โครงงานคณิตศาสตร์
เรื่อง การหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วยเล่ม 2

จัดทำโดย

จีระพัฒน์ ซ้ายสุวรรณ

ชินดนัย หวู

นรบดี สุดใจ

หลักสูตรส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์(Gifted maths)

โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

กันยายน 2566

โครงงานคณิตศาสตร์

เรื่อง การหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วยเล่ม 2

จัดทำโดย

จีระพัฒน์ ซ้ายสุวรรณ

ชินดนัย หวู

นรบดี สุดใจ

หลักสูตรส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์(Gifted maths)

โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

กันยายน 2566

ใบรับรองโครงงานคณิตศาสตร์

โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

หลักสูตรส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์(Gifted Maths)

การหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วยเล่ม 2

ผู้จัดทำ : นายจีระพัฒน์ ซ้ายสุวรรณ

นายชินดนัย หวู

นายนรบดี สุดใจ

ที่ปรึกษา : ครูอนงค์ นิราศคำ

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

ลงชื่อ .... ที่ปรึกษา

(นางสาวอนงค์ นิราศคำ)

ลงชื่อ .... กรรมการ

(นายกฤษณะ เกษมี)

ลงชื่อ .... กรรมการ

(นายธนดล ยิ้มถนอม)

ลงชื่อ .... กรรมการ

(นายเกริกเกียรติ แสงวิทยาประทีป)

ลงชื่อ .... กรรมการ

(นายธีรเดช จั่นกระแสร์)

....

(นายโสภณ ไทยจีน)

หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

....

(นายจิณณภัทร พิบูลวิทิตธำรง)

ผู้อำนวยการโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

ชื่อโครงงาน การหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วยเล่ม 2

ผู้จัดทำ นายจีระพัฒน์ ซ้ายสุวรรณ

นายชินดนัย หวู

นายนรบดี สุดใจ

ที่ปรึกษา ครูอนงค์ นิราศคำ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

บทคัดย่อ

จากโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วยเล่ม 2 นี้ ได้รับแรงบันดาลใจมาจากวิธีการหาค่าพายของอาร์คิมีดิสและมีจุดประสงค์ที่จะนำความรู้ด้านตรีโกณมิติมาประยุกต์กับแนวคิดแล้วได้กระบวนการหาค่าพายตามจำนวนหลักที่ต้องการมี 4 ขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดจำนวนหลักทศนิยมของค่าพายตามที่ต้องการ
2. แทนค่าลงใน n ของสูตร $a > \frac{5n-5}{3}$ (สูตรประมาณค่าจำนวนหลักที่ตรงกัน)
3. เมื่อได้ค่า a มาเราจะนำค่าของ $\lceil a \rceil$ ไปใช้ในขั้นตอนต่อไป (ต้องการให้เป็นจำนวนเต็มเนื่องจากทำให้คำนวณได้เร็วขึ้นเพราะเป็นเลขชี้กำลังของ 2)
4. แทน $\lceil a \rceil$ ใน m ของ $\left(\frac{(i)^{\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)} - (i)^{-\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)}}{i}\right) \cdot 2^{m-1}$ (สูตรคำนวณค่าพายในคอมพิวเตอร์) แล้วนำไปคำนวณในคอมพิวเตอร์

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานนี้มีการดำเนินงานหลายขั้นตอน เริ่มจากการศึกษาหาข้อมูล การพิสูจน์ การวิเคราะห์ การจัดทำโครงงานเป็นรูปเล่ม ตลอดระยะเวลาดังกล่าวคณะผู้จัดทำโครงงานได้รับความช่วยเหลือและคำแนะนำในด้านต่าง ๆ

ขอขอบพระคุณคุณครูอนงค์   นิราศคำ คุณครูที่ปรึกษาโครงงาน ผู้ให้คำแนะนำและความเมตตาช่วยเหลือในทุก ๆ ด้าน ตลอดในการช่วยหาข้อมูลและคิดวิเคราะห์ต่าง ๆ ในการทำโครงงานนี้จนประสบความสำเร็จ

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ และคุณแม่ ผู้เป็นที่รัก ผู้คอยให้กำลังใจคณะผู้จัดทำด้วยดีอย่างสม่ำเสมอมา ช่วยเหลือในสิ่งต่าง ๆ และให้ได้มีโอกาสในการศึกษาอันมีค่ายิ่ง

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ

ภาพที่ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ตั้งแต่สมัยอดีตจนถึงปัจจุบันมีผู้คนมากมายพยายามหาวิธีประมาณหรือหาค่าพาย ในยุคแรก การใช้รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าเป็นวิธีที่นิยมใช้ดังเช่น อาร์คิมีดิส ซึ่งได้ประมาณค่าพายว่าอยู่ระหว่าง $\frac{223}{71}$ และ $\frac{22}{7}$ โดยใช้รูป 96 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าและหลิว ฮุ่ย ประมาณค่าพายว่าอยู่ระหว่าง 3.141024 และ 3.1415927 โดยใช้รูป 96 และ 192เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าตามลำดับ ต่อมาในยุคของการใช้อนุกรมอนันต์ ปารเมศวรานามบุดีรี ได้ทำการประมาณค่าพายไว้ว่า $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ (Leibniz formula) และฟรองซัว เวียตานักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสได้ประมาณค่าพายไว้ว่า $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \ldots$ (Vietés formula) และวิลเลียม แชงค์สนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ คำนวณหาค่าพายไว้ว่า $\frac{\pi}{4} = 4arc\tan\frac{1}{5} - arc\tan\frac{1}{239}$ (Machin's formula) และศรีนิวาสะ รามานุชันนักคณิตศาสตร์ชาวอินเดีย ได้ค้นพบว่า $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$ ต่อมาในยุคของการคำนวณโดยใช้คอมพิวเตอร์ สองพี่น้องชุดนอฟสกีได้จัดรูปสูตรของ ศรีนิวาสะ รามานุชัน เพื่อให้ค่าที่ได้ลู่เข้าหาค่าพายเร็วขึ้นเพื่อการใช้สำหรับคำนวณในคอมพิวเตอร์ได้ $\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+1.5}}$ (Chudnovsky algorithm) และในปัจจุบัน เอ็มม่า ฮารุกะ อิวาโอะ ได้ใช้วิธีนี้ไปคำนวณในซูเปอร์คอมพิวเตอร์ได้ทั้งหมด 10^{14} ตำแหน่ง

คณะผู้ศึกษาได้แนวคิดในการสร้างวิธีในการประมาณค่าพายที่ได้แรงบันดาลใจจากการใช้รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยการใช้ความรู้ด้านตรีโกณมิติมาประยุกต์ใช้ หลังจากได้วิธีการประมาณมาแล้ว คณะผู้ศึกษาได้แทนค่าแบบสุ่ม ๆ แล้วพบว่าค่าที่ได้ทั้งสองค่าที่ได้มามีหลักทศนิยมที่ซ้ำกันทำให้เกิดข้อสงสัยว่าอาจความสัมพันธ์บางอย่างระหว่างค่าที่แทนเข้าไปกับทศนิยมที่ซ้ำกัน

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 สร้างสูตรคำนวณจำนวนหลักทศนิยมที่ได้จากค่าที่แทนใน α

1.2.2 หาวิธีสำหรับการคำนวณ $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$ ที่เร็วขึ้นในคอมพิวเตอร์

1.2.2 คำนวณค่าพายให้ได้ถึงทศนิยม 14,369,420 ตำแหน่งทศนิยม

1.3 ขอบเขตการศึกษา

1.3.1 สร้างสูตรประมาณหลักของค่าพายที่ได้ในหน่วยของององศา

1.3.1.1 สูตรในรูปที่ไม่มีการประมาณค่า

1.3.1.2 สูตรในรูปอย่างง่าย

1.3.2 หาวิธีที่ทำให้คำนวณ $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$ ได้เร็วขึ้นในขั้นพื้นฐานของการคำนวณในคอมพิวเตอร์โดยการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์

1.4 นิยามศัพท์เฉพาะ

1.4.1 พาย (π) หมายถึง อัตราส่วนระหว่างความยาวของเส้นรอบวงกับความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

1.4.2 n-gon หมายถึง รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ได้สูตรที่หาจำนวนหลักของค่าพายที่ถูกต้องจากการแทนค่าต่าง ๆ ใน α

1.5.2 ได้สูตรอย่างง่ายสำหรับการคำนวณหาจำนวนหลักของพายที่ถูกต้องจากการแทนค่าต่าง ๆ ใน α

1.5.3 ได้วิธีสำหรับการคำนวณ $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$ ที่เร็วขึ้นในคอมพิวเตอร์

1.5.4 ค่าพาย 14,369,420 ตำแหน่งทศนิยมจากการคำนวณในคอมพิวเตอร์

บทที่ 2
เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

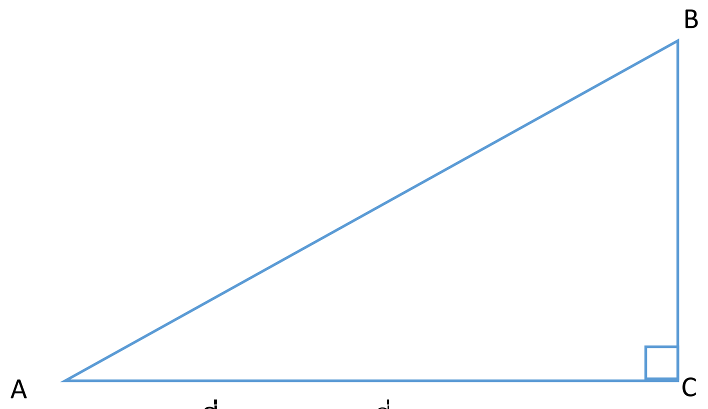
ในการจัดทำโครงงาน เรื่อง การหาค่าพายโดยใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วยเล่ม 2 ทางคณะผู้ศึกษาได้ทำการค้นคว้า รวบรวมแนวคิด และหลักการจากเนื้อหา เอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องที่ผู้จัดทำต้องการเสนอ โดยลำดับเนื้อหาที่ใช้ในการจัดทำโครงงานดังต่อไปนี้

1. ตรีโกณมิติ
    1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ
    1.2 Taylor series ที่เกี่ยวกับตรีโกณมิติ
2. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ limit
3. L’Hôpital’s rule
4. Euler’s Identity
5. circular function
6. เนื้อหาหลักของโครงงานคณิตศาสตร์เรื่องการหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วย

ซึ่งแต่ละเนื้อหามีรายละเอียดดังนี้

2.1 ตรีโกณมิติ

เพื่อให้เข้าใจในการศึกษาอัตราส่วนตรีโกณมิติ ให้ทำความเข้าใจเกี่ยวกับด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



ภาพที่ 2.1.1 สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

มุมที่เราสนใจคือมุม A

เรียกด้าน AC ว่าด้านประชิดมุม A

เรียกด้าน BC ว่าด้านตรงข้ามมุม A

เรียกด้าน AB ว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก

มุมที่เราสนใจคือมุม B

เรียกด้าน AC ว่าด้านตรงข้ามมุม B

เรียกด้าน BC ว่าด้านประชิดมุม B

เรียกด้าน AB ว่าด้านด้านตรงข้ามมุมฉาก

2.1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

อัตราส่วนระหว่างความยาวของด้าน 2 ด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีค่าคงตัวเสมอ เรียกอัตราส่วนเหล่านี้ว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติซึ่งแต่ละอัตราส่วนตรีโกณมิติมีชื่อเรียกดังนี้

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin(A)} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos(A)} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan(A)} = \frac{AC}{BC}$$

2.1.2 Taylor series ที่เกี่ยวกับตรีโกณมิติ

1. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

   สำหรับทุก x

2. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

   สำหรับทุก x

3. $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)x^{2n-1}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$

   สำหรับ $|x| < \frac{\pi}{2}$

4. $\sec x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \ldots$

   สำหรับ $|x| < \frac{\pi}{2}$

5. $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\,x^{2n+1}}{4^n(n!)^2(2n+1)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots$

   สำหรับ $|x| \leq 1$

6. $$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\,x^{2n+1}}{4^n(n!)^2(2n+1)}$$
   $$= \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots$$

   สำหรับ $|x| \leq 1$

7. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

   สำหรับ $|x| \leq 1,\ x \neq \pm i$

2.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
4. $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
8. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
9. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
10. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \geq 2$ และ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R}^+$

2.3 L'Hôpital's rule

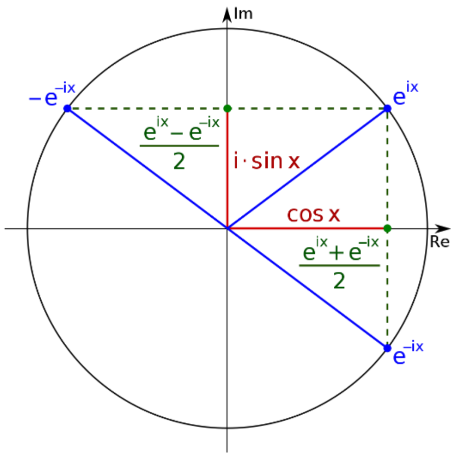
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)}{\left(\frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right)} = \frac{\lim\limits_{x \to c}\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)}{\lim\limits_{x \to c}\left(\frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.4 Euler’s identity

1. $e^{i\pi} + 1 = 0$

2.5 circular function



ภาพที่ 2.5.1 ภาพประกอบ circular function

1. $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

2. $cos\ x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

2.6 เนื้อหาหลักของโครงงานคณิตศาสตร์เรื่อง การหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วย

1. $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha} < \pi < \tan\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$ เมื่อ $\alpha \neq 0$
2. $\lim_{\alpha \to 0} \sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha} = \pi$
3. $\lim_{\alpha \to 0} \tan\alpha \cdot \frac{180}{\alpha} = \pi$

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการ

3.1 เครื่องมือที่ใชในการดำเนินงาน

3.1.1 phython 3.11

Pythonเป็นภาษาที่พัฒนาโดย Guido van Rossum และทีมงาน โดยถูกสร้างเพื่อเป็นภาษาที่เรียบง่ายและเป็นภาษาแบบเปิดเผยรหัส (open source) ที่คนอื่น ๆ สามารถนำไปต่อยอดได้ จึงทำให้ความสามารถของ python นั้นมีมากมาย หลากหลาย เช่น การนำไปใช้กับปัญญาประดิษฐ์ ข้อมูล และวิทยาศาสตร์ เป็นต้น โดยจุดเด่นหลักของ python คือ ความง่ายต่อการใช้งานและความสามารถในการจัดการหน่วยความจำ และความสามารถในการใช้ได้ในระบบปฏิบัติการหลากหลาย

1. mpmath library

ฟังก์ชันสำเร็จรูปสำหรับการคำนวณในระบบจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนที่ต้องการความแม่นยำสูงที่รองรับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมากมาย

3.2 ขั้นตอนการดำเนินงาน

3.2.1 สร้างสูตรที่จะหาจำนวนหลักของค่าพายที่ถูกต้องจากการแทนค่าต่าง ๆ ใน α

3.2.2 หาวิธีในการหาคำนวณค่า $\sin\alpha$ ที่เร็วขึ้นโดยใช้การคำนวณผ่านคอมพิวเตอร์

3.2.3 หาค่าพาย 14,369,420 หลักโดยใช้วิธีที่ได้มาโดยการคำนวณในคอมพิวเตอร์

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

การศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์เรื่อง การหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วย เล่ม 2 ได้ผลออกมาดังนี้

4.1 การสร้างสูตรที่จะหาจำนวนหลักของค่าพายที่ถูกต้องจากการแทนค่าต่าง ๆ ใน α

จากข้อสรุปของโครงงานคณิตศาสตร์เรื่องการหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลมหนึ่งหน่วยที่ได้มาว่ายิ่งแทน α ที่เข้าใกล้ 0 จะได้ค่าทั้งสองมาประมาณค่าพายได้แม่นยำขึ้นเราจึงแทนค่า α ที่เข้าใกล้ 0 มาก ๆ แบบสุ่ม ๆ ลงใน $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha} < \pi < \tan\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$ ซึ่งทำให้ได้ผลบออกมาดังนี้

แทน $\alpha = 10^{-1}$ จะได้ $3.1415910586\ldots < \pi < 3.1415958435\ldots$ พบว่าค่าทศนิยมทั้งสองตรงกัน 5 ตำแหน่ง

แทน $\alpha = 10^{-2}$ จะได้ $3.1415926376\ldots < \pi < 3.1415926854\ldots$ พบว่าค่าทศนิยมทั้งสองตรงกัน 7 ตำแหน่ง

แทน $\alpha = 10^{-3}$ จะได้ $3.1415926534\ldots < \pi < 3.1415926539\ldots$ พบว่าค่าทศนิยมทั้งสองตรงกัน 9 ตำแหน่ง

แทน $\alpha = 10^{-4}$ จะได้ $3.1415926535\ldots < \pi < 3.1415926535\ldots$ พบว่าค่าทศนิยมทั้งสองตรงกัน ≥ 10 ตำแหน่ง

แทน $\alpha = 10^{-5}$ จะได้ $3.1415926535\ldots < \pi < 3.1415926535\ldots$ พบว่าค่าทศนิยมทั้งสองตรงกัน ≥ 10 ตำแหน่ง

จากผลที่ได้ออกมานี้ทำเราเกิดข้อสังว่ามีปัจจัยอะไรที่ให้ค่าทั้งสองที่ได้แทน α ลงไปมีหลักทศนิยมที่คล้ายกันเราจึงพิจารณา $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha} < \pi < \tan\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$ และพบสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

จาก $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha} < \pi < \tan\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$

พิจารณา $\tan\alpha$;

$$\tan\alpha = \sin\alpha \cdot \sec\alpha$$

จะได้ว่า

$$\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha} < \pi < \sec\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$$

จากการสังเกตุพบว่าสิ่งเหมือนกันคือ $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$ ดังนั้นสิ่งที่ทำให้หลักทศนิยมมีค่าต่างกันคือ $\sec\alpha$ เราจึงนำความรู้เรื่อง Taylor series เข้ามาประยุกต์ในการสร้างสูตรดังนี้

ให้ $\sec\alpha \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24}$

ให้ $\sin(0.001) = a_1.a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

พิจารณา $\tan(0.001) = \sec(0.001) \cdot \sin(0.001)$;

$$\tan(0.001) = \sec(0.001) \cdot \sin(0.001)$$

$$\tan(0.001) \approx \left(1 + \frac{0.001^2}{2} + \frac{5 \cdot 0.001^4}{24}\right)\left(a_1.a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots\right)$$

จะได้

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
a_1. & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_1 & 5a_2 & 5a_3 & 5a_4 & 5a_5 & 5a_6 & + \\
0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{24}a_1 & \\
a_1. & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & b_1 & b_1 & b_1 & b_1 & b_1 & b_1 & b_1 &
\end{array}$$

พบว่า $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ตรงกัน ดังนั้นมีเพียงพจน์แรกที่จำเป็นต้องใช้ในการประมาณค่าของค่าทั้ง 2 ที่ตรงกันได้ออกมาดังนี้

ให้ $\sec\alpha \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}$

แทน α เป็นค่าที่เข้าใกล้ 0 ได้ออกมาดังนี้

แทน $\alpha = 0.001$;

$$\begin{aligned}\sec\alpha &\approx 1 + \frac{\alpha^2}{2} \\ &\approx 1 + \frac{10^{-6}}{2} \\ &\approx 1 + 5 \times 10^{-7} \\ &\approx 1.0000005\end{aligned}$$

พบว่ายิ่ง α เข้าใกล้ 0 ขึ้นเรื่อย ๆ $\sec\alpha$ จะมี 0 ตามหลังมากขึ้นเรื่อย ๆ เราจึงได้ข้อสรุปดังนี้

ถ้าอยากให้ค่าของ α ตรงกัน 1 หลัก แล้ว $\frac{\alpha^2}{2} < \frac{1}{10}$

ถ้าอยากให้ค่าของ α ตรงกัน 2 หลัก แล้ว $\frac{\alpha^2}{2} < \frac{1}{10^2}$

ถ้าอยากให้ค่าของ α ตรงกัน n หลัก แล้ว $\frac{\alpha^2}{2} < \frac{1}{10^n}$

จากนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\alpha^2}{2} < \frac{1}{10^n}$$

$$\alpha^2 < \frac{2}{10^n}$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{10^{\frac{n}{2}}} < \alpha < \frac{\sqrt{2}}{10^{\frac{n}{2}}}$$ แต่พิจารณาแค่ $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$0 < \alpha < \frac{\sqrt{2}}{10^{\frac{n}{2}}}$$

$$0 < \alpha^\circ \frac{180}{\pi} < \frac{\sqrt{2}}{10^{\frac{n}{2}}}$$

แต่ α ยังอยู่ในหน่วยเรเดียน ซึ่งยังทำให้ไม่สามารถใช้คำนวณได้ต้องแปลงให้กลายเป็นหน่วยองศาได้ออกมาดังนี้

$$0 < \alpha^\circ < \frac{\pi\sqrt{2}}{180 \times 10^{\frac{n}{2}}}$$

คณะผู้ศึกษาขอเรียกอสมการข้างต้นว่า “สูตรประมาณค่าหาจำนวนหลักที่ตรงกัน” แต่ว่าวิธีที่ได้มานี้ยังใช้ไม่ได้เพราะยังคงติดค่าพายอยู่เราจึงใช้วิธีการประมาณในการนำค่าพายออกไปดังนี้

$$0 < \alpha^\circ < \frac{\pi\sqrt{2}}{180 \times 10^{\frac{n}{2}}}$$

$$x^\circ \cdot 40 < \frac{1}{10^{\frac{n}{2}}} \quad ; \quad \frac{180}{\pi\sqrt{2}} < 40$$

$$x^\circ \cdot 10 < x^\circ \times 40 < \frac{1}{10^{\frac{n}{2}}}$$

$$x^\circ \cdot 10 < \frac{1}{10^{\frac{n}{2}}}$$

$$x^\circ < \frac{1}{10^{\frac{n}{2}-1}}$$

จากนั้นก็จัดรูปในอยู่ในรูปเลขยกกำลังของสองสำหรับการคำนวณในคอมพิวเตอร์

$$x^{\circ} < \frac{1}{1000^{\frac{n-2}{6}}}$$

$$x^{\circ} < \frac{1}{(1024)^{\frac{n-1}{6}}} < \frac{1}{1000^{\frac{n-2}{6}}};\ \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$$

$$x^{\circ} < \frac{1}{2^{\frac{5n-5}{3}}}$$

ให้ $x^{\circ} = \frac{1}{2^{a}}$ เพื่อใช้คำนวณในคอมพิวเตอร์จะได้

$$a > \frac{5n-5}{3}$$

คณะผู้ศึกษาขอเรียกอสมการข้างต้นว่า “สูตรประมาณค่าจำนวนหลักที่ตรงกัน”

4.2 การหาวิธีในการหาคำนวณค่า $\sin\alpha$ ที่เร็วมากยิ่งขึ้นโดยใช้การคำนวณผ่านคอมพิวเตอร์

นอกจาก $\sec\alpha$ แล้วเราก็ยังสามารถจัดรูป $\sin\alpha$ ให้คำนวณในคอมพิวเตอร์ได้เร็วยิ่งขึ้น

พิจารณา $\sin\alpha$

$$sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$; α เป็นเรเดียน

$$sin\ \alpha^\circ = \frac{e^{\left(\frac{i\pi\alpha}{180}\right)} - e^{-\left(\frac{i\pi\alpha}{180}\right)}}{2i} \ ; \ \alpha^\circ = \frac{\alpha\pi}{180}$$

$$= \frac{(-1)^{\left(\frac{\alpha}{180}\right)} - (-1)^{-\left(\frac{\alpha}{180}\right)}}{2i} \ ; \ e^{i\pi} = -1$$

$$= \frac{(i)^{\left(\frac{\alpha}{90}\right)} - (i)^{-\left(\frac{\alpha}{90}\right)}}{2i} \ ; \ i^2 = -1$$

คณะผู้ศึกษาขอเรียกสูตรข้างต้นว่า

“สูตรหาค่าคำนวณ $\sin\alpha \cdot \dfrac{180}{\alpha}$ ที่เร็วขึ้นในคอมพิวเตอร์”

4.3 การหาค่าพาย 14,369,420 หลักโดยใช้วิธีที่ได้มาโดยการคำนวณในคอมพิวเตอร์

พิจารณา $\sin\alpha \bullet \frac{180}{\alpha}$

แทน $\frac{180}{2^m}$ ลงใน α°;

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha \bullet \frac{180}{\alpha} &= \sin\left(\frac{180}{2^m}\right)\bullet \frac{180}{\frac{180}{2^m}} \\
&= \sin\left(\frac{180}{2^m}\right)\bullet 2^m \\
&= \left(\frac{(i)^{\left(\frac{180}{2^m \bullet 90}\right)} - (i)^{-\left(\frac{180}{2^m \bullet 90}\right)}}{2i}\right)\bullet 2^m \; ; \; \sin\alpha = \frac{(i)^{\left(\frac{\alpha}{90}\right)} - (i)^{-\left(\frac{\alpha}{90}\right)}}{2i} \\
&= \left(\frac{(i)^{\left(\frac{2}{2^m}\right)} - (i)^{-\left(\frac{2}{2^m}\right)}}{2i}\right)\bullet 2^m \\
&= \left(\frac{(i)^{\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)} - (i)^{-\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)}}{i}\right)\bullet 2^{m-1}
\end{aligned}
$$

จาก $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{180}{2^m} = 0 = \alpha$

และจากที่เราได้พบว่า $\lim\limits_{\alpha\to 0} sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha} = \pi$ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$
\lim_{m\to\infty}\left(\frac{(i)^{\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)} - (i)^{-\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)}}{i}\right)\bullet 2^{m-1} = \pi
$$

คณะผู้ศึกษาขอเรียกสูตรข้างต้นว่า

“สูตรคำนวณค่าพายในคอมพิวเตอร์”

จากนั้นก็นำไปคำนวณในคอมพิวเตอร์

โดยในการคำนวณนั้นคณะผู้ศึกษาได้คำนวณหาค่าพายไปทั้งหมด 14,369,420 ตำแหน่งทศนิยมด้วยการเขียนโค้ดใน python ได้ผลออกมาดังนี้ (โค้ดดูได้ที่ภาคผนวก)

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

จากการค้นคว้าเรื่องการหาค่าพายโดยการใช้ตรีโกณมิติในวงกลม 1 หน่วย สามารถได้กระบวนการหาค่าพายตามจำนวนหลักที่ต้องการมี 4 ขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดจำนวนหลักทศนิยมของค่าพายตามที่ต้องการ
2. แทนค่าลงใน n ของสูตร $a > \frac{5n-5}{3}$ (สูตรประมาณค่าจำนวนหลักที่ตรงกัน)
3. เมื่อได้ค่า a มาเราจะนำค่าของ $\lceil a \rceil$ ไปใช้ในขั้นตอนต่อไป (ต้องการให้เป็นจำนวนเต็มเนื่องจากทำให้คำนวณได้เร็วขึ้นเพราะเป็นเลขชี้กำลังของ 2)
4. แทน $\lceil a \rceil$ ใน m ของ $\left(\frac{(i)^{\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)}-(i)^{-\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)}}{i}\right)\cdot 2^{m-1}$ (สูตรคำนวณค่าพายในคอมพิวเตอร์) แล้วนำไปคำนวณในคอมพิวเตอร์

5.2 อภิปรายผล

จากการศึกษาทำให้ได้สูตรประมาณค่าจำนวนหลักที่ตรงกัน, สูตรหาค่าคำนวณ $\sin\alpha \cdot \frac{180}{\alpha}$ ที่เร็วขึ้นในคอมพิวเตอร์ และสูตรคำนวณค่าพายในคอมพิวเตอร์ ทำให้ได้ข้อสรุปเป็นวิธีการหาค่าพายโดยการคำนวณในคอมพิวเตอร์โดยสามารถอภิปรายผลได้ดังนี้

ในการที่จะได้มาสูตรและวิธีการต่าง ๆ ในการหาค่าพาย จะต้องเริ่มจากการศึกษาตั้งแต่ที่มาของค่าพาย วิธีการหาค่าพายในรูปแบบต่าง ๆ แล้วลองนำความรู้ด้านต่างๆมาประยุกต์กับวิธีนั้น ๆ หรือแม้แต่การจัดรูปสูตรที่มีอยู่ก่อนหน้าเพื่อให้คำนวณได้เร็วขึ้น ดังที่แสดงในบทที่ 4 ทำให้คณะผู้ศึกษาสามารถบรรลุวัตถุประสงค์ที่ได้กล่าวมา

5.3 ข้อเสนอแนะ

5.3.1 สามารถใช้วิธีอื่นในการหาค่าไซน์นำมาเปลี่ยนและคำนวณในคอมพิวเตอร์ได้

5.3.2 สามารถใช้ภาษาอื่นในการเขียนโค้ดในการคำนวณได้

5.3.2 สามารถเพิ่มประสิทธิภาพในการจัดสรรค์ทรัพยากรคอมพิวเตอร์เพื่อการคำนวณที่เร็วขึ้นได้

5.3.4 โค้ดที่เราได้มานั้นเป็นแบบ semi-parallelized เนื่องจากมีเพียงบางส่วนของโค้ดที่คำนวณแบบ parallelized หรือ multiprocessing ได้

เอกสารอ้างอิง

สุดา เธียรมนตรี. (2564). **คู่มือ coding ภาษา python ฉบับสมบูรณ์** พิมพ์ครั้งที่ 1. นนทบุรี ไอดีซีฯ.

ลิมิตและความต่อเนื่อง. (2557). [ออนไลน์]. สืบค้นจาก: https://anakkamatee.files.wordpress.com/2014/08/ch1.pdf [16 สิงหาคม 2565]

2021 หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์ สกสค.ลาดพร้าว https://anakkamatee.files.wordpress.com/2014/08/ch1.pdf [16 สิงหาคม 2565]

Chronology of computation of π. 2022. (Online). Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_%CF%80#The_age_of_electronic_computers_(from_1949_onwards) [2022, august 16]

The Quest for Pi. (1997). Available: http://crd-legacy.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/pi-quest.pdf [2022, august 16]

Liu Hui. J J O'Connor and E F Robertson. (2003). Available: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Liu_Hui/ [2022, august 16]

How Archimedes showed that π is approximately equal to 22/7. Damini D. B., Abhishek Dhar. (2020). Available: https://arxiv.org/abs/2008.07995 [2022, august 16]

The Computation of Pi by Archimedes. Bill McKeeman. 2016. Available: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29504-the-computation-of-pi-by-archimedes?s_tid=srchtitle_archimedes_2 [2022, august 16]

Madhava of Sangamagramma. J J O'Connor and E F Robertson. (2000). Available: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Madhava/ [2022, august 16]

The Life of Pi. Jonathan M. Borwein, Frsc, Faa. (2011). Available: https://carmamaths.org/resources/jon/piday-16-sm.pdf [2022, august 16]

A new form of the Machin-like formula for π. (2022). Available:
https://arxiv.org/pdf/2108.07718.pdf [2022, august 16 **Matters Computational**.
J¨org Arndt. (2010). Available: https://jjj.de/fxt/fxtbook.pdf [2022, august 16]

Rational analogues of Ramanujan's series for 1/ π. Heng Huat Chan. (2012). Available:
https://web.archive.org/web/20191219004315/http://pdfs.semanticscholar.org/6810/c8ac1ad01821a504e66f5d8665aeeae93cab.pdf [2022, august 16]

A detailed proof of the chudnovsky formula with means of basic complex analysis.
Lorenz milla. (2021). Available:
https://arxiv.org/pdf/1809.00533 [2022, august 16]

An tntroduction to Geometrical Probability. A. M. Mathai. (1999). Available :
https://books.google.co.th/books?id=FV6XncZgfcwC&printsec=frontcover&hl=th&source=gbs_ge_summary_r&cad=0 [2022, august 16]

Lazzarini's Lucky Approximation. (1990). Available :
http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Allendoerfer/1995/Badger.pdf [2022, august 16]

Playing pool with π. G. Galperin. (2003). Available:
https://www.maths.tcd.ie/~lebed/Galperin.%20Playing%20pool%20with%20pi.pdf [2022, august 16]

The most unexpected answer to a counting puzzle. 3blue1brown. (2019). Available:
https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs [2022, august 16]

Summing inverse squares by euclidean geometry. Johan Wästlund. (2010). Available:
http://www.math.chalmers.se/~wastlund/Cosmic.pdf [2022, august 16]

Trigonometry of right triangle. (2012). Available :
https://books.google.co.th/books?id=uJqaBAAAQBAJ&pg=PA448&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false [2022, august 16]

Taylor Series Expansions. (2011). Available:
http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/taylor11.pdf [2022, august 16]

Trigonometric function. Available:

https://mpmath.org/doc/current/functions/trigonometric.html [2023, august 16]

Abramowitz and Stegun. Handbook of Mathematical Functions. Available:

https://mpmath.org/doc/current/functions/trigonometric.html [2023, august 16]

Roots of Complex Number.Available:

https://complex-analysis.com/content/roots_complex_numbers.html

[2023, august 16]

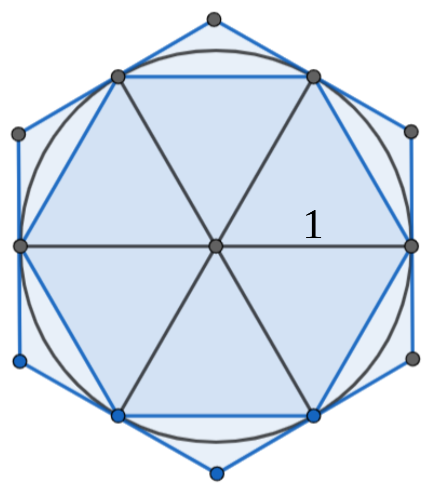
A new form of the Machin-like formula for π by iteration with increasing integers.

Available: https://arxiv.org/pdf/2108.07718.pdf [2023, august 16]

ภาคผนวก

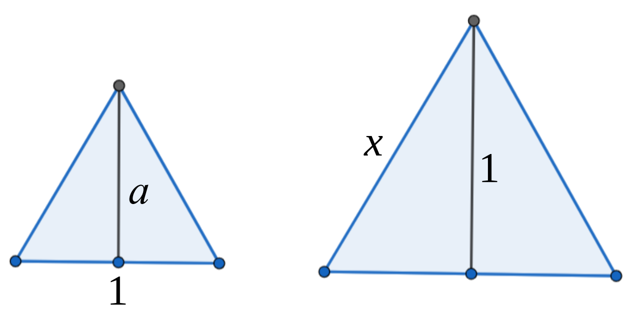
วิธีการหาค่าพายของอาร์คิมีดิส

เริ่มจากการสร้างรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอกและแนบในวงกลมโดนจากข้อสันนิษฐานพบว่าเขาเลือกรูปนี้เพราะว่าเป็นรูปที่ใช้คำนาณได้ง่ายที่สุด เพราะว่ารัศมีของวงกลมจะมีค่าเท่ากับด้านของ 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมแล้วกำหนดให้รัศมีวงกลมคือ 1 หน่วยจะได้ว่าความยาวรอบรูปของ 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมคือ 6 หน่วย ดังภาพ



รูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

จากนั้นก็ใช้เรื่องสามเหลี่ยมคล้ายกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการหาความยาวรอบรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอก จะได้ว่า



รูป 3 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

และจากเรื่องสามสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า $\frac{a}{1} = \frac{1}{x}$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.1547$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่าความยาวรอบรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอก ≈ 6.9282 หน่วย

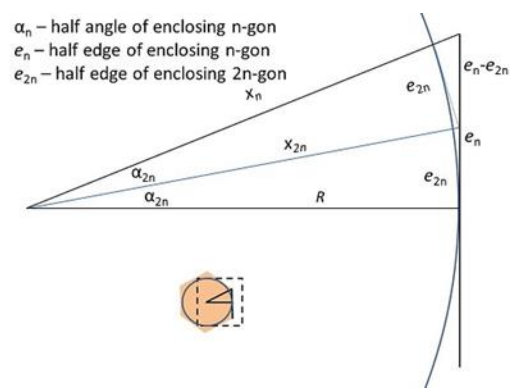
ดังนั้นจะได้ว่า

ความยาวรอบรูปของ 6-gon แนบในวงกลม $< 2\pi <$ ความยาวรอบรูป 6-gon แนบนอ

$$6 < 2\pi < 6.9282$$

$$3 < \pi < 3.4641$$

แต่เนื่องจากค่านี้ยังไม่แม่นยำพอ อาร์คิมีดิสจึงเพิ่มจำนวนเหลี่ยมของรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าเป็นสองเท่าโดยใช้วิธีนี้



รูปเปรียบเทียบหาความสัมพันธ์ของรูป n และ 2n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

จากภาพจะได้ว่า

$$\frac{x_n}{R} = \frac{e_n - e_{2n}}{e_{2n}}$$

$$\frac{x_n + R}{R} = \frac{e_n}{e_{2n}}$$

$$\frac{x_n + R}{e_n} = \frac{R}{e_{2n}}$$

$$x_n^2 = R^2 + e_n^2$$

$$\frac{R}{e_{2n}} = \frac{x_n + R}{e_n}$$

$$\frac{R}{e_{2n}} = \frac{R + \sqrt{R^2 + e_n^2}}{e_n}$$

$$\frac{R}{e_{2n}} = \frac{R}{e_n} + \sqrt{\left(\frac{R}{e_n}\right)^2 + 1}$$

กำหนดให้ x_n คือระยะจากมุมของ n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ถึงจุดศูนย์กลางวงกลม

x_{2n} คือระยะจากมุมของ $2n$ เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า" ถึงจุดศูนย์กลางวงกลม

e_n คือความยาวด้านของ n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า"

e_{2n} คือความยาวด้านของ n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า"

R คือรัศมีวงกลม

จากนั้นก็นำวิธีนี้มาหาความยาวรอบรูป 6×2^1, 6×2^2, 6×2^3, 6×2^4, 6×2^5, ไปเรื่อย ๆ ในรูปของ 6×2^n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าตามลำดับดังนี้

ตารางความสัมพันธ์ของค่าจำนวนเหลี่ยมที่เพิ่มขึ้นกับค่าประมาณพายที่ใกล้เคียงขึ้น

จำนวนเหลี่ยม	ความยาวด้าน n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบใน	ความยาวรอบรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบใน	ความยาวด้าน n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอก	ความยาวรอบรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอก	การประมาณค่าพาย
6×2^1	0.51763	6.21166	0.53590	6.43078	$3.10583 < \pi < 3.21539$
6×2^2	0.26105	6.26525	0.26330	6.31932	$3.13263 < \pi < 3.15966$
6×2^3	0.13081	6.27870	0.13109	6.29217	$3.13935 < \pi < 3.14609$
6×2^4	0.06544	6.28206	0.06547	6.28543	$3.14103 < \pi < 3.14271$
6×2^5	0.03272	6.28290	0.03273	6.28374	$3.14145 < \pi < 3.14187$

Leibniz formula

จากสมการของ Jyesthadeva

$$\Theta=\frac{sin\Theta}{cos\Theta}-\frac{sin^3\Theta}{3cos^3\Theta}+\frac{sin^5\Theta}{5cos^5\Theta}-\frac{sin^7\Theta}{7cos^7\Theta}\ldots$$

แทน $\frac{sin(\Theta)}{cos(\Theta)} = tan(\Theta)$ จะได้ว่า

$$\Theta = tan\Theta - \frac{1}{3}tan^3\Theta + \frac{1}{5}tan^5\Theta - \frac{1}{7}tan^7\Theta \ldots$$

จากนั้นจะได้ว่า

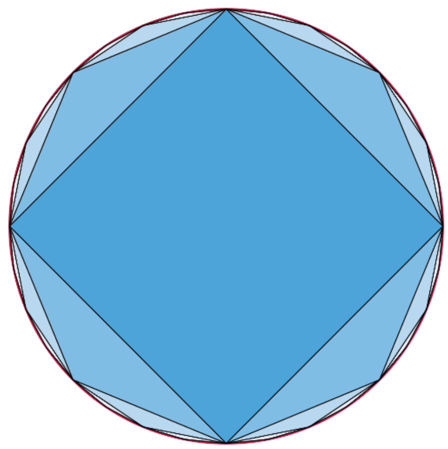
$$tan^{-1}\Theta = \Theta - \frac{1}{3}\Theta^3 + \frac{1}{5}\Theta^5 - \frac{1}{7}\Theta^7\ldots$$

ให้ $\theta = 1$ จะได้ว่า

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots$$

Viètés formula

ฟรองซัว เวียตา ประมาณค่าพายไว้ว่า $\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\ldots$ ได้มาจากการการหาอัตราส่วนส่วนของรูป 2^{n} และ 2^{n+1} เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแล้วนำมาคูณกันเรื่อย ๆ จนเป็นอนันต์



รูป 2^{n} เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

Machin’s formula

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

Ramanujan–Sato series

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^{4}396^{4k}}$$

Chudnovsky algorithm

สองพี่น้องชุดนอฟสกีได้จัดรูปสูตรของ ศรีนิวาสะ รามานุชัน ได้

$$\frac{1}{\pi}=12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^{3}640320^{3k+3/2}}$$

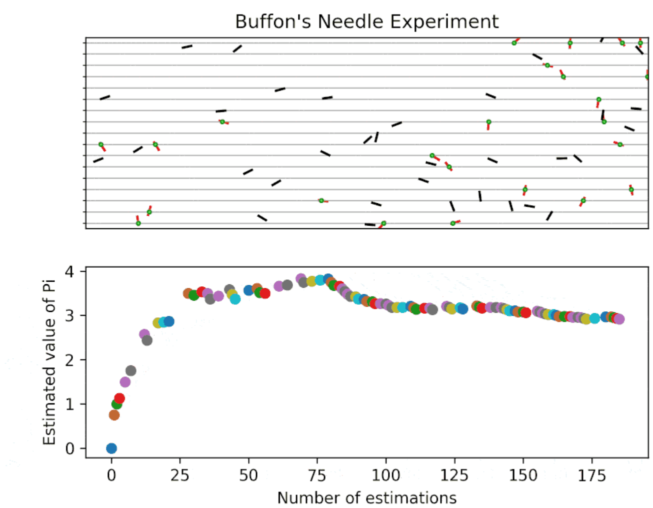
Basel problem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$$

Buffon’s needle problem

การโยนเข็มที่มีความยาว n ไปบนเส้นขนานเป็นอนันเส้นโดยที่แต่ละเส้นห่างกันมากกว่า n แล้วจะได้ว่า

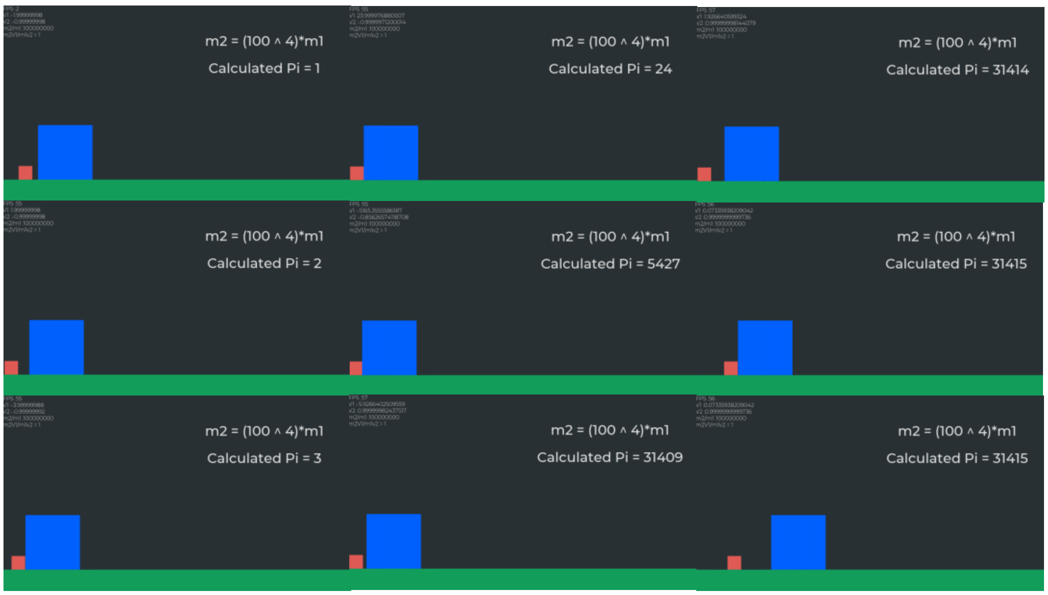
$$\pi \approx \frac{\text{จำนวนเข็มที่โยน x ความยาวเข็ม}}{\text{จำนวนเข็มที่เส้นลากผ่าน x ระยะห่างเส้นขนาน}}$$



ภาพการแสดงผลของจำนวนเข็มกับความสัมพันธ์กับค่าพายที่ได้

The number π form a billiard point of view

คือการนำวัตถุมวล x มาถูกชนด้วยวัตถุมวลที่มีมวลเป็น 100^n เท่าของ x จะได้ค่าของ $n+1$ ตำแหน่งแรกของพายจากจำนวนครั้งที่วัตถุชนกับกำแพงรวมกับจำนวนครั้งที่วัตถุชนกัน



ภาพค่าพายที่ได้จากการนำวัตถุมวลที่ต่างกัน 100^4 เท่ามาชนกัน

โค้ดที่ใช้ในการคำนวณ

```
import multiprocessing
import mpmath
import time
# Set the desired precision to 14369421 digits
mpmath.mp.dps = 14369421
def calculate_n_minus_one(n):
    start_time = time.time()
    n_minus_one = n - 1
    end_time = time.time()
    print(f"calculate_n_minus_one_done (Time: {end_time - start_time}
seconds)")
    return n_minus_one
def calculate_2_power_n_minus_one(n_minus_one):
    start_time = time.time()
    two_power_n_minus_one = mpmath.power(2, n_minus_one)
    end_time = time.time()
    print(f"calculate_2_power_n_minus_one_done (Time: {end_time -
start_time} seconds)")
    return two_power_n_minus_one
def calculate_angle(n_minus_one):
    start_time = time.time()
    angle = mpmath.power(2, -n_minus_one)
    end_time = time.time()
    print(f"calculate_angle_done (Time: {end_time - start_time} seconds)")
    return angle
def calculate_exponential1(angle):
    start_time = time.time()
    exp1 = mpmath.power(mpmath.j, angle)
    end_time = time.time()
    print(f"calculate_exponential1_done (Time: {end_time - start_time}
seconds)")
    return exp1
def calculate_exponential2(angle):
    start_time = time.time()
    exp2 = mpmath.power(mpmath.j, -angle)
    end_time = time.time()
    print(f"calculate_exponential2_done (Time: {end_time - start_time}
seconds)")
    return exp2
def sine_calculation(exponentials):
```

```
    start_time = time.time()
    exp1, exp2 = exponentials
    # Calculate the result
    result = (exp1 - exp2) / mpmath.j
    # Extract the real part
    real_part = mpmath.re(result)
    end_time = time.time()
    print(f"sine_calculation_done (Time: {end_time - start_time}
seconds)")
    return real_part
def multiply_result(real_part, two_power_n_minus_one):
    start_time = time.time()
    multiplied_result = real_part * two_power_n_minus_one
    end_time = time.time()
    print(f"multiply_result_done (Time: {end_time - start_time} seconds)")
    return multiplied_result
if __name__ == '__main__':
    # Number of processes for multiprocessing
    num_processes = multiprocessing.cpu_count()
    # Start the timer
    start_time = time.time()
    # Set the desired precision to 14369421 digits
    mpmath.mp.dps = 14369421
    # Create a multiprocessing pool
    pool = multiprocessing.Pool(processes=num_processes)
    # Set the value of n in terms of 2^n
    n = 23,949,032  # Change this to the desired value of n
    # Calculate n_minus_one using multiprocessing
    n_minus_one = pool.apply(calculate_n_minus_one, args=(n,))
    # Calculate 2^(n-1) using multiprocessing
    two_power_n_minus_one = pool.apply(calculate_2_power_n_minus_one,
args=(n_minus_one,))
    # Calculate the angle using multiprocessing
    angle = calculate_angle(n_minus_one)
    # Calculate the complex exponentials concurrently using
multiprocessing
    exp1_async = pool.apply_async(calculate_exponential1, args=(angle,))
    exp2_async = pool.apply_async(calculate_exponential2, args=(angle,))
    exp1 = exp1_async.get()
    exp2 = exp2_async.get()
    exponentials = (exp1, exp2)
    # Calculate the real part of f(x) using multiprocessing
```

```python
    real_part = pool.apply(sine_calculation, args=(exponentials,))
    # Multiply the result by 2^(n-1)
    modified_result = pool.apply(multiply_result, args=(real_part,
two_power_n_minus_one))
    # End the timer
    end_time = time.time()
    # Print the modified result and execution time
    print("Modified Result:", modified_result)
    print("Execution time:", end_time - start_time, "seconds")
    # Write the modified_result and execution time to a file
    with open("result.txt", "w") as file:
        file.write(f"Modified Result: {modified_result}\n")
        file.write(f"Execution time: {end_time - start_time} seconds\n")
    # Close and join the multiprocessing pool
    pool.close()
    pool.join()
```

ลิ้งค์ของสื่อนำเสนอ