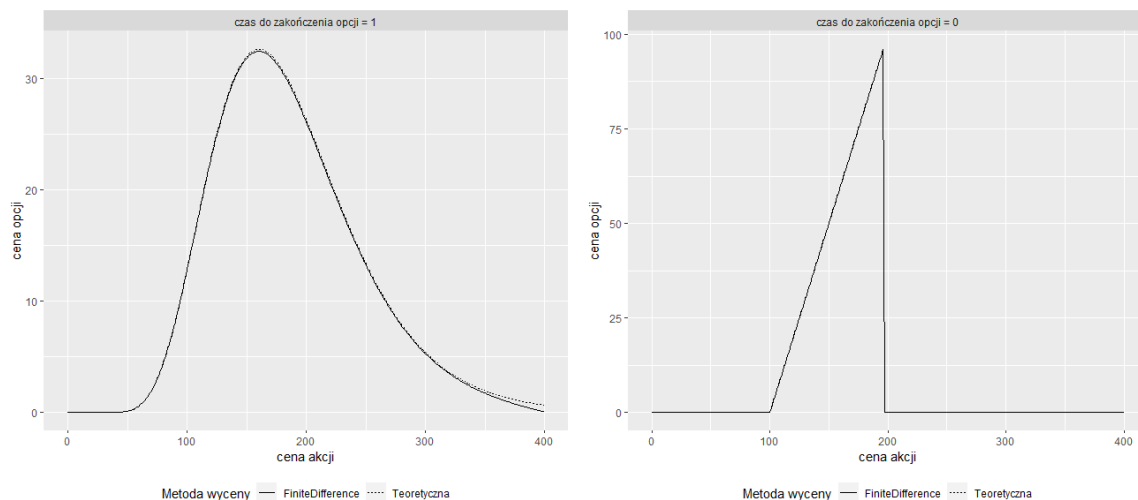
Rysunek 7: Błąd bezwzględny w liczeniu zmodyfikowanej opcji parametrem $p = 0.5$.

Jak widzimy błąd jest dość duży. Po przeanalizowaniu dokładnych wyników okazuje się, że duże błędy pomiędzy teoretyczną ceną zmodyfikowanego roszczenia, a tą wyznaczoną przez finite difference pojawiają się w dwóch miejscach. Pierwszy z nich jest dla dużych cen akcji. W wyniku dobrania za małej ceny maksymalnej na siatce, wartości teoretyczne ceny opcji, gdy czas jest bliski 0 są większe od wartości numerycznej.

Drugim, zdecydowanie większym problemem są początkowe kroki algorytmu. Z uwagi na dość duże kroki cen akcji oraz samą specyfikę opcji, która jest w dwóch punktach nieciągła, w metodzie finite difference na siatce nie ma tych punktów nieciągłości, co powoduje spore błędy. Ponadto wartość:

$$a_p = (L - K)L^{-\frac{m}{\sigma^2}},$$

gdzie L jest stałą wyznaczoną metodą Newtona z teoretycznej ceny opcji, nieznacznie różni się od stałej wyznaczonej za pomocą metody Monte-Carlo co również powoduje błąd.

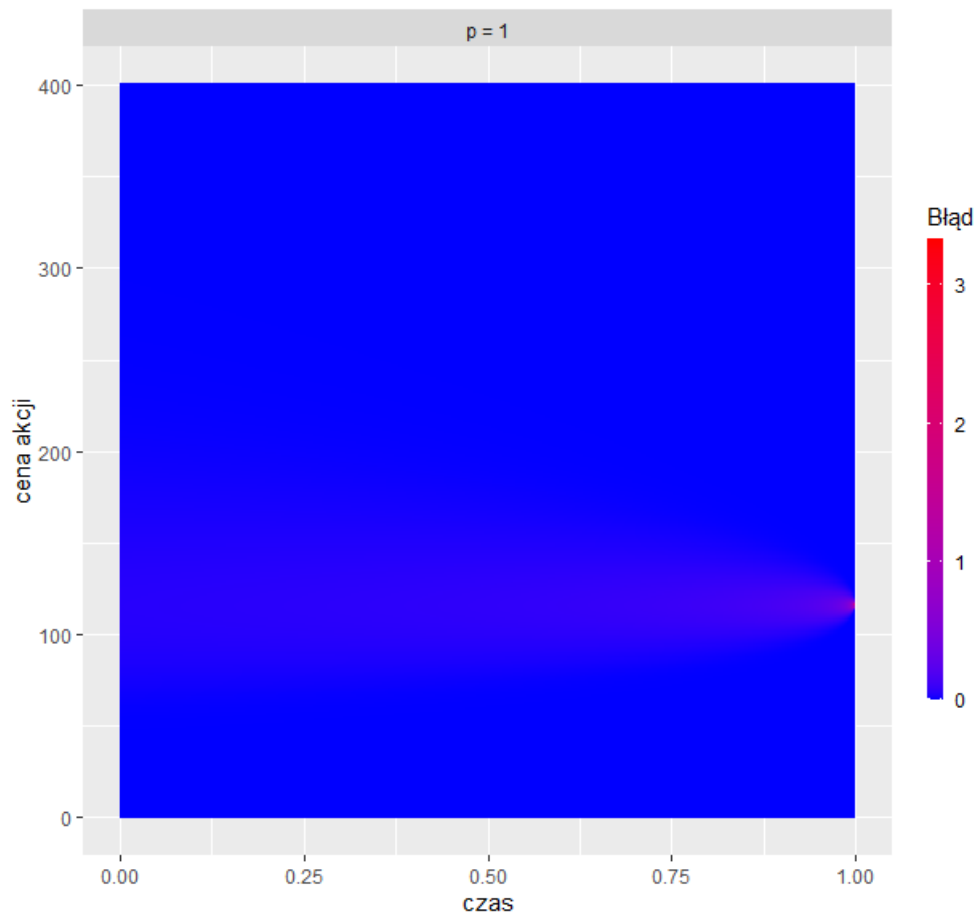


Rysunek 8: Wykresy porównawcze wyceny opcji za pomocą wzorów oraz metodą finite difference dla ceny w chwili 0 oraz 1.

Jak widzimy w wykresie payoff, wypłaty wyznaczone teoretycznie pokrywają się z tymi wyznaczonymi za pomocą metod numerycznych. Jeśli spoglądamy na cenę opcji w chwili 0 względem ceny akcji można zauważyć niewielką różnicę w cen opcji, w szczególności, gdy cena akcji jest duża.

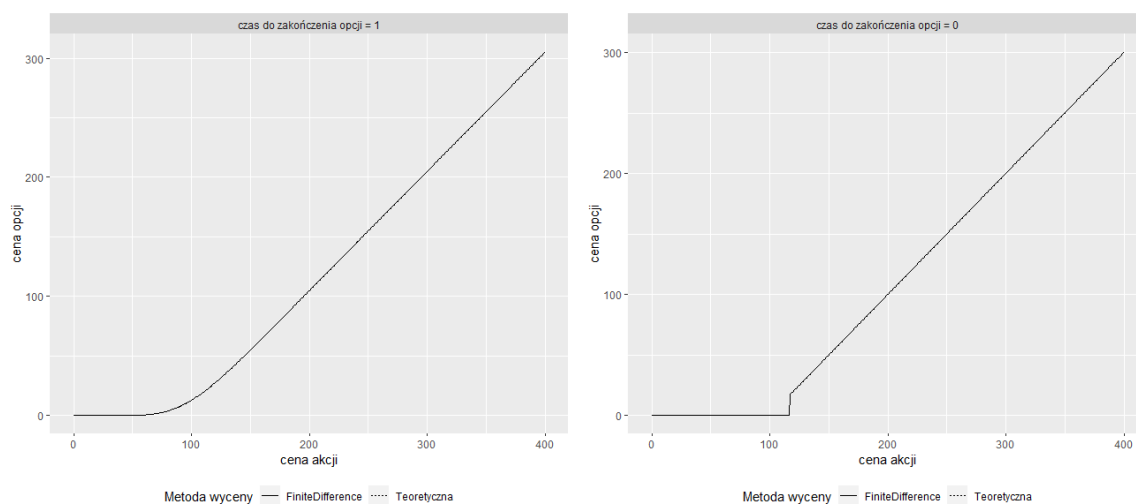
W celu poprawienia błędów należy ustalić dokładnie jedną stałą L_1 , dla której istnieje $i \in 0, \dots, I$, takie, że $L_1 = i\delta S$ oraz która nie zmienia zbyt mocno kapitału początkowego, a następnie policzyć stałą $a = (L_1 - K)^{-\frac{m}{\sigma^2}}$, z którą liczymy payoff zmodyfikowanego roszczenia metodą finite difference.

W naszym przypadku ustalając stałą na 197, cena opcji (liczona metodą MC) zmienia się z 12.8081 na 12.8457 zatem jest to zmiana ceny opcji o 0.2936%.



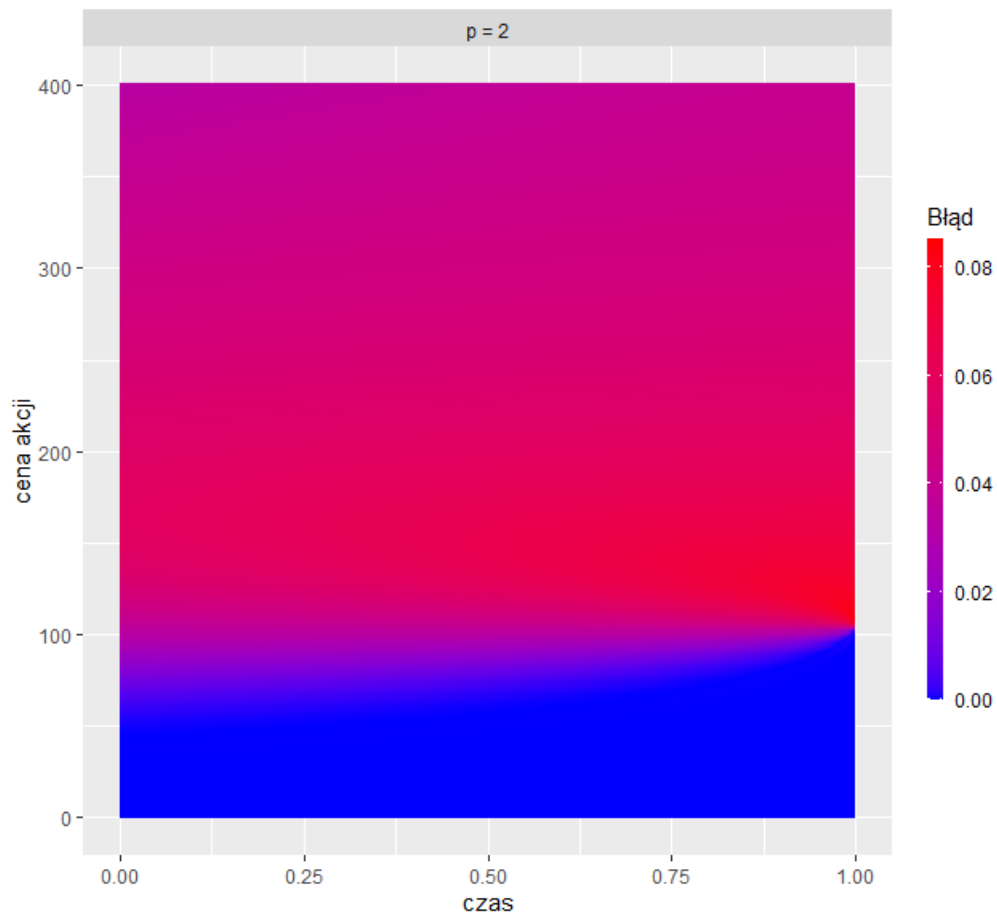
Rysunek 9: Błąd bezwzględny w liczeniu zmodyfikowanej opcji parametrem $p = 1$.

W przypadku liniowej funkcji straty jest podobnie. Payoff tej zmodyfikowanej opcji jest nieciągły ze względu na cenę akcji oraz stałe nieznacznie różnią się od siebie z uwagi na błąd przy liczeniu stałej za pomocą metod Monte Carlo. Można zmniejszyć te błędy ponownie zmieniając nieznacznie stałą dla zmodyfikowanego rozszczenia tak, by któraś z cen akcji na siatce była równa ustalonej stałej.



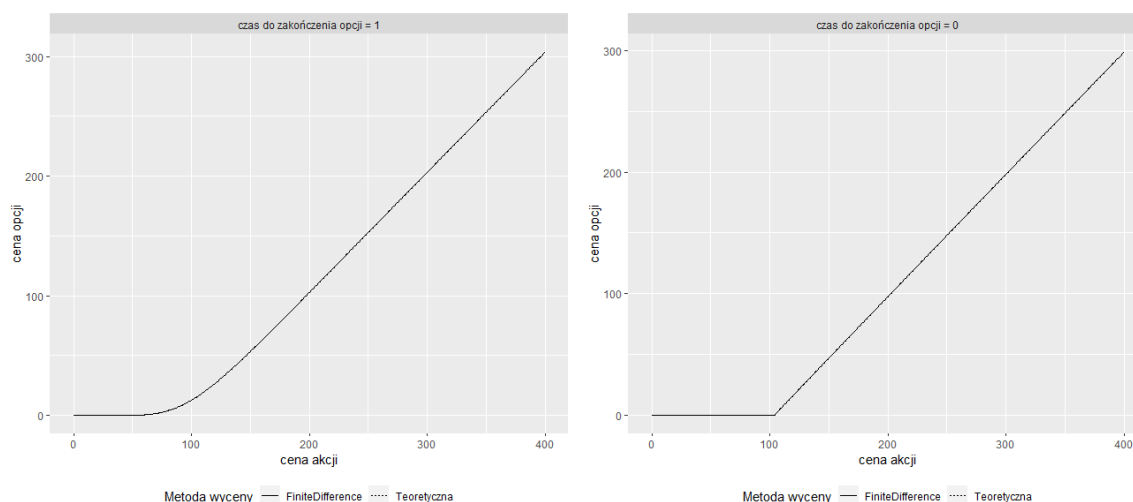
Rysunek 10: Wykresy porównawcze wyceny opcji za pomocą wzorów oraz metodą finite difference dla ceny w chwili 0 oraz 1.

Jeśli spojrzymy na cenę opcji w zależności od ceny akcji dla chwili 0 oraz 1 nie jesteśmy w stanie dostrzec różnic pomiędzy ceną teoretyczną, a tą wyznaczoną za pomocą algorytmów.



Rysunek 11: Błąd bezwzględny w liczeniu zmodyfikowanej opcji parametrem $p = 2$.

W przypadku tej opcji, błędy są małe, a te największe wynikają z błędów numerycznych metody Monte Carlo, przy estymacji stałej.



Rysunek 12: Wykresy porównawcze wyceny opcji za pomocą wzorów oraz metodą finite difference dla ceny w chwili 0 oraz 1.

Podobnie jak w przypadku liniowym nie widać różnic pomiędzy ceną opcji wyznaczoną teoretycznie, a tą wyliczoną numerycznie dla chwili 0 oraz 1.

5.3 Wyniki symulacji

Celem sprawdzenia, jak działają algorytmy, podobnie jak w rozdziale 4.3 zasymulujemy 10000 trajektorii procesu aktywa bazowego, a następnie porównamy wyniki symulacyjne wykonane w 4.3, które robione były dzięki wyprowadzonym wzorom, z wynikami, które otrzymamy korzystając z algorytmów z rozdziału 4.

Wykonamy to w następujący sposób:

- dla 90% ceny standardowej opcji call z ceną wykonania $K = 100$ wyznaczymy stałe dla wklęsłej, liniowej i wypukłej funkcji straty korzystając z metody Monte Carlo opisanej w 5.1;
- następnie wykonujemy algorytm finite difference dla ustalonej zmodyfikowanej wypłaty oraz estymujemy ilość akcji potrzebną do zabezpieczenia tego roszczenia;
- dla każdej trajektorii, budujemy portfel zabezpieczający posługując się wartościami z siatki finite difference;

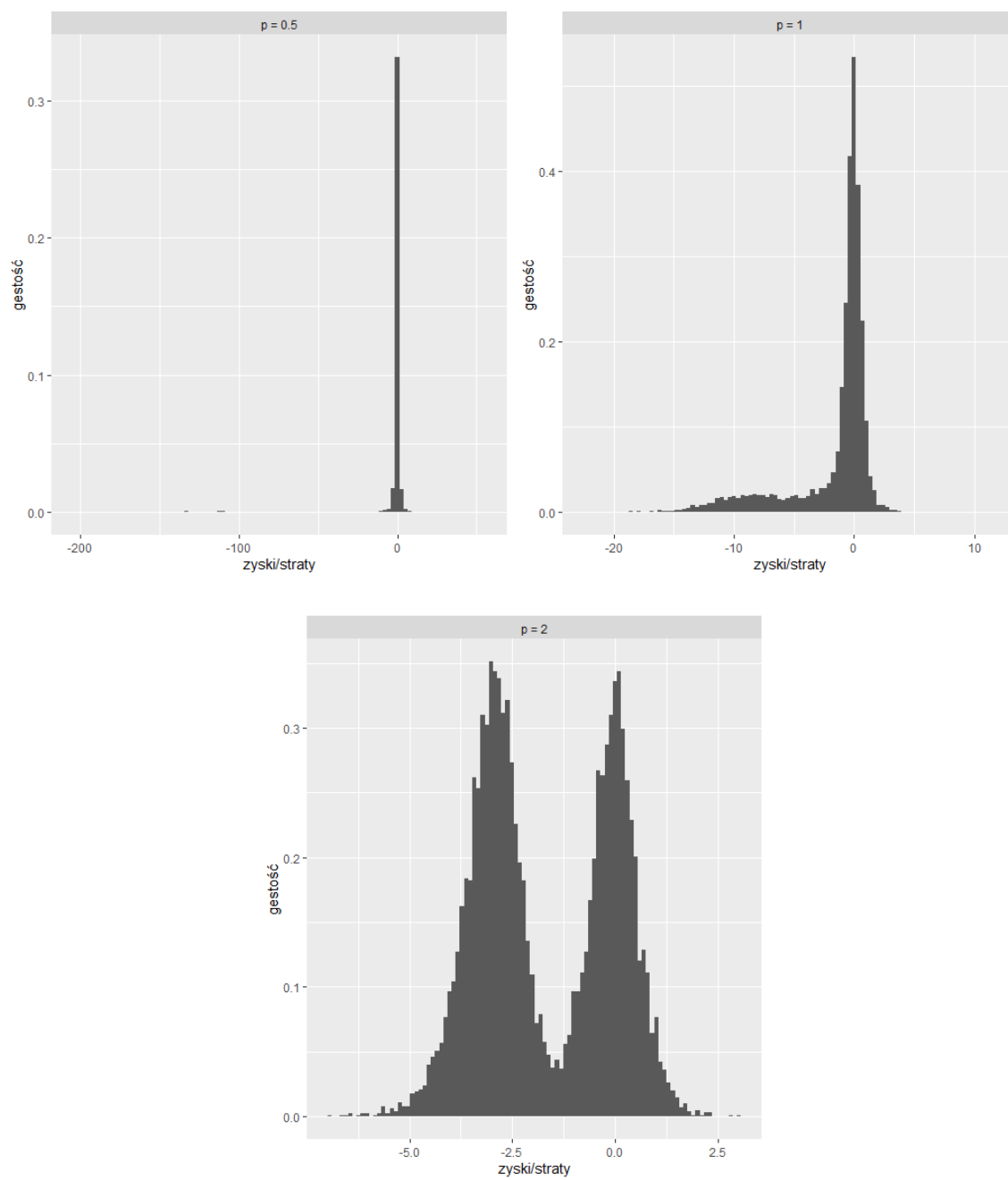
- na sam koniec, od wartości portfela w chwili T odejmujemy wartość wypłaty opcji call.

W przypadku, gdy dana cena akcji jest pomiędzy dwoma wartościami akcji z siatki finite difference, do wyceny opcji oraz ilości aktywa do zabezpieczenia skorzystamy z prostej interpolacji liniowej:

$$y = y_1 + a(x - x_1), \text{ gdzie } a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

a $x \in [x_1, x_2]$, natomiast y_1, y_2 są kolejno wartościami funkcji od x_1, x_2 .

Histogramy zysków/strat portfela są następujące:



Rysunek 13: Histogramy zysków i strat portfela dla $p = 0.5$ i $p = 1$, $p = 2$.

Podstawowe statystyki zysków i strat portfela prezentują się następująco:

| Statystyki podstawowe | teoria $p = 0.5$ | estymacja $p = 0.5$ | teoria $p = 1$ | estymacja $p = 1$ | teoria $p = 2$ | estymacja $p = 2$ |
|-----------------------|---------------------|------------------------|-------------------|----------------------|-------------------|----------------------|
| minimum | -204.776 | -204.788 | -22.056 | -22.217 | -6.9707 | -7.041 |
| 1 kwartyl | -0.4578 | -0.4592 | -1.2426 | -1.2857 | -3.0292 | -3.1037 |
| mediana | -0.0089 | -0.0101 | -0.2447 | -0.2543 | -2.1298 | -2.1906 |
| średnia | -2.4025 | -2.4399 | -1.5496 | -1.5943 | -1.6686 | -1.7078 |
| 3 kwartyl | 0.4006 | 0.398 | 0.2401 | 0.2384 | -0.0897 | -0.0904 |
| maksimum | 55.7709 | 53.805 | 12.4435 | 11.8695 | 2.9966 | 2.9914 |

Tabela 3: Podstawowe statystyki zysków i strat z portfela - porównanie statystyk teoretycznych i z estymacji metodami numerycznymi.

Jak widać w tabeli 3 podstawowe statystyki wyliczone na podstawie portfeli, które zmieniały się zgodnie z metodami numerycznymi, we wszystkich trzech przypadkach są bardzo podobne do portfeli, które zabezpieczały opcję call zgodnie ze wzorami analitycznymi.

Możemy z tego wywnioskować, że metody numeryczne działają dość dobrze i mogą skutecznie być stosowane do innych opcji niezależnych od ścieżki, aczkolwiek (w szczególności dla finite difference) należy być uważnym używając ich zwłaszcza, gdy wypłata pierwotnej opcji jest nieciągła bądź używamy wklęsłej lub liniowej funkcji straty.

Literatura

- [1] Follmer, H; Leukert, P; Quantile Hedging. *Finance Stochast.* **3**, 251-271 (1999)
- [2] Delbaen, F; Schachermayer, W; A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *ng. Math. Annalen* **300**, 463-520 (1994)
- [3] Follmer, H; Leukert, P; Efficient Hedging: Cost versus Shortfall Risk. *Finance Stochast.* **4**, 117–146 (2000)
- [4] Karlin, S; *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics.* vol. 2. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley (2003)
- [5] Privault, N; Notes on Stochastic Finance. Nanyang Technological University. https://personal.ntu.edu.sg/nprivault/MA5182/stochastic_finance.pdf, dostęp 24.01.2022
- [6] Harrison, M; Pliska, S; Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.* **4**, 215–260 (1981)
- [7] Rolski, T; *Symulacje stochastyczne i teoria Monte Carlo.* Wrocław, Polska: Uniwersytet Wrocławski. <http://www.math.uni.wroc.pl/~rolski/Zajecia/sym.pdf>, dostęp 24.01.2022
- [8] Wilmott, P; *Paul Wilmott On Quantitative Finance*, Chichester: John Wiley & Sons Ltd. (2006)
- [9] Shiryaev, A; *Essentials of stochastic finance.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ. (1999)
- [10] Jacques, I; Judd, C; *Numerical Analysis.* Chapman and Hall (1987)
- [11] Latała, R; *Wstęp do analizy stochastycznej.* Warszawa, Polska: Uniwersytet Warszawski. <https://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/was/wyklad.pdf>, dostęp 31.01.2022
- [12] Ociepa, M; <https://github.com/mociepa/ShortfallRiskHedging>, dostęp 31.01.2022