

**Modelagem Geométrica:  
Representação e Manipulação de Objetos  
Geométricos Utilizando o Computador**

**Antonio Castelo Filho**

Departamento de Ciências de Computação e Estatística  
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação  
Universidade de São Paulo  
P.O. Box 668, 13560-970 São Carlos - S.P., Brasil

## Resumo

Este mini-curso apresenta um resumo de modelagem geométrica tridimensional, destacando-se a modelagem de sólidos e a modelagem de curvas e superfícies. São apresentados os principais esquemas de representação de sólidos e uma breve descrição de sistemas de modelagem de sólidos. Quanto à modelagem de curvas e superfícies, são apresentadas as curvas e superfícies de Bezier, B-splines e NURBS. Como exemplo de um sistema de modelagem de sólidos é apresentado o sistema (SM)<sup>2</sup> em desenvolvimento pelo grupo de computação gráfica do ICMC-USP. Estas notas foram baseadas em notas de aulas do curso Tópicos de Computação Gráfica, em relatórios técnicos do ICMC, nos exames de qualificação e dissertações de mestrado dos alunos L. P. B. Scott, A. L. C. C. Magalhães, M. F. Siqueira, C. N. L. César, A. R. Costa, J. M. Kokitsu e R. D. Santi.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelagem de Sólidos</b>	<b>5</b>
2.1	Esquema de Representação por Decomposição . . . . .	7
2.2	Esquema de Representação por Geometria Sólida Construtiva . . . .	8
2.3	Esquema de Representação por Fronteira . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Modelagem de Curvas e Superfícies</b>	<b>14</b>
3.1	Curvas e Superfícies de Bezier . . . . .	15
3.2	Curvas e Superfícies B-splines . . . . .	16
3.3	Curvas e Superfícies NURBS . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Sistemas de Modelagem de Sólidos</b>	<b>20</b>
4.1	O Sistema de Modelagem de Sólidos ( <b>SM</b> ) <sup>2</sup> . . . . .	21

# Capítulo 1

## Introdução

A utilização de técnicas de simulação nos meios científico e industrial vem se tornando cada vez mais ampla. Pode-se dizer que, em ambos os casos, simulações são utilizadas para facilitar a compreensão e o estudo de problemas e fenômenos, permitindo que variáveis ligadas aos mesmos sejam alteradas e as conseqüências analisadas, sem maiores custos. Geralmente, consegue-se com isso melhores resultados e o barateamento do processo de produção.

Para realizar uma simulação, deve-se primeiramente representar o problema através de algum modelo. Um modelo representa um substituto conveniente e econômico para um objeto, seja esse real ou imaginário, pois é, geralmente, mais barato de ser construído, mais fácil de ser alterado e mais simples de ser analisado.

Muitos dos problemas cuja resolução demanda do uso de modelos são inerentemente geométricos, ou grande parte de seus dados são geométricos, sendo conveniente destacar os dados que se referem à forma geométrica. Assim o conjunto de dados puramente geométricos de um modelo é chamado de modelo geométrico.

A coleção de métodos usados para descrever a forma e outras características geométricas de um objeto ficou conhecida por modelagem geométrica. Tais métodos são uma síntese de outros campos: geometria analítica e descritiva, topologia, cálculo vetorial, análise numérica, entre outros.

O principal objetivo na construção de um modelo é realizar simulações com o mesmo, e dentro desse processo, a computação gráfica tem se expandido e fornecido técnicas que facilitam, principalmente, a construção e visualização de modelos geométricos e dos resultados gerados com a simulação. Essas técnicas, devidamente combinadas, permitem também a visualização dinâmica de fenômenos que variam com o tempo, resultando numa importante ferramenta para o processo de simulação. Neste contexto, o computador pode funcionar como uma ferramenta eficiente que juntamente com técnicas de modelagem geométrica, visualização e processamento de imagens, auxilia na criação e construção de modelos geométricos, podendo fornecer informações sobre os mesmos e mecanismos eficientes para a representação e

visualização de seu comportamento em simulações.

A modelagem geométrica é uma importante ferramenta de projeto e manufatura na indústria moderna, constituindo o ingrediente principal em sistema de CAGD (Computer Aided Geometric Design), arte auxiliada por computador, animação, robótica, mecânica dos fluidos, entre outras.

Alguns dos primeiros usos de sistemas de CAGD ocorreram na indústria automobilística [6] [3] e aeroespacial [9]. Os métodos utilizados então, provenientes de estudos matemáticos desenvolvidos em fins dos anos 50 e início dos anos 60, baseavam-se na exploração do uso de curvas e superfícies paramétricas para representar a forma de objetos. Os trabalhos pioneiros em CAGD foram indubitavelmente a teoria das superfícies de Bezier [6] [7] [3] [4] e malhas de Coons [10], combinados depois com métodos B-splines. Os sistemas baseados nestes métodos foram denominados modeladores de superfície. Estes métodos demandavam recursos computacionais consideráveis, e só recentemente se tornaram proposições práticas para sistemas de projetos interativos.

No final dos anos 60, sistemas de projeto computadorizados estavam disponíveis para produzir desenhos semelhantes aos desenhos manuais, de maneira diferente e com mais eficiência. Tais sistemas evitavam muito do trabalho repetitivo inerente ao processo manual, e ao mesmo tempo permitiam ao projetista trabalhar de forma que lhe era familiar. Estes sistemas de CAD eram compostos principalmente por linhas retas e arcos de circunferências, e carregados de anotações como dimensões, notas e outros tipos de informação. A principal diferença era o uso de vídeo gráfico em substituição às folhas de papel, apesar de ser possível gerar impressões em um ploter. O aspecto menos familiar deste método de desenho era a necessidade de interação com o computador, e muitos dos desenhistas e projetistas tradicionalmente treinados encontravam dificuldades na passagem para o novo modo de operação.

No início dos anos 70, a associação de informação sobre profundidade com as linhas de um desenho bidimensional permitiu a definição de uma classe de objetos conhecida como objetos semi-tridimensionais. Todas as superfícies de um objeto deste tipo ou são horizontais ou verticais. O computador pode então gerar uma representação unificada do objeto ao invés de três representações parciais complementares na forma de visões ortogonais tradicionalmente desenhadas, como na figura 1.1. Pela primeira vez, foi gerado um modelo computacional do produto, e não apenas desenhos isolados.

Através do computador, o objeto semi-tridimensional era representado como um conjunto de aresta no espaço, e logo foi possível generalizar esta idéia, o que permitiu a geração de modelos tridimensionais completos do mesmo tipo. Tais modelos tornaram-se conhecidos como modelos fio de arame (*wireframe*). Uma vantagem imediata da representação *wireframe* é que o computador podia gerar automaticamente desenhos do objeto de qualquer ponto de vista e em qualquer projeção

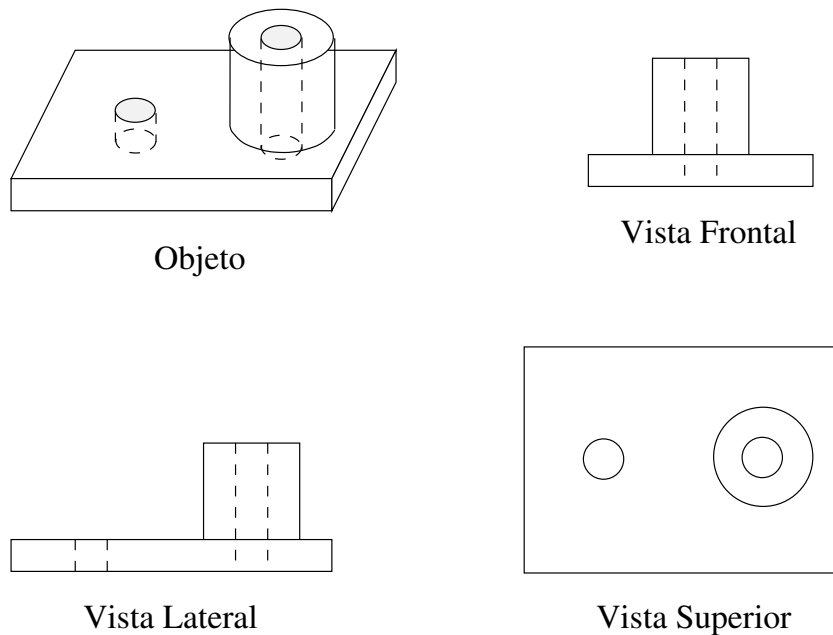


Figura 1.1: Objeto e visões de topo, frontal e lateral.

escolhida pelo usuário, como o ilustrado na figura 1.2.

Porém, como os desenhos eram compostos somente por um conjunto de aresta, desenhos obtidos a partir de certos pontos de vista tornavam-se muito congestionados para objetos complexos, uma vez que todas as aresta eram desenhadas. A falta de informação sobre superfícies do modelo dificultava a compreensão do desenho, conduzindo à interpretações ambíguas (ver figura 1.2) e impossibilitando a geração automática de visões com linhas e superfícies escondidas, que tornaria a visualização muito mais fácil.

O desenvolvimento seguinte nesta seqüência de técnicas de representação foi o modelador de sólidos, que uniu as vantagens dos modeladores *wireframe* e dos modeladores de superfície. O modelo agora contém informações referentes a todas as faces do objeto, incluindo as superfícies e as arestas curvas que o limitam, isto é, todas as informações referentes a fronteira do objeto. Além disso, detalhes sobre a conectividade entre faces, arestas e outros elementos são armazenados. Esta técnica de modelagem é denominada de modelagem por fronteira.

Do ponto de vista da computação gráfica, o computador pode agora gerar automaticamente figuras com linhas e superfícies escondidas do objeto representado de qualquer ponto de vista. Pode ainda computar volume, massa, momento de inércia do objeto, interferência entre componentes de uma montagem, o que é de grande conveniência em aplicações em engenharia.

A modelagem de sólidos progrediu rapidamente na década de 70, mas a

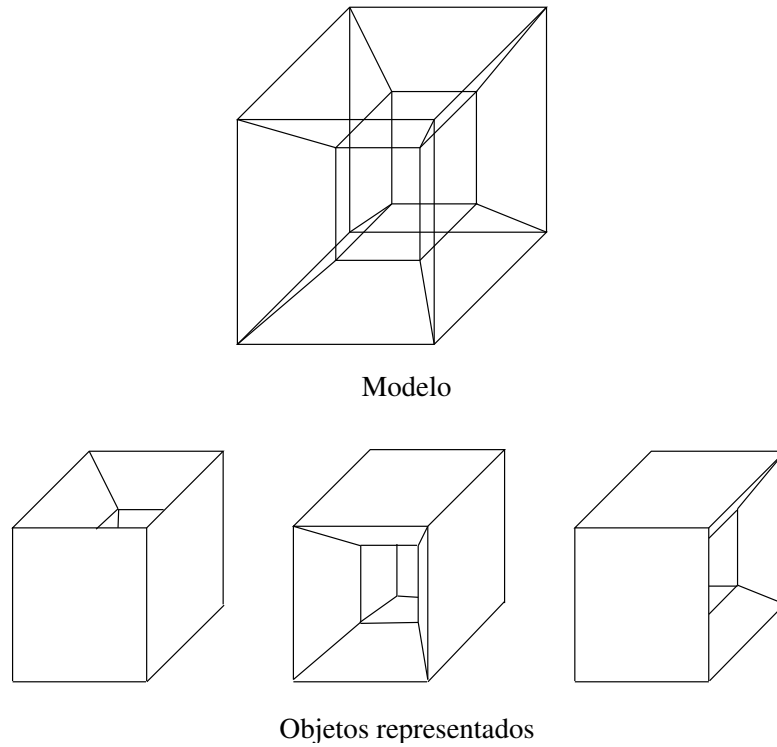


Figura 1.2: Representação *wireframe* e objetos representados.

tecnologia necessária para sua implementação, em termos de *hardware* e *software*, é bastante complexa, havendo até hoje uma grande demanda por pesquisas.

A técnica de modelagem por fronteira pode ser vista como a generalização não trivial da técnica *wireframe* e é a técnica não ambigua mais difundida atualmente.

## Capítulo 2

# Modelagem de Sólidos

De acordo com Requicha e Voelcker [29], o termo modelagem de sólidos envolve um corpo de teorias, técnicas e sistemas que focalizam uma representação de sólidos permitindo, pelo menos em princípio, que qualquer propriedade geométrica bem definida de qualquer sólido representável seja calculada.

A principal importância dos sistemas de modelagem de sólidos é a sua capacidade de distinguir entre o interior, o exterior e a superfície de um objeto tridimensional, o que faculta calcular propriedades dependentes dessa distinção. Para atingir esse objetivo, algumas restrições precisam ser obedecidas, de forma que os sólidos modelados sejam válidos.

Um objeto tridimensional é considerado um sólido válido (manufaturável) se satisfizer as seguintes propriedades:

**Rigidez:** o objeto deve possuir uma forma invariante sobre transformações rígidas (independe da localização e orientação no espaço);

**Finitude:** o objeto deve conter uma porção finita do espaço;

**Homogeneidade:** o objeto não deve possuir partes ou entidades isoladas ou penduradas na sua fronteira e deve possuir interior bem definido;

**Determinismo da fronteira:** deve ser possível descrever a fronteira, o interior e o exterior do objeto;

**Finitude de descrição:** o objeto deve poder ser descrito através de um número finito de símbolos;

**Fechamento sobre operações:** o resultado de operações geométricas de objetos válidos devem ser ainda um objeto válido.

As propriedades desejáveis em esquemas de representação de modelos são:



- Validade:** o modelo deve representar apenas sólidos válidos;
- Unicidade:** cada sólido válido deve ter apenas um modelo;
- Não ambiguidade:** cada modelo deve corresponder a apenas um sólido válido;
- Completude:** o modelo deve conter uma variedade de informações sobre as quais várias funções possam ser executadas;
- Concisão:** o modelo deve ocupar o menor espaço de memória possível;
- Simplicidade:** deve ser possível criar o modelo de uma forma simples e direta, sem que nenhuma característica especial de *hardware* seja exigida;
- Eficiência:** deve ser possível aplicar operações ao modelo fácil e eficientemente, e obter respostas rápidas;
- Abertura:** deve ser possível obter informações suficientes a partir do modelo depois de eventuais expansões nas funções que operam sobre o mesmo;
- Fechamento sobre operações:** as operações de descrição e manipulação deve preservar a validade do modelo.

Mortenson [24] considera seis categorias principais de esquemas de representação:

- Wireframe:** o sólido é representado por suas arestas e consiste apenas de pontos e curvas dando a impressão de solidez (figura 1.2);
- Instanciamento primitivo:** a partir de um conjunto de formatos sólidos primitivos, é possível gerar uma família de sólidos que variam em relação a alguns parâmetros (figura 2.1);
- Varredura:** o sólido é representado por uma região (geralmente bidimensional) e por um caminho diretor, sendo que o sólido é gerado pela varredura desta região pelo caminho diretor (figura 2.2);
- Decomposição:** o sólido é decomposto em células que são combinadas através de uma operação de colagem (figuras 2.3 e 2.4);
- Geometria sólida construtiva:** o sólido é definido por um conjunto de sólidos primitivos simples combinados por operações booleanas e movimentos rígidos (figura 2.5);
- Frenteira:** o sólido é representado por suas superfícies limitantes, consistindo de faces, aresta e vertices, juntamente com suas equações e relações de adjacência (figura 2.6).

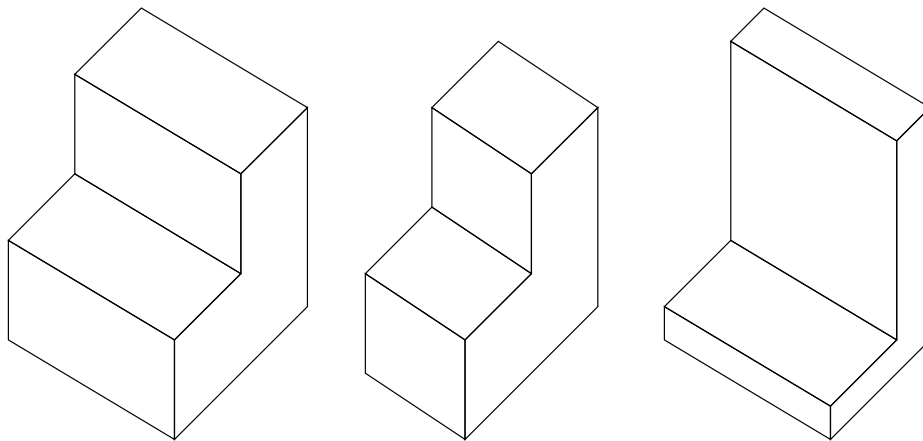


Figura 2.1: Representação por instanciamento de primitivas.

Os seis esquemas oferecem vantagens para alguns tipos de aplicações. Os mais utilizados atualmente, que serão descritos nas próximas três seções, são: decomposição celular, geometria sólida construtiva e por fronteira.

## 2.1 Esquema de Representação por Decomposição

Este esquema representa sólidos como uma coleção de outros sólidos primitivos unidos através de uma operação de colagem. Exemplos desse tipo esquema de representação são: Enumeração Exaustiva, *Octree* e Decomposição Celular.

No esquema de representação Enumeração Exaustiva (figura 2.3), os sólidos primitivos são paralelepípedos (*voxels*) de mesma dimensão e representados por uma matriz. Este esquema de representação é bastante utilizado para representar imagens médicas, imagens de satélite, entre outras, devido a natureza da aquisição destas imagens, como por equipamentos de tomografia computadorizada, satélites, etc. Embora este esquema seja avaliado e explícito (permite a obtenção da fronteira e outras informações geométricas diretamente), ele geralmente é aproximado, isto é, a representação de objetos com contornos curvos é aproximada.

Assim como no esquema Enumeração Exaustiva, no esquema *Octree* os sólidos primitivos também são paralelepípedos, mas não todos do mesmo tamanho. Este esquema possui uma estrutura hierárquica, baseada no princípio de decomposição recursiva e representada por uma árvore octária. A região *Octree* é baseada na divisão recursiva do objeto em oito octantes de igual tamanho. O nó raiz representa o objeto completo; os filhos de um nó subdividido representam os octantes; os nós folhas correspondem aos blocos que nenhuma subdivisão adicional é necessária. Um nó folha é denominado Preto ou Branco se seu correspondente bloco está inteiri-

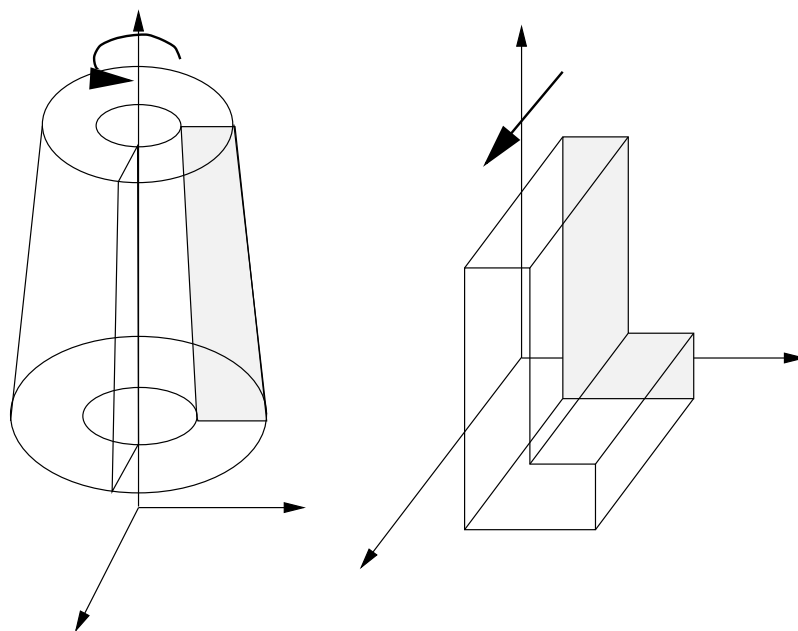


Figura 2.2: Representação por varredura.

ramente dentro ou fora do objeto. Todo nó não folha é denominado Cinza. Veja a figura 2.4.

No esquema de representação Decomposição Celular os sólidos primitivos são geralmente parametrizações de paralelepípedos ou tetraedros. Este esquema de representação é bastante utilizado em modelagem física e empregado para simular fenômenos físicos.

## 2.2 Esquema de Representação por Geometria Sólida Construtiva

A Geometria Sólida Construtiva (CSG), desenvolvida na universidade de Rochester, é um esquema de representação no qual sólidos são definidos a partir de composições booleanas de sólidos primitivos [28] (figura 2.5).

Em CSG, um sólido é descrito em termos de formas elementares tais como semi-espacos ou sólidos primitivos limitados, e é representado por uma árvore binária: os nós folhas são formas primitivas sólidas regulares dimensionalizadas e posicionadas no espaço, e os nós internos são operadores booleanos regularizados como união, intersecção e diferença, que atuam sobre estas primitivas regulares e garantem que os sólidos formados são válidos.

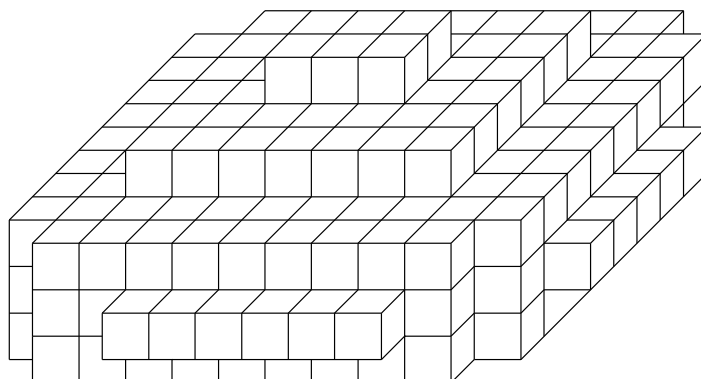


Figura 2.3: Representação por Enumeração Exaustiva.

Como o esquema CSG armazena o processo de construção do sólido, CSG é também utilizado como técnica de descrição de sólidos em muitos sistemas de modelagem de sólidos, pois é uma forma bastante intuitiva de construção de objetos complexos, como solda, desgaste e cortes. Também por este motivo, este esquema é considerado não avaliado e implícito, isto é, não permite a obtenção da fronteira e outras informações geométricas diretamente.

## 2.3 Esquema de Representação por Fronteira

O esquema de representação por fronteira (B-Rep) (figura 2.6), é considerado um esquema avaliado e explícito, ou seja, descreve o sólido em termos de sua fronteira, normalmente uma superfície fechada com alguma convenção para indicar em que lado da superfície o sólido está. Sólidos são representados como um conjunto de faces limitadas por arestas que por sua vez são limitadas por vértices. Esta hierarquia define a topologia do objeto que, associada às informações geométricas - como equações das superfícies sobre as quais estão as faces, equações das curvas sobre as quais estão as arestas e as coordenadas dos vértices - fornecem a rigidez do objeto representado.

Existem diferentes tipos de estrutura de dados capazes de representar a geometria e a topologia de um modelo por fronteira, sendo que as mais difundidas são baseadas em arestas, isto é, que utilizam a aresta como elemento de referência, representando faces como ciclos de aresta, e obtendo vértices indiretamente a partir das arestas. A maioria das estruturas de dados baseadas em arestas são derivadas da estrutura *winged-edge* (aresta-alada), proposta por Baumgart [1]. De uma forma geral, elas possuem complexidade variável, dependendo da quantidade de informações sobre as relações de adjacência que armazenam.

Mäntylä propôs a estrutura *half-edge* (semi-aresta), que também é derivada

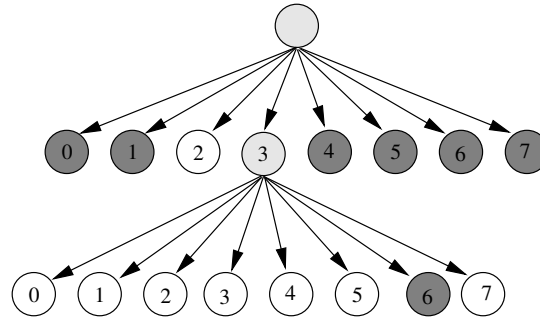
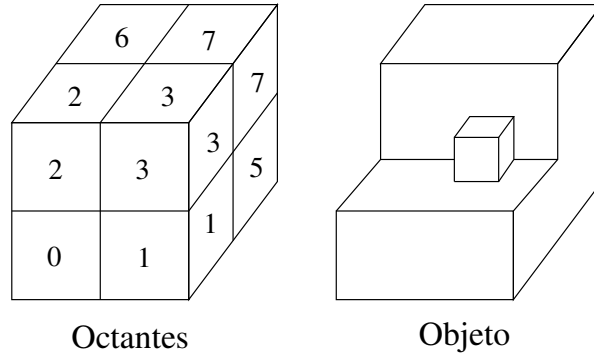


Figura 2.4: Representação *Octree*.

da estrutura *winged-edge*, e foi utilizada no modelador GWB (Geometric Work-Bench) [25] [17]. Essa estrutura foi inicialmente proposta para modelos poliedrais, mas pode ser estendida para admitir vários tipos de superfícies (quádricas, paramétricas, de forma livre).

A estrutura *half-edge* possui cinco níveis hierárquicos (sólido, face, ciclo, semi-arestas, que são segmentos de reta em um ciclo, correspondendo às ocorrências da aresta nos dois sentidos positivo e negativo das faces adjacentes, como apresentado na figura 2.7. Os níveis hierárquicos da estrutura de dados *half-edge* são apresentados na figura 2.8.

Para manipulação dessa estrutura de dados são utilizados os operadores de Euler, que garantem a consistência topológica dos objetos modelados. Os operadores de Euler foram derivados a partir da Lei de Euler generalizada para objetos poliedrais:

$$V - E + F = 2(S - H) + R, \quad (2.1)$$

onde  $V$  é o número de vértices,  $E$  é o número de arestas,  $F$  é o número de faces,  $H$  é o número de orifícios (anel),  $R$  é o número de cavidades em faces e  $S$  é o número de componentes conexas da fronteira do objeto.

Os operadores de Euler trabalham sobre a topologia do modelo, sendo que

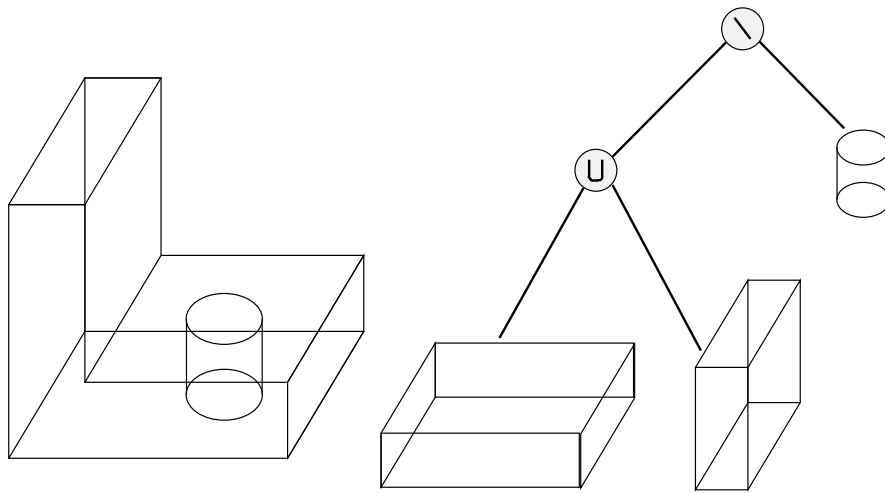


Figura 2.5: Representação por geometria sólida construtiva.

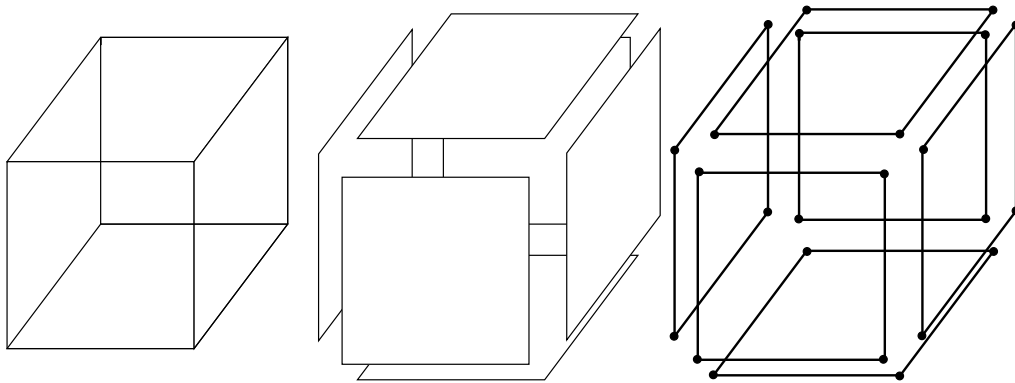


Figura 2.6: Representação por fronteira.

cada vez que um desses operadores é aplicado, o sólido resultante satisfaz a equação 2.1. A geometria é incorporada na representação à medida em que os vértices são criados e associados às suas coordenadas.

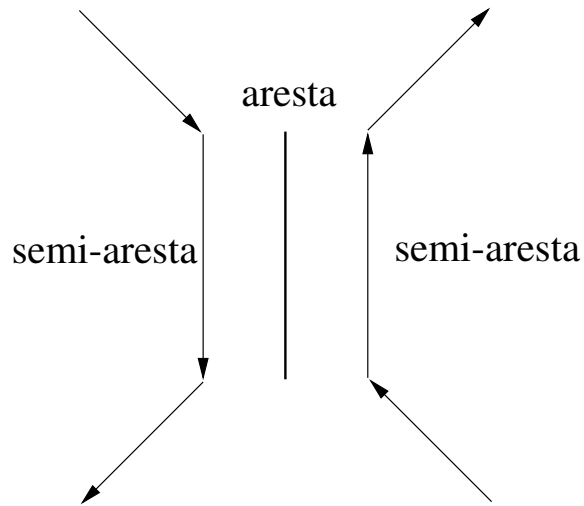


Figura 2.7: Semi-arestas.

Cinco operadores e seus inversos são suficientes para construir e destruir qualquer sólido poliedral. Eles são:

**MVFS:** constrói um vértice, uma face e um sólido;

**KVFS:** destrói um vértice, uma face e um sólido;

**MEV:** constrói um vértice e uma aresta;

**KEV:** destrói um vértice e uma aresta;

**MEF:** constrói uma face e uma aresta;

**KEF:** destrói uma face e uma aresta;

**MEKR:** constrói uma aresta e destrói um anel;

**KEMR:** destrói uma aresta e constrói um anel;

**MFKRH:** constrói uma face e destrói um anel e uma cavidade;

**KFMRH:** destrói uma face e constrói um anel e uma cavidade.

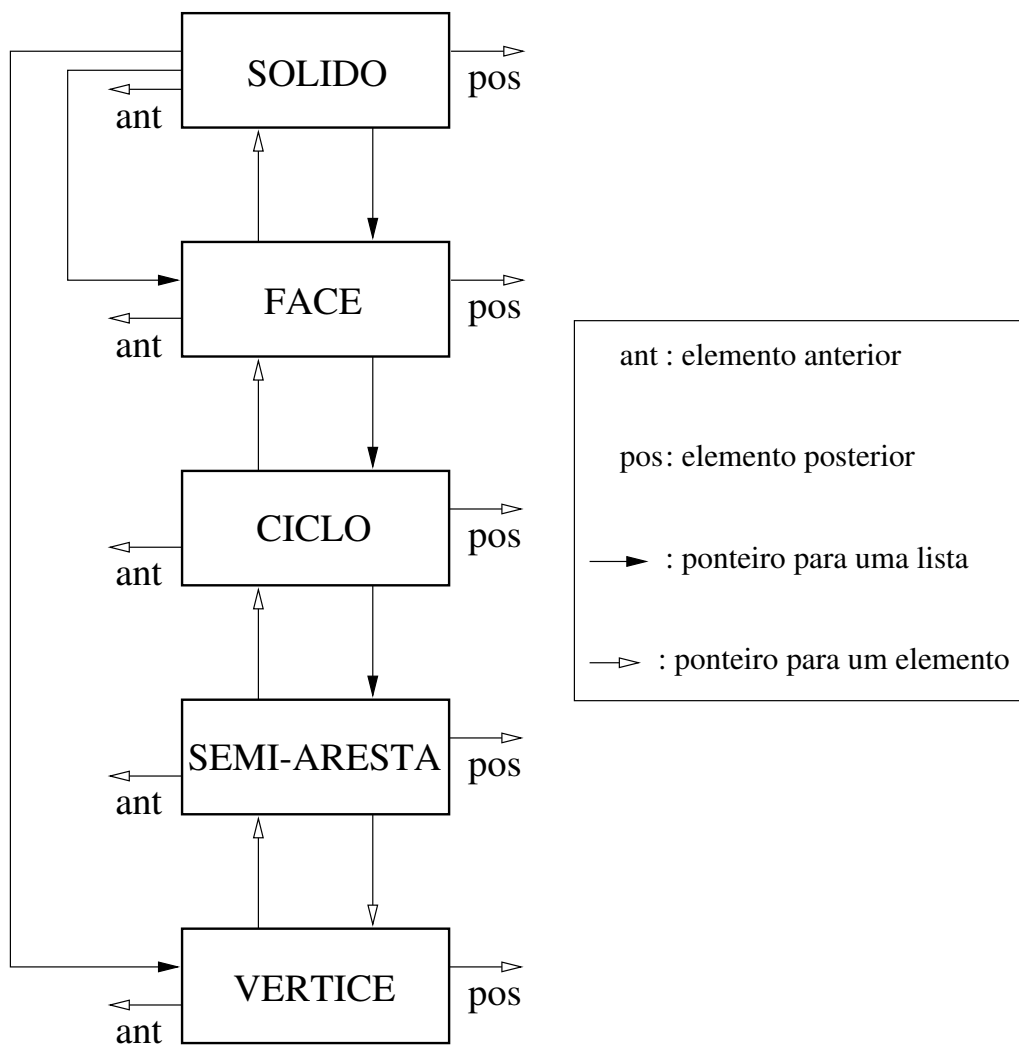


Figura 2.8: Estrutura *half-edge*.



## Capítulo 3

# Modelagem de Curvas e Superfícies

A descrição geométrica da fronteira de um sólido pode ser considerada como um conjunto de superfícies e curvas que representam as faces e arestas do sólido, respectivamente. Estas superfícies e curvas devem ser representadas analiticamente para se obter informações geométricas do sólido representado.

Superfícies planas ou quádricas são suficientes para muitas aplicações, mas em um sistema mais completo, há a necessidade de considerar superfícies e curvas com formatos mais complexos e pré-determinados. Certas curvas e superfícies podem ser obtidas a partir de um conjunto de pontos conhecidos, denominados pontos de controle. Uma técnica para obter uma representação analítica é a interpolação, sendo mais usual a interpolação polinomial.

Geralmente, como o número de pontos de controle é grande, interpolações polinomiais podem oscilar muito em relação ao conjunto de pontos de controle, produzindo resultado indesejável. Outra alternativa é considerar interpolações por partes, sendo que na intersecção tenha um certo grau de diferenciabilidade. Este tipo de interpolação é denominado interpolação por splines, sendo que a mais utilizada é a interpolação splines cúbica, isto é, cada parte é um polinômio cúbico e nas intersecções tem segunda derivada contínua.

Muitas vezes, em classes de problemas que envolve o *design* de formas que devem satisfazer tantos requisitos estéticos quanto funcionais, esta técnica também não produz os resultados desejados. A técnica que produz melhores resultados estéticos e funcionais, cuja forma é facilmente controlada pelo conjunto de pontos de controle são as curvas e superfícies de Bezier e B-splines. Nesta técnica poucos ou nenhum ponto de controle fazem parte da curva ou superfície.

### 3.1 Curvas e Superfícies de Bezier

Uma curva de Bezier é definida pelo polinômio  $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo que

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t),$$

onde  $p_0, p_1, \dots, p_n$  são os pontos de controle e  $B_i^n$  são as funções base, definidas por:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

A figura 3.1 apresenta o polígono de controle (definido pelos segmentos de retas unindo os pontos de controle) e a curva de Bezier.

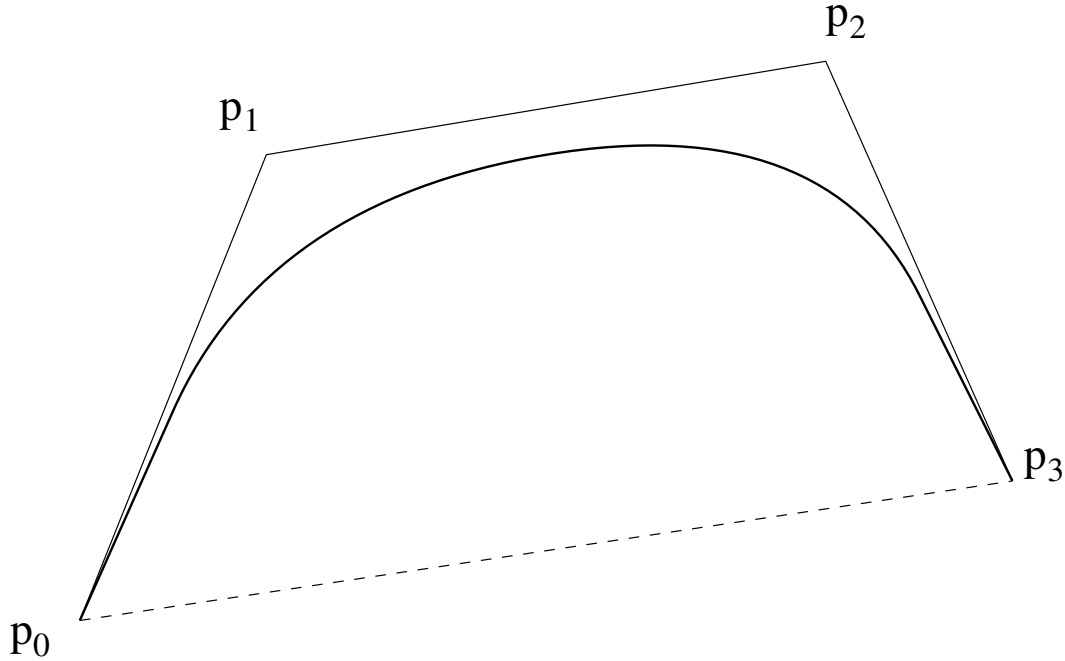


Figura 3.1: Curva de Bezier e seu polígono de controle.

As curvas de Bezier satisfazem as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$  para todo  $t \in [0, 1]$ ;
- $B_i^n(t) \geq 0$  para  $t \in [0, 1]$ ;
- $p$  é um polinômio de grau  $n$ ;
- o primeiro e o último pontos de controle pertencem a curva;

- os vetores tangentes no primeiro e último pontos tem a mesma direção que o primeiro e último segmentos do polígono de controle, respectivamente;
- a curva está contida no fecho convexo do polígono de controle;
- a curva é invariante sobre transformações afins;
- a curva não oscila com mais frequência em relação a qualquer reta que seu polígono de controle.

Uma superfície de Bezier é obtida pelo produto tensorial de duas curvas de Bezier e é definida pelo polinômio  $p : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo que

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v),$$

onde  $p_{0,0}, p_{1,0}, \dots, p_{n,0}, p_{0,1}, p_{1,1}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{0,m}, p_{1,m}, \dots, p_{n,m}$  são os pontos de controle. A malha definida pelos segmentos de retas unindo os pontos de controle  $p_{i,j}$  a  $p_{i+1,j}$  e  $p_{i,j+1}$  é denominada malha de controle.

Como as superfícies de Bezier são obtidas pelo produto tensorial de duas curvas de Bezier, elas satisfazem as mesmas propriedades (devidamente reescritas) que as curvas de Bezier, com exceção da última.

## 3.2 Curvas e Superfícies B-splines

Uma curva B-splines de ordem  $k$ ,  $2 \leq k \leq n + 1$ , é definida por  $p : [t_0, t_{n+k}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo que

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i N_i^k(t),$$

onde  $p_0, p_1, \dots, p_n$  são os pontos de controle. As funções base  $N_i^k$  são definidas pela seguinte forma recursiva de Cox-de Boor [13] [5]:

$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$N_i^k(t) = \frac{(t - t_i)N_i^{k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t)N_{i+1}^{k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}},$$

onde  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+k}$  são os nós da parametrização.

Esta curva satisfaz as seguintes propriedades:

- $p$  é um polinômio de grau  $k - 1$  em cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n + k - 1$ ;

- a derivada de ordem  $k - 2$  é contínua em  $[t_0, t_{n+k}]$ ;
- $\sum_{i=0}^n N_i^k(t) = 1$  para todo  $t \in [t_0, t_{n+k}]$  e  $1 \leq k \leq n + 1$ ;
- $N_i^k(t) \geq 0$  para  $t \in [t_0, t_{n+k}]$  e  $1 \leq k \leq n + 1$ ;
- o primeiro e o último pontos de controle pertencem a curva;
- os vetores tangentes no primeiro e último pontos tem a mesma direção que o primeiro e último segmentos do polígono de controle, respectivamente;
- a curva esta contida no fecho convexo do polígono de controle;
- a curva é invariante sobre transformações afins;
- cada ponto de controle está associado a uma única função base, influenciando a forma da curva apenas em uma região;
- quando  $k = n + 1$  a curva B-splines coincide com a curva de Bezier;
- a curva não oscila com mais frequência em relação a qualquer reta que seu polígono de controle;

Basicamente existem quatro tipos de conjuntos de nós:

**Uniforme aberto:** os nós extremos possuem multiplicidade  $k$  e os demais nós são igualmente espaçados, e são utilizados para gerar curvas abertas;

**Uniforme periódico:** os nós são igualmente espaçados, e são utilizados para gerar curvas fechadas.

**Não uniforme:** os nós não são igualmente espaçados e podem ter qualquer multiplicidade.

As superfícies B-splines, assim como as superfícies de Bezier, também são obtidas através do produto tensorial de duas curvas B-splines. Uma superfície B-splines de ordem  $k \times r$ ,  $2 \leq k \leq n + 1$ ,  $2 \leq r \leq m + 1$ , é definida por  $p : [u_0, u_{n+k}] \times [v_0, v_{m+r}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo que

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i,j} N_i^k(u) N_j^r(v),$$

onde  $p_{0,0}, p_{1,0}, \dots, p_{n,0}, p_{0,1}, p_{1,1}, \dots, p_{n,1}, \dots, p_{0,m}, p_{1,m}, \dots, p_{n,m}$  definem a malha de controle. Os nós da parametrização são  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+k}$  e  $v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{m+r}$ .

### 3.3 Curvas e Superfícies NURBS

Apesar das curvas e superfícies de Bezier e B-splines oferecerem uma maneira fácil e agradável de representação e manipulação de formas livres, elas não representam precisamente curvas e superfícies quádricas. Para construir um sistema de modelagem que integre ambos os tipos de objetos, é necessário construir um sistema híbrido, ou encontrar uma forma de representação que inclua formas livres e quádricas. A desvantagem de um sistema híbrido é que a quantidade de código tende a crescer exponencialmente com a adição de novas primitivas geométricas e operações de alto nível. Em um sistema baseado em uma única forma de representação, este crescimento é linear.

Uma curva B-splines racional é a projeção em  $\mathbf{R}^3$  de uma curva B-splines em coordenadas homogêneas em  $\mathbf{R}^4$ . Se  $p = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , denota-se um correspondente ponto no espaço homogêneo em  $\mathbf{R}^4$  por  $p^h = (hx, hy, hz, h)$ , com  $h \geq 0$  denominado coordenada homogênea. Então, se

$$q(t) = \sum_{i=0}^n p_i^h N_i^k(t)$$

é uma curva B-splines em  $\mathbf{R}^4$  com pontos de controle no espaço homogêneo em  $\mathbf{R}^4$ , temos que a projeção desta curva em  $\mathbf{R}^3$  é dada por:

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i R_i^k(t),$$

onde

$$R_i^k(t) = \frac{h_i N_i^k(t)}{\sum_{j=0}^n h_j N_j^k(t)}$$

são as funções base B-splines racional.

As coordenadas homogêneas  $h_i$ , também denominadas de pesos, fornecem uma ferramenta adicional para a manipulação da forma. A figura 3.2 apresenta uma curva aberta com 5 pontos de controle, onde os pesos são  $h_0 = h_1 = h_3 = h_4 = 1$  e  $h_2 = 0, 1, 2$ .

As superfícies B-splines racionais são obtidas da mesma forma que as curvas B-splines racionais, pela projeção em  $\mathbf{R}^3$  de uma superfície B-splines em coordenadas homogêneas em  $\mathbf{R}^4$ :

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i,j} S_{i,j}^{k,r}(u, v),$$

onde

$$S_{i,j}^{k,r}(u, v) = \frac{h_{i,j} N_i^k(u) N_j^r(v)}{\sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^m h_{l,s} N_l^k(u) N_s^r(v)}.$$

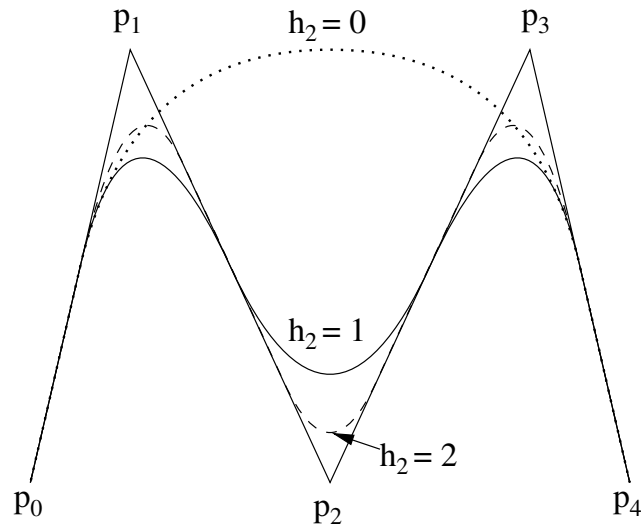


Figura 3.2: Curva B-splines racional.

Curvas e superfícies B-splines racionais com vetor de nós não uniforme são denominadas NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Esta formulação provê uma poderosa ferramenta de modelagem capaz de representar curvas e superfícies lineares por partes, quádricas e de forma livre. NURBS faz parte do padrão IGES (Initial Graphics Exchange Specification) desde 1983, sendo que esse é o padrão para troca de informações entre vários sistemas de CAD.

## Capítulo 4

# Sistemas de Modelagem de Sólidos

Do ponto de vista da construção de modelos, nenhuma representação possui propriedades uniformes melhores que todas as outras. Para conseguir o máximo de flexibilidade em um sistema de modelagem de sólidos, não é razoável confiar em um único tipo de representação. Os sistemas híbridos podem ser utilizados para combinar diferentes representações, procurando explorar o potencial de cada uma.

Do ponto de vista da edição de modelos, entretanto, existem técnicas poderosas, baseadas na geometria construtiva, que podem ser implementadas de maneira razoável em um esquema de representação por fronteira, uma vez que este não mantém o registro do processo de construção. A habilidade de modificar, substituir e remover primitivas ou subárvores numa árvore CSG permite que modificações significativas num modelo sejam especificadas com um mínimo de comandos por parte do projetista. Da mesma forma, existem métodos e operações baseados em representações por fronteira que não podem ser representados num contexto puramente construtivo.

Miller [23] apresenta um sistema hipotético, capaz de manter e manipular representações por fronteira e CSG de maneira redundante, de forma a explorar as vantagens de cada uma. A viabilidade deste sistema exige, porém, que sejam resolvidos significativos problemas arquiteturais, conceituais e práticos, tais como limitações de *hardware*, inexistência de um conjunto de técnicas de modelagem eficiente e robusta que permita a conversão exata e bidirecional entre as representações, além da necessidade de alto investimento, somente justificável se forem obtidos um extenso poder de representação e uma fácil adaptação dos processos aplicativos. Assim sendo, a solução prática sugerida por Miller é adotar um modelo híbrido primariamente CSG or B-Rep, conforme sua adequação à aplicação desejada.

## 4.1 O Sistema de Modelagem de Sólidos (SM)<sup>2</sup>

O sistema de modelagem de sólidos (SM)<sup>2</sup> (Sistema de Modelagem de Sólidos Multi-representacional) em desenvolvimento pelo grupo de computação gráfica do ICMC-USP e coordenado pela Prof. Dra. Maria Cristina Ferreira de Oliveira [21], tem como objetivo fornecer ao grupo uma ferramenta que possa ser utilizada para fins didáticos e de pesquisa em tópicos de modelagem tridimensional, visualização e CAD. O (SM)<sup>2</sup> tem como representação principal e permanente a representação B-Rep [31], e a representação implícita como secundária [32].

A representação implícita representa a fronteira de um sólido de maneira implícita, isto é, a fronteira do sólido é o conjunto dos pontos que satisfazem uma equação com três variáveis. A coexistência de duas formas de representação exigiu a implementação de um procedimento de conversão da representação implícita para a B-Rep, descrita em [32].

O (SM)<sup>2</sup> possui cinco módulos principais, ilustrados na figura 4.2. Estes módulos estão desenvolvidos de forma independente, ainda que funcionalmente interligados. O núcleo é responsável pela manutenção, gerenciamento e acesso a representações internas. O **Modelador** é responsável pelas operações que atuam sobre a representação interna, gerando objetos e cenas e respondendo a questões geométricas e topológicas. O **Visualizador** permite apresentar detalhes da cena conforme o interesse do usuário. A **Interface** cuida da interação com o usuário. Dando suporte a estes módulos está o **Gerenciador de Arquivos**.

A representação interna principal utiliza uma variação da estrutura *half-edge*. Nesta representação, o sólido é descrito por uma estrutura hierárquica composta pelos elementos primitivos sólido, casca, face, ciclo, aresta, semi-aresta e vértice. Atua sobre esta estrutura um conjunto de operadores de Euler, baseados nos descritos em [17], porém estendidos de forma a gerenciar a inclusão dos elementos casca e aresta [22]. A estrutura atual suporta apenas objetos poliedrais, de forma que objetos com faces curvas são aproximados.

A definição inicial dos objetos sólidos pode ocorrer de três formas, implementadas em três sub-módulos distintos: através de instanciamento de primitivas, de operações de varredura translacional ou rotacional [18], ou por semi-espacos implícitos [32].

O visualizador é baseado no algoritmo de remoção de superfícies ocultas *scan-line* [16]. Algumas otimizações foram incorporadas ao algoritmo, de forma a acelerá-lo tirando proveito de propriedades de sólidos B-Rep poliedrais, como vizinhança e orientação de faces [8] [11].

As figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 apresenta alguns sólidos criados pelas técnicas de instanciamento de primitivas, varredura e por semi-espacos implícitos.



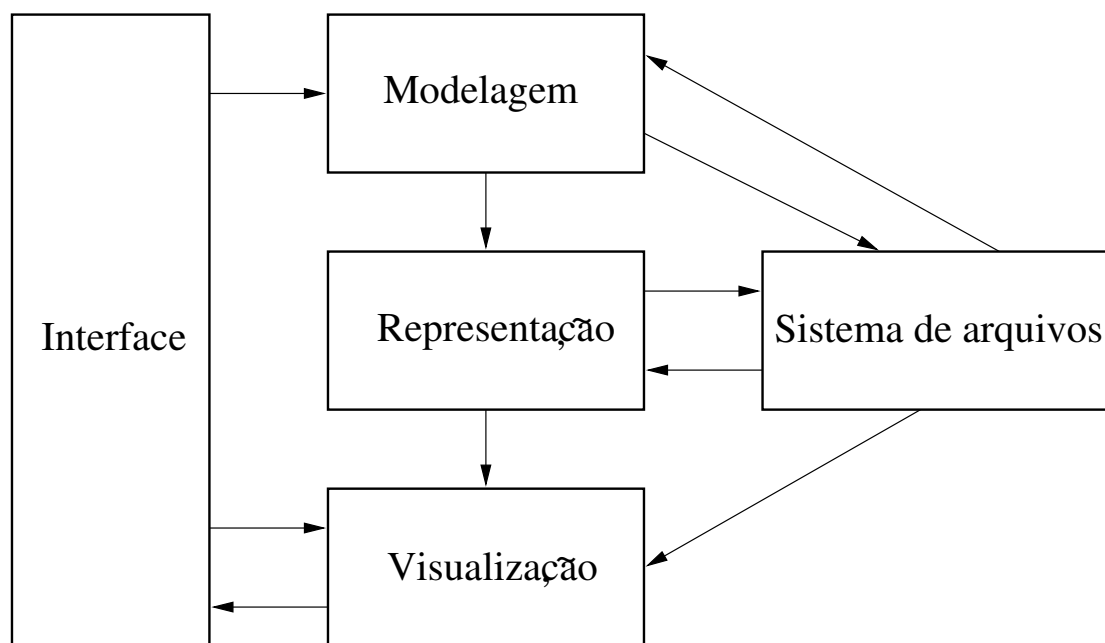


Figura 4.1: Estrutura modular do  $(SM)^2$ .

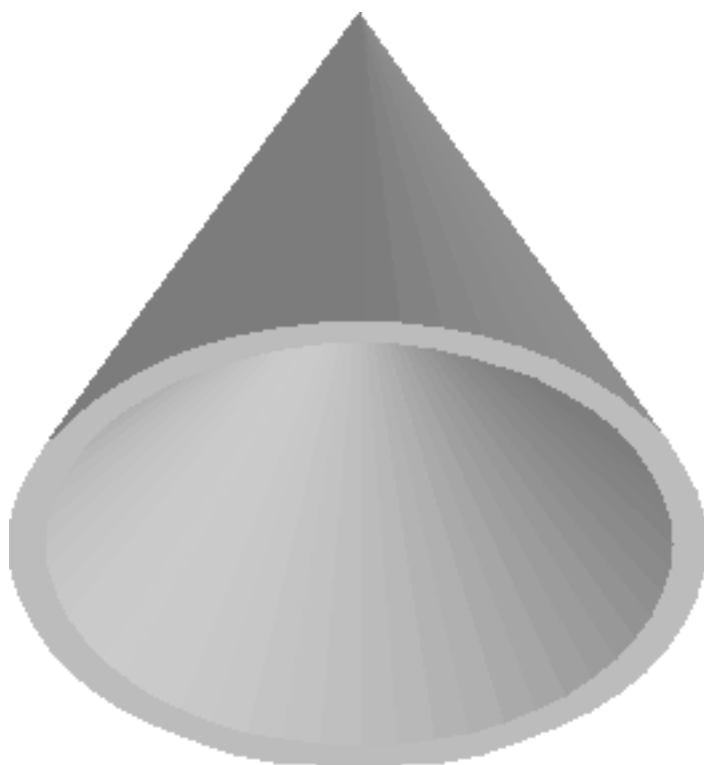


Figura 4.2: Cone vazado: instanciamento de primitivas.

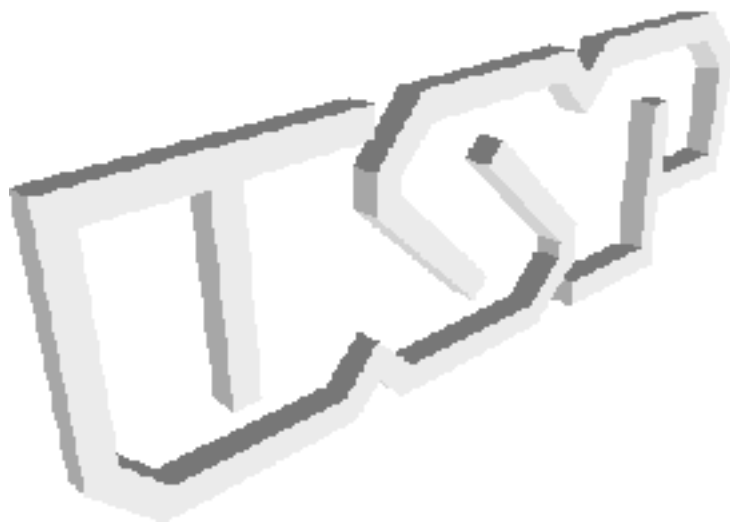


Figura 4.3: USP: varredura translacional simples.

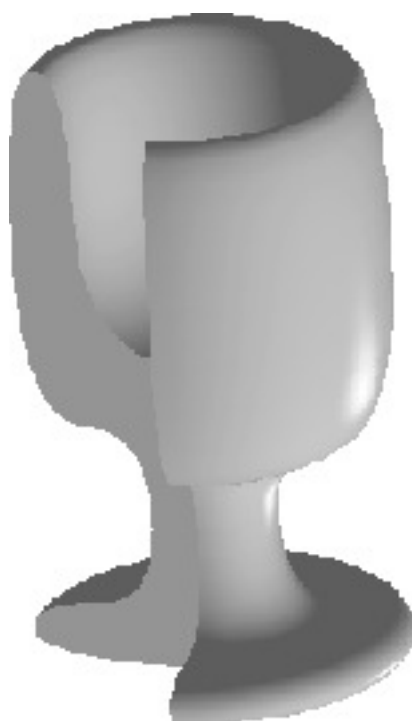


Figura 4.4: Taça: varredura rotacional aberta.

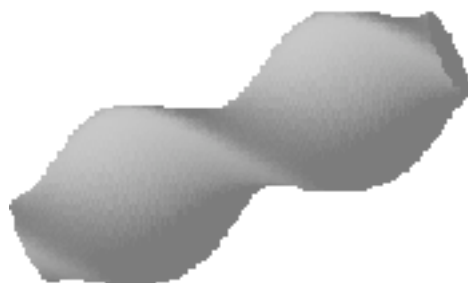


Figura 4.5: Parafuso: varredura translacional com torção.



Figura 4.6: Açucareiro: semi-espacos implícitos.

# Referências Bibliográficas

- [1] B. G. Baumgart, *A ployedron representation for computer vision*, National Computer Conference, 44, 1975.
- [2] S. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Harkov Soobs. Matem ob-va, 13:1-2, 1912.
- [3] P. Bezier, *Definition numérique des courbes et surfaces I*, Automatisme, 11:625-632, 1966.
- [4] P. Bezier, *Definition numérique des courbes et surfaces II*, Automatisme, 12:17-21, 1967.
- [5] C. de Boor, *On calculing with B-splines*, J. Approx. Theory, 6:50-62, 1972.
- [6] P. de Casteljaou, *Outillages méthodes calcul*, Thechinal Report, A. Citroen, Paris, 1959.
- [7] P. de Casteljaou, *Courbes et surfaces à poles*, Thechinal Report, A. Citroen, Paris, 1963.
- [8] C. N. L. César, *Um módulo para visualização eficiente de sólidos B-Rep*, Dissertação de Mestrado do ICMC-USP, 1995.
- [9] S. H. Chansen, *The introdution of man computer graphics into the aerospace industry*, Fall Joint Comp. Conf. Proceedings, Washington: Spartan Books, 883 p., 1965.
- [10] S. Coons, *Surface for computer aided design*, Technical Report. MIT, 1964
- [11] C. N. L. César, M. C. F. Oliveira, *Uma versão rápida do algoritmo scanline para rendering de sólidos*, Comunicações do SIBGRAPI, Curitiba, 23-26, 1994.
- [12] A. R. Costa, *Sistema de visualização Octree Linear*, Monografia de Exame de Qualificação de Mestrado do ICMC-USP, 1993.
- [13] M. Cox, *The numerical evaluation of B-splines*, DNAC 4, National Phisical Laboratory, 1971.

- [14] J. M. Kokitsu, *Desenvolvimento de um modelador de moldes e um visualizador de escoamento de fluidos*, Dissertação de Mestrado do ICMC-USP, 1997.
- [15] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Inc., 1988.
- [16] J. D. Foley et al., *Computer graphics principles and practice*, Addison-Wesley, 1990.
- [17] M. Mäntylä, *An introduction to Solid Modeling*, Computer Science Press, 1988.
- [18] A. L. C. C. Magalhães, *Um Modelador de Sólidos Multirepresentacional: Estudo, Projeto e Implementação*, Dissertação de Mestrado do ICMC-USP, 1994.
- [19] A. L. C. C. Magalhães, (SM)<sup>2</sup> : documentação de implementação, Relatório técnico do ICMSC, 1994.
- [20] A. L. C. C. Magalhães, (SM)<sup>2</sup> : documentação de projeto, Relatório técnico do ICMSC, 1994.
- [21] A. L. C. C. Magalhães, A. Castelo F., C. N. L. César, M. F. Siqueira, M. C. F. Oliveira, *Desenvolvimento de um modelador de sólidos multirepresentacional com núcleo B-Rep e técnicas de descrição por varredura e semi-espacos*, Comunicações do SIBGRAPI, Curitiba, 13-16, 1994.
- [22] A. L. C. C. Magalhães, M. F. Siqueira, M. C. F. Oliveira, *Operadores de Euler na modelagem por fronteira: conceito, aplicação, estudos de casos*, Notas do ICMSC, série computação, nº 16, 1994.
- [23] J. R. Miller, *Architectural issues in solid modelers*, IEEE Computer Graphics and Applications, 72-87, 1989.
- [24] M. E. Mortenson, *Geometric Modeling*, John Wiley, 1985.
- [25] M. Mäntylä, R. Sulonen, *GWB: a solid modeler with Euler operators*, IEEE Computer Graphics and Applications, 2(7):17-31, 1982.
- [26] L. Piegel, W. Tiller, *The NURBS book*, Springer Verlag, 1994.
- [27] A. G. Requicha, *Representations for rigid solids: theory, methods and systems*, ACM computing surveys, 12(4):437-464, 1980.
- [28] A. G. Requicha, H. B. Voelcker, *Solid modeling: a historical summary and contemporary assessment*, IEEE computer graphics and applications, 2:9-24, 1982.
- [29] A. G. Requicha, H. B. Voelcker, *Solid modeling: current status and research directions*, IEEE computer graphics and applications, 3:25-37, 1983.

- [30] R. D. Santi, *Desenvolvimento de um Modelador de Moldes Tridimensional para um Simulador de Fluidos*, Dissertação de Mestrado do ICMC-USP, 1998.
- [31] L. P. B. Scott, *Protótipo evolutivo de um sistema de modelagem de sólidos*, Dissertação de Mestrado do ICMC-USP, 1993.
- [32] M. F. Siqueira, *Modelagem por semi-espacos definidos implicitamente*, Dissertação de Mestrado do ICMC-USP, 1994.
- [33] G. Tavares, A. Castelo, H. Lopes, *Topological methods in geometric modeling*, Minicurso do XV CNMAC, 1992.