به نام حضرت دوست

98.10.09, Math for Econ, جلسه 27

بهینه‌سازی پویا:

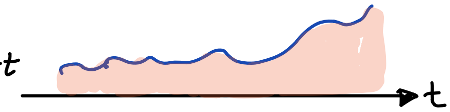
(1) $\max\limits_{\{c_t\}} \int_0^{\infty} v(k,c,t)\,dt$

s.t. (a) $\dot{k} = g(k,c,t)$

(b) $k(0) = k_0$

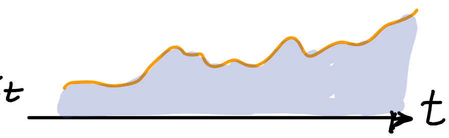
(c) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\bar{r}(t)t}\, k(t) = 0$

مسیر مصرف بهینه: c_t



$\Downarrow$

مسیر سرمایه متناظر: k_t



معادله همیلتونی: $H = v(k,c,t) + \mu(t)\, g(k,c,t)$

شروط لازم:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial c} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\mu} \\[2mm] \mu(T)k(T) = 0 \end{cases}$$

$$\mu(T)k(T) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu(T) > 0 \Rightarrow k(T) = 0 \\ k(T) > 0 \Rightarrow \mu(T) = 0 \end{cases}$$

شرط تراگذری: الف) $v(k,c,t) = e^{-\rho t}u(k,c)$

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t)k(t) = 0$$

ب) در غیر این صورت

$$\lim_{t\to\infty} H(k,c,t) = 0$$

§ Current Hamiltonian: H^C یا $\hat{H}$ همیلتونی فعلی

if $v(k,c,t) = e^{-\rho t} u(k,c) \Rightarrow H = e^{-\rho t} v(k,c) + \underbrace{\mu(t)}_{e^{-\rho t}\lambda(t)} g(k,c,t)$

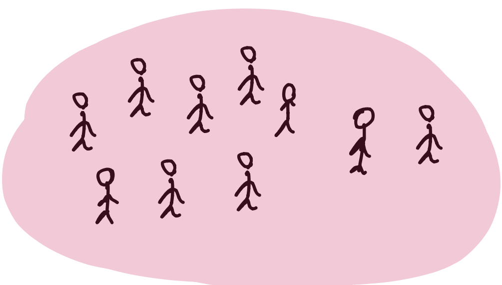
$$\Rightarrow H = e^{-\rho t}\big(\underbrace{u(k,c) + \lambda(t) g(k,c,t)}_{\hat{H},\ H^c}\big)$$

$$\Rightarrow H = e^{-\rho t}\hat{H}$$

$$(1)\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial c} = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\mu} \end{cases} \Longrightarrow (1)^* \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial c} = 0 \\ \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial k} = \rho\lambda - \dot{\lambda} \\ \lim\limits_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_t k_t = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\mu} = -\rho e^{-\rho t}\lambda(t) + e^{-\rho t}\dot{\lambda}(t)$$

Ramsey Model:



$N_t : N_0 e^{nt} \quad n>0$ جمعیت

$K_t :$ سرمایه

$F(K_t, N_t)$ تابع تولید $\rightsquigarrow$ Constant R.S

Y_t محصول

$Y_t = F(K_t, N_t)$

C_t مصرف

$$Y_t = \dot{K}_t + C_t$$

مدل سرانه :

$$Y_t = F(K_t, N_t) = N_t F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right)$$

$y_t \doteq \dfrac{Y_t}{N_t}$ سرانه تولید $\qquad c_t = \dfrac{C_t}{N_t}$ سرانه مصرف

$k_t \doteq \dfrac{K_t}{N_t}$ سرانه سرمایه

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad y_t = F(k_t, 1)$$

تعریف: $f(x) = F(x,1) \Rightarrow y_t = f(k_t)$

$$(\dot{k_t}) = \left(\frac{\dot{K_t}}{N_t}\right) = \frac{N_t \cdot \dot{K_t} - K_t \dot{N_t}}{N_t^2} = y_t - c_t - nk_t$$

می‌خواهیم مطلوبیت مصرف را در طول همه زمان‌ها بیشینه کنیم.

$$\Rightarrow \max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t)\,dt$$

(a) $\dot{k_t} = f(k_t) - c_t - nk_t$

(b) $k(0) = k_0$

(c) $\lim_{t \to \infty} e^{-r(t)t} k(t) \geq 0$

f: مقعر و صعودی و صادق در شرط اینادا:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = \infty \\ f'(\infty) = 0 \end{cases}$$

$$\hat{H} = u(c_t) + \lambda_t\left(f(k_t) - c_t - nk_t\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{H}}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial k} = \rho\lambda - \dot{\lambda} \\ \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_t k_t = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} ① \; u'(c_t) - \lambda_t = 0 \\ ② \; \lambda_t\left(f'(k_t) - n\right) = \rho\lambda - \dot{\lambda} \end{cases}$$

② $\frac{-\dot{\lambda}}{\lambda} = f'(k_t) - n - \rho$

① $\ln(u'(c_t)) = \ln(\lambda_t)$

$$\frac{u''(c_t)\cdot \dot{c}}{u'(c_t)} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{u''(c_t)\dot{c}}{u'(c_t)} = -\left(f'(k) - n - \rho\right) \Rightarrow \frac{u''(c_t)\cdot c}{u'(c_t)} \cdot \frac{\dot{c}}{c} = -\left(f'(k) - n - \rho\right)$$

کشش مطلوبیت حاشیه‌ای لحظه‌ای نسبت به مصرف

$$\frac{u''(c_t)\cdot c}{u'(c_t)} = \lim_{s\to t}\left(\frac{u'(c_s)-u'(c_t)}{u'(c_t)}\right)\div\left(\frac{c_s-c_t}{c_t}\right) = \frac{u''(c_t)\cdot c}{u'(c_t)} = \frac{-1}{\delta_u(c)}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\delta_u(c)}\cdot\frac{\dot c}{c} = -\left(f'(k)-n-\rho\right)$$

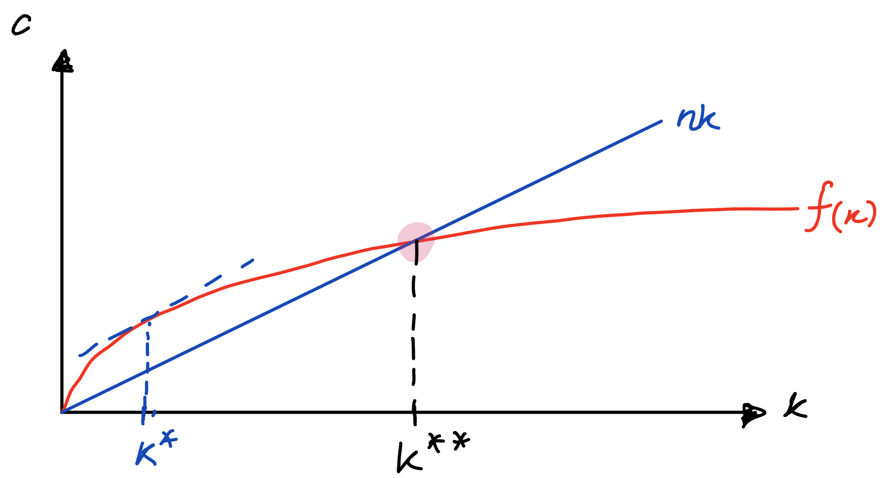
$$\begin{cases} \dot c = \delta_u(c)\cdot c\cdot\left(f'(k)-n-\rho\right) \\ \dot k = f(k)-c-nk \end{cases}$$

خانواده‌ی u :

- CARA → ریسک گریزی مطلق ثابت : $u(c) = \frac{-1}{\alpha c}e^{\alpha c}$
- CRRA → ریسک گریزی نسبی ثابت : $u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} & \sigma>0,\ \sigma\neq 1 \\ \ln c & \sigma=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot k = f(k)-c-nk \\ \dot c = \frac{c}{\sigma}\left(f'(k)-n-\rho\right) \end{cases}$$

$$\dot k = 0 \iff c^{(*)} = f(k)-nk$$



$$c(0)=0$$
$$c(k^{**})=0$$