برآوردگرهای روش گشتاورهای تعمیم یافته

غلامرضا کشاورز حداد

اقتصاد سنجی ۲

20 سبتمبر 2021

مقدمه: روش برآورد گشتاورهای تعمیم یافته چیست؟

- روش برآورد GMM دربر گیرنده تخمین زنهای گشتاوری و تخمین زنهای گشتاورهای تعمیم یافته است.
- نشان داده می شود که:
  - روش های برآورد حداقل مربعات معمولی
  - متغیرهای ابزاری
  - حداقل مربعات تعمیم یافته
  - روش برآورد حداقل مربعات دو مرحله ای
  - حداکثرراستنمایی

- حالت خاصی از روش برآورد GMM است.

روش تخمين زنهاي گشتاورهاي تعميم يافته

- فرض كنيد مجموعه اي از مشاهدات مربوط به متغيرتصادفی z كه قانون احتمال آن به پارامترهاي ناشناخته $\boldsymbol{\theta}$ بستگي دارد، در اختيار باشد.
- یک رهیافت رايج برآورد $\boldsymbol{\theta}$ براساس اصل حداكثر راستنمايي است، كه در آن تخمين زن به گونه اي اختيار مي شود كه براي آن مقدار از تخمين زن انتخاب شده، احتمال مشاهده شدن داده ها حداكثر گردد.
- روش GMM روشي ديگر براي برآورد پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ است.
- بيان كلي GMM توسط هانسن (1982) ابداع و ارايه شده است.

روش گشتاورهای تعمیم یافته

- روش GMM شکل گسترش یافته اي از روش گشتاورها استMM که در آن تعداد شرط هاي متعامد بودن (تعداد گشتاورها) بیشتر از تعداد پارامترها است.
- وجود شرط هاي اضافه بر تعداد پارامترها سبب افزایش کارآیي تخمین زن ها و نیز پدید آوردن جنبه هاي جدیدي (از جمله ملاحظات نظری) مي گردد که مي تواند آزمون گردد.
- بسیاري از روش هاي برآورد سنتي نظیر حداقل مربعات معمولیLS، متغیرهای ابزاریIV و حداکثر راستنمایی MLE حالتهاي خاصي از GMM هستند، که در آن تعداد گشتاورها دقیقا برابر با تعداد پارامترهای مجهول هستند.

شرط های گشتاوری در GMM

- فرض کنید به تعداد q شرط گشتاوري غيرشرطي داشته باشيم:

$$E(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) = \begin{pmatrix} E(m_1(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \\ E(m_2(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \\ \vdots \\ E(m_q(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{q\times 1} \qquad (1)$$

- كه در آن، ما علاقمند به برآورد بردار $(K \times 1)$ پارامتر $\boldsymbol{\beta}$ با $K \leq q$ هستيم.
- مقدار واقعی بردار پارامتر برابر (مقدار جامعه) برابر $\boldsymbol{\beta}_0$ است. فرض را براين قرار مي دهيم كه w_t یک فرَآیند (بردار) مانا است.

شرط های گشتاوری در GMM

- میانگین نمونه، یا شرطهاي گشتاور نمونهاي، ارزشيابي شده در بعضي از مقادير $\boldsymbol{\beta}$، عبارت است از:

$$\overline{m}(\boldsymbol{\beta}) = (1/T)\sum_{t=1}^{T} m_1(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0) \tag{2}$$

- میانگین نمونه اي $\overline{m}(\boldsymbol{\beta})$ برداري از توابعي از متغيرهاي تصادفي است، بنابراين خود آنها نيز متغيرهاي تصادفي هستند و به نمونه استفاده شده بستگي دارند.

شرط های گشتاوری در روش گشتاورها MM

مثال

شرطهاي گشتاوري برای مدل سری زمانی MA(1)

روش گشتاورها براي فرايند(١)MA

در یک فرآیند (١)MA میانگین متحرک $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ ، واریانس و نیز اتوکواریانس مرتبه یک این فرآیند به صورت زیر بدست میآید.

$$E(y_t) = 0 \quad E(y_t^2) = E[\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}]^2 = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2)$$

$$E(y_t y_{t-1}) = E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})] = \sigma_\varepsilon^2\theta$$

همتاهای نمونه های این گشتاورهای جامعه عبارتند از:

$$var(y_t) = \sum_{t=1}^T y_t^2, \qquad cov(y_t, y_{t-1}) = \sum_{t=1}^T y_t y_{t-1}$$

آنگاه شرطهای شرطهای گشتاوری به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sum_{t=1}^T y_t^2 - \sigma_\epsilon^2(1+\theta^2) = 0$$

$$\sum_{t=1}^T y_t y_{t-1} - \sigma_\epsilon^2\theta^2 = 0$$

شرط های گشتاوری در روش گشتاورها MM

مثال

شرطهاي گشتاوري براي IV/2SLS

- مدل خطي را در نظر بگيريد. كه در آن: $\boldsymbol{x}_t$ و $\boldsymbol{\beta}$ بردارهاي K×1 است. فرض كنيد $\boldsymbol{Z}_t$ یک بردار $1 \times q$ باشد.
- شرطهاي گشتاوري و همتاهاي نمونه اي آن عبارت است از:

$$\mathbf{0}_{q\times 1} = E\boldsymbol{z}_t u_t = E[\boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta})]$$

$$\overline{m}(\boldsymbol{\beta}) = (1/T)\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta}_0)$$

یا در شکل ماتریسی $\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})/T$

- اگر q=k باشد، تخمين زن بالا براي بردار $\boldsymbol{\beta}$ همان تخمين زنهاي IV.
- و اگر $\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{x}_t$ باشد، تخمين زنهاي OLS بدست مي آيند.

مقایسه نتایج GMM و OLS

مثال

کدهای استاتا

```
*OLS estimator and GMM are equivalent if instruments
*and instrumented covariates are the same
regress mpg gear_ratio turn

gmm (mpg - {b1}*gear_ratio - {b2}*turn - {b0}),
   instruments(gear_ratio turn)
```

مقایسه نتایج GMM و OLS

Source	SS	df	MS
Model	1339.68678	2	669.843392
Residual	1103.77268	71	15.546094
Total	2443.45946	73	33.4720474

```
Number of obs =      74
F(  2,     71) =   43.09
Prob > F       =  0.0000
R-squared      =  0.5483
Adj R-squared  =  0.5355
Root MSE       =  3.9429
```

mpg	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
gear_ratio	3.032884	1.372978	2.21	0.030	.2952433	5.770524
turn	-.7330502	.1424009	-5.15	0.000	-1.01699	-.4491108
_cons	41.21801	8.990711	4.58	0.000	23.29104	59.14498

```
Number of parameters =   3
Number of moments    =   3
Initial weight matrix: Unadjusted                 Number of obs  =      74
GMM weight matrix:     Robust
```

	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
/b1	3.032884	1.501664	2.02	0.043	.0896757	5.976092
/b2	-.7330502	.117972	-6.21	0.000	-.9642711	-.5018293
/b0	41.21801	8.396739	4.91	0.000	24.76071	57.67532

Instruments for equation 1: gear_ratio turn _cons

شرط های گشتاوری در MM

مثال

شرط هاي گشتاوري براي MLE با فرض k=q

- تخمین زنهاي روش حداکثر راستنمايي، لگاريتم تابع راستنمايي، را نسبت به پارامترهاي $\boldsymbol{\beta}$ حداکثر مي سازد، که اين حداکثرسازي مستلزم برقراري شرطهای مرتبه اول

$$(1/T)\sum_{t=1}^{T}\partial lnL(w_t,\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$$

است.

- یک شرط منتظم بودن، براي MLE اين است که $E\partial lnL(w_t,\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ باشد.

$$\partial lnL(\boldsymbol{\beta},\sigma^2|\boldsymbol{w})/\partial\boldsymbol{\beta} = -2/\sigma^2(-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}_{K\times 1}$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان

- فرض بفرمایید $k > q$ باشد، دو راه حل می توتند وجود داشته باشد:
  1. نادیده گرفتن پاره ای از گشتاورها. پیامد این روش کاهش کارایی برآوردگرها و نادیده گرفتن دلالتهای نظری پایه های مدل نظری است.
  2. بکار گیری این دانش نظری (همه گشتاورها) در برآورد کل k پارامتر مربوط به مدل نظری. **چگونه؟**

برآوردگر روش گشتاورهاي تعميم يافته

اين روش برآورد $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ، صورت درجه دوم وزني زير را حداقل مي سازد.

$$J = \begin{bmatrix} \overline{m}_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ \overline{m}_q(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1q} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ w_{q1} & \cdots & w_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{m}_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ \overline{m}_q(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta})' \boldsymbol{W} \overline{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta})$$

که در آن $\overline{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta})$ ميانگين نمونه اي $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta})$ و $\boldsymbol{W}$ یک ماتریس وزنی متقارن و با ساختار مثبت معین با ابعاد $q \times q$ است.

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

نکته ۱ : مشتق گيري از توابع برداری غيرخطي. فرض کنید بردار $y_{n\times 1}$ تابعي از بردار $x_{m\times 1}$ باشد.

$$[y_1\, y_2 \cdots y_n]' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)]'$$

آنگاه $\partial y/\partial x'$ یک ماتریس $n\times m$ است.

$$\partial y/\partial \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \partial f_1(x)/\partial x' \\ \vdots \\ \partial f_n(x)/\partial x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1(x)/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1(x)/\partial x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n(x)/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n(x)/\partial x_m \end{bmatrix}$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان

نکته ۲: هنگامي که $y = Ax$ است، و در آن A یک ماتریس $n \times m$ مي باشد، آنگاه $f_i(x)$ در **نکته (۱)** یک تابع خطي خواهد بود و بدست مي آوریم که:

$$\partial y/\partial \boldsymbol{x}' = \partial(A\boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{x}' = A$$

نکته ۳: به عنوان یک حالت خاصي از **نکته (۲)**، هنگامي که $y = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}$ بوده و در آن هم $\boldsymbol{z}$ و هم $\boldsymbol{x}$ بردار باشند، آنگاه زیرا $\boldsymbol{z}'$ همان نقش $\mathbf{A}$ را ایفا مي کند.
نکته ۴: مشتق گیري ماتریسي از صورت هاي درجه دوم. فرض کنید $\boldsymbol{x}_{n\times 1}$ ، $f(\boldsymbol{x})$ و $\boldsymbol{A}_{m\times m}$ و متقارن باشد، آنگاه

$$\partial[f(x)'Af(x)]/\partial x = 2(\partial f(x)/\partial x')'Af(x)$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

نکته ۵: اگر $x = f(x)$ آنگاه $\partial \boldsymbol{f} / \partial \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{I}$ ، آنگاه $\partial(\boldsymbol{x}' \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ براي بردار $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{K\times 1}$ داريم:

$$\frac{\partial[\overline{m}(\boldsymbol{\beta})' W \overline{m}(\boldsymbol{\beta})]}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \partial \overline{m}_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}/\partial \beta_1) & \cdots & \partial \overline{m}_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}/\partial \beta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial \overline{m}_q(\hat{\boldsymbol{\beta}}/\partial \beta_1) & \cdots & \partial \overline{m}_q(\hat{\boldsymbol{\beta}}/\partial \beta_k) \end{bmatrix}' \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1q} & \cdots & w_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \overline{m}_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ \vdots \\ \partial \overline{m}_q(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{bmatrix}$$

$$= \partial \overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}})_{K\times q} / \partial \boldsymbol{\beta}']'_{q\times q} \boldsymbol{W} \overline{m}_{q\times 1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

رگرسیون ساده

$$y_t = x_t\beta_0 + \varepsilon_t$$

$$\overline{\boldsymbol{m}}(\beta) = (1/T)\sum_{t=1}^{T} x_t(y_t - x_t\beta)$$

$$J = \boldsymbol{W}[(1/T)\sum_{t=1}^{T} x_t(y_t - x_t\beta)]^2$$

روشن است که اسکالر $\boldsymbol{W}$ در این بهینه سازي نقشي ندارد.

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

مثال

ادامه روش IV/2SLS

$$\overline{m}(\boldsymbol{\beta})'\,W\overline{m}(\boldsymbol{\beta}) = [(1/T)\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta})]'\,\boldsymbol{W}[(1/T)\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta})]$$

- اگر $q = K$ باشد، آنگاه مدل دقیقاً مشخص است.
- بنابراین در واقع برآوردگر $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ مي تواند با قرار دادن تمام شرطهاي گشتاوري برابر با صفر بدست آيد.
- آنگاه تخمين زن بدست آمده تخمين زنهاي IV خواهند بود، يعني

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = [(1/T)\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{z}_t\boldsymbol{x}_t']^{-1}[(1/T)\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{z}_t y_t] = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zx}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zy}$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

مثال:

$$\mathbf{0} = [(1/T)\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV})]$$

که در آن

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zx} = \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t\boldsymbol{x}_t'/T$$

و بطور مشابه براي هر یک از گشتاورهاي دوم ماتریس ها، اگر $x_t = z_t$ باشد. آنگاه:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{xx}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{xy}$$

مساله تعریف GMM

- فرض کنید $w_t = (y_t, x_t')'$ یک بردار از متغیرهای مدل و z_t متغیرهای ابزاری باشند.
  q شرط گشتاوری را در نظر بگیرید

$$E[m(w_t, z_t, \theta)] = 0$$

که در آن θ یک بردار $K \times 1$ و $m(.)$ یک تابع برداری R بعدی است.

- شرایط گشتاوری نمونه مربوطه را در نظر بگیرید:

$$\overline{m}_T(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m(w_t, z_t, \theta) = 0$$

- چه زمانی می توان گشتاورهای نمونه q را برای تخمین k پارامتر θ بکار برد؟

شرط رتبه ای

اگر $k < q$ باشد. هیچ راه حل واحدی برای $\overline{m}_T(\theta) = 0$ وجود ندارد و پارامترها قابل شناسایی نیست.
اگر $k = q$ باشد راه حل واحد برای $\overline{m}_T(\theta) = 0$ وجود دارد و شناسایی دقیق است.
این مورد یک تخمین زن MM است. IV OLS,
باید اشاره کرد که، $\overline{m}_T(\theta) = 0$ یک مساله غیرخطی با راه حل عددی است.
اگر $k > q$ تعداد معادلات بیشتر از پارامترهاست و یک وضعیت بیش از حد مشخص رخ می دهد. هیچ راه حل عمومی وجود ندارد. ($Z'X$ یک ماتریس $k \times q$ است).
θ ای را انتخاب می کنیم و $\overline{m}_T(\theta)$ را برابر صفر قرار می دهیم

تخمین GMM

- قصد داریم گشتاورهای q $\overline{m}_T(\theta)$ را تا حد ممکن به صفر متمایل سازیم.
- فرض کنید یک ماتریس $R \times R$ متقارن و معین مثبت موزون W_T داریم. به این ترتیب فرم درجه دوم آن را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$J_T(\theta) = \overline{m}_T(\theta)' W_T \overline{m}_T(\theta)(1 \times 1)$$

تخمین زن GMM به عنوان برداری که $J_T(\theta)$ را حداقل می سازد تعریف می شود. برای مثال:

$$\hat{\theta}_{GMM}(W_T) = arg_{\hat{\theta}} min\{\overline{m}_T(\hat{\theta})' W_T \overline{m}_T(\hat{\theta})\}$$

- ماتریس W_T می گوید که چه وزنی به هرکدام از شرایط گشتاوری داده شود. W_T متفاوت تخمین زن های متفاوتی را بدست می دهد،

$$\hat{\theta}_{GMM}(W_T)$$

GMM با هر ماتریس وزنی W_T سازگار است. انتخاب بهینه W_T کدام است؟

تخمین بهینه GMM

- تعداد q گشتاورهای نمونه (که متغیرهای تصادفی هستند) $\overline{m}_T(\theta)$، تخمین زن های $E[m(.)]$ هستند.

قانون اعداد بزرگ دلالت بر این دارد که:

$$\overline{m}_T(\theta) \to E[m(.)] \quad for \quad T \to \infty$$

قضیه حد مرکزی نشان می دهد که:

$$\sqrt{T}\overline{m}_T(\theta) \to N(0, S)$$

که در آن S واریانس مجانبی گشتاوری $\sqrt{T}.\overline{m}_T(\theta)$ است.

- گشتاورهای با واریانس کوچک باید وزنهای بالایی داشته باشند. ماتریس وزن بهینه برای GMM یک ماتریس W_T^{opt} است به گونه ای که:

$$\lim_{T\to\infty} W_T^{opt} = W^{opt} = S^{-1}$$

تخمین بهینه GMM

- بدون وجود خود همبستگی بین گشتاورهای نمونه ای، یک تخمین زن طبیعی $\hat{S}$ از S می شود:

$$\hat{S} = V[\sqrt{T}.\overline{m}_T(\theta)] = T.V[\overline{m}_T(\theta)]$$
$$= T.V[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m(w_t, z_t, \theta)]$$
$$= \frac{1}{T}.\sum_{t=1}^{T} m(w_t, z_t, \theta)m(w_t, z_t, \theta)'$$

دلالت بر این دارد که:

$$W_T^{opt} = \hat{S}^{-1} = (\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m(w_t, z_t, \theta)m(w_t, z_t, \theta)')^{-1}$$

- همچنین باید اشاره کرد که W_T^{opt} در حالت کلی به θ بستگی دارد.

تخمین در عمل

- GMM دو مرحله ای (کارا)
۱. ماتریس موزون $W_{[1]}$ را انتخاب می کنیم. برای مثال، $W_{[1]}=I$ یا $W_{[1]}=(Z'Z)^{-1}$. یک تخمین سازگار را پیدا می کنیم
$\hat{\theta}_{[1]}=argmin_{\theta}\overline{m}_T(\theta)'W_{[1]}\overline{m}_T(\theta)$ و اوزان بهینه را تخمین می زنیم. W_T^{opt}
۲. تخمین بهینه GMM را پیدا می کنیم.

$$\hat{\theta}_{GMM}=argmin_{\theta}\overline{m}_T(\theta)'W_T^{opt}\overline{m}_T(\theta)$$

- GMM تکرار شونده
با ماتریس موزون اولیه $W_{[1]}$ شروع می کنیم.
۱. یک تخمین $\hat{\theta}_{[1]}$ را پیدا می کنیم ۲. یک ماتریس موزون جدید را پیدا کرده $W_{[2]}^{opt}$
فرآیند تکرار بین $\hat{\theta}_{[.]}$ و $W_{[.]}^{opt}$ را ادامه می دهیم تا به یکدیگر همگرا شوند.

مثال معروف هانسن سینگلتون

- یک واحد بهینه با تابع مطلوبیت توانی مصرف را در نظر بگیرید $U(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$. شرایط مرتبه اول حداکثرسازی مطلوبیت تنزیل یافته مصرف آتی به شرح زیر است:

$$E\left[\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}(1+r_{t+1})-1|I_t\right]=0$$

که در آن I_t مجموعه اطلاعات در زمان t است.

- فرض کنید انتظارات عقلایی وجود دارد. حال اگر $z_t \in I_t$ در این صورت باید بر امید خطا متعامد باشد،

$$\begin{aligned} & f(C_{t+1}, C_t, r_{t+1}; z_t; \delta, \gamma) \\ &= E\left[\left(\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}(1+r_{t+1})-1\right)z_t\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- این مورد یک شرط گشتاوری است. ما به حراقل $R=2$ متغیر ابزاری در z_t نیاز داریم.

GMM خطی و GIVE

- مدل رگرسیونی خطی با K متغیر توضیحی را در نظر گیرید.

$$y_t = x'_{1t}\beta_1 + x'_{2t}\beta_2 + \epsilon_t = x'_t\beta + \varepsilon_t$$

که در آن $E[x_{1t}\epsilon_t] = 0$ اما متغیرهای در x_{2t} درونزا هستند $E[x_{2t}\epsilon_t] \neq 0$.

- فرض کنید $R > K$ متغیر ابزاری $z_t = (z'_1, z'_2)$ وجود دارد. به گونه ای که

$$E[z_t\epsilon_t] = E[z_t(y_t - x'_t\beta)] = 0_{(R\times 1)}.$$

شناسایی نیازمند یک همبستگی غیر صفر بین z_{2t} و x_{2t} است. شرایط رتبه ای.

- گشتاور نمونه

$$\overline{m}_T(\beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(z_t(y_t - x'_t\beta)) = \frac{1}{T}Z'(Y - X\beta).$$

است. باید اشاره کرد که نمی توان به صورت مستقیم $\overline{m}_T(\beta) = 0$ را حل کرد. $Z'X$ یک ماتریس $R \times K$ است از مرتبه K و قابلیت معکوس پذیری ندارد.

- بجای آن فرم درجه دوم زیر را حداقل می کنیم

$$J_T(\beta) = \overline{m}_T(\beta)' W_T \overline{m}_T(\beta)$$

$$= \left(\frac{1}{T} Z'(Y - X\beta)\right)' W_T \left(\frac{1}{T} Z'(Y - X\beta)\right)$$

$$= \frac{1}{T^2}(Y'Z - \beta' X' Z) W_T (Z' Y - Z' X\beta)$$

$$\frac{1}{T^2}(Y' Z W_T Z' Y - 2\beta' X' Z W_T Z' Y + \beta' X' Z W_T Z' X\beta).$$

- برای حراقل کردن $J_T(\beta)$ مشتقات جزیی را گرفته و K معادله را جل می کنیم

$$\frac{\partial J_T(\beta)}{\partial \beta} = 0_{(K\times 1)}$$

- تخمین زن GMM K معادله را حل می کند.

$$\frac{\partial J_T(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial (T^{-2}(Y'ZW_TZ'Y - 2\beta' X'ZW_TZ'Y + \beta' X'ZW_TZ'X\beta))}{\partial \beta}$$

$$-2T^{-2}X'ZW_TZ'Y + 2T^{-2}X'ZW_TZ'X\beta$$

$$= 0$$

برای مثال:

$$\hat{\beta}_{GMM}(W_T) = (X'ZW_TZ'X)^{-1}X'ZW_TZ'Y$$

- ماتریس موزون بهینه معکوس واریانس گشتاورهاست. برای مثال:

$$W_T^{opt} = S^{-1}$$

که در آن

$$S = V[\sqrt{T}.\overline{m}_T(\theta)] = \frac{1}{T}V[Z'\epsilon] = \frac{1}{T}E[Z'\epsilon\epsilon' Z] = \frac{1}{T}Z'\Omega Z$$

که $E[\epsilon\epsilon'] = \Omega$

ناهمسانی جزء اخلال

- اگر $E[\epsilon\epsilon'] = \Omega = \sigma^2 I$ تخمین زن طبیعی S می شود:

$$\hat{S} = \frac{1}{T} Z' \hat{\Omega} Z = \frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z$$

که در آن $\hat{\sigma}^2$ تخمین زن سازگاری از σ^2 است.

- پس تخمین زن GMM می شود:

$$\hat{\beta}_{GMM} = (X' Z \hat{S}^{-1} Z' X)^{-1} X' Z \hat{S}^{-1} Z' Y$$

$$= (X' Z (\frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z)^{-1} Z' X)^{-1} X' Z (\frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z)^{-1} Z' Y$$

$$= (X' Z (Z' Z)^{-1} Z' X)^{-1} X' Z (Z' Z)^{-1} Z' Y$$

$$= \hat{\beta}_{GIVE} = \hat{\beta}_{2SLS}$$

تحت ناهمسانی تخمین زن GMM بهینه GIVE است.

- بخاطر آورید که

$$\hat{\beta}_{GMM} \to N(\beta, \frac{1}{T}(D' W^{opt} D)^{-1})$$

مشتقات جزیی به شکل زیر است:

$$D_{T_{R\times K}} = \frac{\partial \overline{m}_T(\beta)}{\partial \beta'} = \frac{\partial (\frac{1}{T} Z'(Y - X\beta))}{\partial \beta'} = -\frac{1}{T} Z' X = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t x_t'$$

- واریانس می تواند به شکل زیر تخمین زده شود:

$$V[\hat{\beta}_{GMM}] = \frac{1}{T}(D_T' W^{opt} D_T)^{-1}$$

$$= \frac{1}{T}((-\frac{1}{T}Z'X)'(\frac{1}{T}\hat{\sigma}^2 Z'Z)^{-1}(-\frac{1}{T}Z'X))^{-1}$$

$$\hat{\sigma}^2 (X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}$$

که تحت عنوان 2SLS شناخته می شود.

- آزمون تشخیص به قرار زیر است:

$$\xi = T.\overline{m}_T(\hat{\theta}_{GMM})'\hat{S}^{-1}\overline{m}_T(\hat{\theta}_{GMM})$$

$$= T.(\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t z_t)'(\frac{\hat{\sigma}^2}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t z_t')^{-1}(\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t z_t)$$

$$= (sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t z_t)'(\hat{\sigma}^2\sum_{t=1}^{T} z_t z_t')^{-1}(\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t z_t)$$

$$\rightarrow \chi^2(R-K)$$

در فرم خطی با آزمون سارگان نشان داده می شود.

- یک راه ساده برای محاسبه ξ مدنظر قرار دادن رگرسیون زیر است:

$$\hat{\epsilon}_t = z_t'\gamma + residual$$

و آماره آزمون آن به صورت $\xi = T.R^2$ باید محاسبه شود.

ناهمسانی بدون وجود خودهمبستگی

- در حالتی که ناهمسانی برقرار باشد اما خودهمبستگی وجود نداشته باشد،

$$E[\epsilon\epsilon'] = \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

می توانیم از تخمین زن

$$\hat{S} = \frac{1}{T} Z'\hat{\Omega}Z = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_t^2 z_t z_t'$$

استفاده کنیم.
تنها نیازمند این هستیم که $K \times k$ ماتریس $Z'\Omega Z$ را تخمین بزنیم و نبازی به $T \times T$ ماتریس Ω نداریم.
بدست می آوریم:

$$\beta_{GMM}(\hat{S}^{-1}) = (X'Z\hat{S}^{-1}Z'X)^{-1}X'Z\hat{S}^{-1}Z'Y$$

- واریانس تخمین زن ها می شود:

$$V[\hat{\beta}_{GMM}] = \frac{1}{T}(D'_T W^{opt} D_T)^{-1}$$

$$= \frac{1}{T}((-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t z'_t)(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_t^2 z_t z'_t)^{-1}(-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t x'_t))^{-1}$$

$$(\sum_{t=1}^{T} x_t z'_t)^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_t^2 z_t z_t'^{-1} (\sum_{t=1}^{T} z_t x'_t)^{-1}$$

که تخمین زن واریانس سازگار ناهمسان نویز سفید است.

خودهمبستگی

- $W_T^{opt} = \hat{S}^{-1}$ ماتریس موزون است که

$$\hat{S} = V[\sqrt{T}.\overline{m}_T(\theta)] = T^{-1} V[\sum_{t=1}^{T}(z_t\epsilon_t)]$$

با خودهمبستگی ما نیازمند بررسی و محاسبه واریانس ها هستیم.

- این مورد با کاربرد تخمین زن های ناهمسان و خود همبسته قابل انجام است. فرض کنید

$$\Gamma_{j_{R\times R}} = cov(z_t\epsilon_t, z_{t-j}\epsilon_{t-j}) = E[(z_t\epsilon_t)(z_{t-j}\epsilon_{t-j})']$$

ماتریس کوواریانس با تاخیر یا لگ j باشد. پس

$$T.S = T^{-1}\{V(z_t\epsilon_t) + Cov(z_t\epsilon_t, z_{t-1}\epsilon_{t-1} + Cov(z_t\epsilon_t, z_{t-2}\epsilon_{t-2}) + \cdots$$

$$+Cov(z_t\epsilon_t, z_{t+1}\epsilon_{t+1}) + Cov(z_t\epsilon_t, z_{t+2}\epsilon_{t+2} + \cdots\}$$

$$= T^{-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Gamma_j$$

- اگر به این بحث بپردازیم که $\Gamma_j = 0$ برای j بزرگتر از تاخیر q است، می توانیم از تخمین زن

$$\hat{S} = T^{-1} \sum_{j=-q}^{q} \hat{\Gamma}_j$$

استفاده کنیم.
که کوواریانس ها از طدیق

$$\hat{\Gamma}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^{T} (z_t \hat{\epsilon}_t)(z_{t-j} \hat{\epsilon}_{t-j})'$$

تخمین زده می شود.
- $\hat{S}$ بدست آمده ضرورتا معین مثبت نیست.
در مقابل کوواریانس ها وزن های کاهنده تخمین زن نیویی وست به خود میگیرد
- تخمین زن کوواریانس HAC همچنین برای OLS قابل کاربرد است.

آزمون فرضیه ها در GMM

فرض را بر این قرار بدهید که بخواهیم $\boldsymbol{S}$ قید خطي $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{r}$ با $\boldsymbol{R}_{s\times K}$ و $\boldsymbol{r}^{s\times 1}$ آزمون کنیم، آنگاه تحت فرضیه صفر؛

$$\sqrt{T}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \to^d N(\mathbf{0}_{s\times 1}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}')$$

نکته (8): (توزیع صورتهاي درجه دوم): اگر بردار $\boldsymbol{x}_{n\times 1} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ آنگاه $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x} \sim \chi^2_n$ تحت فرضیه صفر تابع نمونه آزمون والد داراي توزیع متغیر تصادفي چي دو (کاي دو) است.

$$T(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \to^d \chi^2_s \tag{4}$$

آزمون فرضیه ها در GMM

همچنین مي توانيم فرضيه قيدهاي بيش از حد مشخص نمايي را نيز آزمون نماييم. شرايط مرتبه اول نشان مي دهد که ترکيب خطي از q شرط گشتاوري در $\hat{\beta}$ رابر با صفر مي گردند. بنابراين $q-K$ قيد بيش از حد مشخص نمايي داريم که در صورت که مدل بطور صحيح برازش شده باشد، بايد اين قيدها نزديک به صفر باشند. تحت فرضيه صفر اينکه شرطهاي گشتاوري برقرار هستند (بنابراين قيدهاي بيش از حد مشخص نمايي برقرار مي شوند) مي دانيم که $\sqrt{T}\overline{m}(\beta_0)$ يک متوسط نمونه (مقياس شده) بوده، و بنابراين (بنابه قضاياي حدي مرکزي) داراي يک توزيع نرمال مجانبي است.

بطور خلاصه؛

$$\sqrt{T}\overline{m}(\beta_0) \to^d N(\mathbf{0}_{q\times 1}, \boldsymbol{S}_0)$$

آزمون فرضیه ها در GMM

بنابراین احتمالاً اکنون شما انتظار دارید که صورت درجه دوم $T\overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{S}_0^{-1}\overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ در توزیع به یک متغیر تصادفي χ_q^2 نتیجه درست این است که اگر ماتریس وزن بهینه را انتخاب کنیم آنگاه

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}_0^{-1} \quad if \quad T\overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{S}_0^{-1}\overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \rightarrow^d \chi_{q-k}^2 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}_0^{-1} \quad if \quad T.J(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \sim \chi_{q-K}^2 \tag{6}$$

به همین دلیل به آن تابع نمونه اي آزمون (آماره) نیز مي‌گویند.

آزمون فرضیه ها در GMM

آزمون ديگري كه با استفاده از تابع نمونه اي $J(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ مي توان ساخت، تابع آزمون مقايسه مدل مقيد و كمتر مقيد است، كه در آن از ماتريس وزن بهينه $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}_0^{-1}$ براي برآورد هر دو مدل بدست آمده از مدل كمتر مقيد استفاده مي شود. مي توان نشان داد كه آزمون s تا قيد به صورت زير است.

$$W = \boldsymbol{S}_0^{-1} \quad if \quad T.[J(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{r}) - J(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{lr})] \sim \chi_s^2 \tag{7}$$

```
*OLS estimator and GMM are equivalent if instruments and
instrumented covariates are the same

regress mpg gear_ratio turn

gmm (mpg - {b1}*gear_ratio - {b2}*turn - {b0}),
instruments(gear_ratio turn)
```

mpg	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
gear_ratio	3.032884	1.372978	2.21	0.030	.2952433	5.770524
turn	-.7330502	.1424009	-5.15	0.000	-1.01699	-.4491108
_cons	41.21801	8.990711	4.58	0.000	23.29104	59.14498

	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
/b1	3.032884	1.501664	2.02	0.043	.0896757	5.976092
/b2	-.7330502	.117972	-6.21	0.000	-.9642711	-.5018293
/b0	41.21801	8.396739	4.91	0.000	24.76071	57.67532

Instruments for equation 1: gear_ratio turn _cons

```
*Two-stage least squares (same as ivregress 2sls) and K<q ivregress
2sls mpg gear_ratio (turn = weight length headroom)

gmm (mpg - {b1}*turn - {b2}*gear_ratio - {b0}),
instruments(gear_ratio weight length headroom) onestep
```

mpg	Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
turn	-1.246426	.2012157	-6.19	0.000	-1.640801	-.8520502
gear_ratio	-.3146499	1.697806	-0.19	0.853	-3.642288	3.012988
_cons	71.66502	12.3775	5.79	0.000	47.40556	95.92447

```
Instrumented:  turn
Instruments:   gear_ratio weight length headroom
```

	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
/b1	-1.246426	.1970566	-6.33	0.000	-1.632649	-.8602019
/b2	-.3146499	1.863079	-0.17	0.866	-3.966217	3.336917
/b0	71.66502	12.68722	5.65	0.000	46.79853	96.53151

```
Instruments for equation 1: gear_ratio weight length headroom _cons
```

```
*Two-step GMM estimation (same as ivregress gmm) and k<q

 ivregress gmm mpg gear_ratio (turn = weight length headroom)

gmm (mpg - {b1}*turn - {b2}*gear_ratio - {b0}),
instruments(gear_ratio weight length headroom) wmatrix(robust)
```

	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
/b1	-1.208549	.1882903	-6.42	0.000	-1.577591	-.8395071
/b2	.130328	1.75499	0.07	0.941	-3.30939	3.570046
/b0	68.89218	12.05955	5.71	0.000	45.25589	92.52847

Instruments for equation 1: gear_ratio weight length headroom _cons

mpg	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
turn	-1.208549	.1882903	-6.42	0.000	-1.577591	-.8395071
gear_ratio	.130328	1.75499	0.07	0.941	-3.30939	3.570046
_cons	68.89218	12.05955	5.71	0.000	45.25589	92.52847

Instrumented: turn
Instruments: gear_ratio weight length headroom