

تشکیل معادلات دیفرانسیل

تشکیل معادلات دیفرانسیل معادله دیفرانسیل این خانواده منحنی را تشکیل می‌دهیم، برای این منظور کافی است از این معادله به‌طور کلی به‌طور کلی می‌گیریم. مشتقات آن ثابت c_1 را حذف کنیم.

$$\begin{aligned} y' &= f'(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y'' &= f''(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= f^{(n)}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned}$$

اگر بین این روابط ثابت‌های c_1 را حذف کنیم، یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خواهیم داشت:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

معادله دیفرانسیل خانواده منحنی‌های $y = cx^r$ را بیابید.

$$\begin{cases} y = cx^r \\ y' = r cx^{r-1} \end{cases} \quad ; \quad \frac{y}{y'} = \frac{cx^r}{r cx^{r-1}} = \frac{x}{r} \quad ; \quad y' x - r y = 0$$

جواب‌های یک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل مرتبه m $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0$ را در نظر می‌گیریم، هر تابعی $y = f(x)$ را که در این معادله صدق کند، به‌طوری‌که داشته باشیم $f^{(m)}(x) = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x)) = 0$ جواب معادله دیفرانسیل فوق نامند. به بیان دیگر جواب معادله دیفرانسیل معمولی، تابعی است که در آن مشتق‌ها با دیفرانسیل‌ها وجود دارد و در ضمن در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند. چنین جوابی بسته به اینکه ثابت دلخواه ثابت انتگرال‌گیری مشخص شده و یا نشده باشد، ممکن است جواب عمومی یا خصوصی باشد.

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به‌صورت صریح $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ و یا به‌صورت ضمنی $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ است. اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه یک باشد، جواب عمومی آن شکل $y = f(x, c_1)$ خواهد بود. اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه دو باشد، جواب عمومی آن مشتق y و دو ثابت دلخواه است و به‌طور کلی اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی آن مشتق y و n ثابت دلخواه است.

نمونه یک منحنی در هر نقطه از آن به‌صورت $1 - 2x = x^2$ یا فرض آنکه منحنی این معادله از نقطه $(1, 1)$ گذرد جواب عمومی و خصوصی آن را بیابید.

فصل ۱۱

معادلات دیفرانسیل

تعریف معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل، معادله‌ای است که مشتق بر مشتقات یک یا چند تابع باشد. اگر معادله دیفرانسیل مشتق بر مشتق‌های یک تابع یک‌متغیره باشد، $y = f(x)$ معادله دیفرانسیل معمولی است. اگر این معادله دیفرانسیل مشتق بر مشتق‌های جزئی یک تابع دو متغیره، $f(x, y) = 0$ یا چند متغیره، $f(x, y, z) = 0$ مستقل باشد آن را معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی می‌نامند. معادله دیفرانسیل را در حالت کلی به‌صورت‌های زیر نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &= 0 \\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) &= 0 \\ F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^nz}{\partial y^n}\right) &= 0 \end{aligned}$$

روابط زیر معادلات دیفرانسیل می‌باشند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x y \frac{\partial z}{\partial x} - z^2 &= 0 \quad (ج) \\ y^{m+1} - y^m &= 0 \quad (ب) \\ x^3 - y' + y &= 0 \quad (الف) \end{aligned}$$

مرتبه و درجه یک معادله دیفرانسیل

مرتبه یک معادله دیفرانسیل، درجه مرتبه‌ای است که در معادله دیفرانسیل است و درجه یک معادله دیفرانسیل، درجه مرتبه‌ای است که در معادله دیفرانسیل است.

مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل در مثال قبل را بیابید.

حل

الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و درجه اول.

ب) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و درجه دوم.

ج) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و درجه اول.

• تست‌های آزمون کارشناسی ارشد از سال ۱۳۸۴ تاکنون در فصل ۱۵ آمده است.

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

$$f(x) = x^2 + 2x + 1, g(x) = x^2 + 1$$

$$(f-g)(x) = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 1) = 2x$$

$$(f+g)(x) = (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 1) = 2x^2 + 2x + 2$$

$$(fg)(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$$

تفاوت دو تابع

$$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$(f-g)(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

$$(f-g)(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$

$$(fg)(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$(f/g)(x) = \frac{1/x}{1/x^2} = x$$

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

$$(f-g)(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

$$f(x) = x^2, g(x) = x$$

$$(f-g)(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

$$(f+g)(x) = x^2 + x = x(x+1)$$

$$(fg)(x) = x^2 \cdot x = x^3$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2}{x} = x$$

تفاوت دو تابع

$$(f-g)(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

$$(f+g)(x) = x^2 + x = x(x+1)$$

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

$$(f-g)(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

$$(f+g)(x) = x^2 + x = x(x+1)$$

$$(fg)(x) = x^2 \cdot x = x^3$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2}{x} = x$$

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

تفاوت دو تابع

برای بررسی صحت جواب کفین است که رابطه فوق دیفرانسیل کفین بگیریم

$$- = (y^2 + x^2)' = 2xy + 2x^2 = 2x(y + x) = 2x^2 + 2xy$$

معادله دیفرانسیل است

که معادله دیفرانسیل $y' = -x^2 - y^2$ را حل می‌دهد

$$M = -x^2 - y^2, N = -2xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y, \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

در معادله دیفرانسیل به صورت $y' + p(x)y = q(x)$ به هر یک از طرف معادله دیفرانسیل ضریب $e^{\int p(x)dx}$ در هر دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

که رابطه در یک شکل آسان می‌شود

$$A = e^{\int p(x)dx}$$

در رابطه در جواب عمومی را مشخص می‌کنیم

$$y = \frac{1}{A} \left(\int A q(x) dx + C \right)$$

در معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = q(x)$ ضریب $e^{\int p(x)dx}$

$$A = e^{\int p(x)dx}$$

$$y = \frac{1}{A} \left(\int A q(x) dx + C \right)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = q(x)$ را با ضریب $e^{\int p(x)dx}$ در هر دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

$$y = e^{-x} \left(\int e^x (x^2 + 2x) dx + C \right)$$

جواب عمومی

جواب خصوصی

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y = \frac{1}{A} \left(\int A q(x) dx + C \right)$$

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y = \frac{1}{A} \left(\int A q(x) dx + C \right)$$

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y = \frac{1}{A} \left(\int A q(x) dx + C \right)$$

معادله دیفرانسیل کامل

در معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ به هر یک از طرف معادله ضریب $e^{\int p(x)dx}$ در هر دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

که رابطه در یک شکل آسان می‌شود

$$\int M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

در معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ به هر یک از طرف معادله ضریب $e^{\int p(x)dx}$ در هر دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

در معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ به هر یک از طرف معادله ضریب $e^{\int p(x)dx}$ در هر دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

$$\int \frac{\partial}{\partial y} (M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$$

در معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ به هر یک از طرف معادله ضریب $e^{\int p(x)dx}$ در هر دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

$$P(x, y) = 0$$

معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = q(x)$ را با ضریب $e^{\int p(x)dx}$ در هر دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\int (M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$$

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y = \frac{1}{A} \left(\int A q(x) dx + C \right)$$

(۳) اگر $\Delta < 0$ ، ریشه مختلط $a + bi$ و $a - bi$ است.
برای تعیین $G(x)$ حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

اگر $f(x)$ تابعی درجه دوم از x باشد، آنگاه $G(x) = ax^2 + bx + c$

داگر $G(x)$ تابعی از e باشد، $ae = G(x)$ و اگر e وسیله $ae^x = G(x)$ توانیم ضربیم a را بعین کسب باید از $G(x) = ae^x$ استفاده کنیم و اگر دوباره به جواب نرسیم از $a = G(x)$ استفاده می‌کنیم.

15
حل

$$k_i' - \rho k_i + a = 0, \Delta = r^2 - r^2 = 0, (k - r)' = 0; k_1 = k_r = r$$

$$y = c_1 e^{r_x} + c_2 x e^{r_x} + G(x)$$

$$G(x) = ae^x; \quad G'(x) = ae^x; \quad G''(x) = ae^x$$

$$G''(x) - \gamma G'(x) + \lambda G(x) = \gamma e^x; \quad a e^x - \gamma a e^x + \lambda a e^x = \gamma e^x$$

$$\gamma a e^x = \gamma e^x; \quad \gamma a = \gamma; \quad a = \frac{1}{\gamma}; \quad G(x) = \frac{1}{\gamma} e^x$$

$$y = c_1 e^{r_x} + c_2 x e^{r_x} + \frac{1}{r} e^x$$

جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = 2x$ را بیابید.

$$k^i + \gamma = 0; k = \pm \gamma i; y = e^0 (c_1 \cos \gamma x + c_2 \sin \gamma x) + G(x)$$

$$G(x) = ax + b; \quad G'(x) = a, \quad G''(x) = 0.$$

$$G''(\frac{x}{2}) + \Upsilon G(x) = \Upsilon_T; \quad \Upsilon_T \alpha + \Upsilon b = \Upsilon_T; \quad \begin{cases} \Upsilon a = \Upsilon; a = \frac{1}{\Upsilon} \\ \Upsilon b = 0; b = 0 \end{cases}$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{x} x + c_3$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y' - y = e^x$ با شرط $y(0) = 0$ را به دست آورید.

$$A = e^{\int -dz} = e^{-z} \implies y = \frac{C}{e^{-z}} + \frac{1}{e^{-z}} \int e^{-z} \cdot e^z dz = \frac{C}{e^{-z}} + \frac{1}{e^{-z}} \int dz$$

$$y = \frac{c}{e^{-x}} + \frac{1}{e^{-x}} \cdot x \implies y = ce^x + xe^x \xrightarrow{N(\cdot) = 0} 0 = c + 0 \implies y = xe^x$$

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

این معادله‌ی دیفرانسیل به صورت $y'' + D_1y' + D_2y + C = 0$ برای حل این معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ به دست می‌آوریم.

را تشکیل می دهیم، ریشه های آن را (K_1, K_2) به دست می آوریم.

$$j_{k|x} + C \cdot e^{j_{k|x}}$$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 T e^{k_2 x}$$

$$u = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

(۳) اگر $\Delta = 0$, ریشه مضاعف $k_1 = k_2 = \Delta$, آن گاه:

(۴) اگر $\Delta < 0$, ریشه مختلط $a + bi$, آن گاه:

نمودار: روابط گفته شده، برای حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n همگی نیز به‌طور متناوب صادق است. به‌عنوان نمونه معادله منفر (کمکی) برای معادله دیفرانسیل $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ بصورت $\alpha_0k^n + \alpha_1k^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}k + \alpha_n = 0$ است. اگر این معادله دارای n ریشه مجزای $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ باشد و این‌صورت جواب عمومی معادله به‌صورت زیر است:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n e^{k_n x}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = 0$ را بیابید.

$$k^* = \gamma k + \gamma = 0, \Delta = k - \lambda > 0, (k - \gamma)(k - \gamma) = 0; k_1 = \gamma, k_2 = 1$$

جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + y = 0$ را بیابید.

$$k^i + \gamma k + 1 = 0; (k + 1)^i = 0; k_1 = k_2 = -1;$$

معادله‌ی دیگرانسیل خطی مرتبه دوم غیر همگن

۱۴-۱۱ این معادله‌ی دیفرانسیل، به صورت کلی $P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f(x)$ می‌باشد. معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$AK^1 + BK + C = 0 \text{ و } AK^1 + BK + C = 0$$

$$c_1 e^{-\lambda_1 x} + c_2 e^{-\lambda_2 x} + G(x)$$

اگر $\Delta = \Delta_{\mathcal{G}} = \Delta_{\mathcal{G}'} = \Delta_{\mathcal{G}''}$ باشد، داریم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

و در این صورت می توان نوشت:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

در صورتی که معادله تفاضلی مرتبه ۲ و درجه ۲ باشد می توان نوشت:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

پس می توان نوشت که معادله تفاضلی مرتبه ۲ و درجه ۲ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

معادله تفاضلی مرتبه ۲ و درجه ۲ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

نوع دوم یک معادله تفاضلی

در این نوع معادله تفاضلی، ضرایب معادله تفاضلی به صورت تابعی از y می باشد. به عبارت دیگر، معادله تفاضلی به صورت زیر می باشد:

$$y'' + p(y)y' + q(y)y = r(y)$$

$$y'' + p(y)y' + q(y)y = r(y)$$

$$y'' + p(y)y' + q(y)y = r(y)$$

فصل ۱۲

معادلات تفاضلی

نوع اول

در این نوع معادله تفاضلی، ضرایب معادله تفاضلی به صورت تابعی از x می باشد. به عبارت دیگر، معادله تفاضلی به صورت زیر می باشد:

نوع دوم

در این نوع معادله تفاضلی، ضرایب معادله تفاضلی به صورت تابعی از y می باشد. به عبارت دیگر، معادله تفاضلی به صورت زیر می باشد:

$$y'' + p(y)y' + q(y)y = r(y)$$

$$y'' + p(y)y' + q(y)y = r(y)$$

$$y'' + p(y)y' + q(y)y = r(y)$$

$$y'' + p(y)y' + q(y)y = r(y)$$

بجای مرتبه m معادله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\Delta^n y_n &= \Delta(\Delta^{n-1} y_n) = y_{n+n} - C_n^1 y_{n+(n-1)} + C_n^2 y_{n+(n-1)} - \dots + (-1)^n y_n \\ \Delta^n y_n &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)!} y_{n+(n-i)}\end{aligned}$$

از $x^2 - 2x = 0$ باشد، تفاضل مرتبه دوم آن را بیابید.

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = [(x+2)^2 - 2(x+1) - 2]x^2 + x^2 - 2x \\ &= x^2 + 4x + 4 - 2x^2 - 2x - 2 + x^2 + 2x - 2 = 2\end{aligned}$$

۱۲) صورت کلی معادله تفاضلی مرتبه m بر حسب n و n تفاضل اولیانش به شکل زیر است.

$$F(x, y_n, \Delta^1 y_n, \dots, \Delta^m y_n) = 0$$

پس نبود که y_n نیز تابعی از x است. Δ ، عملگر یا اپراتور است و فاعلش معادله y_n را از معادله y_{n+1} به دست می دهد. صورت کلی معادله تفاضلی را با استفاده از رابطه زیر می توان نوشت:

$$F(x, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}) = 0$$

مگر است $y = 0$ باشد (در عبارات معادله کلی چنین فرض شده بود که بعضی از y ها

$$F(x, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}) = 0$$

۱۲) مرتبه یک معادله تفاضلی

اگر معادله تفاضلی $y_{n+1} = F(x, y_n, y_{n+2}, \dots, y_{n+m})$ را در $y_n = 0$ قرار دهیم، معادله $y_{n+1} = F(x, 0, y_{n+2}, \dots, y_{n+m})$ را به دست می آوریم. اگر $F(x, 0, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}) = 0$ باشد، معادله تفاضلی مرتبه یک خواهد بود. در غیر این صورت، معادله تفاضلی مرتبه m خواهد بود.

$$y_{n+1} = y_n + 2y_{n+2} - y_{n+3}$$

در این معادله، y_{n+1} و y_{n+2} و y_{n+3} و y_{n+4} و y_{n+5} و y_{n+6} و y_{n+7} و y_{n+8} و y_{n+9} و y_{n+10} و y_{n+11} و y_{n+12} و y_{n+13} و y_{n+14} و y_{n+15} و y_{n+16} و y_{n+17} و y_{n+18} و y_{n+19} و y_{n+20} و y_{n+21} و y_{n+22} و y_{n+23} و y_{n+24} و y_{n+25} و y_{n+26} و y_{n+27} و y_{n+28} و y_{n+29} و y_{n+30} و y_{n+31} و y_{n+32} و y_{n+33} و y_{n+34} و y_{n+35} و y_{n+36} و y_{n+37} و y_{n+38} و y_{n+39} و y_{n+40} و y_{n+41} و y_{n+42} و y_{n+43} و y_{n+44} و y_{n+45} و y_{n+46} و y_{n+47} و y_{n+48} و y_{n+49} و y_{n+50} و y_{n+51} و y_{n+52} و y_{n+53} و y_{n+54} و y_{n+55} و y_{n+56} و y_{n+57} و y_{n+58} و y_{n+59} و y_{n+60} و y_{n+61} و y_{n+62} و y_{n+63} و y_{n+64} و y_{n+65} و y_{n+66} و y_{n+67} و y_{n+68} و y_{n+69} و y_{n+70} و y_{n+71} و y_{n+72} و y_{n+73} و y_{n+74} و y_{n+75} و y_{n+76} و y_{n+77} و y_{n+78} و y_{n+79} و y_{n+80} و y_{n+81} و y_{n+82} و y_{n+83} و y_{n+84} و y_{n+85} و y_{n+86} و y_{n+87} و y_{n+88} و y_{n+89} و y_{n+90} و y_{n+91} و y_{n+92} و y_{n+93} و y_{n+94} و y_{n+95} و y_{n+96} و y_{n+97} و y_{n+98} و y_{n+99} و y_{n+100} و y_{n+101} و y_{n+102} و y_{n+103} و y_{n+104} و y_{n+105} و y_{n+106} و y_{n+107} و y_{n+108} و y_{n+109} و y_{n+110} و y_{n+111} و y_{n+112} و y_{n+113} و y_{n+114} و y_{n+115} و y_{n+116} و y_{n+117} و y_{n+118} و y_{n+119} و y_{n+120} و y_{n+121} و y_{n+122} و y_{n+123} و y_{n+124} و y_{n+125} و y_{n+126} و y_{n+127} و y_{n+128} و y_{n+129} و y_{n+130} و y_{n+131} و y_{n+132} و y_{n+133} و y_{n+134} و y_{n+135} و y_{n+136} و y_{n+137} و y_{n+138} و y_{n+139} و y_{n+140} و y_{n+141} و y_{n+142} و y_{n+143} و y_{n+144} و y_{n+145} و y_{n+146} و y_{n+147} و y_{n+148} و y_{n+149} و y_{n+150} و y_{n+151} و y_{n+152} و y_{n+153} و y_{n+154} و y_{n+155} و y_{n+156} و y_{n+157} و y_{n+158} و y_{n+159} و y_{n+160} و y_{n+161} و y_{n+162} و y_{n+163} و y_{n+164} و y_{n+165} و y_{n+166} و y_{n+167} و y_{n+168} و y_{n+169} و y_{n+170} و y_{n+171} و y_{n+172} و y_{n+173} و y_{n+174} و y_{n+175} و y_{n+176} و y_{n+177} و y_{n+178} و y_{n+179} و y_{n+180} و y_{n+181} و y_{n+182} و y_{n+183} و y_{n+184} و y_{n+185} و y_{n+186} و y_{n+187} و y_{n+188} و y_{n+189} و y_{n+190} و y_{n+191} و y_{n+192} و y_{n+193} و y_{n+194} و y_{n+195} و y_{n+196} و y_{n+197} و y_{n+198} و y_{n+199} و y_{n+200} و y_{n+201} و y_{n+202} و y_{n+203} و y_{n+204} و y_{n+205} و y_{n+206} و y_{n+207} و y_{n+208} و y_{n+209} و y_{n+210} و y_{n+211} و y_{n+212} و y_{n+213} و y_{n+214} و y_{n+215} و y_{n+216} و y_{n+217} و y_{n+218} و y_{n+219} و y_{n+220} و y_{n+221} و y_{n+222} و y_{n+223} و y_{n+224} و y_{n+225} و y_{n+226} و y_{n+227} و y_{n+228} و y_{n+229} و y_{n+230} و y_{n+231} و y_{n+232} و y_{n+233} و y_{n+234} و y_{n+235} و y_{n+236} و y_{n+237} و y_{n+238} و y_{n+239} و y_{n+240} و y_{n+241} و y_{n+242} و y_{n+243} و y_{n+244} و y_{n+245} و y_{n+246} و y_{n+247} و y_{n+248} و y_{n+249} و y_{n+250} و y_{n+251} و y_{n+252} و y_{n+253} و y_{n+254} و y_{n+255} و y_{n+256} و y_{n+257} و y_{n+258} و y_{n+259} و y_{n+260} و y_{n+261} و y_{n+262} و y_{n+263} و y_{n+264} و y_{n+265} و y_{n+266} و y_{n+267} و y_{n+268} و y_{n+269} و y_{n+270} و y_{n+271} و y_{n+272} و y_{n+273} و y_{n+274} و y_{n+275} و y_{n+276} و y_{n+277} و y_{n+278} و y_{n+279} و y_{n+280} و y_{n+281} و y_{n+282} و y_{n+283} و y_{n+284} و y_{n+285} و y_{n+286} و y_{n+287} و y_{n+288} و y_{n+289} و y_{n+290} و y_{n+291} و y_{n+292} و y_{n+293} و y_{n+294} و y_{n+295} و y_{n+296} و y_{n+297} و y_{n+298} و y_{n+299} و y_{n+300} و y_{n+301} و y_{n+302} و y_{n+303} و y_{n+304} و y_{n+305} و y_{n+306} و y_{n+307} و y_{n+308} و y_{n+309} و y_{n+310} و y_{n+311} و y_{n+312} و y_{n+313} و y_{n+314} و y_{n+315} و y_{n+316} و y_{n+317} و y_{n+318} و y_{n+319} و y_{n+320} و y_{n+321} و y_{n+322} و y_{n+323} و y_{n+324} و y_{n+325} و y_{n+326} و y_{n+327} و y_{n+328} و y_{n+329} و y_{n+330} و y_{n+331} و y_{n+332} و y_{n+333} و y_{n+334} و y_{n+335} و y_{n+336} و y_{n+337} و y_{n+338} و y_{n+339} و y_{n+340} و y_{n+341} و y_{n+342} و y_{n+343} و y_{n+344} و y_{n+345} و y_{n+346} و y_{n+347} و y_{n+348} و y_{n+349} و y_{n+350} و y_{n+351} و y_{n+352} و y_{n+353} و y_{n+354} و y_{n+355} و y_{n+356} و y_{n+357} و y_{n+358} و y_{n+359} و y_{n+360} و y_{n+361} و y_{n+362} و y_{n+363} و y_{n+364} و y_{n+365} و y_{n+366} و y_{n+367} و y_{n+368} و y_{n+369} و y_{n+370} و y_{n+371} و y_{n+372} و y_{n+373} و y_{n+374} و y_{n+375} و y_{n+376} و y_{n+377} و y_{n+378} و y_{n+379} و y_{n+380} و y_{n+381} و y_{n+382} و y_{n+383} و y_{n+384} و y_{n+385} و y_{n+386} و y_{n+387} و y_{n+388} و y_{n+389} و y_{n+390} و y_{n+391} و y_{n+392} و y_{n+393} و y_{n+394} و y_{n+395} و y_{n+396} و y_{n+397} و y_{n+398} و y_{n+399} و y_{n+400} و y_{n+401} و y_{n+402} و y_{n+403} و y_{n+404} و y_{n+405} و y_{n+406} و y_{n+407} و y_{n+408} و y_{n+409} و y_{n+410} و y_{n+411} و y_{n+412} و y_{n+413} و y_{n+414} و y_{n+415} و y_{n+416} و y_{n+417} و y_{n+418} و y_{n+419} و y_{n+420} و y_{n+421} و y_{n+422} و y_{n+423} و y_{n+424} و y_{n+425} و y_{n+426} و y_{n+427} و y_{n+428} و y_{n+429} و y_{n+430} و y_{n+431} و y_{n+432} و y_{n+433} و y_{n+434} و y_{n+435} و y_{n+436} و y_{n+437} و y_{n+438} و y_{n+439} و y_{n+440} و y_{n+441} و y_{n+442} و y_{n+443} و y_{n+444} و y_{n+445} و y_{n+446} و y_{n+447} و y_{n+448} و y_{n+449} و y_{n+450} و y_{n+451} و y_{n+452} و y_{n+453} و y_{n+454} و y_{n+455} و y_{n+456} و y_{n+457} و y_{n+458} و y_{n+459} و y_{n+460} و y_{n+461} و y_{n+462} و y_{n+463} و y_{n+464} و y_{n+465} و y_{n+466} و y_{n+467} و y_{n+468} و y_{n+469} و y_{n+470} و y_{n+471} و y_{n+472} و y_{n+473} و y_{n+474} و y_{n+475} و y_{n+476} و y_{n+477} و y_{n+478} و y_{n+479} و y_{n+480} و y_{n+481} و y_{n+482} و y_{n+483} و y_{n+484} و y_{n+485} و y_{n+486} و y_{n+487} و y_{n+488} و y_{n+489} و y_{n+490} و y_{n+491} و y_{n+492} و y_{n+493} و y_{n+494} و y_{n+495} و y_{n+496} و y_{n+497} و y_{n+498} و y_{n+499} و y_{n+500} و y_{n+501} و y_{n+502} و y_{n+503} و y_{n+504} و y_{n+505} و y_{n+506} و y_{n+507} و y_{n+508} و y_{n+509} و y_{n+510} و y_{n+511} و y_{n+512} و y_{n+513} و y_{n+514} و y_{n+515} و y_{n+516} و y_{n+517} و y_{n+518} و y_{n+519} و y_{n+520} و y_{n+521} و y_{n+522} و y_{n+523} و y_{n+524} و y_{n+525} و y_{n+526} و y_{n+527} و y_{n+528} و y_{n+529} و y_{n+530} و y_{n+531} و y_{n+532} و y_{n+533} و y_{n+534} و y_{n+535} و y_{n+536} و y_{n+537} و y_{n+538} و y_{n+539} و y_{n+540} و y_{n+541} و y_{n+542} و y_{n+543} و y_{n+544} و y_{n+545} و y_{n+546} و y_{n+547} و y_{n+548} و y_{n+549} و y_{n+550} و y_{n+551} و y_{n+552} و y_{n+553} و y_{n+554} و y_{n+555} و y_{n+556} و y_{n+557} و y_{n+558} و y_{n+559} و y_{n+560} و y_{n+561} و y_{n+562} و y_{n+563} و y_{n+564} و y_{n+565} و y_{n+566} و y_{n+567} و y_{n+568} و y_{n+569} و y_{n+570} و y_{n+571} و y_{n+572} و y_{n+573} و y_{n+574} و y_{n+575} و y_{n+576} و y_{n+577} و y_{n+578} و y_{n+579} و y_{n+580} و y_{n+581} و y_{n+582} و y_{n+583} و y_{n+584} و y_{n+585} و y_{n+586} و y_{n+587} و y_{n+588} و y_{n+589} و y_{n+590} و y_{n+591} و y_{n+592} و y_{n+593} و y_{n+594} و y_{n+595} و y_{n+596} و y_{n+597} و y_{n+598} و y_{n+599} و y_{n+600} و y_{n+601} و y_{n+602} و y_{n+603} و y_{n+604} و y_{n+605} و y_{n+606} و y_{n+607} و y_{n+608} و y_{n+609} و y_{n+610} و y_{n+611} و y_{n+612} و y_{n+613} و y_{n+614} و y_{n+615} و y_{n+616} و y_{n+617} و y_{n+618} و y_{n+619} و y_{n+620} و y_{n+621} و y_{n+622} و y_{n+623} و y_{n+624} و y_{n+625} و y_{n+626} و y_{n+627} و y_{n+628} و y_{n+629} و y_{n+630} و y_{n+631} و y_{n+632} و y_{n+633} و y_{n+634} و y_{n+635} و y_{n+636} و y_{n+637} و y_{n+638} و y_{n+639} و y_{n+640} و y_{n+641} و y_{n+642} و y_{n+643} و y_{n+644} و y_{n+645} و y_{n+646} و y_{n+647} و y_{n+648} و y_{n+649} و y_{n+650} و y_{n+651} و y_{n+652} و y_{n+653} و y_{n+654} و y_{n+655} و y_{n+656} و y_{n+657} و y_{n+658} و y_{n+659} و y_{n+660} و y_{n+661} و y_{n+662} و y_{n+663} و y_{n+664} و y_{n+665} و y_{n+666} و y_{n+667} و y_{n+668} و y_{n+669} و y_{n+670} و y_{n+671} و y_{n+672} و y_{n+673} و y_{n+674} و y_{n+675} و y_{n+676} و y_{n+677} و y_{n+678} و y_{n+679} و y_{n+680} و y_{n+681} و y_{n+682} و y_{n+683} و y_{n+684} و y_{n+685} و y_{n+686} و y_{n+687} و y_{n+688} و y_{n+689} و y_{n+690} و y_{n+691} و y_{n+692} و y_{n+693} و y_{n+694} و y_{n+695} و y_{n+696} و y_{n+697} و y_{n+698} و y_{n+699} و y_{n+700} و y_{n+701} و y_{n+702} و y_{n+703} و y_{n+704} و y_{n+705} و y_{n+706} و y_{n+707} و y_{n+708} و y_{n+709} و y_{n+710} و y_{n+711} و y_{n+712} و y_{n+713} و y_{n+714} و y_{n+715} و y_{n+716} و y_{n+717} و y_{n+718} و y_{n+719} و y_{n+720} و y_{n+721} و y_{n+722} و y_{n+723} و y_{n+724} و y_{n+725} و y_{n+726} و y_{n+727} و y_{n+728} و y_{n+729} و y_{n+730} و y_{n+731} و y_{n+732} و y_{n+733} و y_{n+734} و y_{n+735} و y_{n+736} و y_{n+737} و y_{n+738} و y_{n+739} و y_{n+740} و y_{n+741} و y_{n+742} و y_{n+743} و y_{n+744} و y_{n+745} و y_{n+746} و y_{n+747} و y_{n+748} و y_{n+749} و y_{n+750} و y_{n+751} و y_{n+752} و y_{n+753} و y_{n+754} و y_{n+755} و y_{n+756} و y_{n+757} و y_{n+758} و y_{n+759} و y_{n+760} و y_{n+761} و y_{n+762} و y_{n+763} و y_{n+764} و y_{n+765} و y_{n+766} و y_{n+767} و y_{n+768} و y_{n+769} و y_{n+770} و y_{n+771} و y_{n+772} و y_{n+773} و y_{n+774} و y_{n+775} و y_{n+776} و y_{n+777} و y_{n+778} و y_{n+779} و y_{n+780} و y_{n+781} و y_{n+782} و y_{n+783} و y_{n+784} و y_{n+785} و y_{n+786} و y_{n+787} و y_{n+788} و y_{n+789} و y_{n+790} و y_{n+791} و y_{n+792} و y_{n+793} و y_{n+794} و y_{n+795} و y_{n+796} و y_{n+797} و y_{n+798} و y_{n+799} و y_{n+800} و y_{n+801} و y_{n+802} و y_{n+803} و y_{n+804} و y_{n+805} و y_{n+806} و y_{n+807} و y_{n+808} و y_{n+809} و y_{n+810} و y_{n+811} و y_{n+812} و y_{n+813} و y_{n+814} و y_{n+815} و y_{n+816} و y_{n+817} و y_{n+818} و y_{n+819} و y_{n+820} و y_{n+821} و y_{n+822} و y_{n+823} و y_{n+824} و y_{n+825} و y_{n+826} و y_{n+827} و y_{n+828} و y_{n+829} و y_{n+830} و y_{n+831} و y_{n+832} و y_{n+833} و y_{n+834} و y_{n+835} و y_{n+836} و y_{n+837} و y_{n+838} و y_{n+839} و y_{n+840} و y_{n+841} و y_{n+842} و y_{n+843} و y_{n+844} و y_{n+845} و y_{n+846} و y_{n+847} و y_{n+848} و y_{n+849} و y_{n+850} و y_{n+851} و y_{n+852} و y_{n+853} و y_{n+854} و y_{n+855} و y_{n+856} و y_{n+857} و y_{n+858} و y_{n

معادلات تفاضلی

بهمان معادلات تفاضلی، رابطه‌ای تابعی است که مشتق بر تفاضل‌ها نباشد و برای جمیع مقادیر صحیح غیر منفی جواب یک معادله تفاضلی، همچنین در معادله تفاضلی صدق کند. چنین جوابی بسته به اینکه پارامترهای مستقل مشخص شود یا نشده‌اند ممکن است جواب عمومی یا خصوصی باشد.

جواب عمومی معادله تفاضلی

فرض می‌کنیم $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ را در نظر می‌گیریم، معادله تفاضلی این معادله به صورت $y' = f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ باشد. بدین معادله تفاضلی صدق می‌کند، دنباله $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که برخی پارامترهای مستقل معادله تفاضلی مستقل باشد، معادله تفاضلی مرتبه دوم باشد جواب عمومی آن داری دو پارامتر مستقل است و اگر معادله تفاضلی مرتبه n باشد جواب عمومی آن دارای n پارامتر مستقل است.

جواب خصوصی معادله تفاضلی

فرض می‌کنیم $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ را در نظر می‌گیریم، معادله تفاضلی $y' = f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ باشد. اگر شرط یا شرایط خاصی را در نظر بگیریم، به طوری که برخی پارامترهای مستقل معادله تفاضلی مستقل باشد، معادله تفاضلی مرتبه دوم باشد جواب عمومی آن داری دو پارامتر مستقل است و اگر معادله تفاضلی مرتبه n باشد جواب عمومی آن دارای n پارامتر مستقل است.

مثال ۱۲-۱: نشان دهید $y = x + c$ جواب معادله $y' = 1$ است. اگر $y = 2$ باشد جواب خصوصی آن را بیابید.

$$y' = 1 \Rightarrow y = x + c$$

پس $y = x + c$ جواب معادله است.

$$y = 2 \Rightarrow 2 = x + c \Rightarrow c = 2 - x$$

جواب خصوصی معادله تفاضلی

فرض می‌کنیم $y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ را در نظر می‌گیریم، معادله تفاضلی $y' = f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ باشد. اگر شرط یا شرایط خاصی را در نظر بگیریم، به طوری که برخی پارامترهای مستقل معادله تفاضلی مستقل باشد، معادله تفاضلی مرتبه دوم باشد جواب عمومی آن داری دو پارامتر مستقل است و اگر معادله تفاضلی مرتبه n باشد جواب عمومی آن دارای n پارامتر مستقل است.

$$C = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_1(1) & \dots & f_1(n-1) \\ f_2(0) & f_2(1) & \dots & f_2(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(0) & f_n(1) & \dots & f_n(n-1) \end{vmatrix}$$

توجه: $C \neq 0$ شرط مستقل خطی است.

معادلات تفاضلی خطی

۱۲-۱۲ اگر در صورت معادله تفاضلی، تابع تنها از درجه‌ی اول باشد، معادله از نوع تفاضلی است. صورت کلی معادله تفاضلی خطی مرتبه m به صورت زیر است:

$$a_0(x)y^{(m)} + a_1(x)y^{(m-1)} + \dots + a_{m-1}(x)y' + a_m(x)y = g(x)$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ تابعی از x (و نه از y) بوده و برای مقادیر $0, 1, 2, \dots, m$ تعریف شده‌اند. در رابطه فوق اگر $g(x) = 0$ باشد، معادله تفاضلی را معادله خطی همگن گویند.

تشکیل معادلات تفاضلی

۱۲-۱۳ دنباله‌ی n پارامتر مستقل (c_1, c_2, \dots, c_n) را در نظر گرفته، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} y &= f(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y' &= f'(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= f^{(n)}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned}$$

اگر بین $n+1$ معادله فوق پارامترهای c_1, c_2, \dots, c_n را حذف کنیم، خواهیم داشت:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

که یک معادله تفاضلی مرتبه n است.

معادله تفاضلی دنباله $y' = c_1 y^2 + c_2 y^3 + 3y^4 + 2$ را تشکیل دهید.

مثال ۳ حل

$$\begin{aligned} -y' &= c_1 y^2 + c_2 y^3 + 3y^4 + 2 \\ y_{x+1} &= c_1 y^2 + c_2 y^3 + 3(y+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

ابتدا c_1 را حذف می‌کنیم:

$$y_{x+1} - y = c_2 y^3 - 3y^4 + 6y + 1$$

در رابطه فوق x را به $x+1$ بدل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -y' &= c_1 y^2 + c_2 y^3 + 3y^4 + 2 \\ y_{x+1} - y_{x+2} &= c_2 y^3 + 3y^4 + 6y + 1 \\ y_{x+2} - y_{x+1} &= c_2 y^3 + 3(y+1)^2 + 6(y+1) + 1 \end{aligned}$$

c_2 را حذف می‌کنیم:

$$y_{x+2} - y_{x+1} + 8y_{x+1} = 9y^3 - 3y^4$$

معادله تفاضلی مرتبه دوم

خطی مرتبه دوم

شکل کلی معادله تفاضلی به صورت کلی

$$Ay'' + By' + Cy = f(x)$$

میباشد. برای حل آن معادله درجه دوم $C = 0$ و $Ak' + Bk + C = 0$ را تشکیل می دهیم و ریشه های آن (k_1, k_2) را می یابیم.

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{k_1 x} + c_1 e^{k_2 x} + g'' \\ y_2 &= e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + g'' \\ y_3 &= e^{k_1 x} \cos Bx + c_1 \sin Bx + g'' \end{aligned}$$

نکته

۱) اگر $\Delta > 0$ دو ریشه k_1 و k_2 باشد. آنگاه
۲) اگر $\Delta = 0$ یک ریشه مضاعف $k_1 = k_2$ باشد. آنگاه
۳) اگر $\Delta < 0$ دو ریشه مختلط $k_1 \pm ih$ باشد. آنگاه

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \text{ و } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

در حالت (۳) داریم

و این y_1 دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

الف) اگر $y'' = 0$ باشد، آنگاه $y'' = 0$ است.

ب) اگر $f(x)$ مقدار ثابتی باشد، یعنی $D = f(x)$ در معادله $Dy'' + By' + Cy = D$ را قرار داد. در صورتی که y'' به سطر فوق بدست بیاید. $f(x) = y''$ باشد. $y'' = f(x)$ را قرار داد. در صورتی که y'' به سطر فوق بدست بیاید. $f(x) = y''$ باشد.

جواب عمومی معادله تفاضلی $y'' + By' + Cy = 17$ و $y'' + By' + Cy = 17$ را با $y'' = 17$ و $y'' = 17$ بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \\ y'' + By' + Cy &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

تابع مستقل می باشد.

۱۲.۱۲ قضیه اگر $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ ریشه مستقل خطی یک معادله تفاضلی خطی مرتبه n باشند، در آن صورت جواب عمومی به صورت زیر است.

$$y_h = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

در معادله تفاضلی $y'' + By' + Cy = 0$ جواب های $y_1 = e^{k_1 x}$ و $y_2 = e^{k_2 x}$ را می یابیم. معادله تفاضلی

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} - e^{k_2 x} \neq 0$$

$$y_h = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

معادله تفاضلی خطی مرتبه اول

۱۲.۱۳ این معادله به صورت زیر است.

$$y' + Ay = B$$

که در آن A و B اعداد ثابت و $A \neq 0$ است. جواب عمومی آن عبارت است از

$$y_h = A e^{\frac{B}{A}} \left(y_1 - \frac{B}{A} \right) + \frac{B}{A} e^{\frac{B}{A}}$$

و به عنوان ثابت دلخواه جواب عمومی است. اگر y_1 معلوم باشد، جواب خصوصی معادله بدست می آید.

۱۲.۱۴ جواب عمومی معادله تفاضلی $y'' + By' + Cy = 0$ را می یابیم و با $y_1 = \frac{1}{x}$ جواب خصوصی آن را تعیین می کنیم.

حل

$$y'' + By' + Cy = 0 \Rightarrow y'' + By' + Cy = 0 \Rightarrow y'' + By' + Cy = 0$$

$$y_h = e^{k_1 x} + e^{k_2 x} + \frac{1}{x}$$

$$y_h = e^{k_1 x} + e^{k_2 x} + \frac{1}{x}$$