



برآوردگرهای روش گشتاورهای تعمیم یافته

غلامرضا کشاورز حداد

اقتصادسنجی ۲

20 سپتمبر 2021

مقدمه: روش برآورد گشتاورهای تعمیم یافته چیست؟

- روش برآورد GMM دربر گیرنده تخمین زنهای گشتاوری و تخمین زنهای گشتاورهای تعمیم یافته است.
- نشان داده می شود که:
 - روش های برآورد حداقل مربعات معمولی
 - متغیرهای ابزاری
 - حداقل مربعات تعمیم یافته
 - روش برآورد حداقل مربعات دو مرحله ای
 - حداکثر استنمایی
- حالت خاصی از روش برآورد GMM است.

روش تخمین زنهای گشتاورهای تعمیم یافته

- فرض کنید مجموعه ای از مشاهدات مربوط به متغیر تصادفی z که قانون احتمال آن به پارامترهای ناشناخته θ بستگی دارد، در اختیار باشد.
- یک رهیافت رایج برآورد θ براساس اصل حداکثر راستنمایی است، که در آن تخمین زن به گونه ای اختیار می شود که برای آن مقدار از تخمین زن انتخاب شده، احتمال مشاهده شدن داده ها حداکثر گردد.
- روش GMM روشی دیگر برای برآورد پارامتر θ است.
- بیان کلی GMM توسط هانسن (1982) ابداع و ارایه شده است.

روش گشتاورهای تعمیم یافته

- روش GMM شکل گسترش یافته ای از روش گشتاورها است MM که در آن تعداد شرط های متعامد بودن (تعداد گشتاورها) بیشتر از تعداد پارامترها است.
- وجود شرط های اضافه بر تعداد پارامترها سبب افزایش کارایی تخمین زن ها و نیز پدید آوردن جنبه های جدیدی (از جمله ملاحظات نظری) می گردد که می تواند آزمون گردد.
- بسیاری از روش های برآورد سنتی نظیر حداقل مربعات معمولی LS، متغیرهای ابزاری IV و حداکثر راستنمایی MLE حالت های خاصی از GMM هستند، که در آن تعداد گشتاورها دقیقاً برابر با تعداد پارامترهای مجهول هستند.

شرط های گشتاوری در GMM

■ فرض کنید به تعداد q شرط گشتاوری غیرشرطي داشته باشیم:

$$E(\mathbf{m}(\mathbf{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) = \begin{pmatrix} E(m_1(\mathbf{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \\ E(m_2(\mathbf{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \\ \vdots \\ E(m_q(\mathbf{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (1)$$

■ که در آن، ما علاقمند به برآورد بردار $(K \times 1)$ پارامتر $\boldsymbol{\beta}$ با $q \leq K$ هستیم.

■ مقدار واقعی بردار پارامتر برابر (مقدار جامعه) برابر $\boldsymbol{\beta}_0$ است. فرض را براین قرار می دهیم که \mathbf{w}_t یک فرآیند (بردار) مانا است.

شرط های گشتاوری در GMM

- میانگین نمونه، یا شرطهای گشتاور نمونه‌های، ارزشیابی شده در بعضی از مقادیر β عبارت است از:

$$\bar{m}(\beta) = (1/T) \sum_{t=1}^T m_1(w_t, \beta_0) \quad (2)$$

- میانگین نمونه ای $\bar{m}(\beta)$ برداری از توابعی از متغیرهای تصادفی است، بنابراین خود آنها نیز متغیرهای تصادفی هستند و به نمونه استفاده شده بستگی دارند.

شرط های گشتاوری در روش گشتاورها MM

مثال

شرطهای گشتاوری برای مدل سری زمانی MA(1)

روش گشتاورها برای فرایند MA(1) در یک فرآیند MA(1) میانگین متحرک $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ ، واریانس و نیز اتوکواریانس مرتبه یک این فرآیند به صورت زیر بدست میآید.

$$E(y_t) = 0 \quad E(y_t^2) = E[\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}]^2 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta^2)$$

$$E(y_t y_{t-1}) = E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})] = \sigma_\varepsilon^2 \theta$$

همتهای نمونه های این گشتاورهای جامعه عبارتند از:

$$var(y_t) = \sum_{t=1}^T y_t^2, \quad cov(y_t, y_{t-1}) = \sum_{t=1}^T y_t y_{t-1}$$

آنگاه شرطهای شرطهای گشتاوری به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sum_{t=1}^T y_t^2 - \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta^2) = 0$$

$$\sum_{t=1}^T y_t y_{t-1} - \sigma_\varepsilon^2 \theta^2 = 0$$

شرط های گشتاوری در روش گشتاورها MM

مثال

شرطهای گشتاوری برای IV/2SLS

- مدل خطی را در نظر بگیرید. که در آن: x_t و β بردارهای $1 \times K$ است. فرض کنید Z_t یک بردار $q \times 1$ باشد.
- شرطهای گشتاوری و همتهای نمونه ای آن عبارت است از:

$$\mathbf{0}_{q \times 1} = E z_t u_t = E[z_t(y_t - x_t' \beta)]$$

$$\overline{m}(\beta) = (1/T) \sum_{t=1}^T z_t(y_t - x_t' \beta_0)$$

یا در شکل ماتریسی $Z'(Y - X\beta)/T$

- اگر $q=k$ باشد، تخمین زن بالا برای بردار β همان تخمین زنهای IV.
- و اگر $Z_t = x_t$ باشد، تخمین زنهای OLS بدست می آیند.

مقایسه نتایج OLS و GMM

مثال

کدهای استاتا

*OLS estimator and GMM are equivalent if instruments
*and instrumented covariates are the same

```
regress mpg gear_ratio turn
```

```
gmm (mpg - {b1}*gear_ratio - {b2}*turn - {b0}),  
    instruments(gear_ratio turn)
```

مقایسه نتایج OLS و GMM

| Source | SS | df | MS | Number of obs = | 74 |
|----------|------------|----|------------|-----------------|--------|
| Model | 1339.68678 | 2 | 669.843392 | F(2, 71) = | 43.09 |
| Residual | 1103.77268 | 71 | 15.546094 | Prob > F = | 0.0000 |
| | | | | R-squared = | 0.5483 |
| | | | | Adj R-squared = | 0.5355 |
| Total | 2443.45946 | 73 | 33.4720474 | Root MSE = | 3.9429 |

| mpg | Coef. | Std. Err. | t | P> t | [95% Conf. Interval] | |
|------------|-----------|-----------|-------|-------|----------------------|-----------|
| gear_ratio | 3.032884 | 1.372978 | 2.21 | 0.030 | .2952433 | 5.770524 |
| turn | -.7330502 | .1424009 | -5.15 | 0.000 | -1.01699 | -.4491108 |
| _cons | 41.21801 | 8.990711 | 4.58 | 0.000 | 23.29104 | 59.14498 |

Number of parameters = 3

Number of moments = 3

Initial weight matrix: Unadjusted

Number of obs = 74

GMM weight matrix: Robust

| | Coef. | Robust Std. Err. | z | P> z | [95% Conf. Interval] | |
|-----|-----------|---------------------|-------|-------|----------------------|-----------|
| /b1 | 3.032884 | 1.501664 | 2.02 | 0.043 | .0896757 | 5.976092 |
| /b2 | -.7330502 | .117972 | -6.21 | 0.000 | -.9642711 | -.5018293 |
| /b0 | 41.21801 | 8.396739 | 4.91 | 0.000 | 24.76071 | 57.67532 |

Instruments for equation 1: gear_ratio turn _cons

شرط های گشتاوری در MM

مثال

شرط های گشتاوری برای MLE با فرض $k=q$

- تخمین زنهای روش حداکثر راستنمایی، لگاریتم تابع راستنمایی، را نسبت به پارامترهای β حداکثر می سازد، که این حداکثر سازی مستلزم برقراری شرطهای مرتبه اول

$$(1/T) \sum_{t=1}^T \partial \ln L(w_t, \beta) / \partial \beta = 0$$

است.

- یک شرط منتظم بودن، برای MLE این است که $E \partial \ln L(w_t, \beta) / \partial \beta = 0$ باشد.

$$\partial \ln L(\beta, \sigma^2 | \mathbf{w}) / \partial \beta = -2/\sigma^2 (-\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta) = \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}_{K \times 1}$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان

■ فرض بفرمایید $q > k$ باشد، دو راه حل می توتند وجود داشته باشد:

- ① نادیده گرفتن پاره ای از گشتاورها. پیامد این روش کاهش کارایی برآوردگرها و نادیده گرفتن دلالت های نظری پایه های مدل نظری است.
- ② بکار گیری این دانش نظری (همه گشتاورها) در برآورد کل k پارامتر مربوط به مدل نظری. چگونه؟

برآوردگر روش گشتاورهای تعمیم یافته

این روش برآورد $\hat{\beta}$ ، صورت درجه دوم وزنی زیر را حداقل می سازد.

$$J = \begin{bmatrix} \bar{m}_1(\beta) \\ \vdots \\ \bar{m}_q(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1q} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{q1} & \cdots & w_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m}_1(\beta) \\ \vdots \\ \bar{m}_q(\beta) \end{bmatrix} = \bar{m}(\beta)' W \bar{m}(\beta)$$

که در آن $\bar{m}(\beta)$ میانگین نمونه ای $m(w_t, \beta)$ و W یک ماتریس وزنی متقارن و با ساختار مثبت معین با ابعاد $q \times q$ است.

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

نکته ۱: مشتق گیری از توابع برداری غیرخطی. فرض کنید بردار $y_{n \times 1}$ تابعی از بردار $x_{m \times 1}$ باشد.

$$[y_1 y_2 \cdots y_n]' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)]'$$

آنگاه $\partial y / \partial \mathbf{x}'$ یک ماتریس $n \times m$ است.

$$\partial y / \partial \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \partial f_1(x) / \partial \mathbf{x}' \\ \vdots \\ \partial f_n(x) / \partial \mathbf{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1(x) / \partial x_1 & \cdots & \partial f_1(x) / \partial x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n(x) / \partial x_1 & \cdots & \partial f_n(x) / \partial x_m \end{bmatrix}$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان

نکته ۲: هنگامی که $y = Ax$ است، و در آن A یک ماتریس $n \times m$ می باشد، آنگاه $f_i(x)$ در
نکته (۱) یک تابع خطی خواهد بود و بدست می آوریم که:

$$\partial y / \partial x' = \partial(Ax) / \partial x' = A$$

نکته ۳: به عنوان یک حالت خاصی از نکته (۲)، هنگامی که $y = z'x$ بوده و در آن هم z و هم x بردار باشند، آنگاه زیرا z' همان نقش A را ایفا می کند.

نکته ۴: مشتق گیری ماتریسی از صورت های درجه دوم. فرض کنید $x_{n \times 1}$ ، $f(x)$ و $A_{m \times m}$ و متقارن باشد، آنگاه

$$\partial[f(x)'Af(x)]/\partial x = 2(\partial f(x)/\partial x')'Af(x)$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

نکته ۵: اگر $f(x) = x$ آنگاه $\partial f / \partial x' = I$ ، آنگاه $\partial(x'Ax) = 2Ax$ برای بردار $\hat{\beta}_{K \times 1}$ داریم:

$$\frac{\partial [\bar{m}(\beta)' W \bar{m}(\beta)]}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \partial \bar{m}_1(\hat{\beta} / \partial \beta_1) & \cdots & \partial \bar{m}_1(\hat{\beta} / \partial \beta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial \bar{m}_q(\hat{\beta} / \partial \beta_1) & \cdots & \partial \bar{m}_q(\hat{\beta} / \partial \beta_k) \end{bmatrix}' \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1q} & \cdots & w_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \bar{m}_1(\hat{\beta}) \\ \vdots \\ \partial \bar{m}_q(\hat{\beta}) \end{bmatrix} \\ = \partial \bar{m}(\hat{\beta})_{K \times q} / \partial \beta']'_{q \times q} W_{\bar{m}_{q \times 1}}(\hat{\beta})$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

رگرسیون ساده

$$y_t = x_t\beta_0 + \varepsilon_t$$

$$\overline{m}(\beta) = (1/T) \sum_{t=1}^T x_t(y_t - x_t\beta)$$

$$J = W[(1/T) \sum_{t=1}^T x_t(y_t - x_t\beta)]^2$$

روشن است که اسکالر W در این بهینه سازی نقشی ندارد.

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

مثال

ادامه روش IV/2SLS

$$\overline{m}(\beta)' W \overline{m}(\beta) = [(1/T) \sum_{t=1}^T z_t (y_t - x_t' \beta)]' W [(1/T) \sum_{t=1}^T z_t (y_t - x_t' \beta)]$$

- اگر $q = K$ باشد، آنگاه مدل دقیقاً مشخص است.
- بنابراین در واقع برآوردگر $\hat{\beta}$ می تواند با قرار دادن تمام شرطهای گشتاوری برابر با صفر بدست آید.
- آنگاه تخمین زن بدست آمده تخمین زنهای IV خواهند بود، یعنی

$$\hat{\beta}_{IV} = [(1/T) \sum_{t=1}^T z_t x_t']^{-1} [(1/T) \sum_{t=1}^T z_t y_t] = \hat{\Sigma}_{zx}^{-1} \hat{\Sigma}_{zy}$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

مثال:

$$\mathbf{0} = [(1/T) \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t (y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\beta}_{IV})]$$

که در آن

$$\hat{\Sigma}_{zx} = \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \mathbf{x}_t' / T$$

و بطور مشابه برای هر یک از گشتاورهای دوم ماتریس ها، اگر $\mathbf{z}_t = \mathbf{x}_t$ باشد. آنگاه:

$$\hat{\beta}_{LS} = \hat{\Sigma}_{xx}^{-1} \hat{\Sigma}_{xy}$$

مساله تعریف GMM

- فرض کنید $w_t = (y_t, x_t')'$ یک بردار از متغیرهای مدل و z_t متغیرهای ابزاری باشند.
شرط گشتاوری را در نظر بگیرید

$$E[m(w_t, z_t, \theta)] = 0$$

- که در آن θ یک بردار $1 \times K$ و $m(\cdot)$ یک تابع برداری R بعدی است.
شرایط گشتاوری نمونه مربوطه را در نظر بگیرید:

$$\bar{m}_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m(w_t, z_t, \theta) = 0$$

- چه زمانی می‌توان گشتاورهای نمونه q را برای تخمین k پارامتر θ بکار برد؟

شرط رتبه ای

اگر $q < k$ باشد. هیچ راه حل واحدی برای $\bar{m}_T(\theta) = 0$ وجود ندارد و پارامترها قابل شناسایی نیست.

اگر $q = k$ باشد راه حل واحد برای $\bar{m}_T(\theta) = 0$ وجود دارد و شناسایی دقیق است.

این مورد یک تخمین زن MM است. IV OLS,

باید اشاره کرد که، $\bar{m}_T(\theta) = 0$ یک مساله غیرخطی با راه حل عددی است.

اگر $q > k$ تعداد معادلات بیشتر از پارامترهاست و یک وضعیت بیش از حد مشخص رخ می دهد. هیچ راه حل عمومی وجود ندارد. ($Z'X$ یک ماتریس $q \times k$ است).

θ ای را انتخاب می کنیم و $\bar{m}_T(\theta)$ را برابر صفر قرار می دهیم

تخمین GMM

- قصد داریم گشتاورهای q $\bar{m}_T(\theta)$ را تا حد ممکن به صفر متمایل سازیم.
- فرض کنید یک ماتریس $R \times R$ متقارن و معین مثبت موزون W_T داریم. به این ترتیب فرم درجه دوم آن را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$J_T(\theta) = \bar{m}_T(\theta)' W_T \bar{m}_T(\theta) (1 \times 1)$$

تخمین زن GMM به عنوان برداری که $J_T(\theta)$ را حداقل می سازد تعریف می شود. برای مثال:

$$\hat{\theta}_{GMM}(W_T) = \arg \hat{\min} \{ \bar{m}_T(\hat{\theta})' W_T \bar{m}_T(\hat{\theta}) \}$$

- ماتریس W_T می گوید که چه وزنی به هر کدام از شرایط گشتاوری داده شود. W_T متفاوت تخمین زن های متفاوتی را بدست می دهد،

$$\hat{\theta}_{GMM}(W_T)$$

GMM با هر ماتریس وزنی W_T سازگار است. انتخاب بهینه W_T کدام است؟

تخمین بهینه GMM

- تعداد q گشتاورهای نمونه (که متغیرهای تصادفی هستند) $\bar{m}_T(\theta)$ ، تخمین زن های $E[m(.)]$ هستند.

قانون اعداد بزرگ دلالت بر این دارد که:

$$\bar{m}_T(\theta) \rightarrow E[m(.)] \quad \text{for } T \rightarrow \infty$$

قضیه حد مرکزی نشان می دهد که:

$$\sqrt{T}\bar{m}_T(\theta) \rightarrow N(0, S)$$

که در آن S واریانس مجانبی گشتاوری $\sqrt{T}.\bar{m}_T(\theta)$ است.

- گشتاورهای با واریانس کوچک باید وزنهای بالایی داشته باشند. ماتریس وزن بهینه برای GMM یک ماتریس W_T^{opt} است به گونه ای که:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W_T^{opt} = W^{opt} = S^{-1}$$

تخمین بهینه GMM

- بدون وجود خود همبستگی بین گشتاورهای نمونه ای، یک تخمین زن طبیعی \hat{S} از S می شود:

$$\begin{aligned}\hat{S} &= V[\sqrt{T} \cdot \bar{m}_T(\theta)] = T \cdot V[\bar{m}_T(\theta)] \\ &= T \cdot V\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m(w_t, z_t, \theta)\right] \\ &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T m(w_t, z_t, \theta) m(w_t, z_t, \theta)'\end{aligned}$$

دلالت بر این دارد که:

$$W_T^{opt} = \hat{S}^{-1} = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m(w_t, z_t, \theta) m(w_t, z_t, \theta)'\right)^{-1}$$

- همچنین باید اشاره کرد که W_T^{opt} در حالت کلی به θ بستگی دارد.

تخمین در عمل

■ GMM دو مرحله ای (کارا)

۱. ماتریس موزون $W_{[1]}$ را انتخاب می کنیم. برای مثال، $W_{[1]} = I$ یا

$W_{[1]} = (Z'Z)^{-1}$. یک تخمین سازگار را پیدا می کنیم

۲. تخمین بهینه GMM را پیدا می کنیم. $\hat{\theta}_{[1]} = \operatorname{argmin}_{\theta} \bar{m}_T(\theta)' W_{[1]} \bar{m}_T(\theta)$ و اوزان بهینه را تخمین می زنیم. W_T^{opt}

$$\hat{\theta}_{GMM} = \operatorname{argmin}_{\theta} \bar{m}_T(\theta)' W_T^{opt} \bar{m}_T(\theta)$$

■ GMM تکرار شونده

با ماتریس موزون اولیه $W_{[1]}$ شروع می کنیم.

۱. یک تخمین $\hat{\theta}_{[1]}$ را پیدا می کنیم ۲. یک ماتریس موزون جدید را پیدا کرده

$$W_{[2]}^{opt}$$

فرآیند تکرار بین $\hat{\theta}_{[.]}$ و $W_{[.]}^{opt}$ را ادامه می دهیم تا به یکدیگر همگرا شوند.

مثال معروف هانسن سینگلتون

- یک واحد بهینه با تابع مطلوبیت توانی مصرف را در نظر بگیرید $U(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$. شرایط مرتبه اول حداکثرسازی مطلوبیت تنزیل یافته مصرف آتی به شرح زیر است:

$$E \left[\delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1}) - 1 | I_t \right] = 0$$

- که در آن I_t مجموعه اطلاعات در زمان t است.
- فرض کنید انتظارات عقلایی وجود دارد. حال اگر $z_t \in I_t$ در این صورت باید بر امید خطا متعامد باشد،

$$\begin{aligned} & f(C_{t+1}, C_t, r_{t+1}; z_t; \delta, \gamma) \\ &= E \left[\left(\delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1}) - 1 \right) z_t \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- این مورد یک شرط گشتاوری است. ما به حداقل $R = 2$ متغیر ابزاری در z_t نیاز داریم.

GMM خطی و GIVE

■ مدل رگرسیونی خطی با K متغیر توضیحی را در نظر بگیرید.

$$y_t = x'_{1t}\beta_1 + x'_{2t}\beta_2 + \epsilon_t = x'_t\beta + \epsilon_t$$

که در آن $E[x_{1t}\epsilon_t] = 0$ اما متغیرهای در x_{2t} درونزا هستند $E[x_{2t}\epsilon_t] \neq 0$.

■ فرض کنید $R > K$ متغیر ابزاری $z_t = (x'_1, z'_2)$ وجود دارد. به گونه ای که

$$E[z_t\epsilon_t] = E[z_t(y_t - x'_t\beta)] = 0_{(R \times 1)}.$$

شناسایی نیازمند یک همبستگی غیر صفر بین z_{2t} و x_{2t} است. شرایط رتبه ای.

■ گشتاور نمونه

$$\bar{m}_T(\beta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (z_t(y_t - x'_t\beta)) = \frac{1}{T} Z'(Y - X\beta).$$

است. باید اشاره کرد که نمی توان به صورت مستقیم $\bar{m}_T(\beta) = 0$ را حل کرد. $Z'X$ یک ماتریس $R \times K$ است از مرتبه K و قابلیت معکوس پذیری ندارد.

■ بجای آن فرم درجه دوم زیر را حداقل می کنیم

$$\begin{aligned}
 J_T(\beta) &= \overline{m}_T(\beta)' W_T \overline{m}_T(\beta) \\
 &= \left(\frac{1}{T} Z' (Y - X\beta) \right)' W_T \left(\frac{1}{T} Z' (Y - X\beta) \right) \\
 &= \frac{1}{T^2} (Y' Z - \beta' X' Z) W_T (Z' Y - Z' X \beta) \\
 &= \frac{1}{T^2} (Y' Z W_T Z' Y - 2\beta' X' Z W_T Z' Y + \beta' X' Z W_T Z' X \beta).
 \end{aligned}$$

■ برای حداقل کردن $J_T(\beta)$ مشتقات جزئی را گرفته و K معادله را حل می کنیم

$$\frac{\partial J_T(\beta)}{\partial \beta} = 0_{(K \times 1)}$$

■ تخمین زن K GMM معادله را حل می کند.

$$\frac{\partial J_T(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial (T^{-2}(Y'ZW_TZ'Y - 2\beta'X'ZW_TZ'Y + \beta'X'ZW_TZ'X\beta))}{\partial \beta}$$

$$-2T^{-2}X'ZW_TZ'Y + 2T^{-2}X'ZW_TZ'X\beta$$

$$= 0$$

برای مثال:

$$\hat{\beta}_{GMM}(W_T) = (X'ZW_TZ'X)^{-1}X'ZW_TZ'Y$$

■ ماتریس موزون بهینه معکوس واریانس گشتاورهاست. برای مثال:

$$W_T^{opt} = S^{-1}$$

که در آن

$$S = V[\sqrt{T} \cdot \bar{m}_T(\theta)] = \frac{1}{T} V[Z'\epsilon] = \frac{1}{T} E[Z'\epsilon\epsilon'Z] = \frac{1}{T} Z'\Omega Z$$

که $E[\epsilon\epsilon'] = \Omega$

ناهمسانی جزء اخلاص

■ اگر $E[\epsilon\epsilon'] = \Omega = \sigma^2 I$ تخمین زن طبیعی S می شود:

$$\hat{S} = \frac{1}{T} Z' \hat{\Omega} Z = \frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z$$

که در آن $\hat{\sigma}^2$ تخمین زن سازگاری از σ^2 است.

■ پس تخمین زن GMM می شود:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GMM} &= (X' Z \hat{S}^{-1} Z' X)^{-1} X' Z \hat{S}^{-1} Z' Y \\ &= (X' Z (\frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z)^{-1} Z' X)^{-1} X' Z (\frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z)^{-1} Z' Y \\ &= (X' Z (Z' Z)^{-1} Z' X)^{-1} X' Z (Z' Z)^{-1} Z' Y \\ &= \hat{\beta}_{GIVE} = \hat{\beta}_{2SLS} \end{aligned}$$

تحت ناهمسانی تخمین زن GMM بهینه GIVE است.

■ بخاطر آورد که

$$\hat{\beta}_{GMM} \rightarrow N(\beta, \frac{1}{T}(D' W^{opt} D)^{-1})$$

مشتقات جزئی به شکل زیر است:

$$D_{T \times K} = \frac{\partial \bar{m}_T(\beta)}{\partial \beta'} = \frac{\partial (\frac{1}{T} Z' (Y - X\beta))}{\partial \beta'} = -\frac{1}{T} Z' X = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t x_t'$$

■ واریانس می تواند به شکل زیر تخمین زده شود:

$$\begin{aligned} V[\hat{\beta}_{GMM}] &= \frac{1}{T}(D_T' W^{opt} D_T)^{-1} \\ &= \frac{1}{T}((- \frac{1}{T} Z' X)' (\frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z)^{-1} (- \frac{1}{T} Z' X))^{-1} \\ &\quad \hat{\sigma}^2 (X' Z (Z' Z)^{-1} Z' X)^{-1} \end{aligned}$$

که تحت عنوان 2SLS شناخته می شود.

■ آزمون تشخیص به قرار زیر است:

$$\begin{aligned}\xi &= T.\bar{m}_T(\hat{\theta}_{GMM})'\hat{S}^{-1}\bar{m}_T(\hat{\theta}_{GMM}) \\ &= T.\left(\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t z_t\right)' \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{T} \sum_{t=1}^T z_t z_t'\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t z_t\right) \\ &= \left(\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t z_t\right)' (\hat{\sigma}^2 \sum_{t=1}^T z_t z_t')^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t z_t\right) \\ &\rightarrow \chi^2(R - K)\end{aligned}$$

در فرم خطی با آزمون سارگان نشان داده می شود.

■ یک راه ساده برای محاسبه ξ مدنظر قرار دادن رگرسیون زیر است:

$$\hat{\epsilon}_t = z_t' \gamma + residual$$

و آماره آزمون آن به صورت $\xi = T.R^2$ باید محاسبه شود.

ناهمسانی بدون وجود خودهمبستگی

■ در حالتی که ناهمسانی برقرار باشد اما خودهمبستگی وجود نداشته باشد،

$$E[\epsilon\epsilon'] = \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

می توانیم از تخمین زن

$$\hat{S} = \frac{1}{T} Z' \hat{\Omega} Z = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2 z_t z_t'$$

استفاده کنیم.

تنها نیازمند این هستیم که $k \times K$ ماتریس $Z' \Omega Z$ را تخمین بزنیم و نبازی به $T \times T$ ماتریس Ω نداریم.

بدست می آوریم:

$$\beta_{GMM}(\hat{S}^{-1}) = (X' Z \hat{S}^{-1} Z' X)^{-1} X' Z \hat{S}^{-1} Z' Y$$

■ واریانس تخمین زن ها می شود:

$$\begin{aligned}
 V[\hat{\beta}_{GMM}] &= \frac{1}{T}(D_T' W^{opt} D_T)^{-1} \\
 &= \frac{1}{T} \left(\left(-\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t z_t' \right) \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2 z_t z_t' \right)^{-1} \left(-\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t x_t' \right) \right)^{-1} \\
 &\quad \left(\sum_{t=1}^T x_t z_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2 z_t z_t'^{-1} \left(\sum_{t=1}^T z_t x_t' \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

که تخمین زن واریانس سازگار ناهمسان نويز سفید است.

خودهمبستگی

■ $W_T^{opt} = \hat{S}^{-1}$ ماتریس موزون است که

$$\hat{S} = V[\sqrt{T} \cdot \bar{m}_T(\theta)] = T^{-1} V\left[\sum_{t=1}^T (z_t \epsilon_t)\right]$$

■ با خودهمبستگی ما نیازمند بررسی و محاسبه واریانس ها هستیم.
این مورد یا کاربرد تخمین زن های ناهمسان و خود همبسته قابل انجام است. فرض کنید

$$\Gamma_{jR \times R} = cov(z_t \epsilon_t, z_{t-j} \epsilon_{t-j}) = E[(z_t \epsilon_t)(z_{t-j} \epsilon_{t-j})']$$

ماتریس کوواریانس با تاخیر یا لگ j باشد. پس

$$\begin{aligned} T.S &= T^{-1} \{ V(z_t \epsilon_t) + Cov(z_t \epsilon_t, z_{t-1} \epsilon_{t-1}) + Cov(z_t \epsilon_t, z_{t-2} \epsilon_{t-2}) + \dots \\ &\quad + Cov(z_t \epsilon_t, z_{t+1} \epsilon_{t+1}) + Cov(z_t \epsilon_t, z_{t+2} \epsilon_{t+2}) + \dots \} \\ &= T^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma_j \end{aligned}$$

- اگر به این بحث پردازیم که $\Gamma_j = 0$ برای j بزرگتر از تاخیر q است، می توانیم از تخمین زن

$$\hat{S} = T^{-1} \sum_{j=-q}^q \hat{\Gamma}_j$$

استفاده کنیم.
که کوواریانس ها از طریق

$$\hat{\Gamma}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T (z_t \hat{\epsilon}_t)(z_{t-j} \hat{\epsilon}_{t-j})'$$

- تخمین زده می شود.
- \hat{S} بدست آمده ضرورتاً معین مثبت نیست.
- در مقابل کوواریانس ها وزن های کاهنده تخمین زن نیویی وست به خود میگیرد
- تخمین زن کوواریانس HAC همچنین برای OLS قابل کاربرد است.

آزمون فرضیه ها در GMM

فرض را بر این قرار بدهید که بخواهیم S قید خطی $R\beta_0 = r$ با $R_{s \times K}$ و $r^{s \times 1}$ آزمون کنیم، آنگاه تحت فرضیه صفر؛

$$\sqrt{T}(R\hat{\beta} - r) \rightarrow^d N(\mathbf{0}_{s \times 1}, RVR')$$

نکته (8): (توزیع صورتهای درجه دوم): اگر بردار $x_{n \times 1} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ آنگاه $x'\Sigma^{-1}x \sim \chi_n^2$ تحت فرضیه صفر تابع نمونه آزمون والد دارای توزیع متغیر تصادفی چي دو (کای دو) است.

$$T(R\hat{\beta} - r)'(RVR')^{-1}(R\hat{\beta} - r) \rightarrow^d \chi_s^2 \quad (4)$$

آزمون فرضیه ها در GMM

همچنین می توانیم فرضیه قیدهایی بیش از حد مشخص نمایی را نیز آزمون نماییم. شرایط مرتبه اول نشان می دهد که ترکیب خطی از q شرط گشتاوری در $\hat{\beta}$ را بر با صفر می گردند. بنابراین $q - K$ قید بیش از حد مشخص نمایی داریم که در صورت که مدل بطور صحیح برازش شده باشد، باید این قیدها نزدیک به صفر باشند. تحت فرضیه صفر اینکه شرطهای گشتاوری برقرار هستند (بنابراین قیدهایی بیش از حد مشخص نمایی برقرار می شوند) می دانیم که $\sqrt{T}\bar{m}(\beta_0)$ یک متوسط نمونه (مقیاس شده) بوده، و بنابراین (بنابه قضایای حدی مرکزی) دارای یک توزیع نرمال مجانبی است.

بطور خلاصه؛

$$\sqrt{T}\bar{m}(\beta_0) \rightarrow^d N(\mathbf{0}_{q \times 1}, S_0)$$

آزمون فرضیه ها در GMM

بنابراین احتمالاً اکنون شما انتظار دارید که صورت درجه دوم $T\bar{m}(\hat{\beta})'S_0^{-1}\bar{m}(\hat{\beta})$ در توزیع به یک متغیر تصادفی χ_q^2 نتیجه درست این است که اگر ماتریس وزن بهینه را انتخاب کنیم آنگاه

$$W = S_0^{-1} \quad \text{if} \quad T\bar{m}(\hat{\beta})'S_0^{-1}\bar{m}(\hat{\beta}) \rightarrow^d \chi_{q-k}^2 \quad (5)$$

$$W = S_0^{-1} \quad \text{if} \quad T.J(\hat{\beta}) \sim \chi_{q-K}^2 \quad (6)$$

به همین دلیل به آن تابع نمونه ای آزمون (آماره) نیز می گویند.

آزمون فرضیه ها در GMM

آزمون دیگری که با استفاده از تابع نمونه ای $J(\hat{\beta})$ می توان ساخت، تابع آزمون مقایسه مدل مقید و کمتر مقید است، که در آن از ماتریس وزن بهینه $W = S_0^{-1}$ برای برآورد هر دو مدل بدست آمده از مدل کمتر مقید استفاده می شود. می توان نشان داد که آزمون s تا قید به صورت زیر است.

$$W = S_0^{-1} \quad \text{if} \quad T.[J(\hat{\beta}^r) - J(\hat{\beta}^{lr})] \sim \chi_s^2 \quad (7)$$

*OLS estimator and GMM are equivalent if instruments and instrumented covariates are the same

```
regress mpg gear_ratio turn
```

```
gmm (mpg - {b1}*gear_ratio - {b2}*turn - {b0}),  
instrument(s(gear_ratio turn))
```

| mpg | Coef. | Std. Err. | t | P> t | [95% Conf. Interval] | |
|------------|-----------|-----------|-------|-------|----------------------|-----------|
| gear_ratio | 3.032884 | 1.372978 | 2.21 | 0.030 | .2952433 | 5.770524 |
| turn | -.7330502 | .1424009 | -5.15 | 0.000 | -1.01699 | -.4491108 |
| _cons | 41.21801 | 8.990711 | 4.58 | 0.000 | 23.29104 | 59.14498 |

| | Coef. | Robust Std. Err. | z | P> z | [95% Conf. Interval] | |
|-----|-----------|------------------|-------|-------|----------------------|-----------|
| /b1 | 3.032884 | 1.501664 | 2.02 | 0.043 | .0896757 | 5.976092 |
| /b2 | -.7330502 | .117972 | -6.21 | 0.000 | -.9642711 | -.5018293 |
| /b0 | 41.21801 | 8.396739 | 4.91 | 0.000 | 24.76071 | 57.67532 |

Instruments for equation 1: gear_ratio turn _cons

*Two-stage least squares (same as ivregress 2sls) and K<q ivregress 2sls mpg gear_ratio (turn = weight length headroom)

```
gmm (mpg - {b1}*turn - {b2}*gear_ratio - {b0}),  
instruments(gear_ratio weight length headroom) onestep
```

| mpg | Coef. | Std. Err. | z | P> z | [95% Conf. Interval] | |
|------------|-----------|-----------|-------|-------|----------------------|-----------|
| turn | -1.246426 | .2012157 | -6.19 | 0.000 | -1.640801 | -.8520502 |
| gear_ratio | -.3146499 | 1.697806 | -0.19 | 0.853 | -3.642288 | 3.012988 |
| _cons | 71.66502 | 12.3775 | 5.79 | 0.000 | 47.40556 | 95.92447 |

Instrumented: turn

Instruments: gear_ratio weight length headroom

| | Coef. | Robust Std. Err. | z | P> z | [95% Conf. Interval] | |
|-----|-----------|------------------|-------|-------|----------------------|-----------|
| /b1 | -1.246426 | .1970566 | -6.33 | 0.000 | -1.632649 | -.8602019 |
| /b2 | -.3146499 | 1.863079 | -0.17 | 0.866 | -3.966217 | 3.336917 |
| /b0 | 71.66502 | 12.68722 | 5.65 | 0.000 | 46.79853 | 96.53151 |

Instruments for equation 1: gear_ratio weight length headroom _cons

*Two-step GMM estimation (same as ivregress gmm) and $k < q$

```
ivregress gmm mpg gear_ratio (turn = weight length headroom)
gmm (mpg - {b1}*turn - {b2}*gear_ratio - {b0}),
instruments(gear_ratio weight length headroom) wmatrix(robust)
```

| | Coef. | Robust Std. Err. | z | P> z | [95% Conf. Interval] | |
|-----|-----------|---------------------|-------|-------|----------------------|-----------|
| /b1 | -1.208549 | .1882903 | -6.42 | 0.000 | -1.577591 | -.8395071 |
| /b2 | .130328 | 1.75499 | 0.07 | 0.941 | -3.30939 | 3.570046 |
| /b0 | 68.89218 | 12.05955 | 5.71 | 0.000 | 45.25589 | 92.52847 |

Instruments for equation 1: gear_ratio weight length headroom _cons

| mpg | Coef. | Robust Std. Err. | z | P> z | [95% Conf. Interval] | |
|------------|-----------|---------------------|-------|-------|----------------------|-----------|
| turn | -1.208549 | .1882903 | -6.42 | 0.000 | -1.577591 | -.8395071 |
| gear_ratio | .130328 | 1.75499 | 0.07 | 0.941 | -3.30939 | 3.570046 |
| _cons | 68.89218 | 12.05955 | 5.71 | 0.000 | 45.25589 | 92.52847 |

Instrumented: turn

Instruments: gear_ratio weight length headroom