

Variedades Computacionais

Antonio Castelo Filho
Juliana Bertoco

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil
2020

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Variedades	3
2.1	Variedades Diferenciáveis	3
2.2	Variedades Lineares por Partes	5
2.3	Formas de Representação de Variedades	9
2.3.1	Variedades como Gráfico de Funções	10
2.3.2	Variedades Parametrizadas	12
2.3.3	Variedades Definidas Implicitamente	16
2.4	Exercícios	24
3	Estruturas de Dados para Variedades Lineares por Partes	25
3.1	Estruturas de Dados Explícitas	25
3.2	Estruturas de Dados Implícitas	25
4	Modelagem Utilizando Operadores Diferenciais	27
4.1	Operador de Laplace-Beltrami	27
4.2	Reconstrução de Superfícies Lineares por Partes	27
5	Variedades Definidas Implicitamente	29
5.1	Interpolação Linear Simplicial	29
5.2	Resultados sobre Aproximações Simpliciais	30
6	Curvas e Superfícies NURBS	33
6.1	Curvas e Superfícies de Bezier	33
6.2	Curvas e Superfícies B-Splines	33
6.3	Curvas e Superfícies Racional B-Splines	33
6.4	Curvas e Superfícies NURBS	33
7	Características Robustas	35
7.1	Conceitos Básicos de Geometria Diferencial	35
7.2	Características Robustas	35

Capítulo 1

Introdução

Este é um livro básico sobre variedades computacionais e aplicações que estão presentes em quase todas as áreas da matemática aplicada e computacional, tais como geometria e topologia computacional, modelagem geométrica, computação gráfica, geração de malhas, representação de interfaces em mecânica dos fluidos computacional, entre outras.

ESTE CAPÍTULO ESTÁ EM CONSTRUÇÃO

Capítulo 2

Variedades

Este capítulo apresenta definições sobre variedades, variedades lineares por partes. Ele também cita alguns teoremas da literatura que são importantes para que os algoritmos apresentados neste livro funcionem corretamente. As definições e teoremas apresentados neste capítulo são de grande importância para a leitura do restante do texto, pois os conceitos serão utilizados nos capítulos que tratam de aproximações lineares por partes de variedades definidas implicitamente, que é o foco deste livro. As provas dos teoremas citados não serão apresentadas, porém referências para tais provas se encontram ao longo do texto. As definições e teoremas das primeiras seções serão utilizadas nas demais seções deste capítulo e dos capítulos seguintes.

2.1 Variedades Diferenciáveis

Vamos apresentar alguns conceitos básicos sobre variedades diferenciáveis, mais especificamente variedades definidas implicitamente. Para detalhes e provas sugerimos a leitura dos livros clássicos “Curso de Análise Vol. 2” [9] e “Variedades Diferenciáveis” de Elon Lages Lima [8], em “Introdução aos Sistemas Dinâmicos” de Jacob Palis Junior e Wellington de Melo [11] e em “Topology from the Differentiable Viewpoint” de John Milnor [10].

Definição 2.1. (*Homeomorfismo*) Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo se é uma aplicação contínua, invertível e sua inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ é uma aplicação contínua. Neste caso dizemos que U e V são homeomorfos.

Definição 2.2. (*Difeomorfismo*) Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) se é uma aplicação invertível e sua inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ é uma aplicação de classe C^r . Neste caso dizemos que U e V são difeomorfos.

Definição 2.3. (*Valor Regular*) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^r ($r \geq 1$). $c \in \mathbb{R}^k$ é valor regular de f se para todo $x \in f^{-1}(c)$, $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tem posto máximo. Se c não for valor regular de f , diremos que é valor crítico de f .

Teorema 2.1. (*Função Inversa*) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) tal que, em um ponto $x_0 \in U$, a derivada $Df(x_0)$ é um isomorfismo. Então f aplica difeomorficamente uma vizinhança menor V de x_0 sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$.

Teorema 2.2. (*Função Implícita*) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$). Sejam $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ e $c = f(z_0)$. Suponha que a derivada em relação a segunda variável $D_2f(z_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um isomorfismo. Então existem abertos $V \subset \mathbb{R}^m$ contendo x_0 , e $W \subset U$ contendo z_0 , tais que, para cada $x \in V$, existe um único $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$, com $(x, \xi(x)) \in W$ e $f(x, \xi(x)) = c$. A aplicação $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, assim definida, é de classe C^r e sua derivada é dada por $D\xi(x) = [D_2f(x, \xi(x))]^{-1} \cdot D_1f(x, \xi(x))$.

Definição 2.4. (*Variedade Diferenciável*) $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ é uma variedade diferenciável de dimensão n e de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) se para todo $x \in \mathcal{M}$ existirem vizinhanças abertas $U \subset \mathbb{R}^m$ de x , $V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ e um difeomorfismo de classe C^r de $\mathcal{M} \cap U$ em V . Um difeomorfismo $\varphi : U \cap \mathcal{M} \rightarrow V$ é chamado de parametrização da região $U \cap \mathcal{M}$. A fronteira de \mathcal{M} , $\partial\mathcal{M}$ é o conjunto dos pontos de \mathcal{M} correspondentes a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ pelas parametrizações.

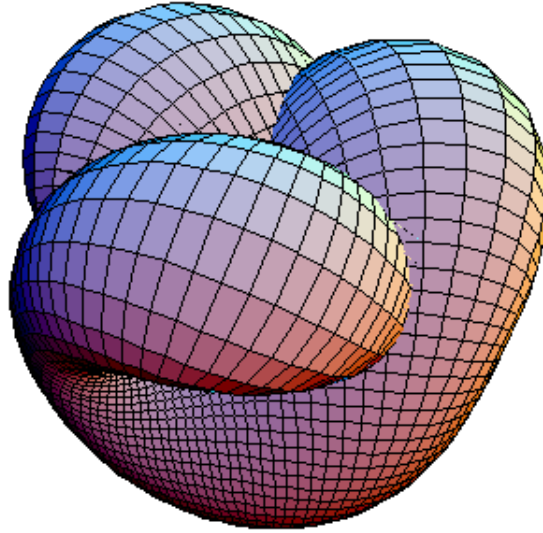


Figura 2.1: Projeção em \mathbb{R}^3 do plano projetivo. Figura extraída de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BoysSurfaceTopView.PNG>

Definição 2.5. (*Espaço Tangente*) Sejam \mathcal{M} uma variedade diferenciável de dimensão n e $\varphi : V \rightarrow U \cap \mathcal{M}$ uma parametrização de $U \cap \mathcal{M}$, onde $\varphi(u) = v$. Definimos o espaço vetorial tangente a \mathcal{M} no ponto v como $T_v\mathcal{M} = \{D\varphi(u) \cdot y \mid y \in \mathbb{R}^n\}$, onde $D\varphi(u)$ é o operador derivada da parametrização φ no ponto $u \in V$.

Teorema 2.3. (*Variedade Definida Implicitamente*) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$). Se $c \in \mathbb{R}^k$ é valor regular de f , ou $f^{-1}(c)$ é vazio ou é uma variedade diferenciável de dimensão $n - k$ e de classe C^r em \mathbb{R}^n . Além disso, para todo $p \in f^{-1}(c)$, o espaço tangente em p é o núcleo de $Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Teorema 2.4. (*Vizinhança Tubular*) Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^r no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ com $m \geq n$ e $1 \leq r \leq \infty$. Se $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de F ,

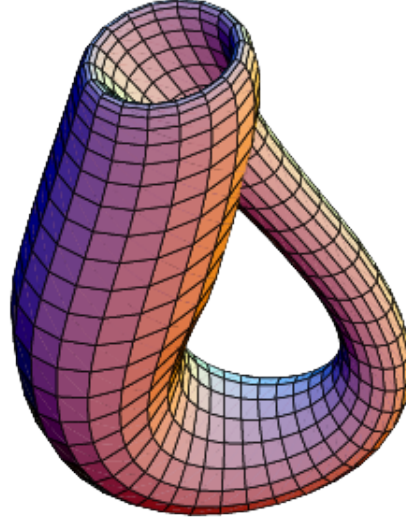


Figura 2.2: Superfície não orientável chamada de **garrafa de Klein**. Figura extraída de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KleinBottle-01.png>

então existe uma vizinhança fechada $V_{\mathcal{M}}$ da variedade $\mathcal{M} = F^{-1}(c)$ constituída de variedades, isto é, se $x \in V_{\mathcal{M}}$, então $F^{-1}(F(x))$ é uma variedade contida em $V_{\mathcal{M}}$.

Definição 2.6. (Conjunto de Medida Nula) Uma conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de medida nula em \mathbb{R}^n se para cada $\epsilon > 0$ dado, é possível obter uma sequência de hipercubos de dimensão n abertos $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$ em \mathbb{R}^n tais que $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(C_k) < \epsilon$.

Definição 2.7. (Conjunto Denso) Uma conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto denso em \mathbb{R}^n se o complementar $\mathbb{R}^n - X$ tem medida nula em \mathbb{R}^n .

Teorema 2.5. (Sard) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^r ($r \geq \max\{1, n - k + 1\}$). O conjunto dos valores regulares de f é aberto e denso em \mathbb{R}^k .

Definição 2.8. (Subvariedade Diferenciável) Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade diferenciável de dimensão n e de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$). $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ é uma subvariedade diferenciável de dimensão k de \mathcal{M} e de classe C^s ($1 \leq s \leq r$) se para todo $x \in \mathcal{N}$ existirem vizinhanças abertas $U \subset \mathbb{R}^m$ de x , $V \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^+$ e um difeomorfismo de classe C^s de $\mathcal{N} \cap U$ em V .

Definição 2.9. (Transversalidade) Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} duas variedades de dimensão m e n respectivamente em \mathbb{R}^k ($k \geq \max\{m, n\}$) e de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$). Dizemos que \mathcal{M} e \mathcal{N} são transversais em um ponto $p \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ se $T\mathcal{M}_p + T\mathcal{N}_p = \mathbb{R}^k$. Se $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, então \mathcal{M} e \mathcal{N} são transversais por vacuidade.

2.2 Variedades Lineares por Partes

Para maior aprofundamento no tema apresentado nesta e nas próximas seções, é sugerida a leitura da tese [3], do livro [1], do artigo [4] e do curso no proceedings [5].

Definição 2.10. (*Espaço Afim*) Dados os pontos $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, chama-se o conjunto $\text{aff}(v_0, \dots, v_k) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = v \text{ e } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1\}$ de conjunto afim gerado pelos pontos v_0, \dots, v_k .

Definição 2.11. (*Dimensão*) Chama-se de dimensão de $\text{aff}(v_0, \dots, v_k)$ e denota-se por $\dim(\text{aff}(v_0, \dots, v_k))$ o maior número de vetores linearmente independentes entre os do conjunto $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$.

Definição 2.12. (*Célula Convexa Afim*) Chama-se de célula convexa afim, gerada pelos pontos v_0, v_1, \dots, v_k , o conjunto $\sigma = [v_0, \dots, v_k] = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = v, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \text{ e } \lambda_i \geq 0\}$. Definimos a dimensão de σ por $\dim(\sigma) = \dim(\text{aff}(v_0, \dots, v_k))$. Uma célula convexa afim σ de dimensão k é denominada k -célula.

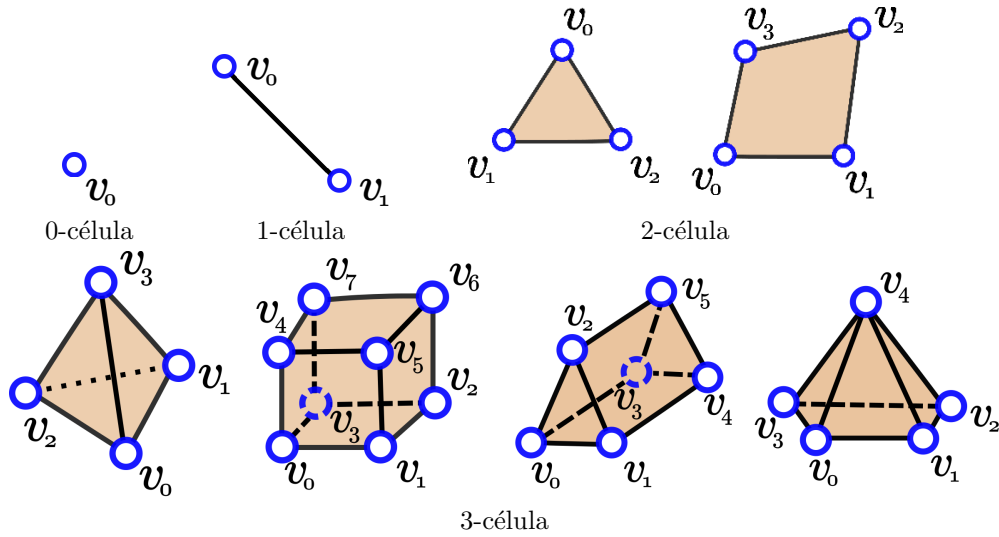


Figura 2.3: Exemplos de 0-célula, 1-célula, 2-células e 3-células.

Definição 2.13. (*Bordo de uma Célula Convexa Afim*) O bordo de uma célula convexa afim σ , denotada por $\partial(\sigma)$, é o conjunto de sub-células satisfazendo:

1. Se $\sigma' \in \partial(\sigma)$, então σ' é gerada por um subconjunto de vértices de σ ;
2. Para qualquer $p \in \sigma' \in \partial(\sigma)$, não existe uma bola contendo p em $\text{aff}(\sigma)$ inteiramente contida em σ' ;
3. Se $\sigma'_1, \sigma'_2 \in \partial(\sigma)$ e tem a mesma dimensão então $\sigma'_1 \not\subset \sigma'_2$ e $\sigma'_2 \not\subset \sigma'_1$.

Definição 2.14. (*Face de uma Célula Convexa Afim*) Sejam uma célula convexa afim $\sigma = [v_0, \dots, v_m]$ de dimensão n e $\tau = [\omega_0, \dots, \omega_l]$ uma célula convexa afim de dimensão k , com $\{\omega_0, \dots, \omega_l\} \subset \{v_0, \dots, v_m\}$, então τ é uma face de σ se:

1. $\tau \subset \partial(\sigma)$;
2. Se existe alguma sub-célula η com $\text{aff}(\tau) = \text{aff}(\eta)$, então $\eta \subset \tau$.

Definição 2.15. (*Decomposição Celular*) Uma coleção \mathcal{C} de células convexas afins é dita decomposição celular de um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se:

1. $S = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}} \sigma$;
2. Se $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}$, então $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ou $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in \mathcal{C}$;
3. Todo subconjunto compacto de S intersecta um número finito de células de \mathcal{C} .

Definição 2.16. (*Complexo Celular*) Um complexo celular \mathcal{C} é um conjunto finito de células convexas afins que satisfazem:

1. Se $\sigma \in \mathcal{C}$ e τ face de σ então $\tau \in \mathcal{C}$;
2. Se $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}$, então $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ou $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é uma face comum de σ_1 e σ_2 .

A intersecção entre duas células quaisquer de um complexo celular se dá por uma face comum a ambas. A Figura 2.4-(a) apresenta um exemplo de um complexo celular bidimensional, enquanto a figura 2.4-(b)) apresenta um contra-exemplo de complexo celular.

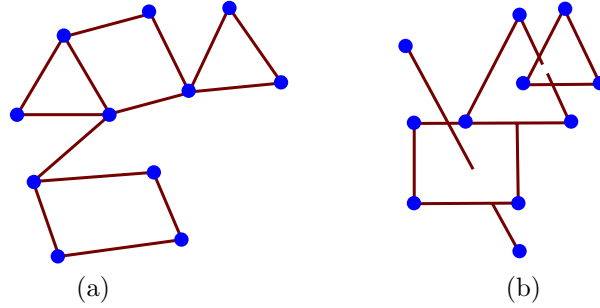


Figura 2.4: (a) Exemplo de complexo celular e (b) contra-exemplo de complexo celular.

Definição 2.17. (*Simplexo*) Uma célula convexa afim $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ de \mathbb{R}^n é chamada de simplexo, se $\dim(\sigma) = k$, isto é, um simplexo k -dimensional é uma célula convexa afim de dimensão k gerada por $k + 1$ pontos. Um simplexo de dimensão 0 é denominado vértice e um simplexo de dimensão 1 é denominado aresta.

Definição 2.18. (*Triangulação*) Uma decomposição celular \mathcal{C} de $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamada de triangulação de S , se todas as células de \mathcal{C} são simplexos.

Definição 2.19. (*Complexo Simplicial*) Um complexo simplicial é um complexo celular \mathcal{C} onde todas as células de \mathcal{C} são simplexos.

Definição 2.20. (*Propriedades de Simplexos*) Dado um simplexo $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ de \mathbb{R}^n , define-se :

1. A fronteira de σ , $\partial\sigma$, como a união de todas as faces de dimensão $k - 1$ de σ ;
2. O baricentro de σ , $b(\sigma) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v_i$;
3. O diâmetro de σ , $\rho(\sigma) = \max\{\|v_i - v_j\|; i, j = 0, \dots, k\}$;
4. O raio de σ , $r(\sigma) = \min\{\|v - b(\sigma)\| \mid v \in \partial(\sigma)\}$;
5. A robustez de σ , $\theta(\sigma) = r(\sigma)/\rho(\sigma)$.

Definição 2.21. (*Propriedades de Triangulação*) Se T é uma triangulação de $S \subset \mathbb{R}^n$, define-se:

1. O diâmetro de T , $\rho(T) = \sup\{\rho(\sigma) \mid \sigma \in T \text{ com } \dim(\sigma) > 0\}$;
2. A robustez de T , $\theta(T) = \inf\{\theta(\sigma) \mid \sigma \in T \text{ com } \dim(\sigma) > 0\}$.

Definição 2.22. (*Células Adjacentes*) Uma célula σ_1 é dita adjacente a outra célula σ_2 se $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é uma face comum de σ_1 e σ_2 .

A Figura 2.5 apresenta dois exemplos de adjacência entre células, um de células bidimensionais e outro de células tridimensionais.

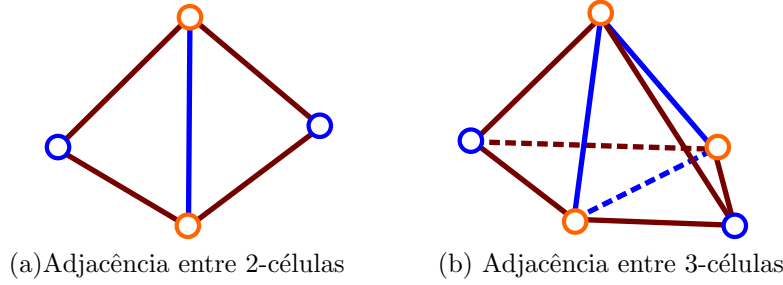


Figura 2.5: Adjacências entre 2-células (por uma aresta) e 3-células (por uma face).

Definição 2.23. (*Vértices Vizinhos*) Um vértice é dito vizinho a outro se existe uma aresta que contém os dois.

Definição 2.24. (*Células Incidentes*) Dada uma célula σ de dimensão p e τ uma célula de dimensão k , onde $p > k$, estas células são ditas incidentes se τ é uma face de σ .

Definição 2.25. (*Orientação de uma Célula*) Seja \mathcal{C} um complexo celular de dimensão p , onde p é a maior dimensão de todas as células. A orientação de duas células adjacentes σ e τ de dimensão p de \mathcal{C} é coerente se face de dimensão $p - 1$ que compartilham tem orientação oposta em cada uma das células. O complexo celular \mathcal{C} é orientável se uma orientação coerente pode ser escolhida para todas as suas células.

Definição 2.26. (*Estrela de uma Célula*) A estrela de uma célula σ de um complexo celular \mathcal{C} , denominada por $S(\sigma)$ é o conjunto de todas as células de \mathcal{C} que contém σ , isto é, $S(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{C} \mid \sigma \subseteq \tau\}$.

Definição 2.27. (*Elo de uma Célula*) O elo de uma célula $\sigma \subset \mathcal{C}$ é o conjunto $L(\sigma) = \{\tau \in S(\sigma) \mid \tau \cap \sigma = \emptyset\}$, onde $S(\sigma)$ é o fecho da estrela de σ .

Um exemplo de estrela e de elo de um vértice central é mostrado na Figura 2.7(b).

Definição 2.28. (*Variedade Linear por Partes*) Um complexo celular \mathcal{C} de dimensão n é dito uma variedade linear por partes de dimensão n se para todo $\sigma \in \mathcal{C}$, ou $L(\sigma)$ é homeomorfo a uma esfera de dimensão $n - 1$, ou é homeomorfo a um disco de dimensão $n - 1$. Caso $L(\sigma)$ seja homeomorfo a um disco de dimensão $n - 1$, σ pertence ao bordo de \mathcal{C} .

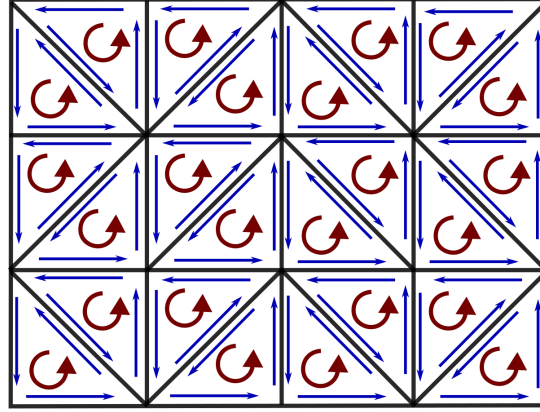
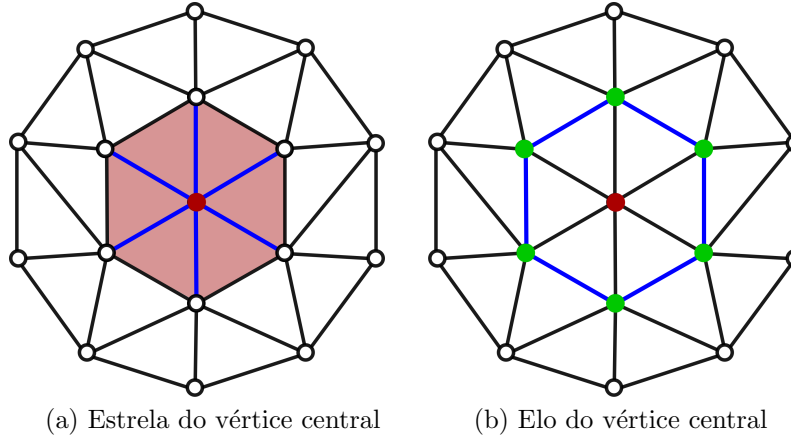


Figura 2.6: Complexo celular bidimensional orientado em sentido anti-horário.



(a) Estrela do vértice central (b) Elo do vértice central

Figura 2.7: Representações de uma estrela e um elo de um vértice.

A figura 2.8-(a) dá um exemplo de um vértice de interior, enquanto a figura 2.8-(b) exemplifica um vértice de bordo de uma variedade linear por partes de dimensão 2. Já a figura 2.8-(c) exibe uma não-variedade.

Definição 2.29. (*Variedade Triangulada*) Uma variedade triangulada \mathcal{C} é uma variedade linear por partes onde todas suas células são simplexos.

2.3 Formas de Representação de Variedades

As formas de representação mais comuns de variedades são como gráfico de uma função, a imagem de uma função e como a imagem inversa de uma função. Estas formas de representação serão definidas e exemplificadas nas próximas subseções.

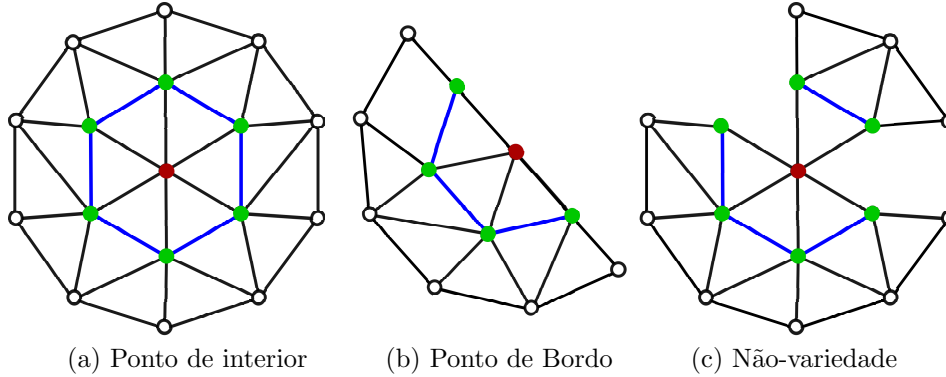


Figura 2.8: Exemplos de variedades (a) e (b) e de não-variedade (c).

2.3.1 Variedades como Gráfico de Funções

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r . O conjunto $\mathcal{M} = \{ (x, F(x)) \mid x \in U \}$ é uma variedade de dimensão n em \mathbb{R}^{n+1} de classe C^r . Neste caso \mathcal{M} é o gráfico da função F .

Os casos mais simples são:

- Para $n = 1$ o gráfico de F é uma curva em \mathbb{R}^2 ;
- Para $n = 2$ o gráfico de F é uma superfície em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1: Como exemplo de curva em \mathbb{R}^2 , apresentamos o código 2.1 em Matlab/Octave com o gráfico das funções cosseno e seno. A figura 2.9 apresenta o resultado da execução deste código.

```

x = linspace(0,2*pi,30);           % gerando os pontos do domínio
y1 = cos(x);                       % gerando a função cosseno
y2 = sin(x);                       % gerando a função seno
hold on
plot(x,y1,'r-s');                  % plotando o gráfico do cosseno
plot(x,y2,'g-*');                  % plotando o gráfico do seno
grid                               % gerando um grid
xlabel('eixo x');                   % legenda no eixo horizontal
ylabel('eixo y');                   % legenda no eixo vertical
title('Gráfico do seno e do cosseno'); % título do gráfico
legend('sen(x)', 'cos(x)');         % legenda
hold off

```

Código 2.1: Código utilizado para gerar a figura 2.9

Exemplo 2: Como exemplo de superfície em \mathbb{R}^3 , apresentamos o gráfico da função $z = F(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2+0.1})}{\sqrt{x^2+y^2+0.1}}$. A figura 2.10 apresenta o resultado da execução do código 2.2 feito em Matlab/Octave.

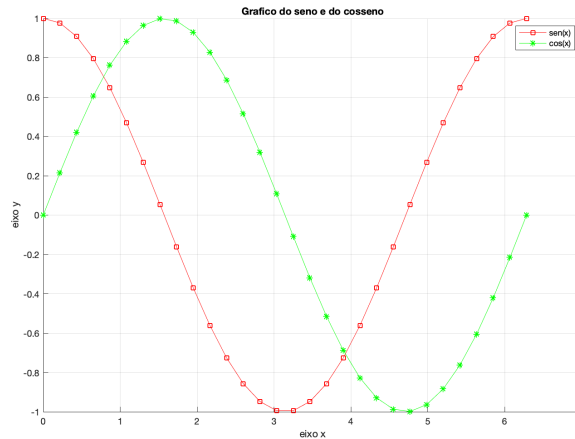


Figura 2.9: Curvas em \mathbb{R}^2 geradas como gráfico das funções cosseno e seno.

```

px = py = linspace (-10, 10, 50)'; % gerando os pontos do domínio
[x, y] = meshgrid (px, py);          % criando a malha
r = sqrt(x.^2 + y.^2) + 0.1;         % r é variável auxiliar
z = sin(r) ./ r;                     % função z=F(x,y)
surf (x, y, z);                      % plotando a superfície
xlabel('eixo x');                     % legenda no eixo x
ylabel('eixo y');                     % legenda no eixo y
zlabel('F(x,y)');                    % legenda no eixo z
title('Exemplo de Superfície');       % título do gráfico
legend('Superfície z=F(x,y)');        % legenda

```

Código 2.2: Código utilizado para gerar a figura 2.10

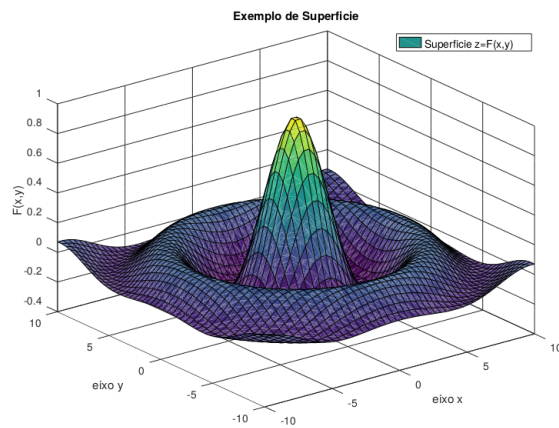


Figura 2.10: Superfície dada pela função $F(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2} + 0.1)}{\sqrt{x^2 + y^2} + 0.1}$

Substituindo o comando *surf* pelo comando *mesh* obtemos o gráfico $z = F(x, y)$ apenas nos pontos do *grid* do domínio. A figura 2.11 apresenta o resultado usando *mesh* (ver código 2.3).

```

px = py = linspace (-10, 10, 50)';    % gerando os pontos do domínio
[x, y] = meshgrid (px, py);            % criando a malha
r = sqrt(x.^2 + y.^2) + 0.1;           % r é variável auxiliar
z = sin(r) ./ r;                       % função z=F(x,y)
mesh (x, y, z);                        % plotando a superfície
xlabel('eixo x');                      % legenda no eixo x
ylabel('eixo y');                      % legenda no eixo y
zlabel('F(x,y)');                     % legenda no eixo z
title('Exemplo de Superfície');        % título do gráfico
legend('Superfície z=F(x,y)');         % legenda

```

Código 2.3: Código utilizado para gerar a figura 2.11

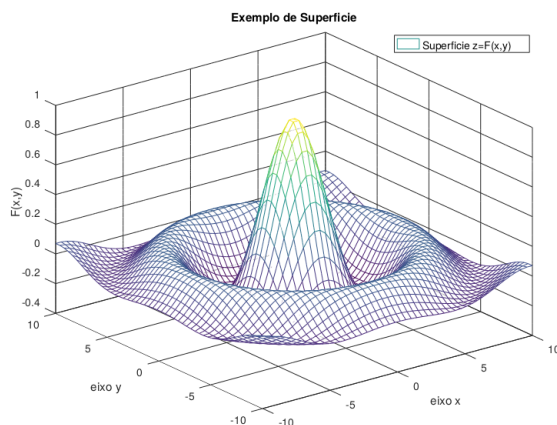


Figura 2.11: Superfície gerada pela função $F(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2+0.1})}{\sqrt{x^2+y^2+0.1}}$ nos pontos do *grid*

2.3.2 Variedades Parametrizadas

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq k$, de classe C^r . O conjunto $\mathcal{M} = \{ F(x) \mid x \in U \}$ é uma variedade de dimensão k em \mathbb{R}^n de classe C^r . Neste caso \mathcal{M} é a imagem da função F , e F é denominada parametrização de \mathcal{M} .

As parametrizações mais comuns são tratadas nos curso de cálculo e geometria diferencial:

- Para $n = 2$ e $k = 1$, $F(x)$ é uma curva em \mathbb{R}^2 ;
- Para $n = 3$ e $k = 1$, $F(x)$ é uma curva em \mathbb{R}^3 ;

- Para $n = 3$ e $k = 2$, $F(x)$ é uma superfície em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1: Uma exemplo de curva parametrizada em \mathbb{R}^2 é apresentada em 2.12 e foi gerada pelo código 2.4 em Matlab/Octave.

```

t = linspace(-2,2,80);           % intervalo do parâmetro t
f = @(t) t.^2+1.0;               % gerando a função f
g = @(t) t.*cos(t);              % gerando a função g
plot(f(t), g(t));                % plotando
grid                             % gerando um grid
xlabel('f(t)');                  % legenda no eixo horizontal
ylabel('g(t)');                  % legenda no eixo vertical
title('Exemplo de curva Parametrizada'); % título do gráfico
legend('Curva F(t)=(f(t),g(t))'); % legenda

```

Código 2.4: Código utilizado para gerar a figura 2.12

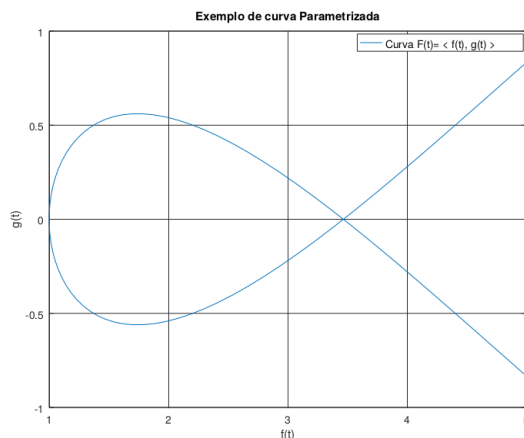


Figura 2.12: Curva $F(t) = (t^2 + 1, t \cos(t))$, $t = [-2 : 2]$

Exemplo 2: Como exemplo de curva parametrizada em \mathbb{R}^3 , apresentamos o código em Matlab/Octave 2.5. A figura 2.13 apresenta o resultado da execução deste código.

Exemplo 3: Como exemplo de superfície parametrizada em \mathbb{R}^3 , apresentamos o código em Matlab/Octave 2.6. A figura 2.14 apresenta o resultado da execução deste código.

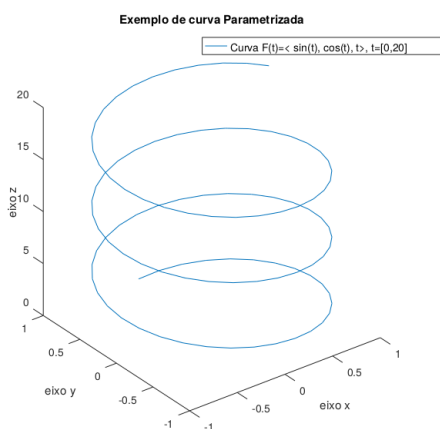
Substituindo o comando *surf* pelo comando *mesh* (ver código 2.7) obtemos o gráfico anterior apenas nos pontos do *grid* do domínio (ver figura 2.15).

```

t = linspace(0,20,100);           % intervalo do parâmetro t
plot3(sin(t),cos(t),t);           % plotando
grid                               % gerando um grid
xlabel('eixo x')                  % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                  % legenda no eixo y
zlabel('eixo z')                  % legenda no eixo z
axis square
title('Exemplo de curva Parametrizada'); % título do gráfico
legend('Curva F(t)=(sin(t),cos(t),t),t=[0,20]'); % legenda

```

Codigo 2.5: Código utilizado para gerar a figura 2.13

Figura 2.13: Curva em \mathbb{R}^3 da função $F(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$, $t = [0, 20]$

```

t = linspace(0,10,40);           % intervalo do parâmetro t
u = linspace(-2,2,40);           % intervalo do parâmetro u
[t,u] = meshgrid(t,u);           % gerando a malha
x = 2.*t;                         % f(t,u)
y = 3*u.*cos(t);                 % g(t,u)
z = u.*sin(t);                   % h(t,u)
surf(x,y,z);                     % plotando
xlabel('eixo x')                  % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                  % legenda no eixo y
zlabel('eixo z')                  % legenda no eixo z
axis square
title('Exemplo de Superfície Parametrizada'); % título do gráfico
legend('Superfície F(t,u)');      % legenda

```

Codigo 2.6: Código utilizado para gerar a figura 2.14

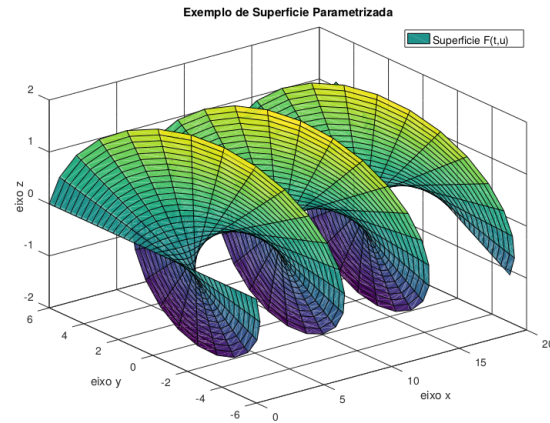


Figura 2.14: Superfície $F(t, u) = (f(t, u), g(t, u), h(t, u))$, $t = [0, 10]$, $u = [-2, 2]$, $f(t, u) = 2t$, $g(t, u) = 3u \cos(t)$, $h(t, u) = u \sin(t)$.

```

t = linspace(0,10,40);           % intervalo do parâmetro t
u = linspace(-2,2,40);           % intervalo do parâmetro u
[t,u] = meshgrid(t,u);           % gerando a malha
x = 2.*t;                         % f(t,u)
y = 3*u.*cos(t);                 % g(t,u)
z = u.*sin(t);                   % h(t,u)
mesh(x,y,z);                     % plotando
xlabel('eixo x')                  % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                  % legenda no eixo y
zlabel('eixo z')                  % legenda no eixo z
axis square
title('Exemplo de Superfície Parametrizada'); % título do gráfico
legend('Superfície F(t,u)');      % legenda

```

Código 2.7: Código utilizado para gerar a figura 2.15

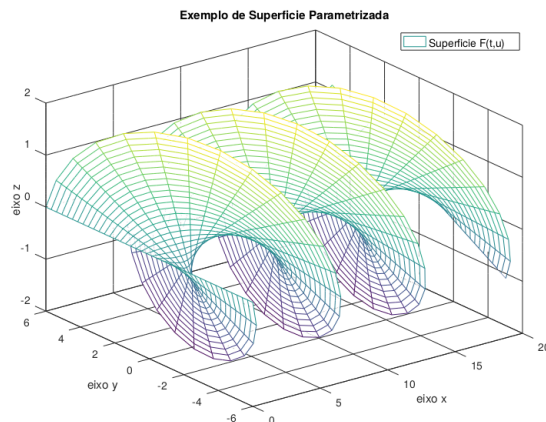


Figura 2.15: Superfície $F(t, u) = (f(t, u), g(t, u), h(t, u))$, $t = [0, 10]$, $u = [-2, 2]$, $f(t, u) = 2t$, $g(t, u) = 3u \cos(t)$, $h(t, u) = u \sin(t)$ nos pontos de *grid*.

2.3.3 Variedades Definidas Implicitamente

Dada uma função de classe C^r , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $n \geq k$, o conjunto dos pontos onde F se anula $\mathcal{M} = F^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$, é uma variedade definida implicitamente se para todo ponto em \mathcal{M} a derivada de F neste ponto tem posto máximo. Neste caso a variedade \mathcal{M} tem dimensão $n - k$ (veja o Teorema 2.3 da Seção 2.1).

Os casos mais comuns geralmente vistos nos cursos de cálculo são:

- Para $n = 2$ e $k = 1$, $F^{-1}(0)$ é uma curva em \mathbb{R}^2 ;
- Para $n = 3$ e $k = 2$, $F^{-1}(0)$ é uma curva em \mathbb{R}^3 ;
- Para $n = 3$ e $k = 1$, $F^{-1}(0)$ é uma superfície em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1: Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = 3.5^{-\sqrt{x^2+y^2}} \cos(y) \sin(x/2)$. A variedade \mathcal{M} é representada na figura 2.16-(a) e foi gerada usando o código 2.8 feito em Matlab/Octave. A figura 2.16-(b) foi gerada usando o código 2.14 e mostra o gráfico de $F(x, y)$ e sua projeção.

```

px = py = linspace (-3, 3, 50)';           % domínio
[x, y] = meshgrid (px, py);                 % gerando a malha
z = 3.5.^(-1.*sqrt(x.^2+y.^2)).*cos(y).*sin(0.5*x); % superfície z=f(x,y)
contour(x,y,z,10)                           % 10 curvas de nível
xlabel('eixo x')                             % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                             % legenda no eixo y
legend('Plano xy');                          % legenda

```

Código 2.8: Código utilizado para gerar a figura 2.16-(a)

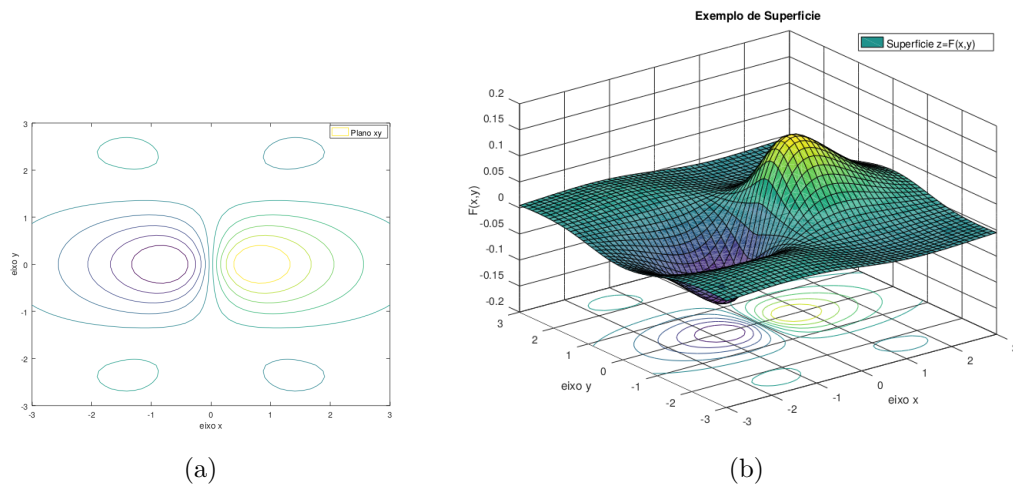
```

px = py = linspace (-3, 3, 50)';           % domínio
[x, y] = meshgrid (px, py);                 % gerando a malha
z=3.5.^(-1.*sqrt(x.^2+y.^2)).*cos(y).*sin(0.5*x); % superficie z=f(x,y)
surfc(x,y,z)                               % plotando o grafico
                                           % de F(x,y) e algumas
                                           % curvas de nível

xlabel('eixo x')                            % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                            % legenda no eixo y
zlabel ('F(x,y)')                           % legenda no eixo z
title('Exemplo de Superficie');             % título
legend('Superficie z=F(x,y)');              % legenda

```

Codigo 2.9: Código utilizado para gerar a figura 2.16-(b)

Figura 2.16: Superficie $F(x,y) = 3.5\sqrt{x^2+y^2}\cos(y)\sin(x/2)$.

Exemplo 2: Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. A esfera S^2 de raio $r = 2$ fica definida implicitamente pela equação $f(x, y, z) = 4$. A figura 2.17 mostra a Isosuperfície gerada pelo código abaixo, feito em Matlab/Octave

```
[x,y,z] = meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2,-2:0.2:2); % gerando a malha
F = x.^2 + y.^2 + z.^2 -4.0 ;                    % esfera
isosurface(x,y,z,F,0);                           % isosuperfície
axis equal;
xlabel('eixo x')                                  % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                                  % legenda no eixo y
zlabel('eixo z')                                  % legenda no eixo z
legend('Esfera');                                  % legenda
```

Código 2.10: Código utilizado para gerar a figura 2.17

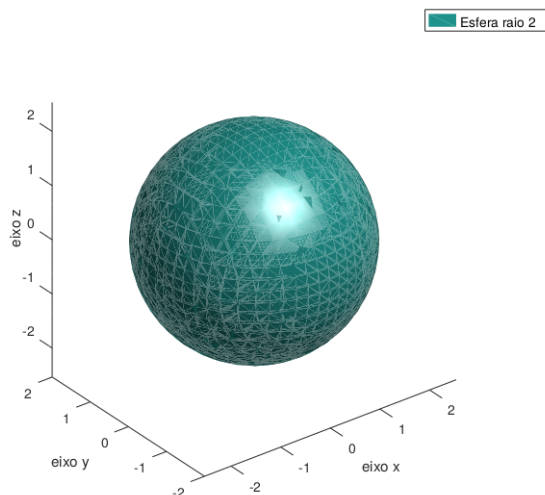


Figura 2.17: Isosuperfície $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4.0$

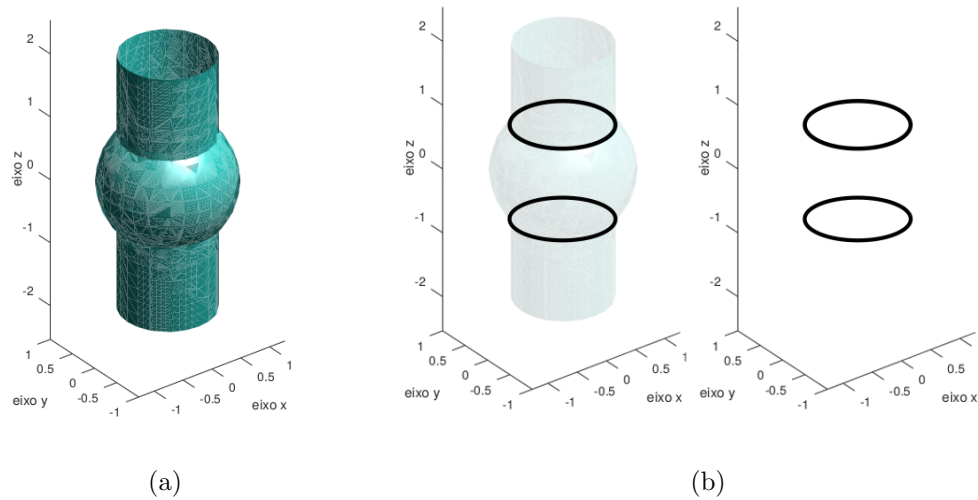
Exemplo 3: Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$, onde $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e $f_2(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 1$. O conjunto $f_1^{-1}(0)$ é a esfera S^2 de raio $r = 1$ e o conjunto $f_2^{-1}(0)$ é um cilindro. A figura 2.18-(a) mostra as isosuperfícies gerada pelo código, feito em Matlab/Octave. Neste caso, $F^{-1}(\mathbf{0}) = f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0)$ são os círculos nos planos $z = \sqrt{2}$ e $z = -\sqrt{2}$ mostrados na figura 2.18-(b).

```

[x,y,z] = meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2,-2:0.2:2); % gerando a malha
f1 = x.^2 + y.^2 + z.^2 -1.0 ;                    % esfera
f2 = 2.0.*x.^2 + 2.0.*y.^2 -1.0 ;                % cilindro
isosurface(x,y,z,f1,0.1);                        % isosuperfície
isosurface(x,y,z,f2,0);                          % isosuperfície
camlight;
lighting gouraud;
axis equal;
xlabel('eixo x')                                  % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                                  % legenda no eixo y
zlabel('eixo z')                                  % legenda no eixo z

```

Código 2.11: Código utilizado para gerar a figura 2.18

Figura 2.18: Isosuperfície $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$

Exemplo 4: Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. A isosuperfície 0 da função $F(x, y, z)$ é um cone, que é uma variedade exceto pela origem que é uma singularidade. Enquanto as isosuperfícies 0 das funções $G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1.0$ e $G_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1.0$ são variedades definidas implicitamente. As figuras 2.19, 2.20 e 2.21 representam as isosuperfícies 0, geradas em Matlab/Octave, do cone, de um hiperboloide de uma folha e um hiperboloide de duas folhas respectivamente.

```
[x,y,z] = meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2,-2:0.2:2); % gerando a malha
F = x.^2 + y.^2 - z.^2;                        % cone
isosurface(x,y,z,F,0);                         % isosuperfície
axis equal;
xlabel('eixo x')                               % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                               % legenda no eixo y
zlabel('eixo z')                               % legenda no eixo z
legend('Par cones');                           % legenda
```

Código 2.12: Código utilizado para gerar a figura 2.19

```
[x,y,z] = meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2,-2:0.2:2); % gerando a malha
G_1 = x.^2 + y.^2 - z.^2 - 1.0;                 % hiperbolóide
isosurface(x,y,z,G_1,0);                        % isosuperfície
axis equal;
xlabel('eixo x')                               % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                               % legenda no eixo y
zlabel('eixo z')                               % legenda no eixo z
legend('Hiperboloide uma folha ');              % legenda
```

Código 2.13: Código utilizado para gerar a figura 2.20

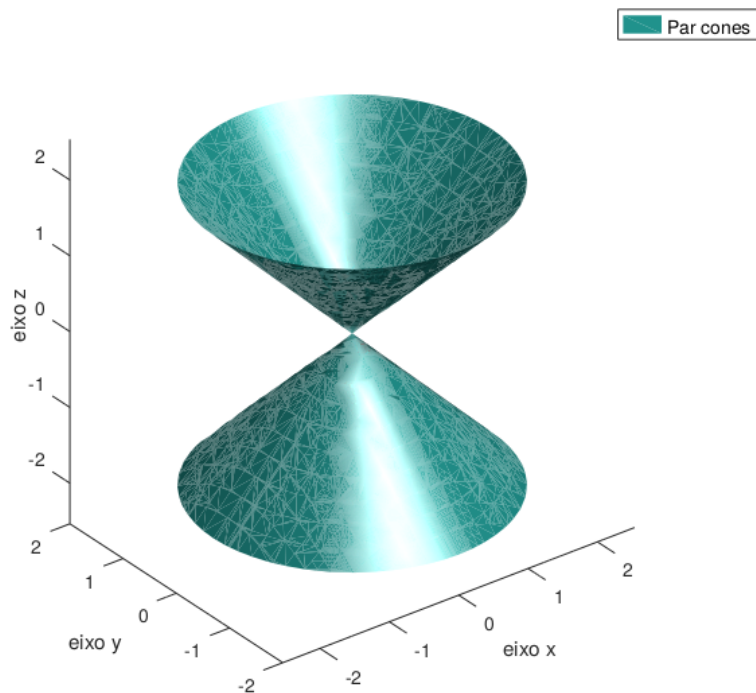


Figura 2.19: Isosuperfície $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

```
[x,y,z] = meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2,-2:0.2:2); % gerando a malha
G_2 = x.^2 + y.^2 - z.^2 + 1.0;                % hiperbolóide
isosurface(x,y,z,G_2,0);                       % isosuperfície
axis equal;
xlabel('eixo x')                               % legenda no eixo x
ylabel('eixo y')                               % legenda no eixo y
zlabel('eixo z')                               % legenda no eixo z
legend('Hiperboloide duas folhas ');           % legenda
```

Código 2.14: Código utilizado para gerar a figura 2.21

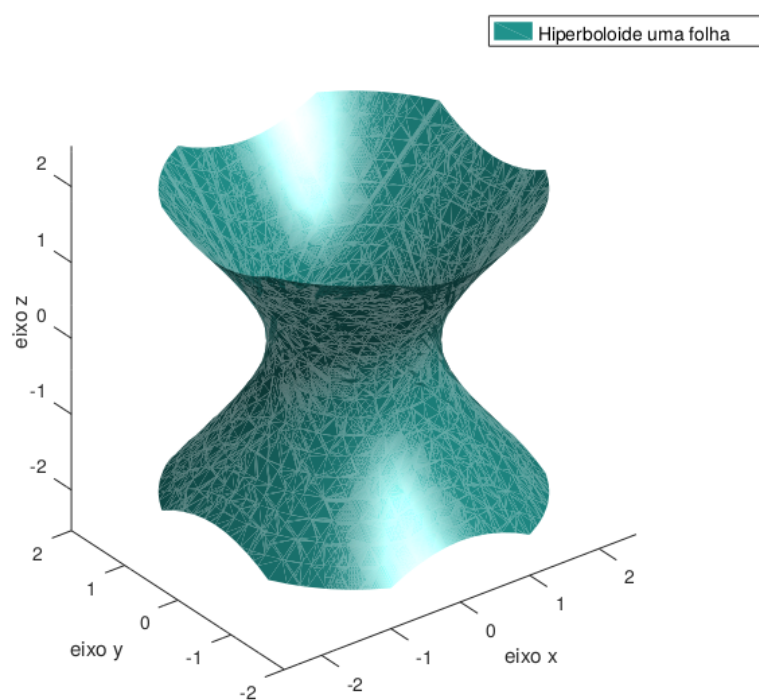


Figura 2.20: Isosuperfície $G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1.0$

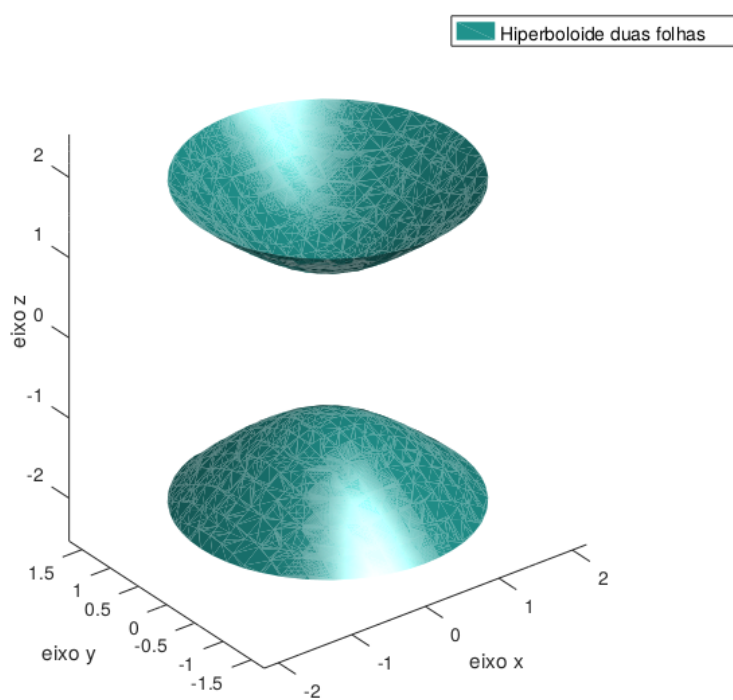


Figura 2.21: Isosuperfície $G_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1.0$

2.4 Exercícios

1. Gere um código em Matlab/Octave que gere uma superfície em \mathbb{R}^3 como gráfico de função utilizando os comandos *surf* e *mesh*.
2. Escreva as equações de um círculo parametrizado em \mathbb{R}^2 , utilize coordenadas polares.
3. Escreva as equações de uma elipse parametrizada em \mathbb{R}^2 .
4. Gere um código em Matlab/Octave que gere uma curva fechada parametrizada da sua escolha em \mathbb{R}^2 .
5. Gere um código em Matlab/Octave que gere uma curva fechada parametrizada da sua escolha em \mathbb{R}^3 .
6. Gere um código em Matlab/Octave que gere uma superfície parametrizada da sua escolha em \mathbb{R}^3 .
7. Escreva as equações de um cilindro parametrizado em \mathbb{R}^3 , utilize coordenadas cilíndricas.
8. Gere um código em Matlab/Octave que gere um cilindro parametrizado em \mathbb{R}^3 , utilizando coordenadas cilíndricas.
9. Escreva as equações de uma esfera parametrizada em \mathbb{R}^3 , utilize coordenadas esféricas.
10. Escreva as equações de um elipsoide parametrizado em \mathbb{R}^3 .
11. Gere um código em Matlab/Octave que gere uma esfera parametrizada em \mathbb{R}^3 , utilizando coordenadas esféricas.
12. Gere um código em Matlab/Octave que gere um elipsoide definido implicitamente em \mathbb{R}^3 .
13. Gere um código em Matlab/Octave que gere um toro definido implicitamente em \mathbb{R}^3 .

Capítulo 3

Estruturas de Dados para Variedades Lineares por Partes

3.1 Estruturas de Dados Explícitas

3.2 Estruturas de Dados Implícitas

Capítulo 4

Modelagem Utilizando Operadores Diferenciais

4.1 Operador de Laplace-Beltrami

4.2 Reconstrução de Superfícies Lineares por Partes

Capítulo 5

Variedades Definidas Implicitamente

Para maior aprofundamento no tema apresentado nesta e nas próximas seções, é sugerida a leitura da tese [3], do livro [1], do artigo [4] e do curso no proceedings [5].

5.1 Interpolação Linear Simplicial

Definição 5.1. (*Aproximação Simplicial*) Seja $F : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação e T uma triangulação de S . Se $\sigma = [v_0, \dots, v_n] \in T$, tem-se para cada $v \in \sigma$ uma única $(n+1)$ -upla $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ tal que $\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = v$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, \dots, n$. Define-se $F_\sigma : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ onde $F_\sigma(v) = F_\sigma(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i F(v_i)$.

Observe que F_σ é uma aplicação afim e que $F_\sigma(v_i) = F(v_i)$, $i = 0, \dots, n$, isto é, F_σ é uma interpolação linear de F nos vértices de σ .

Definição 5.2. (*Aproximação Linear por Partes*) Define-se uma aproximação linear por partes para F sendo, $F_T : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ onde $F_T(v) = F_\sigma(v)$ para $v \in \sigma \in T$.

Portanto, F_T é uma interpolação de F para os vértices de T (nos simplexes de dimensão zero de T) e que é afim em cada simplexo de dimensão n de T .

Teorema 5.1. Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $F : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^2 com $\|D^2 F(x)\| \leq \alpha$ para todo $x \in S$ e $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ um simplexo de uma triangulação robusta T de S ($\theta(T) > 0$), então

1. $\|F(v) - F_T(v)\| \leq \alpha \rho^2(T)/2$ para todo $v \in S$ e
2. $\|DF(v) - DF_T(v)\| \leq \alpha \rho(T)/\theta(T)$ para todo v no interior de simplexes de dimensão n de T .

Embora $DF_\sigma(v)$ esteja bem definida para todo simplexo σ de dimensão n , se τ é uma face comum de dois simplexes σ_1 e σ_2 de dimensão n e $v \in \tau$, $DF_{\sigma_1}(v)$ e $DF_{\sigma_2}(v)$ podem ser distintas e, portanto, $DF_T(v)$ não está bem definida.

5.2 Resultados sobre Aproximações Simpliciais

Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^p no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $n > k$, $p > \max\{1, n/k - 1\}$ e tendo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ como valor regular. Considere a variedade de dimensão $n - k$ e classe C^p , $\mathcal{M} = F^{-1}(\mathbf{0})$ e uma vizinhança tubular de \mathcal{M} , $V_{\mathcal{M}}$, tal como no Teorema 2.4.

Como desejamos uma aproximação de \mathcal{M} que possa ser representada computacionalmente, vamos restringir o domínio de F a um compacto $S \subset U$. Assim, existe $\alpha > 0$ tal que $\|D^2F(x)\| \leq \alpha$ para todo $x \in K$ e, portanto, se T for uma triangulação robusta de S , fica valendo o Teorema 5.1 para F_T .

Para estabelecermos algumas propriedades sobre a aproximação $\mathcal{M}_T = F_T^{-1}(\mathbf{0})$ de \mathcal{M} , vamos observar algumas propriedades que F e T devem satisfazer.

Seja $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ um simplexo de dimensão k de U . Para que $F_\sigma(\sigma) = [F(v_0), \dots, F(v_k)]$ seja um simplexo de dimensão k em \mathbb{R}^k , basta que os de vetores $F(v_1) - F(v_0), \dots, F(v_k) - F(v_0)$ sejam linearmente independentes, pelo fato de F_σ ser uma aplicação afim. Neste caso, se τ é uma face de σ de dimensão $r \leq k$, teremos que $F_\sigma(\tau)$ é uma face de $F_\sigma(\sigma)$ de dimensão r .

Com relação a este assunto temos o seguinte teorema:

Teorema 5.2. (Veja [6]) *Para quase todo simplexo σ de dimensão $r \leq k$ de $S \cap V_{\mathcal{M}}$, temos que $F_\sigma(\sigma)$ é um simplexo de dimensão r em \mathbb{R}^k .*

Definição 5.3. *Diremos que $v \in \sigma = [v_0, \dots, v_n] \in T$ é um ponto regular de F_T , se $DF_\sigma(v)$ for sobrejetora, ou de forma equivalente, que a matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ F(v_0) & \cdots & F(v_n) \end{pmatrix}$$

tenha posto $k + 1$. Se v não for um ponto regular de F_T , diremos que é um ponto crítico de F_T . Diremos que $c \in \mathbb{R}^k$ é valor regular de F_T se todo $v \in F_T^{-1}(c)$ for ponto regular de F_T . Se c não for valor regular de F_T , diremos que é valor crítico de F_T .

Teorema 5.3. (Veja [5]) *Seja T uma triangulação de S . Se $0 \in \mathbb{R}^n$ for valor regular de F_T , então $\mathcal{M}_T = F_T^{-1}(\mathbf{0})$ é uma variedade linear por partes de dimensão $n - k$.*

Observe-se que o teorema 5.3 não garante que $F_T^{-1}(\mathbf{0}) \cap \sigma$ seja uma célula de dimensão r se σ for um simplexo de dimensão $k + r$, $r = 1, \dots, n - k$. Com relação a esta observação, temos o seguinte exemplo: $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = x + 2y$ e $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ com $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$. Como $F(v_0) = 0$, $F(v_1) = 1$ e $F(v_2) = 2$, temos que $F_\sigma^{-1}(\mathbf{0}) \cap \sigma = \{(0, 0)\}$, que é uma célula de dimensão 0.

Como $DF(x)$ tem posto k para todo $x \in S \cap V_{\mathcal{M}}$, a inversa de Moore-Penrose para $DF(x)$, $DF(x)^+ = DF(x)^t \cdot (DF(x) \cdot DF(x)^t)^{-1}$ está bem definida. Como $S \cap V_{\mathcal{M}}$ é um conjunto compacto, existe $\mu > 0$, tal que $\|DF(x)^+\| \leq \mu$ para todo $x \in S \cap V_{\mathcal{M}}$.

Teorema 5.4. (Veja [6]) *Para quase todo simplexo σ de dimensão k de $S \cap V_{\mathcal{M}}$ com $\alpha\mu\rho(\sigma)/\theta(\sigma) < 1$, cujo interior intercepta \mathcal{M} , temos que o interior de σ intercepta \mathcal{M}_σ .*

Como S é compacto, para quase toda triangulação T de S , seus simplexos de dimensão maior ou igual a k têm interior transversal a \mathcal{M} . Daí, segue o corolário do teorema 5.4.

Corolário 5.1. (Veja [6]) *Para quase toda triangulação robusta T de S com diâmetro suficientemente pequeno, temos que todo simplexo de dimensão maior ou igual a k tem interior transversal a \mathcal{M} e \mathcal{M}_T , e se intercepta \mathcal{M} , então também intercepta \mathcal{M}_T .*

O corolário 5.1 nos dá duas propriedades muito importantes: para quase toda triangulação T de S com diâmetro suficientemente pequeno, temos

- se σ for um simplexo de dimensão k de T e $x \in \sigma \cap \mathcal{M}$, existe $v \in \sigma \cap \mathcal{M}_T$ e consequentemente $d(x, v) = \|x - v\| \leq \rho(\sigma) \leq \rho(T)$;
- se σ for um simplexo de dimensão $k + r$ de T com $0 \leq r \leq n - k$, temos que se $F_T^{-1}(0) \cap \sigma \neq \emptyset$, então $F_T^{-1}(0) \cap \sigma$ é uma célula convexa afim de dimensão r .

A segunda propriedade será muito importante para representação computacional das células de \mathcal{M}_T . Também com relação à aproximação entre \mathcal{M} e \mathcal{M}_T , temos os seguintes teoremas:

Teorema 5.5. (Veja [7]) *Dado $\epsilon > 0$, existe uma triangulação T de S tal que, se $v \in \mathcal{M}_T = F_T^{-1}(0)$, então $d(v, \mathcal{M}) = \inf\{\|u - v\|; u \in \mathcal{M}\} < \epsilon$.*

Teorema 5.6. (Veja [2]) *Sejam $x \in \mathcal{M}$ e $y \in \mathcal{M}_T$. Se $\|x - y\| \leq 1/(\alpha\mu)$, então $\|x - y\| \leq \alpha\mu\rho^2(T)$.*

Capítulo 6

Curvas e Superfícies NURBS

6.1 Curvas e Superfícies de Bezier

6.2 Curvas e Superfícies B-Splines

6.3 Curvas e Superfícies Racional B-Splines

6.4 Curvas e Superfícies NURBS

Capítulo 7

Características Robustas

7.1 Conceitos Básicos de Geometria Diferencial

7.2 Carcterísticas Robustas

Bibliografia

- [1] ALLGOWER, E.; GEORG, K. *Numerical Continuation Methods*. [S.l.]: Springer Verlag, 1990.
- [2] ALLGOWER E.; GEORG, K. Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations. *SIAM REVIEW*, v. 22, n. 1, 1980.
- [3] CASTELO, A. *Aproximações Adaptativas de Variedades Implícitas e Aplcações em Modelagem Implícita e Equações Algébrico-Diferenciais*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, Rio, 1992.
- [4] CASTELO, A. et al. The j1a triangulation: an adaptive triangulation in any dimension. *Computers & Graphics*, v. 30, n. 5, p. 737–753, 2006.
- [5] EAVES, B. C. A short course in equations with pl homotopies. In: PUBLICATIONS, S. (Ed.). *Proc. SIAM - AMS*. [S.l.: s.n.], 1976. v. 9.
- [6] FREITAS, S. R. *Aproximações Simpliciais de Variedades Implícitas e Equações Algébrico-Diferenciais*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, Rio, 1991.
- [7] GARCIA C. B.; ZANGWILL, W. I. *The Flex Algorithm, Numerical Solution of Highly Nonlinear Problems*. [S.l.]: W. Forster (ed.) North - Holland Publishing Company, 1990.
- [8] LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. [S.l.]: IMPA, CNPq, 1981.
- [9] LIMA, E. L. *Curso de Análise, Vol 2*. [S.l.]: IMPA, CNPq, 2011.
- [10] MILNOR, J. *Topology form the Differentiable Viewpoint*. [S.l.]: The University of Virginia Press, 1965.
- [11] PALIS-JR. J.; MELO, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. [S.l.]: IMPA, CNPq, 1978.