Malhas Dinâmicas

Igor Prata Soares

Orientador: Poti

Co-Orientadores: Gustavo

Castelo

Motivação

Projeto Embraer:

Aplicações Avançadas de Mecânica dos Fluidos Computacional para Aeronaves de Alto Desempenho

Introdução

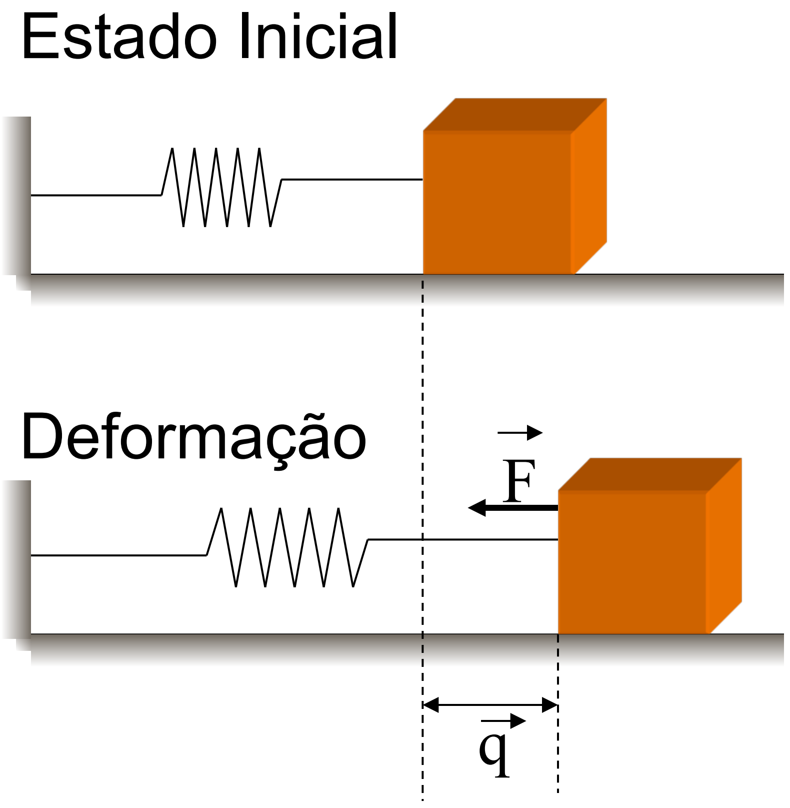
Lei de Hook

$\vec{F} = K.\vec{q}$

$\vec{F}$ = força

K = coeficiente de elasticidade

$\vec{q}$ = posição final - posição inicial



Introdução

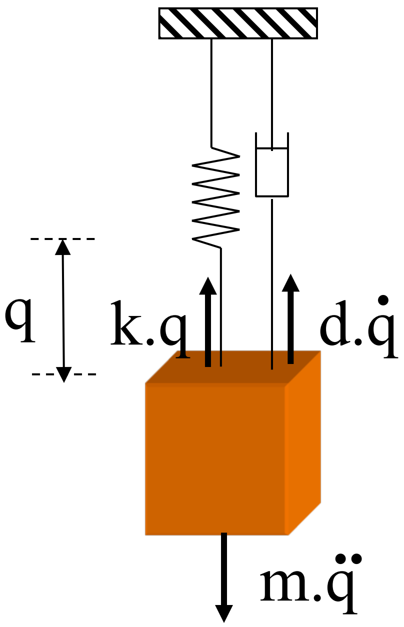
$F = k.q$ (lei de Hook)

$F = m.\ddot{q}$ (lei de Newton)

$F = d.\dot{q}$ (amortecimento)

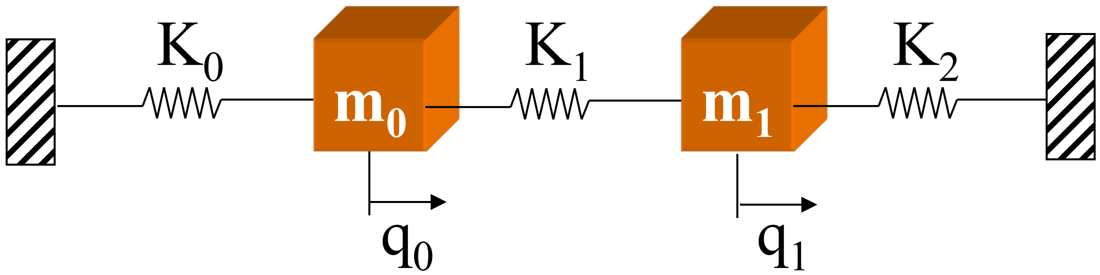
Igualando

$$k.q + d.\dot{q} = m.\ddot{q}$$



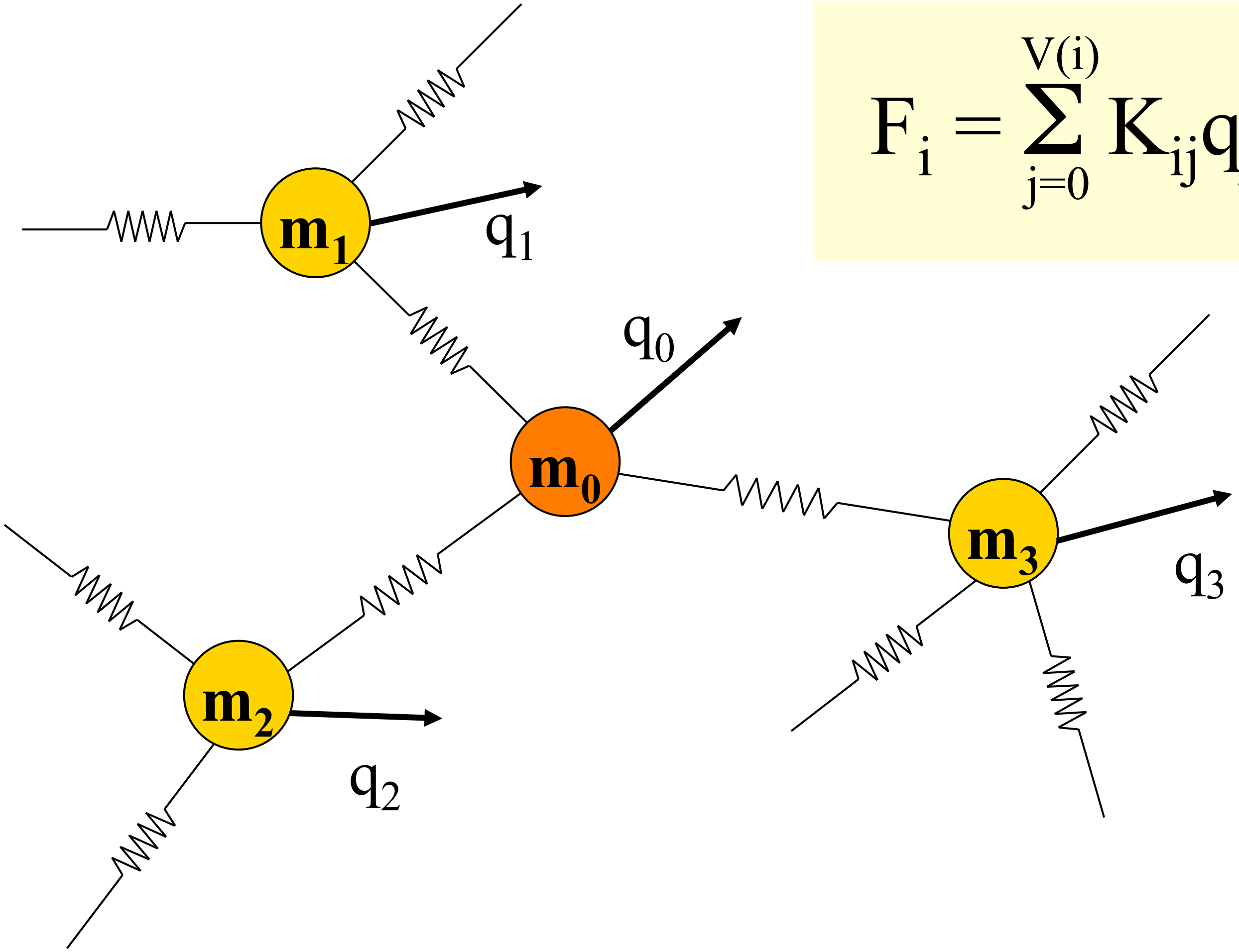
Sistema de Molas

- Força em cada nó **i** exercida pelo nó **j**



$$\begin{cases} m_0\ddot{q}_0 = -k_1(q_0 - q_1) - k_0 q_0 \\ m_1\ddot{q}_1 = k_1(q_0 - q_1) - k_2 q_1 \end{cases}$$

Lei de Hook na malha



$$F_i = \sum_{j=0}^{V(i)} K_{ij} q_j - \sum_{j=0}^{V(i)} K_{ij} q_i$$

Lei de Hook na malha

$$F_i = \sum_{j=0}^{V(i)} K_{ij} q_j - \sum_{j=0}^{V(i)} K_{ij} q_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{V(i)} K_{ij}(q_j - q_i) = 0$$

$$q_i^{(t+1)} = \frac{\sum_{j=0}^{V(i)} k_{ij}\, q_j^{(t)}}{\sum_{j=0}^{V(i)} k_{ij}}$$

Dinamismo na Malha

- Método Convencional para criar uma malha dinâmica
  - Entender o objeto de estudo como um sistema pseudo-estrutural **contínuo** ou **discreto** com propriedades fictícias de massa, amortecimento e rigidez.

Dinamismo na Malha

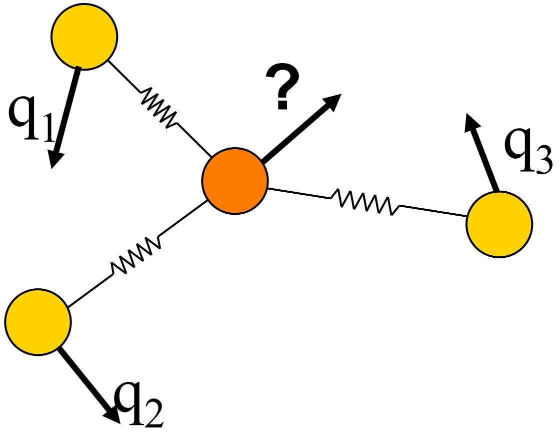
- $\mathbf{M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = 0}$
  - q = vetor deslocamento em função do tempo
  - q(t) = P(t) - P(0)
  - P = coordenadas dos pontos da grade
  - t = tempo
  - M, D e K matrizes de massa, amortecimento e rigidez
- Os nós no bordo permanecem **fixos** durante a deformação

Dinamismo na Malha

- Caso Discreto
  - massa em cada vértice
  - amortecedor e mola em cada aresta

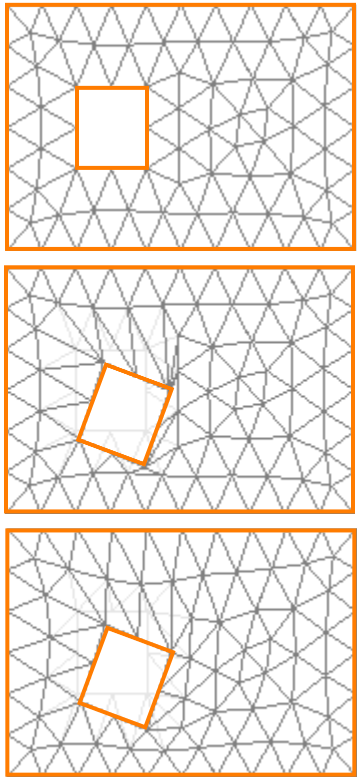
- **Versão Quase-estática**

$$\begin{cases} Kq = 0 \\ q(0) = q(t) \text{ para o bordo} \end{cases}$$



Spring Analogy

- Adição de molas fictícias à malha original
- Para deformações relacionadas com movimento de bordo
- Tipos de analogias
  - Molas lineares :
    - vertex springs
    - segment springs
  - Molas torcionais



Desafios

- Características método:
  - Boa qualidade
    - Triângulos de boa qualidade
  - Eficiência
  - Simplicidade

Vertex Spring Analogy

- Originalmente usada para suavização de malhas
- Molas nas Arestas
- Comprimento de equilíbrio = 0
  - Arestas tendem a se reduzirem em um vértice

Vertex Spring Analogy

- Coeficiente de rigidez constante

$$P_i^{(t+1)} = \frac{\sum_{j=0}^{V(i)} k_{ij} P_j^{(t)}}{\sum_{j=0}^{V(i)} k_{ij}}$$

$k_{i,j} = 1, \forall i,j$

P posição

Vertex Spring Analogy

- Algoritmo
  - Desloca o bordo
  - Loop
    - Move vértices interiores

Segment Spring Analogy

- Comprimento de equilíbrio é o comprimento inicial

$$q_i^{(t+1)} = \frac{\sum_{j=0}^{V(i)} k_{ij}\, q_j^{(t)}}{\sum_{j=0}^{V(i)} k_{ij}}$$

$$P_i^{novo} = P_i^{inical} + q_i^{final}$$

$$\mathbf{k_{ij} = 1/\mathit{l}_{ij}}\ , \quad \forall i,j$$

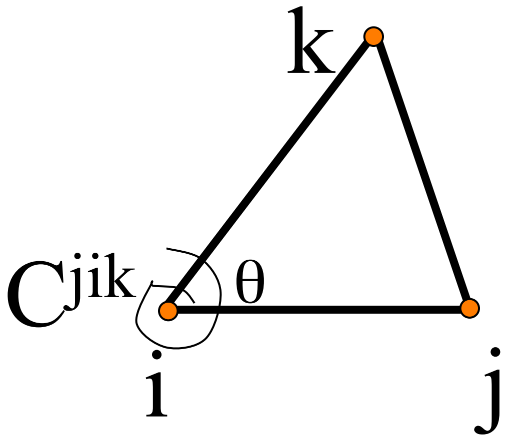
- $k_{i,j} \rightarrow \infty$
- $l_{ij} \rightarrow 0$

Segment Spring Analogy

- Algoritmo
  - Calcula o coeficiente de elasticidade ($k_{ij}=1/l_{ij}$)
  - Desloca o bordo
  - Loop
    - Move vértices interiores

Torsional Spring Analogy

- Controla ângulos (Impedem triângulos inválidos!)



$$C^{jik} = \frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta}$$

- $C^{jik} \rightarrow \infty$
- $\theta \rightarrow 0$ ou $\theta \rightarrow \pi$

$$C^{jik} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{l_{ij}^2\, l_{ik}^2}{4A_{ijk}^2}$$

Torsional Spring Analogy

- Como fazer a iteração do sistema?
  - Levar as molas torcionais para as arestas

$$q_i^{(t+1)} = \frac{\sum_{j=0}^{V(i)} \left(k_{ij} + \sum_{\Im_{ijk} \subset \boldsymbol{l}_{ij}} C^{ikj}\right) q_j^{(t)}}{\sum_{j=0}^{V(i)} \left(k_{ij} + \sum_{\Im_{ijk} \subset \boldsymbol{l}_{ij}} C^{ikj}\right)}$$

Torsional Spring Analogy

- Algoritmo
  - Calcula o coeficiente de elasticidade longitudinal ($k_{ij}=1/l_{ij}$)
  - Desloca o bordo
  - Loop
    - Calcula o coeficente de elasticidade torcional
    - Move vértices interiores

Conclusões

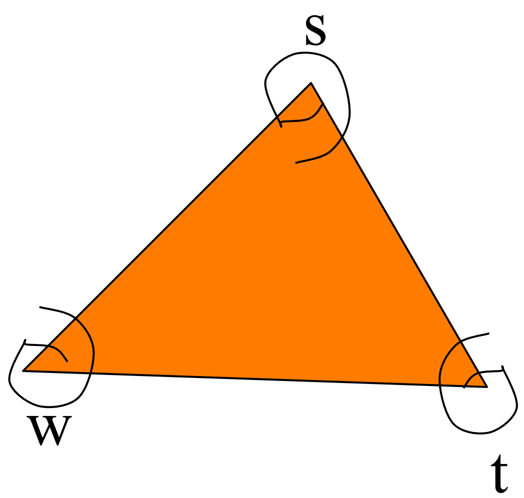
- O método vertex porta como o pior dos métodos
- O método segment melhorou
- O método vertex melhorou, mas não aceita grandes deformações
- A idéia da Triangulação precisa ser trabalhada

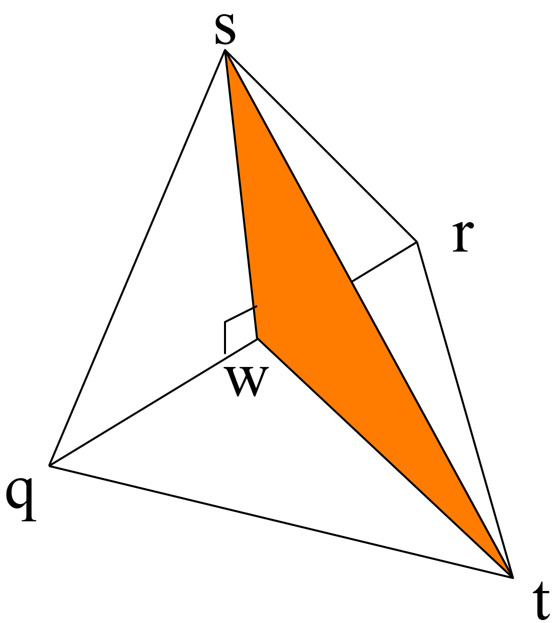
Molas Torcionais 3D

- vértice não pode atravessar
  - vértices
  - arestas
  - faces
- Duas abordagens:
  - Farhat
  - Murayama

Molas Torcionais 3D - Farhat

- “Insere” triângulos dentro dos tetraedros
- O triângulo *swt* impede *s* de atravessar a face *qrt*
- 12 triângulos/tetraedro





Molas Torcionais 3D-Murayama

- Três molas torcionais / aresta
- Uma mola torcional / aresta