متریک $Lemaitre - Tolman - Bondi$

معین درخشان ۹۸۱۰۰۸۰۴
آرتین خانعلی ۹۸۱۰۰۷۸۶

۹ تیر ۱۴۰۲

۱ مقدمه

متریک FRW برای جهانی همگن و همسانگرد تعریف شده است و با تقریب خوبی با داده‌هایی که تا به حال داشته ایم همخوانی داشته است. دو پارامتر اصلی در این متریک H و Ω هستند که به صورت مستقیم اندازه‌گیری نمی‌شوند و صرفا از نوری که از مخروط نوری گذشته به ما می‌رسد، استنتاج می‌شوند. در این مدل سرخ‌گرایی (z) و ضریب مقیاس(a) از رابطهٔ $z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1$ به هم مربوط می‌شوند. تا اواخر دهه ۹۰ میلادی، تفسیر FRW از داده‌های رصدی نشان می‌داد که $\Omega \approx \Omega_M$ و ما در جهانی ماده-غالب به‌سر می‌بریم.
داده های اخیر مقادیر مختلفی برای Ω_M را نشان میدهند:

$$Cosmic\ microwave\ background : \Omega_M \sim 1$$

$$Galaxy\ surveys : \Omega_M \sim 0.3$$

$$Type\ Ia\ supernovae : \Omega_M \sim 0$$

این اختلاف منجر به معرفی مفهوم جدیدی در کیهان‌شناسی شد: ثابت کیهان‌شناسی Λ یا انرژی خلأ در معادله انیشتین Ω_Λ. مدل ΛCDM با اینکه می‌تواند به خوبی داده‌های رصدی و انبساط تندشوندهٔ کیهان را توجیه کند، اما هیچ تئوری دقیقی در رابطه با اندازه و مقدار Ω_Λ وجود ندارد.

با توجه به اینکه معادلات انیشتین غیرخطی‌اند، ناهمگنی‌های کوچک با تمرکز چگالی بالا می‌توانند تحول کیهانی که مشاهده می‌کنیم را توضیح دهند که با اختلالات درنظر گرفته شده در FRW بدست نمی‌آید. این سوال مطرح می‌شود که آیا واقعا فرض همگنی در بدست‌آوردن متریک FRW یک ساده‌سازی افراطی است؟
نور در عبور از ناهمگنی‌های کیهانی، مقدار متوسط H را حس نمی‌کند و در واقع واریانس آن را حس می‌کند. اگر H به طور یکنواخت در مقیاس‌های $1000Mpc$ تغییر کند، دیدگاه ما نسبت به سرخ‌گرایی ابرنواخترها نیاز به تغییر خواهد داشت؛ لذا ممکن است ما در جهان در

مکانی باشیم که H به طور میانگین بیشتر از سایر نقاط باشد و اختلاف روشنایی ابرنواخترهای نزدیک و دور بدون نیاز به انرژی تاریک قابل توجیه خواهد بود.

حال به معرفی متریکی جامع تری از FRW می‌پردازیم که فرض همسانگردی را داراست ولی لزوما جهان را همگن در نظر نمی‌گیرد.

۲ متریک $Lemaitre-Tolman-Bondi$

با فرض یک جهان ماده غالب همسانگرد که دارای ناهمگنی‌های شعاعی از دید ناظر(ما) که در مرکز است $(x^i=0)$ و انتخاب مختصات همراه $(\frac{dx^i}{dt}=0)$ می‌توان المان طول را به شکل زیر نوشت:

$$ds^2=-dt^2+X^2(r,t)dr^2+A^2(r,t)(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{۱}$$

بدین صورت متریک همگن FRW در شرایط زیر، حالت خاص متریک جدیدمان خواهد بود:

$$X(r,t)\rightarrow\frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}\ ,\ A(r,t)\rightarrow a(t)r \tag{۲}$$

تانسور انرژی تکانه به صورت زیر است:

$$T^{\mu}_{\ \nu}=-\rho_M(r,t)\delta^{\mu}_0\delta^0_{\nu}-\rho_\Lambda\delta^{\mu}_{\ \nu} \tag{۳}$$

که در آن $\rho_M(r,t)$ چگالی ماده و ρ_Λ انرژی خلا می باشد.

با جایگذاری(۱) و(۳) در معادلهٔ انیشتین $G^{\mu}_{\nu}=8\pi GT^{\mu}_{\nu}$ خواهیم داشت:

$$-2\frac{A''}{AX^2}+2\frac{A'X'}{AX^3}+2\frac{\dot{X}\dot{A}}{AX}+\frac{1}{A^2}+\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2-\left(\frac{A'}{AX}\right)^2=8\pi G(\rho_M+\rho_\Lambda) \tag{۴}$$

$$\dot{A}'=A'\frac{\dot{X}}{X} \tag{۵}$$

$$2\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{1}{A^2}+\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2-\left(\frac{A'}{AX}\right)^2=8\pi G\rho_\Lambda \tag{۶}$$

$$-\frac{A''}{AX^2}+\frac{\ddot{A}}{A}+\frac{\dot{A}}{A}\frac{\dot{X}}{X}+\frac{A'X'}{AX^3}+\frac{\ddot{X}}{X}=8\pi G\rho_\Lambda \tag{۷}$$

که از این چهار معادله فقط ۳ معادله مستقل از هم می‌باشند.
با حل معادله (۵) خواهیم داشت:

$$X(r,t) = C(r)A'(r,t) \tag{۸}$$

که در آن $C(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-k(r)}}$ است.
حال می‌توان متریک LTB را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(A'(r,t))^2}{1-k(r)}dr^2 + A^2(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{۹}$$

دو معادله مستقل را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\frac{\dot{A}^2 + k(r)}{A^2} + \frac{2\dot{A}\dot{A}' + k'(r)}{AA'} = 8\pi G(\rho_M + \rho_\Lambda) \tag{۱۰}$$

$$\dot{A}^2 + 2A\ddot{A} + k(r) = 8\pi G\rho_\Lambda A^2 \tag{۱۱}$$

با انتگرال گیری از معادله (۱۱) بدست می آید:

$$\frac{\dot{A}^2}{A^2} = \frac{F(r)}{A^3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda - \frac{k(r)}{A^2} \tag{۱۲}$$

با جایگذاری (۱۲) در (۱۰) خواهیم داشت:

$$\frac{F'}{A'A^2} = 8\pi G\rho_M \tag{۱۳}$$

همچنین با ترکیب معادلات (۱۰) و (۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{2}{3}\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{1}{3}\frac{\ddot{A}'}{A'} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_M - 2\rho_\Lambda) \tag{۱۴}$$

در معادله بالا شتاب کل معادل با سمت چپ معادله می‌باشد که همواره منفی است مگراینکه $\rho_\Lambda > \frac{\rho_M}{2}$. با این‌حال نشاندهندهٔ این نیست که لزوما $\ddot{A}' < 0$ یا $\ddot{A} < 0$ باشند.
$F(r)$ و $k(r)$ که شرایط مرزی ما هستند می‌بایست با فیزیک دقیق ناهمگنی جهان توصیف شوند.
با درنظر داشتن متریک FRW که منجر به تعریف H به شکل زیر می‌شد،

$$H^2(t) \equiv \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \tag{۱۵}$$

$$H^2(t) = H_0^2(t)\left[\Omega_M\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_\Lambda-\Omega_M)\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] \qquad (۱۶)$$

می‌توان $H(r,t)$ و $F(r)$ و $k(r)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$H(r,t) \equiv \frac{\dot{A}(r,t)}{A^(r,t)} \qquad (۱۷)$$

$$F(r) \equiv H_0^2(r)\Omega_M(r)A_0^3(r) \qquad (۱۸)$$

$$k(r) \equiv H_0^2(r)(\Omega_M(r)+\Omega_\Lambda(r)-1)A_0^2(r) \qquad (۱۹)$$

با این تعاریف پارامتر هابل وابسته به مکان به شکل زیر خواهد بود:

$$H^2(r,t) = H_0^2(r)\left[\Omega_M(r)\left(\frac{A_0}{A}\right)^3 + \Omega_\Lambda(r) + \Omega_c(r)\left(\frac{A_0}{A}\right)^2\right] \qquad (۲۰)$$

که در آن:

$$\Omega_c(r) \equiv 1 - \Omega_\Lambda(r) - \Omega_M(r)$$

از مقایسه معادلات (۱۵) و (۲۰) به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که تفاوت پارامتر هابل در دو متریک صرفا اضافه‌شدن وابستگی مکانی به معادلات است. ناهمگنی مورد بحث به دو شکل در این جهان وجود دارد؛ یکی ناهمگنی در توزیع ماده و دیگری ناهمگنی در نرخ انبساط. با اینکه دینامیک هر دو توسط معادلهٔ انیشتین به هم مربوط هستند ولی به عنوان شرایط مرزی از هم مستقل‌اند.

با این توصیفات جهان می‌تواند از یک بیگ بنگ ناهمگن بوجود آمده باشد که یعنی بیگ بنگ در مکان‌های مختلف و در زمان‌های مختلف رخ داده است! این احتمال بوجود می آید که نتیجه چنین جهانی، یک جهان همگن باشد که امروز در آن هستیم. این مدل بدون نیاز به درنظرگرفتن انرژی تاریک به خوبی با داده‌های ابرنواختر همخوانی دارد. حال اگر $\Omega_M = const.$ باشد، ρ_M همچنان توسط $H_0(r) \neq const.$ یک وابستگی فضایی خواهد داشت که می‌توان به‌طور کلی نوشت: $\Omega_M H_0^2(r) = const.$

به سبک متریک FRW که a در زمان حال می‌توانست هر مقدار مثبتی داشته باشد، برای متریک LTB هم می‌توان گفت که $A(r,t)$ می‌تواند هر تابع معکوس‌پذیر بی نهایت‌بار مشتق‌پذیری باشد. برای مثال:

$$A(r,t_0) = r$$

برای به‌دست‌آوردن رابطهٔ $A(r,t)$ با r و t می‌توان از معادلهٔ (۲۰) انتگرال گرفت:

$$x \equiv \frac{A}{A_0}$$

$$t - t_0 = \frac{1}{H_0(r)} \int_{\frac{A(r,t)}{A(r,t_0)}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_M(r)x^{-1} + \Omega_\Lambda(r)x^2 + \Omega_c(r)}} \qquad (۲۱)$$

حال برای هر نقطه از فضا با (t,r,θ,ϕ) می‌توان $A(r,t)$ را محاسبه کرد. بنابراین متریک را می‌توان برای آن نقطه با داشتن ناهمگنی مربوطه تعریف کرد و به محاسبه سایر کمیت‌ها پرداخت.

۳ ناهمگنی و فاصله سنجی

برای اینکه بتوانیم جهان ناهمگن LTB را با داده‌ها بسنجیم نیاز به رابطه ای بین z و F (شار انرژی) داریم، لذا باید حرکت نور در یک محیط ناهمگن را بررسی کنیم. به علت تقارن فرض‌شده، برای نور دریافتی می‌توان ژئودزی‌هایی با $d\theta = d\phi = 0$ در نظر گرفت. از طرفی برای نور $ds^2 = 0$. لذا رابطهٔ (۹) به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{dt}{du} = -\frac{dr}{du}\frac{A'(r,t)}{\sqrt{1-k(r)}} \qquad (۲۲)$$

که در آن u پارامتر انحناست و علامت منفی نشان دهنده این است که ما پرتو های دریافتی نور را مطالعه می کنیم. حال دو پرتو نور را درنظر بگیرید که جواب معادله (۲۲) باشد. $t_1 = t(u)$ و $t_2 = t(u) + \lambda(u)$ با جایگذاری این جواب ها در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{d}{du}t_1 = \frac{dt(u)}{du} = -\frac{dr}{du}\frac{A'(r,t)}{\sqrt{1-k(r)}} \qquad (۲۳)$$

$$\frac{d}{du}t_2 = \frac{dt(u)}{du} + \frac{d\lambda(u)}{du} = -\frac{dr}{du}\frac{A'(r,t)}{\sqrt{1-k(r)}} + \frac{d\lambda(u)}{du} \qquad (۲۴)$$

$$\frac{d}{du}t_2 = -\frac{dr}{du}\frac{A'(r,t(u)+\lambda(u))}{\sqrt{1-k(r)}} = -\frac{dr}{du}\frac{A'(r,t) + \dot{A}'(r,t)\lambda(u)}{\sqrt{1-k(r)}} \qquad (۲۵)$$

که در معادله آخر از بسط تیلور استفاده شد. با ترکیب معادلات (۲۴) و (۲۵) خواهیم داشت:

$$\frac{d\lambda(u)}{du} = -\frac{dr}{du}\frac{\dot{A}'(r,t)\lambda(u)}{\sqrt{1-k(r)}} \qquad (۲۶)$$

با مشتق گرفتن از سرخ گرایی($z \equiv (\lambda(0) - \lambda(u))/\lambda(u)$) نسبت به u خواهیم داشت:

$$\frac{dz}{du} = -\frac{d\lambda(u)}{du}\frac{\lambda(0)}{\lambda^2(u)} = \frac{dr}{du}\frac{(1+z)\dot{A}'(r,t)}{\sqrt{1-k(r)}} \qquad (۲۷)$$

با ترکیب معادلات (۱۹) ، (۲۲) و (۲۷) به روابط زیر می رسیم:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{du}.\frac{du}{dz} = \frac{-A'(r,t)}{(1+z)\dot{A}'(r,t)} \qquad (۲۸)$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dr}{du}.\frac{du}{dz} = \frac{\sqrt{1+H_0^2(r)(1-\Omega_\Lambda(r)-\Omega_M(r))A_0^2(r)}}{(1+z)\dot{A}'(r,t)} \qquad (۲۹)$$

می دانیم که ارتباط فاصله درخشندگی با شار انرژِی و توان کل گسیل شده توسط منبع (L) به صورت زیر است:

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

پس فاصله درخشندگی به صورت زیر است:

$$d_L(z) = (1+z)^2 A(r(z), t(z)) \qquad (۳۰)$$

و به همین ترتیب فاصله زاویه ای قطری برابر خواهد بود با:

$$d_A(z) = A(r(z), t(z)) \qquad (۳۱)$$

۴ جمع‌بندی

در مدل FRW نرخ انبساط باید تندشونده باشد تا با داده‌های ابرنواخترها همخوانی داشته باشد و برای توجیه شتابداربودن آن، انرژی تاریک را معرفی کردیم.این بدین معناست که مشتق دوم ضریب مقیاس در FRW باید مثبت باشد.این درحالی است که در جهان LTB مشاهدات تحت تاثیر تغییرات همه کمیت‌های دینامیکی در امتداد مخروط نور گذشته هستند، نه فقط تغییرات زمانی.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dt}{dr}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{A'(r,t)}{\sqrt{1-k(r)}}\frac{\partial}{\partial r} \approx \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \qquad (۳۲)$$

معادلهٔ بالا بدین معناست که از دید ناظر، مشتق در جهت $r-$ معادل مشتق در جهت مثبت زمان است. این قضیه تا حدودی با شهودمان همخوانی دارد؛ چرا که وقتی به یک منبع نگاه می‌کنیم در واقع به طور هم‌زمان به گذشته (در امتداد محور t منفی) و به یک فاصلهٔ مکانی

(در امتداد محور r مثبت) نگاه می‌کنیم. حال برای اینکه H در امتداد مخروط نور گذشته به سمت ما افزایش یابد، $H_0(r)$ باید با افزایش r کاهش یابد. نتیجتاً برای سنجش داده‌ها با این ایده باید به دنبال مدل‌هایی از جهان LTB باشیم که $H'(r) < 0$.

به عنوان کلام آخر باید گفت که مدل FRW با اینکه از بسیاری از آزمون‌ها سربلند بیرون آمده و مطابقت خوبی با داده‌های متنوعمان دارد ولی همانطور که ذکر شد، جهان همگن امروزی می‌تواند بخشی‌از/نتیجهٔ جهان و بیگ بنگی ناهمگن باشد؛ لذا بررسی مدل‌های LTB که شرایط پیش‌تر ذکرشده را پوشش می‌دهند، بی‌لطف نخواهد بود.