Inteligentna Analiza Danych **2020/2021**

Prowadzący: mgr inż. Paweł Tarasiuk środa, 14:30

Daniel Modrzejewski	229963	229963@edu.p.lodz.pl
Mateusz Srebnik	230004	230004@edu.p.lodz.pl

Zadanie 5.: metoda aproksymacji

1. Cel

Celem zadania piątego jest zaimplementowanie metody aproksymacji opartej o wielomiany Czebyszewa.

2. Wprowadzenie

Do wykonania zadania potrzebne jest opanować następująca teorie.
Węzły Czebyszewa (1)

$$x_k = 1/2(a+b) + 1/2(b-a) * \cos((2k*\Pi)/2n), k = 1,...,n$$

(1)
a,b - przedział aproksymowany, n - stopień

Wielomiany Czebyszewa (2)

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_k(x) = 2x * T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

Wielomian aproksymacji (3)

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k * T_k(x)$$

Pierwszym krokiem jest obliczenie wszystkich λ z otrzymanego układu równań (4)

$$\phi(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x) - \sum_{k=0}^{m} \lambda_k * T_k(x)$$

Następnym krokiem jest podstawienie λ pod wielomian aproksymacji (wzór 3).

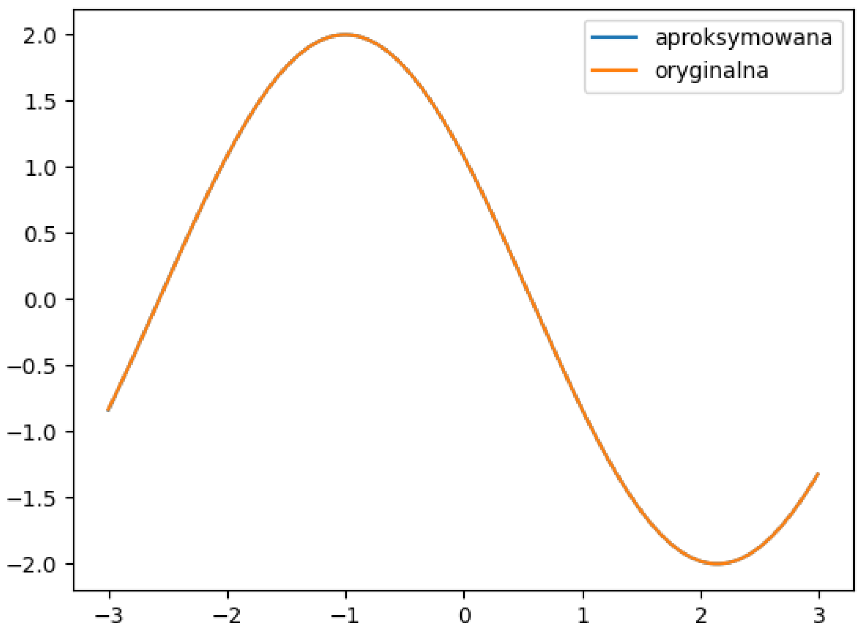
3. Opis implementacji

Program został zaimplementowany w języku python, interakcja z użytkownikiem występuje poprzez konsole. Implementacja dzieli się na funkcje obliczające :
- wartość za pomocą Hornera
- węzeł Czebyszewa
- wielomiany Czebyszewa
- układ równań do obliczenia λ
- błąd
- wykres
Biblioteki wykorzystane do implementacji to matplotlib oraz numpy

4. Materiały i metody

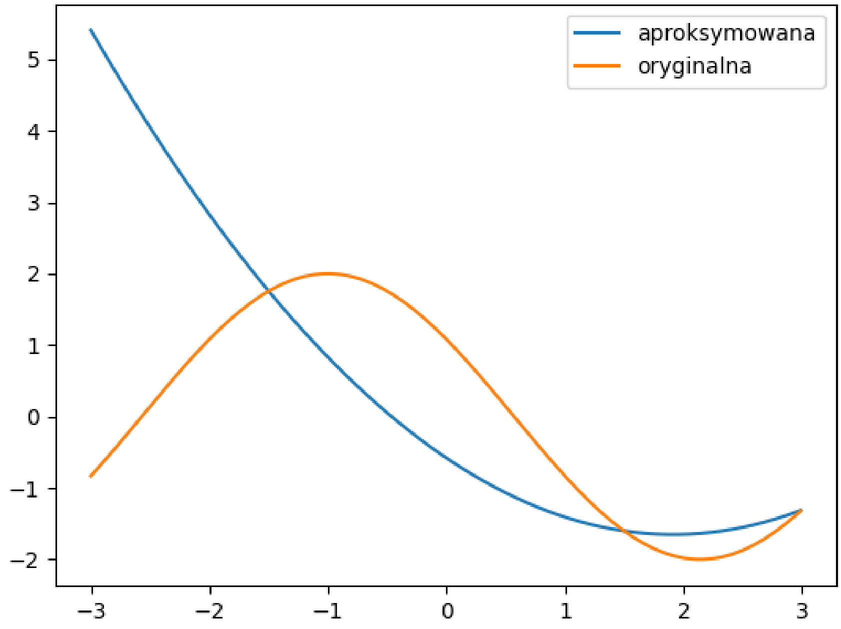
1. $2\cos(x+1)$

Wyznaczenie wielomianu za pomocą ustawienia maksymalnego błędu 0.001, przedział [-3, 3]



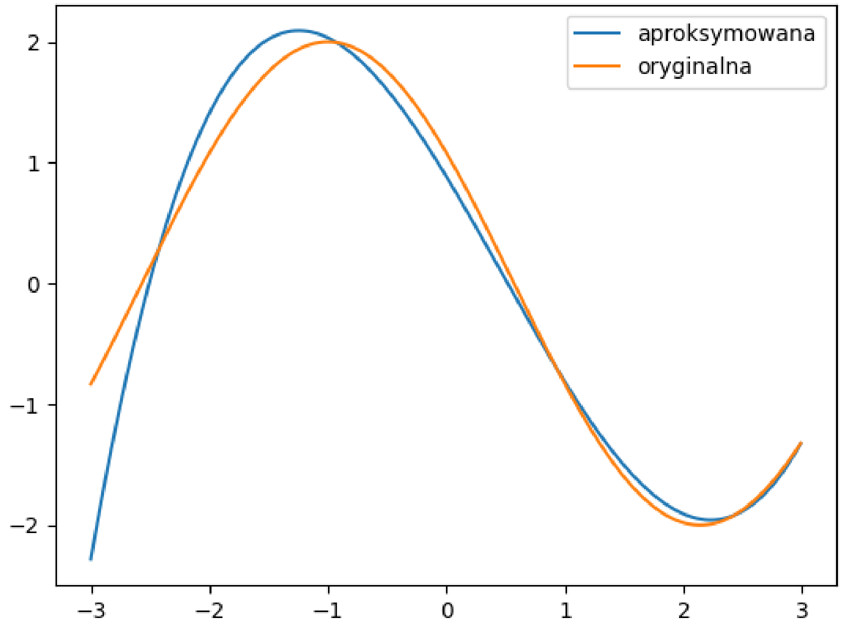
Wielomian $9.176*10^{-6}x^8 + 0.0002677x^7 - 0.001271x^6 - 0.01372x^5 + 0.04398x^4 + 0.28x^3 - 0.5388x^2 - 1.683x + 1.08$

Dla tego samego przedziału i wybrania stopnia wielomianu 2



Wielomian $0.2924x^2 - 1.119x - 0.5815$
Błąd 1.3308698947857616

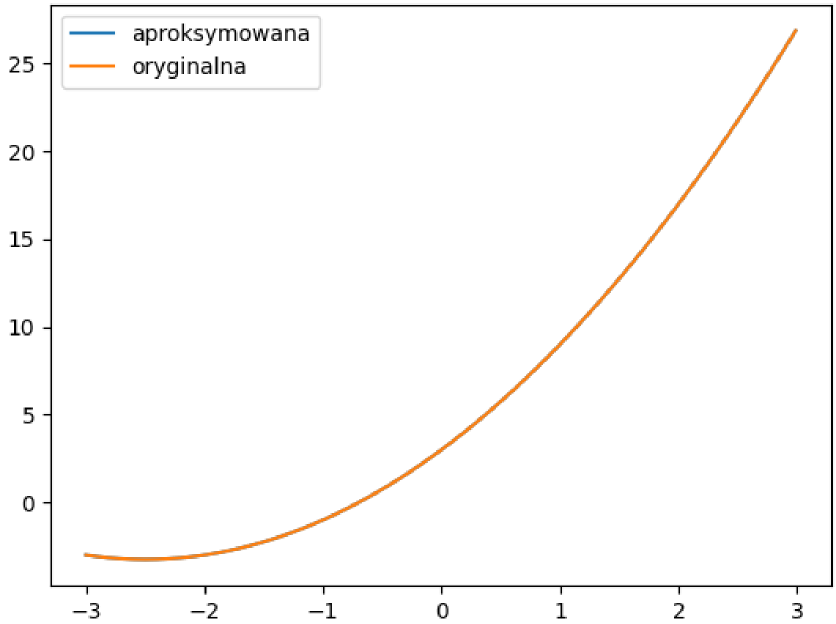
Dla tego samego przedziału i wybrania stopnia wielomianu 4



Wielomian $-0.002857x^4 + 0.1983x^3 - 0.2719x^2 - 1.622x + 0.8843$
Błąd 0.17066680265076745

2. $\mathrm{x}^2 + 5x + 3$

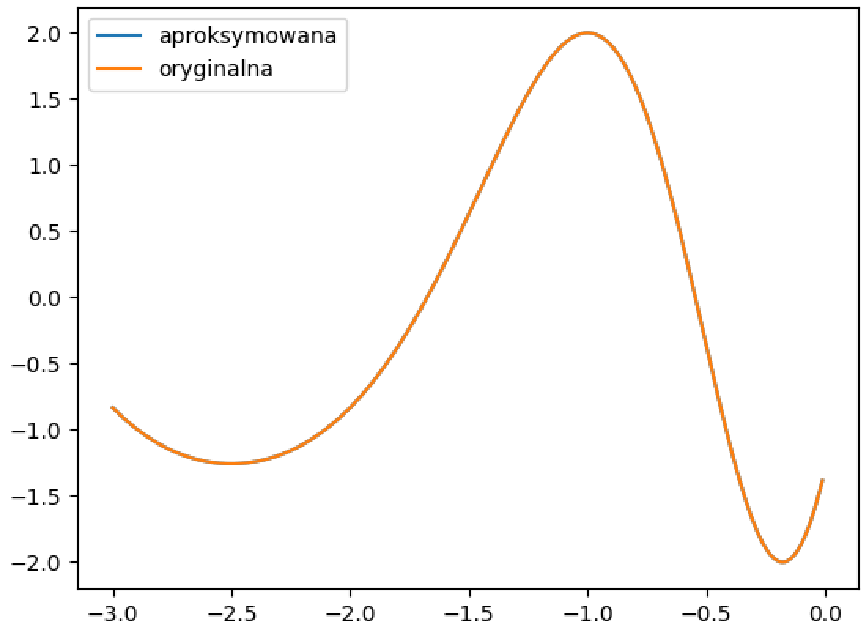
Wyznaczenie wielomianu za pomocą ustawienia maksymalnego błędu 0.001, przedział [-3, 3]



Wielomian $x^2 + 5x + 3$
Błąd końcowy: $1.41 * 10^{-15}$

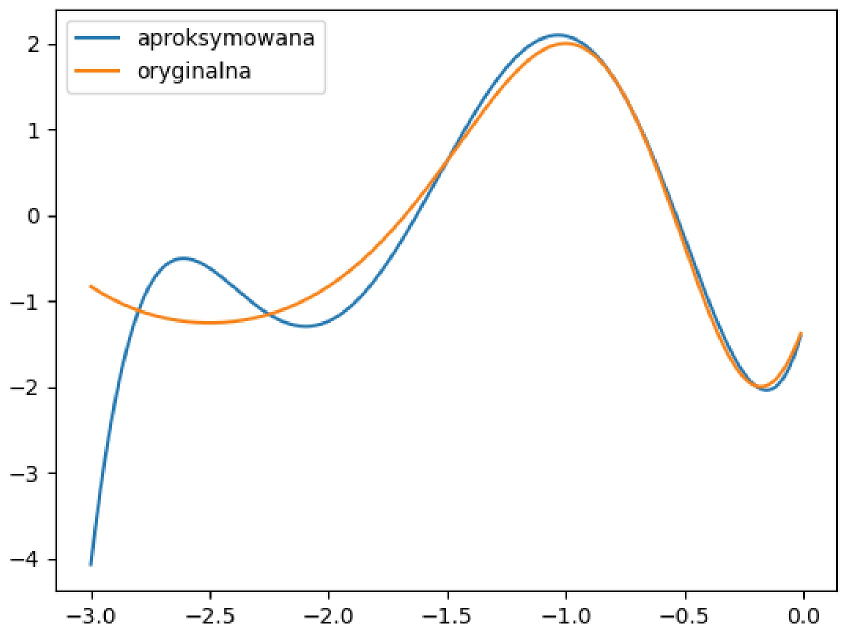
3. $2 * \cos(x^2 + 5x + 1)$

Wyznaczenie wielomianu za pomocą ustawienia maksymalnego błędu 0.001, przedział [-3, 0]



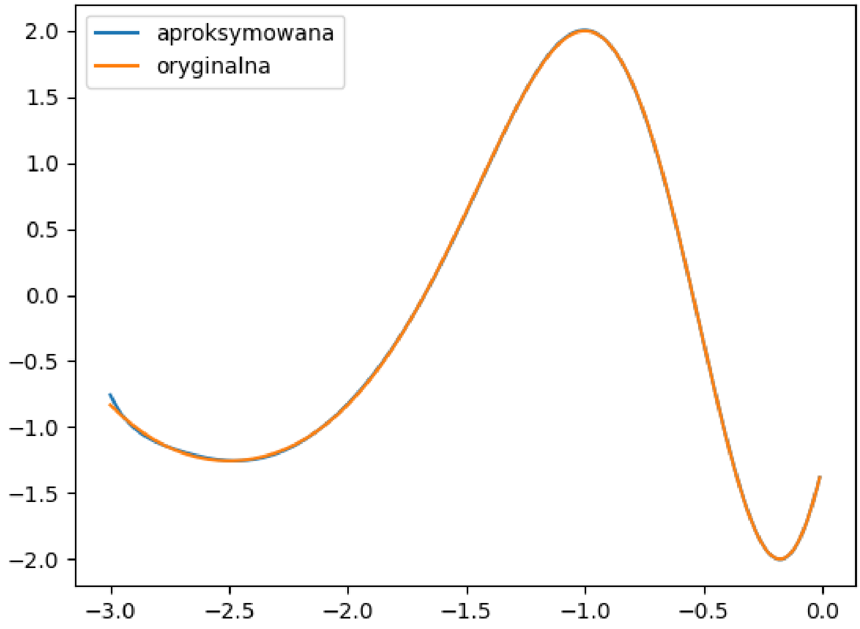
Wielomian $0.003268x^{13} + 0.09494x^{12} + 1.151x^{11} + 7.817x^{10} + 33.05x^{9} + 90.24x^{8} + 156.4x^{7} + 155.5x^{6} + 53.94x^{5} - 38.95x^{4} - 22.79x^{3} + 18.02x^{2} + 7.572x - 1.307$

Dla tego samego przedziału i wybrania stopnia wielomianu 5



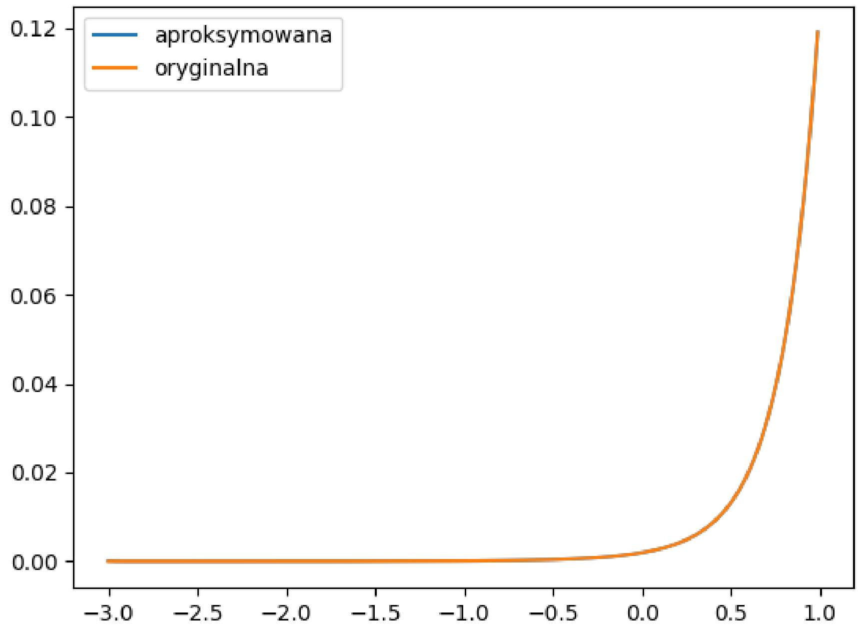
Wielomian $2.393x^{5} + 17.62x^{4} + 44.7x^{3} + 43.29x^{2} + 10.43x - 1.307$
Błąd 0.2866545353015158

Dla tego samego przedziału i wybrania stopnia wielomianu 10



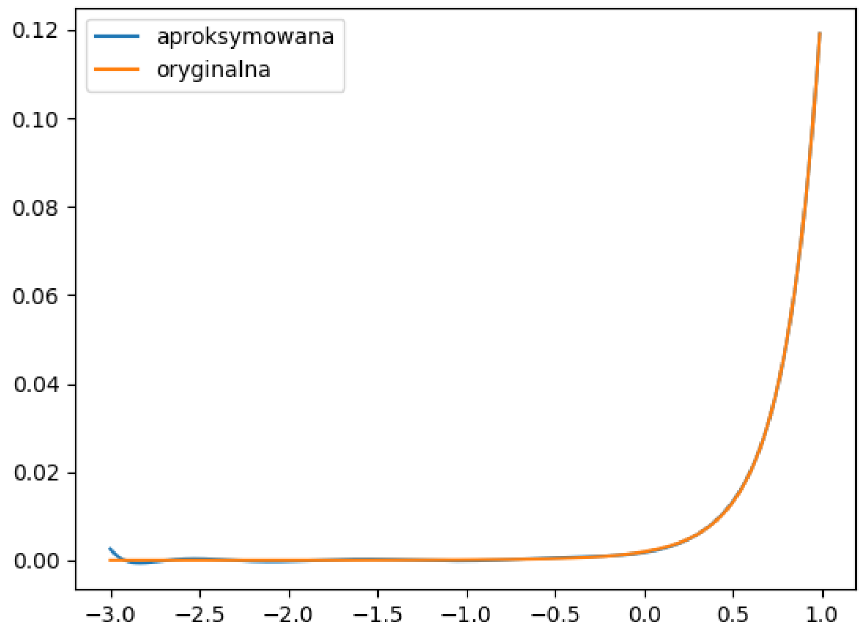
Wielomian $0.05334x^{10} + 0.5449x^9 + 1.323x^8 - 5.473x^7 - 40.21x^6 - 99.08x^5 - 112.5x^4 - 42.48x^3 + 15.58x^2 + 7.483x - 1.307$
Błąd 0.005477223140668283

4. $2^{(x^2+5x+9)}$
Wyznaczenie wielomianu za pomocą ustawienia maksymalnego błędu 0.00001, przedział [-3, 1]



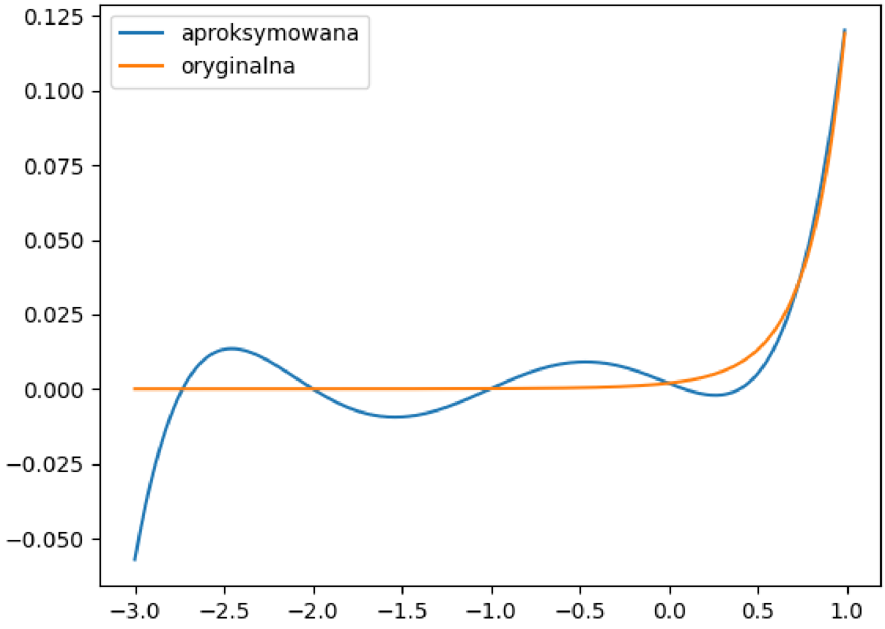
Wielomian $6.52 * 10^{-6}x^{14} + 9.822 * 10^{-5}x^{13} + 0.0006188x^{12} + 0.002103x^{11} + 0.004182x^{10} + 0.005245x^9 + 0.005876x^8 + 0.009839x^7 + 0.01661x^6 + 0.02049x^5 + 0.02023x^4 + 0.01787x^3 + 0.01308x^2 + 0.006799x + 0.001953$

Dla tego samego przedziału i wybrania stopnia wielomianu 10



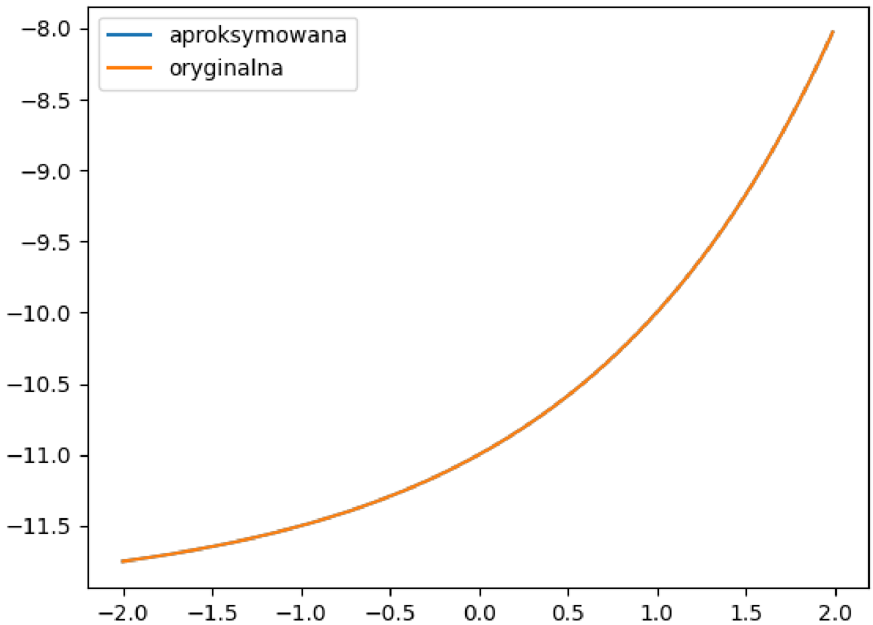
Wielomian $0.0002774x^{10} + 0.00297x^9 + 0.01224x^8 + 0.02365x^7 + 0.02026x^6 + 0.007069x^5 + 0.01172x^4 + 0.02262x^3 + 0.01617x^2 + 0.00623x + 0.0018$
Błąd 0.00016790427820792905

Dla tego samego przedziału i wybrania stopnia wielomianu 5



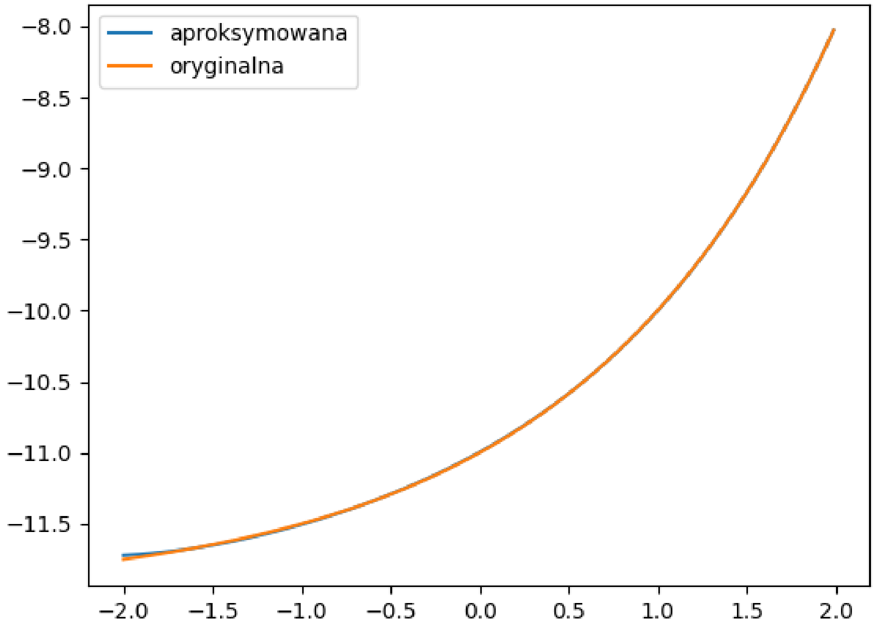
Wielomian $0.01017x^5 + 0.05337x^4 + 0.07582x^3 + 0.007233x^2 - 0.02355x + 0.001953$
Błąd 0.007379892452299006

5. $2^x - 12$
Wyznaczenie wielomianu za pomocą ustawienia maksymalnego błędu 0.001, przedział [-2, 2]



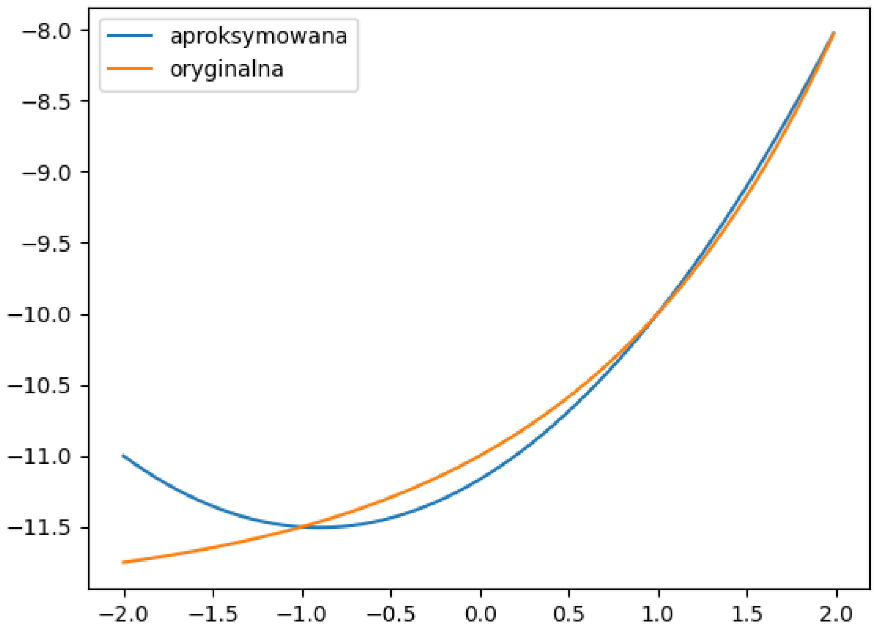
Wielomian $0.0001987x^6+0.001412x^5+0.00942x^4+0.05541x^3+0.2405x^2+0.6932x-11$

Dla tego samego przedziału i wybrania stopnia wielomianu 4



Wielomian $0.01363x^4+0.05963x^3+0.2294x^2+0.6918x-11$
Błąd 0.0032538970685202216

Dla tego samego przedziału i wybrania stopnia wielomianu 2



Wielomian $0.4167x^2+0.75x-11.17$

Błąd 0.14709776345838385

5. Wyniki

Funkcja	stopień wielomianu	dokładność
2cos(x+1)	8	<0.001
$x^2 + 5x + 3$	2	1.41*10^{-15}
2cos(x$^2 + 5x + 1$)	13	<0.001
$2^{(x2+5x+9)}$	14	<0.0001
$2^x - 12$	6	<0.001

Funkcja	stopień wielomianu	dokładność
2cos(x+1)	2	1.33
2cos(x+1)	4	1.17
$x^2 + 5x + 3$	2	1.41*10^{-15}
2cos(x$^2 + 5x + 1$)	5	0.28
2cos(x$^2 + 5x + 1$)	10	0.00548
$2^{(x2+5x+9)}$	10	0.000168
$2^{(x2+5x+9)}$	5	0.00738
$2^x - 12$	4	<0.00325
$2^x - 12$	2	<0.147

6. Dyskusja

Dla wielomianu metoda wykazała taki sam stopień wielomianu aproksymującego jak dany wielomian, dokładność w tym przypadku jest bardzo duża. W przypadku funkcji $2cos(x + 1)$ i $2^x - 12$ stopień jest wyższy przy zachowaniu tej samej dokładności. Dla pozostałych najbardziej złożonych funkcji oraz przy większej dokładności, stopień jest wysoki.

7. Wnioski

Dla wielomianu metoda wykaże stopień wielomianu aproksymującego taki sam jak danego wielomianu, błąd wtedy będzie minimalną wartością.Wraz ze wzrostem złożenia funkcji stopień wielomianu aproksymującego będzie wyższy. To samo tyczy się również dokładności wyniku , im wyższa zażądana dokładność tym wyższy otrzymany stopień.

Literatura

[1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LaTeX2e*, 2007, dostępny online. `https://ctan.org/tex-archive/info/lshort/polish/lshort2e.pdf`.

https://ftims.edu.p.lodz.pl/pluginfile.php/162464/mod$_{r}esource/content/1/Metody_{n}umerycz$
$https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_{C}zebyszewa$
$https://pl.wikipedia.org/wiki/Wzy_{C}zebyszewa$