(1
الف)

$$p = \frac{1-e^{-2q}}{q} \rightarrow \bar{J} = \int_0^\infty q\, p\, e^{-rt}\, dt \rightarrow \begin{cases} \bar{J} = \int_0^\infty q \dfrac{1-e^{-2q}}{q} e^{-rt}\, dt \\ s.t.: \ \dot{a} = q \end{cases}$$

$$H = (1-e^{-2q}) e^{-rt} - \lambda q \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q} = 0 \rightarrow 2e^{-2q} e^{-rt} = \lambda \\ \dfrac{\partial H}{\partial a} = -\dot{\lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2e^{-2q} = \lambda e^{rt}$$

$$\rightarrow \frac{2}{\lambda} e^{-2q} = e^{rt} \xrightarrow{\log} \log\left(\frac{2}{\lambda}\right) - 2q = rt \rightarrow \boxed{q = \frac{\log(\frac{2}{\lambda}) - rt}{2}}$$

شرط پایانی
$$\begin{cases} q = 0 \\ t = T \end{cases} \rightarrow \log\left(\frac{2}{\lambda}\right) = rT = \frac{5}{100} T$$

$$a = \int_0^T q\, dt \rightarrow \int_0^T \frac{\left(\frac{5}{100} T - \frac{5}{100} t\right)}{2} = 1000 \rightarrow 1000 = \frac{5}{100} \int_0^T \frac{T-t}{2}$$

$$\rightarrow Tt - \frac{t^2}{2} \Big|_0^T \Rightarrow T^2 - \frac{T^2}{2} = 40000 \rightarrow T = \pm 200\sqrt{2} \rightarrow T = 200\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} q^* = \dfrac{\frac{5}{100}(200\sqrt{2}) - \frac{5}{100} t}{2} \\ p = \dfrac{1 - e^{-2q^*}}{q^*} \end{cases}$$

۱)
ب)

$P_0 \Rightarrow q_0 = \dfrac{\frac{۵}{۱۰۰}(۲۰۰\sqrt{۲})}{۲} = \frac{۵}{۱۰۰}(۱۰۰\sqrt{۲}) = ۵\sqrt{۲} = q_0$

$\rightarrow P_0 = \dfrac{۱-e^{-۲(۵\sqrt{۲})}}{۵\sqrt{۲}} \rightarrow P + q\dfrac{dP}{dq} = P_0 e^{rt}$

$\rightarrow \dfrac{۱-e^{-۲q}}{q} + \cancel{q}\,\dfrac{(۲e^{-۲q})q-(۱-e^{-۲q})}{q^{\cancel{۲}}} = \dfrac{۱-e^{-۲(۵\sqrt{۲})}}{۵\sqrt{۲}}\, e^{rt}$

$\Rightarrow \dfrac{۲\cancel{q}\,e^{-۲q}}{\cancel{q}} = \overbrace{\dfrac{۱-e^{-۲(۵\sqrt{۲})}}{۵\sqrt{۲}}}^{P_0} e^{rt}$

$\rightarrow ۲e^{-۲q} = P_0 e^{rt} \rightarrow ۲ = P_0 e^{rt} \Rightarrow \dfrac{۲}{P_0} = e^{rt} \rightarrow \log\dfrac{۲}{P_0} = \dfrac{۵}{۱۰۰}T$

$T = ۲۰\log\left(\dfrac{۲}{P_0}\right) \rightarrow$ پس از محاسبه $\rightarrow \boxed{T = ۲۳{,}۰۱}$

ج) در نتایج فرض اولیه $q \to ۰$ سپس $P = k$ شود رعایت نشده است.

۴)

الف)

$$L = (1-\gamma)\ln(c_T) + \gamma\ln(c_n) + \lambda(\bar{w} - c_T - pc_n)$$

$\bar{w}$ اینجا با w اولی متفاوت است

$$\frac{\partial L}{\partial c_T} = \frac{1-\gamma}{c_T} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_n} = \frac{\gamma}{c_n} = \lambda p \Rightarrow p = \frac{\gamma / c_n}{\frac{1-\gamma}{c_T}} \Rightarrow \gamma c_T = p c_n (1-\gamma)$$

ما می‌دانیم اگر کشور از منابع خدادادی برخوردار باشد یا نباشد $x_n = c_n$ ولی در مورد بخش قابل مبادله این قضیه در زمانی که دارای منابع هستیم صادق نیست. و با توجه صورت سوال $\Leftarrow$ $c_T = x_T + \phi w$

$$\gamma(x_T + \phi w) = p(x_n)(1-\gamma) \rightarrow x_T = \frac{(px_n)(1-\gamma) - \gamma\phi w}{\gamma}$$

$$L_T = \left(\frac{p(x_n)(1-\gamma) - \gamma\phi w}{A k_T^{\theta}\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{-w}{A k_T \gamma}\cdot\frac{1}{1-\theta}\cdot\left(\frac{p(x_n)(1-\gamma) - \gamma\phi w}{A k_T^{\theta}\gamma}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$$

ب) $\frac{L_T}{L} = \eta$

$$c_N = \frac{\gamma c_T}{(1-\gamma)p} = \frac{\gamma(1-\gamma)Y_t}{(1-\gamma)p} \Rightarrow c_n = \frac{\gamma Y_t}{p} \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{\gamma(H_t + R)}{p} = x_n = H(1-\eta) \rightarrow \frac{\gamma(x_T + x_N + \phi w)}{p} = (x_T + x_n)(1-\eta)$$

$$\rightarrow \eta = \frac{p(x_T + x_n) - \gamma(x_T + x_n + \phi w)}{p(x_T + x_n)}$$

$\rightarrow$ با افزایش ϕ افراد شاغل در بخش قابل معامله/ تجارت کاهش می‌یابند.

$P = 100 - q - 4n + 14$ (۲

$P = \alpha - \beta q - cn + gt \rightarrow J = \int_0^\infty P q e^{-rt} dt$ ابتدا به صورت پارامتری می‌نویسیم.

$\xrightarrow{Ham} H: q(\alpha - \beta q - cn + gt) + \lambda q \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial n} = r\lambda - \dot\lambda \end{cases}$

s.t. $\dot n = q$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q} = \alpha - 2\beta q - cn + gt + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2\beta q - \alpha + cn - gt \\ \frac{\partial H}{\partial n} : -cq = r\lambda - \dot\lambda \rightarrow \dot\lambda = 2\beta \frac{d^2n}{dt^2} + c\frac{dn}{dt} - g \end{cases}$

$\cancel{-cq = r\lambda - \dot\lambda} \rightarrow -cq = r\left(2\beta \frac{dn}{dt} - \alpha + cn - gt\right) - 2\beta \frac{d^2n}{dt^2} - c\frac{dn}{dt} + g$

$2\beta \frac{d^2n}{dt^2} - 2\beta r \frac{dn}{dt} - cnr = -grt + g - \alpha r$

از آن جا که β، c و r مقادیر مثبتی دارند ریشه‌های معادله کاملا حقیقی، مختلف العلامه هستند و مجموع آن‌ها

هم برابر r می‌شود. $\Leftarrow m - n = r$

$\begin{cases} n = Ae^{mt} + Be^{-nt} + \frac{gt}{c} - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{cr} + \frac{\alpha}{c} \\ q = Ame^{mt} - Bne^{-nt} + \frac{g}{c} \end{cases}$

$\rightarrow$ در صورت اینکه $q = \frac{dn}{dt}$ می‌شود می‌رسیم

از n مشتق گرفتیم به رابطه q می‌رسیم

با شرط $\begin{cases} t=0 \\ n=0 \end{cases}$ $\leftarrow$

$\begin{cases} A + B - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{cr} + \frac{\alpha}{c} \\ Ae^{mT} + Be^{-nT} + \frac{gT}{c} - 2\beta g/c^2 - \frac{g}{cr} + \frac{\alpha}{c} - a = 0 \\ Ame^{mT} - Bne^{-nT} + \frac{g}{c} = 0 \end{cases}$

$\rightarrow n = a$ و $t = T$ در معادله n،

$\rightarrow$ در معادله q شرط مرزی $q = 0$ و $t = T$

ادامه ۲

ماتریس ضرایب A و β را می‌نویسیم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{cr} + \frac{\alpha}{c} \\ e^{mT} & e^{-nT} & \frac{gT}{c} - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{cr} + \frac{\alpha}{c} - a \\ me^{mT} & ne^{-nT} & \frac{g}{c} \end{vmatrix} = 0$$

دو ستون اول را به ترتیب در e^{-mT} , e^{nT} ضرب می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} e^{-mT} & e^{-nT} & -\frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{cr} + \frac{\alpha}{c} \\ 1 & 1 & \frac{gT}{c} - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{cr} + \frac{\alpha}{c} - a \\ m & -n & \frac{g}{c} \end{vmatrix} = 0$$

$$m - n = r$$
$$mn = \frac{cr}{2\beta}$$

$$\Delta = \left(e^{-mT} - e^{nT}\right)\frac{g}{c} + \left(n e^{-mT} + m e^{nT}\right)\left(\frac{gT}{c} - \frac{2\beta g}{c^2} - \frac{g}{cr} + \frac{\alpha}{c} - a\right) + (m+n)\left(\frac{2\beta g}{c^2} + \frac{g}{cr} - \frac{\alpha}{c}\right)$$

$$\Delta' = \left(e^{nT} - e^{-mT}\right)\left[T - \frac{1}{r} + \frac{(\alpha - ac)}{g}\right]\frac{gr}{2\beta}$$

حال با توجه به حل تقریبی پارامتری مثال ۲ ضرایب داده شده در مسئله ۲ را در ماتریس جایگذاری می‌کنیم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2T} & e^{-T} & 19.8 \\ 1 & 1 & 4T + 9.8 \\ 2 & -1 & \frac{14}{4} \end{vmatrix} = e^{-2T}(4 + 4T + 9.8) - e^{T}(4 - 8T - 19.6) + 19.8(-1-2)$$

$$\Rightarrow \Delta = e^{-2T}(4T + 13.8) + e^{T}(8T + 15.8) - 59.4$$

$$\frac{14T}{4} - \frac{2(1)14}{14} - \frac{14}{4(1.28)} + \frac{100}{4} - 10 = 4T + 9.8$$

$$\frac{-2(1)(14)}{14} - \frac{14}{4(1.28)} + \frac{100}{4} = 19.8$$

ریشه قابل قبول $T = 0.899$ ، ۵

$$\Delta' = \left(e^{T} - e^{-2T}\right)(10T - 29.5) = -64.999 \qquad \Delta = -0.02$$

ادامه ۲)

$e^{۲T} = ۶,۰۶۷ \qquad e^{-T} = ۰/۴۰ \rightarrow$ برای بدست آوردن A و B

مقدار بدست آمده را در رابطه های زیر قرار می دهیم:

$$\begin{cases} Ae^{mT} + \beta e^{-nT} + \frac{gT}{c} - \frac{۲\beta g}{c^۲} - \frac{g}{c^۲} + \frac{\alpha}{c} - a = ۰ \\ A m e^{mT} - \beta n e^{-nT} + \frac{g}{c} = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\,۶,۰۶۷ + ۰/۴۰\,\beta + ۱۲,۵۹۶ \\ ۱۲,۰۷۴A - ۰/۴۰\,\beta + ۴ = ۰ \end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= -۰/۹۱۶ \\ B &= -۱۷,۶۶ \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -۰/۱۹۱۶\, e^{۲t} - ۱۷,۶۶\, e^{-t} + ۴T + ۱۹,۸ \\ q = ۱,۸۳۲\, e^{۲t} + ۱۷,۶۶\, e^{-t} + ۴ \end{cases} \qquad \Rightarrow P = ۱۰۰ - q - ۴x + ۱۶t$$