# فصل ۱۱

# معادلات دیفرانسیل

## تعریف معادله دیفرانسیل

۱ـ۱۱ معادله دیفرانسیل، معادله‌ای است که مشتمل بر مشتقات یک یا چند تابع باشد. اگر معادله دیفرانسیل مشتمل بر مشتق‌های یک تابع یک‌متغیره باشد، $y = f(x)$، معادله دیفرانسیل معمولی است. اگر این معادله دیفرانسیل مشتمل بر مشتق‌های جزیی یک تابع دومتغیره، $f(x, y) = 0$، یا چند متغیره، $f(x, y, z) = 0$، مستقل باشد آن را معادله دیفرانسیل، با مشتق‌های جزیی می‌نامند. معادله دیفرانسیل را در حالت کلی به‌صورت‌های زیر نشان می‌دهند.

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$
$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$
$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0$$

**مثال ۱** روابط زیر معادلات دیفرانسیل می‌باشند.

الف) $y'' - 2y' + y = x^2$ ب) $y'''^2 - y'^6 = 0$ ج) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + xy\frac{\partial z}{\partial x} - 3z^2 = 0$

## مرتبه و درجه یک معادله دیفرانسیل

۲ـ۱۱ مرتبه یک معادله دیفرانسیل، برابر بزرگ‌ترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله دیفرانسیل است و درجه یک معادله دیفرانسیل توان بزرگ‌ترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله است.

**مثال ۲** مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل در مثال قبل را بیابید.

حل

الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و درجه اول.

ب) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و درجه دوم.

ج) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و درجه اول.

- تست‌های آزمون کارشناسی ارشد از سال ۱۳۸۶ تاکنون، در فصل ۱۵ آمده است.





## تشکیل معادلات دیفرانسیل

۳ـ۱۱ به‌طور کلی خانواده منحنی‌های $y = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ را که مشتمل بر $n$ پارامتر مستقل $c_1, c_2, \cdots, c_n$ است، درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم معادله دیفرانسیل این خانواده منحنی را تشکیل دهیم، برای این منظور کافی است از این تابع $n$ بار مشتق گرفته و بین تابع و مشتقات آن ثابت $c_i$ را حذف کنیم:

$$y' = f'(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$
$$y'' = f''(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

اگر بین این روابط ثابت‌های $c_i$ را حذف کنیم، یک معادله دیفرانسیل مرتبه $n$ خواهیم داشت:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

**مثال ۳** معادله دیفرانسیل خانواده منحنی‌های $y = cx^2$ را بیابید.

حل

$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases} \quad ; \frac{y}{y'} = \frac{cx^2}{2cx} \; ; \; \frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \; ; \; y'x - 2y = 0$$

## جواب‌های یک معادله دیفرانسیل

۴ـ۱۱ معادله دیفرانسیل مرتبه $n$ام $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ را درنظر می‌گیریم، هر تابعی با ضابطه‌ی $y = f(x)$ را که در این معادله صدق کند، به‌طوری که داشته باشیم $F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)) = 0$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل فوق نامند. به بیان دیگر جواب معادله دیفرانسیل معمولی، تابعی است که در آن مشتق‌ها یا دیفرانسیل‌ها وجود ندارند و در ضمن در معادله‌ی دیفرانسیل صدق می‌کند. چنین جوابی بسته به این‌که ثابت دلخواه (ثابت انتگرال‌گیری) مشخص شده و یا نشده باشد، ممکن است جواب عمومی یا خصوصی باشد.

## جواب عمومی معادله دیفرانسیل

۵ـ۱۱ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه $n$ به‌صورت صریح $y = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ و یا به‌صورت ضمنی $f(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$ است. اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه یک باشد، جواب عمومی‌آن مشتمل بر یک ثابت دلخواه است، اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه دو باشد، جواب عمومی آن مشتمل بر دو ثابت دلخواه است و به‌طورکلی اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه $n$ باشد، جواب عمومی آن مشتمل بر $n$ ثابت دلخواه است.

**مثال ۴** شیب یک منحنی در هر نقطه از آن به‌صورت $y' = x^2 - 2x + 1$ است. با فرض آن‌که منحنی این تابع از نقطه $(0, 2)$ بگذرد، جواب عمومی و خصوصی آن را بیابید.

## جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

## حل معادلات دیفرانسیل

## معادله دیفرانسیل همگن

## معادله‌ی دیفرانسیل جدا

$\ln x(1+2t-t^2)^{\frac{1}{2}} = c_1 \; ; \; x(1+2t-t^2)^{\frac{1}{2}} = e^{c_1} \xrightarrow{t=\frac{y}{x}} x\left(1+\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = c$

$x\left(\frac{x^2+2yx-y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = c \; ; \; x^2+2yx-y^2 = c$ (جواب عمومی)

$c = 0 \; ; \; x^2+2yx-y^2 = 0$ (جواب خصوصی)

## معادله دیفرانسیل کامل

۱۱-۱۱ اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان بصورت $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ نوشت، بنا به تعریف این معادله را معادله دیفرانسیل کامل می‌نامند اگر داشته باشیم $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. برای بدست آوردن جواب آن عملیات زیر را انجام می‌دهیم

۱) از $M(x,y)$ نسبت به $x$ انتگرال می‌گیریم و ثابت انتگرال‌گیری را با تابعی از $y$ بصورت $\varphi(y)$ عوض می‌کنیم

$$\int M(x,y)dx = f(x,y) + \varphi(y)$$

۲) از تابع بدست آمده در بالا نسبت به $y$ مشتق می‌گیریم و آن را با $N(x,y)$ برابر قرار می‌دهیم و با بدست آوردن $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)$ معادله را حل می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = N(x,y) \; ; \; \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = N(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}$$

۳) برای یافتن $\varphi(y)$ از $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)$ نسبت به $y$ انتگرال می‌گیریم

$$\int \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y)dy = \varphi(y)$$

۴) با توجه به مراحل ۱ و ۳ جواب معادله دیفرانسیل بصورت زیر است

$$f(x,y) + \varphi(y) = c$$

مثال: معادله دیفرانسیل $(x+y)dx + (y^2+x)dy = 0$ را حل کنید.

حل: این معادله دیفرانسیل کامل است زیرا $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ و $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ بنابراین

$\int (x+y)dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y) \quad , \quad x + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = y^2 + x \; ; \; \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = y^2$

$\int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 \; ; \; \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{3}y^3 = c$



برای بررسی صحت جواب کافی است از رابطه فوق دیفرانسیل کامل بگیریم

$xdx + ydx + xdy + y^2dy = 0 \; ; \; (x+y)dx + (y^2+x)dy = 0$

که همان معادله دیفرانسیل است.

مثال: اگر معادلهٔ دیفرانسیل $(x+y^2)dy + (my - x^2)dx = 0$ کامل باشد $m$ را بیابید.

حل:

$M = my - x^2 \; , \; N = x + y^2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \; ; \; m = 1$

## معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

۱۲-۱۱ اگر معادله دیفرانسیل بصورت $y' + y.f(x) = g(x)$ باشد، بنا به تعریف معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است. برای بدست آوردن جواب آن عملیات زیر را انجام می‌دهیم

۱) از رابطه زیر فاکتور انتگرال $A$ را می‌یابیم

$$A = e^{\int f(x)dx}$$

۲) از رابطه زیر جواب عمومی را محاسبه می‌کنیم

$$y = \frac{c}{A} + \frac{1}{A}\int A.g(x)dx$$

بطور مشابه برای معادله دیفرانسیل $x' + x.f(y) = g(y)$ داریم

$$A = e^{\int f(y)dy}$$
$$x = \frac{c}{A} + \frac{1}{A}\int A.g(y)dy$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + 2y = 4$ را بیابید. سپس جواب خصوصی آن را در شرایطی که اگر $x = 0$ باشد $y = 1$ بدست آورید.

حل:

$A = e^{\int 2dx} = e^{2x} \; ; \; y = \frac{c}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\int 4e^{2x}dx = ce^{-2x} + e^{-2x}(2e^{2x})$

$y = ce^{-2x} + 2$ (جواب عمومی)

$x = 0, y = 1 \; ; \; 1 = ce^0 + 2 \; ; \; c = -1 \; ; \; y = -e^{-2x} + 2$ (جواب خصوصی)

**مثال ۱۳** جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y' - y = e^x$ با شرایط $y(0) = 0$ را به‌دست آورید.

حل

$$A = e^{\int -dx} = e^{-x} \Longrightarrow y = \frac{c}{e^{-x}} + \frac{1}{e^{-x}}\int e^{-x}\cdot e^x\,dx = \frac{c}{e^{-x}} + \frac{1}{e^{-x}}\int dx$$

$$y = \frac{c}{e^{-x}} + \frac{1}{e^{-x}}\cdot x \Longrightarrow y = ce^x + xe^x \xrightarrow{y(0)=0} 0 = c + 0 \Longrightarrow y = xe^x$$

## معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

**۱۱-۱۳** این معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت $Ay''+By'+Cy=0$ است. برای حل آن معادله درجه دوم $Ak^2+Bk+C=0$ را تشکیل می‌دهیم، ریشه‌های آن را $(k_1, k_2)$ به‌دست می‌آوریم.

۱) اگر $\Delta > 0$، دو ریشه $k_1$ و $k_2$، آنگاه: $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$

۲) اگر $\Delta = 0$، ریشه مضاعف $k_1 = k_2$، آنگاه: $y = c_1e^{k_1x} + c_2xe^{k_1x}$

۳) اگر $\Delta < 0$، ریشه مختلط $a + bi$، آنگاه: $y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)$

تذکر: روابط گفته شده، برای حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه $n$ همگن نیز به‌طور مشابه صادق است. به‌عنوان نمونه معادله مفسر (کمکی) برای معادله دیفرانسیل $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0$ به‌صورت $a_0k^n + a_1k^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ است. اگر این معادله دارای $n$ ریشه مجزای $k_1, k_2, \cdots, k_n$ باشد در این‌صورت جواب عمومی معادله به‌صورت زیر است:

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + \cdots + c_ne^{k_nx}$$

**مثال ۱۴** جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = 0$ را بیابید.

حل

$$k^2 - 3k + 2 = 0, \Delta = 9 - 8 > 0, (k-1)(k-2) = 0\ ;\ k_1 = 1, k_2 = 2$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

**مثال ۱۵** جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + 2y' + y = 0$ را بیابید.

حل

$$k^2 + 2k + 1 = 0\ ;\ (k+1)^2 = 0\ ;\ k_1 = k_2 = -1;$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$

## معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم غیرهمگن

**۱۱-۱۴** این معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = f(x)$ می‌باشد. برای حل آن معادله‌ی درجه‌ی دوم $Ak^2 + Bk + C = 0$ را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را $(k_1, k_2)$ به‌دست می‌آوریم.

۱) اگر $\Delta > 0$، دو ریشه $k_1$ و $k_2$، آنگاه: $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + G(x)$

۲) اگر $\Delta = 0$، ریشه مضاعف $k_1 = k_2$، آنگاه: $y = c_1e^{k_1x} + c_2xe^{k_1x} + G(x)$



۳) اگر $\Delta < 0$، ریشه مختلط $a + bi$، آنگاه: $y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx) + G(x)$

برای تعیین $G(x)$ حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

الف) اگر $f(x)$ مقداری ثابت باشد، یعنی $f(x) = D$، آنگاه $G(x) = \frac{D}{C}$.

ب) اگر $f(x)$ تابعی درجه اول از $x$ باشد، آنگاه $G(x) = ax + b$

ج) اگر $f(x)$ تابعی درجه دوم از $x$ باشد، آنگاه $G(x) = ax^2 + bx + c$.

د) اگر $f(x)$ تابعی از $e^x$ باشد، $G(x) = ae^x$ و اگر به‌وسیله $G(x) = ae^x$ نتوانیم ضریب $a$ را تعیین کنیم، باید از $G(x) = axe^x$ استفاده کنیم و اگر دوباره به جواب نرسیدیم از $G(x) = ax^2e^x$ استفاده می‌کنیم.

ها برای تعیین ضرایب نامعین تابع $G(x)$ در موارد فوق (ب، ج، د) بایستی $G'(x)$ و $G''(x)$ را محاسبه کنیم و توابع $G(x)$ و $G'(x)$ و $G''(x)$ را به‌ترتیب به‌جای $y$، $y'$ و $y''$ قرار دهیم و از اتحاد دو طرف، ضرایب نامعین محاسبه شوند.

**مثال ۱۶** جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 6y' + 9y = 2e^x$ را بیابید.

حل

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \Delta = 36 - 36 = 0, (k-3)^2 = 0\ ;\ k_1 = k_2 = 3$$

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + G(x)$$

$$G(x) = ae^x\ ;\ G'(x) = ae^x\ ;\ G''(x) = ae^x$$

$$G''(x) - 6G'(x) + 9G(x) = 2e^x\ ;\ ae^x - 6ae^x + 9ae^x = 2e^x$$

$$4ae^x = 2e^x\ ;\ 4a = 2\ ;\ a = \frac{1}{2}\ ;\ G(x) = \frac{1}{2}e^x$$

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{1}{2}e^x$$

**مثال ۱۷** جواب معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + 4y = 2x$ را بیابید.

حل

$$k^2 + 4 = 0\ ;\ k = \pm 2i\ ;\ y = e^0(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + G(x)$$

$$G(x) = ax + b\ ;\ G'(x) = a,\ G''(x) = 0$$

$$G''(x) + 4G(x) = 2x\ ;\ 4ax + 4b = 2x\ ;\ \begin{cases} 4a = 2\ ;\ a = \frac{1}{2} \\ 4b = 0\ ;\ b = 0 \end{cases}$$

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{2}x + c$$

# فصل ۱۲

# معادلات تفاضلی

## مقدمه

۱.۱۲ اگر متغیرها بجای شکل لحظه‌ای یا پیوسته بطور جدا یا گسسته ملاحظه شود، برای بیان روابط بین این تغییرات بجای معادلات دیفرانسیل، معادلات تفاضلی مناسب خواهد بود. غالباً معادلات تفاضلی برای تحلیل‌های بازرگانی و اقتصادی مفید هستند، زیرا بعضی از اطلاعات اقتصادی برحسب دوره‌های زمانی یا فاصله‌های مساوی ثبت می‌شود.

## تعریف معادله تفاضلی

۲.۱۲ اگر $y=f(x)$ یک دنباله باشد هر رابطه بین تفاضلات محدود این دنباله را یک معادله تفاضلی گویند. به بیان دیگر یک معادله تفاضلی رابطه‌ای مشتمل بر مقادیر یک متغیر غیرمستقل به‌ازای مجموعه‌های جدا از مقادیر متغیر مستقل را بیان می‌دارد.

۳.۱۲ تغییر $y$ [illegible] تفاضل مرتبه اول $y$ [illegible] است و آن را بصورت زیر می‌نویسند:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]





[illegible]

## درجه و مرتبه یک معادله تفاضلی

[illegible]

# فصل ۱۲

# معادلات تفاضلی

## مقدمه

۱-۱۲ اگر متغیرها، به‌جای شکل لحظه‌ای یا پیوسته، به‌طور جدا یا گسسته ملاحظه شود، برای بیان روابط بین این تغییرات، به‌جای معادلات دیفرانسیل، معادلات تفاضلی مناسب خواهد بود غالباً معادلات تفاضلی برای تحلیل‌های بازرگانی و اقتصادی مفید هستند، زیرا بعضی از اطلاعات اقتصادی برحسب دوره‌های زمانی با فاصله‌های متساوی ثبت می‌شود.

## تعریف معادله تفاضلی

۲-۱۲ اگر $y_x = f(x)$ یک دنباله باشد هر رابطه بین تفاضلات محدود این دنباله را یک معادله تفاضلی گویند. به بیان دیگر، یک معادله تفاضلی رابطه‌ای مشتمل بر مقادیر یک متغیر غیرمستقل به‌ازای مجموعه‌ای جدا از مقادیر متغیر مستقل (یا وقفه) می‌باشد.

۳-۱۲ تغییر $y_x$ زمانی که $x$ از $x$ تا $x+1$ انجام شود، تفاضل مرتبه اول، $\Delta y_x$، است و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

به همین‌ترتیب تفاضل مرتبه دوم $y_x$، به‌صورت زیر است:

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

و تفاضل مرتبه سوم $y_x$، به‌صورت زیر است:

$$\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$$





و تفاضل مرتبه $n$ام $y_x$، به‌صورت زیر است[1]:

$$\Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-1} y_x) = y_{x+n} - c_n^1 y_{x+(n-1)} + c_n^2 y_{x+(n-2)} - \cdots + (-1)^n y_x$$

$$\Delta^n y_x = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!}(-1)^i y_{x+(n-i)}$$

مثال ۱-۱۲ اگر $y = x^2 - 3$ باشد، تفاضل مرتبه دوم آن را بیابید.

حل:

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = [(x+2)^2 - 3] - 2[(x+1)^2 - 3] + x^2 - 3 \Longrightarrow$$

$$\Delta^2 y_x = x^2 + 4x + 4 - 3 - 2x^2 - 4x - 2 + 6 + x^2 - 3 = 2$$

۴-۱۲ صورت کلی معادله تفاضلی مرتبه $n$ برحسب $y$ و $n$ تفاضل اولیه‌اش به شکل زیر است:

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots, \Delta^n y_x) = 0$$

توجه شود که $\Delta y_x$ نیز تابعی از $x$ است. $\Delta$، عملگر یا اپراتور است و قاعده‌ی محاسبه‌ی $y_x$ها را از دنباله‌ی $y_0, y_1, y_2, \cdots$ به‌دست می‌دهد. صورت کلی معادله تفاضلی را با استفاده از رابطه گریگوری-نیوتن نیز نمایش می‌دهند.

$$F(x, y_x, y_{x+h}, y_{x+2h}, \cdots, y_{x+nh}) = 0$$

مکرر است $h = 1$ باشد (در عبارت‌های قبلی چنین فرض شده بود)، یعنی داریم:

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

## درجه و مرتبه یک معادله تفاضلی

۵-۱۲ در معادله تفاضلی $F(x, y_x, y_{x+h}, \cdots, y_{x+nh}) = 0$، اگر $y_{x+nh}$ مقدار $y$ با بیش‌ترین اندیس باشد توان جبری آن را درجه تفاضلی گویند. اگر کم‌ترین اندیس و بیش‌ترین اندیس $y$ را درنظر بگیریم، اختلاف تعداد $h$ها را مرتبه معادله تفاضلی گویند.

مثال ۲-۱۲ در هر یک از معادلات تفاضلی زیر درجه و مرتبه آن‌ها را تعیین کنید.

الف) $y_{x+3} - y_{x+1}^2 + xy_x = 0$

ب) $y_{x+2} - 2y_{x+1}, x = y_x^3$

حل: الف) مرتبه سوم و درجه اول

ب) مرتبه اول و درجه اول

1. این رابطه موسوم به فرمول گریگوری-نیوتن است.

## معادلات تفاضلی خطی

۶_۱۲ اگر در صورت معادله‌ی تفاضلی، تابع تنها از درجه‌ی اول باشد، معادله، از نوع تفاضلی است. صورت کلی معادله تفاضلی خطی مرتبه nام به‌صورت زیر است:

$$a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y_{x+1} + a_n(x)y_x = g(x)$$

که در آن $g$، $a_0, a_1, \cdots, a_n$ تابعی از $x$ (و نه از $y$) بوده و برای مقادیر $x = 0, 1, 2, \cdots$ تعریف شده‌اند. در رابطه فوق اگر $g(x) = 0$ باشد، معادله تفاضلی را معادله خطی همگن گویند.

## تشکیل معادلات تفاضلی

۷_۱۲ دنباله‌ی $n$ پارامتر مستقل $y_x = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ را درنظر گرفته، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} y_x &= f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ y_{x+1} &= f(x+1, c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ &\vdots \\ y_{x+n} &= f(x+n, c_1, c_2, \cdots, c_n) \end{aligned}$$

اگر بین $n+1$ معادله فوق پارامترهای $c_1, c_2, \cdots, c_n$ را حذف کنیم، خواهیم داشت:

$$F(x, y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

که یک معادله تفاضلی مرتبه $n$ است.

**مثال ۳** معادله تفاضلی دنباله $y_x = c_1 2^x + c_2 4^x + 3x^2 + 2$ را تشکیل دهید.

حل

$$-2\begin{cases} y_x = c_1 2^x + c_2 4^x + 3x^2 + 2 \\ y_{x+1} = 2c_1 2^x + 4c_2 4^x + 3(x+1)^2 + 2 \end{cases}$$

ابتدا $c_1$ را حذف می‌کنیم:

$$y_{x+1} - 2y_x = 2c_2 4^x - 3x^2 + 6x + 1$$

در رابطه فوق $x$ را به $x+1$ بدل می‌کنیم:

$$-4\begin{cases} y_{x+1} - 2y_x = 2c_2 4^x - 3x^2 + 6x + 1 \\ y_{x+2} - 2y_{x+1} = 8c_2 4^x - 3(x+1)^2 + 6(x+1) + 1 \end{cases}$$

$c_2$ را حذف می‌کنیم:

$$y_{x+2} - 6y_{x+1} + 8y_x = 9x^2 - 24x \qquad \text{معادله تفاضلی مرتبه دوم}$$



## جواب‌های معادلات تفاضلی

۸_۱۲ جواب یک معادله تفاضلی، رابطه‌ای تابعی است که مشتمل بر تفاضل‌ها نباشد و برای جمیع مقادیر صحیح غیرمنفی تعریف شده باشد و همچنین در معادله تفاضلی صدق کند. چنین جوابی بسته به اینکه پارامترهای مستقل مشخص شده و یا نشده‌اند ممکن است جواب عمومی یا خصوصی باشد.

## جواب عمومی معادله تفاضلی

۹_۱۲ دنباله $n$ پارامتری مستقل از هم $y_x = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ را درنظر می‌گیریم، معادله تفاضلی این معادله به‌صورت $F(x, y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+n}) = 0$ است. بدیهی است که دنباله $y_x$ در معادله تفاضلی صدق می‌کند، دنباله $y_x$ را جواب عمومی معادله تفاضلی گویند. اگر معادله تفاضلی مرتبه اول باشد جواب عمومی آن دارای یک پارامتر مستقل است و اگر معادله تفاضلی مرتبه دوم باشد جواب عمومی آن داری دو پارامتر مستقل است و به‌طور کلی اگر معادله تفاضلی مرتبه $n$ باشد جواب عمومی آن دارای $n$ پارامتر مستقل است.

## جواب خصوصی معادله تفاضلی

۱۰_۱۲ فرض می‌کنیم $y_x = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$، جواب عمومی معادله تفاضلی $F(x, y_x, y_{x+1}, \cdots, y_{x+n}) = 0$ باشد، اگر شرط یا شرایط خاصی را درنظر بگیریم به‌طوری که برخی یا تمامی پارامترهای مستقل محاسبه شود، جواب بدست آمده موسوم به جواب خصوصی معادله تفاضلی است.

**مثال ۴** نشان دهید $y_x = x + c$ یک جواب معادله $y_{x+1} - y_x = 1$ است. اگر $y_0 = 2$ باشد جواب خصوصی آن را پیدا کنید.

حل

$$y_{x+1} - y_x = 1 \Longrightarrow (x + 1 + c) - (x + c) = 1 \Longrightarrow 1 = 1$$

بنابراین $y_x = x + c$ یک جواب معادله است.

$$y_0 = 2 \Longrightarrow 2 = 0 + c \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow y_x = x + 2 \qquad \text{جواب خصوصی}$$

## جواب‌های مستقل خطی

۱۱_۱۲ قضیه: مجموع $n$ تابع $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر دترمینان زیر مخالف صفر باشد، در غیر این‌صورت این توابع وابسته خطی هستند.

$$C = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & \cdots & f_n(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & \cdots & f_n(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(n-1) & f_2(n-1) & \vdots & f_n(n-1) \end{vmatrix}$$

**مثال ۵** توابع $1.5x$، $x^2 + 1$، $x^2 + x$ وابسته خطی هستند یا مستقل خطی؟

... $C \neq 0$ توابع مستقل خطی ...

حل

$$C=\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0)\\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1)\\ f_1(2) & f_2(2) & f_3(2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 2\\ 10 & 5 & 6\end{vmatrix}=-10\neq 0 \Longrightarrow$$ توابع مستقل خطی‌اند.

۱۲_۱۲ قضیه: اگر $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$، $n$ ریشه مستقل خطی یک معادله تفاضلی خطی مرتبه $n$ باشند، در این‌صورت جواب عمومی به‌صورت زیر است:

$$y_x = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

**مثال ۶** در معادله تفاضلی $2y_{x+2} - 5y_{x+1} + 2y_x = 0$ جواب‌های $(3)^x$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ صدق می‌کنند، مطلوب است جواب عمومی معادله تفاضلی.

حل توابع $(3)^x$، $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ مستقل خطی‌اند، زیرا $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 3\end{vmatrix} = \frac{5}{2} \neq 0$، بنابر قضیه ۲ خواهیم داشت:

$$y_x = c_1(3)^x + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

## معادله تفاضلی خطی مرتبه اول

۱۳_۱۲ این معادله به‌صورت زیر است:

$$y_{x+1} = Ay_x + B$$

که در آن $A$ و $B$ اعداد ثابت و $A \neq 0$ است. جواب عمومی آن عبارت است از:

$$y_x = A^x\left(y_0 - \frac{B}{1-A}\right) + \frac{B}{1-A} \quad , \quad A \neq 1$$
$$y_x = y_0 + Bx \quad , \quad A = 1$$

$y_0$ به‌عنوان ثابت دلخواه جواب عمومی است. اگر $y_0$ معلوم باشد، جواب خصوصی معادله به‌دست می‌آید.

**مثال ۷** جواب عمومی معادله تفاضلی $2y_{x+1} - 4y_x = 3$ را بیابید و بەازاء $y_0 = \frac{5}{2}$ جواب خصوصی آن را تعیین کنید.

حل

$$2y_{x+1} - 4y_x = 3 \Longrightarrow 2y_{x+1} = 4y_x + 3 \Longrightarrow y_{x+1} = 2y_x + \frac{3}{2}$$

جواب عمومی $$y_x = 2^x\left(y_0 - \frac{\frac{3}{2}}{1-2}\right) + \frac{\frac{3}{2}}{1-2} \Longrightarrow y_x = 2^x\left(y_0 + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}$$

جواب خصوصی $$y_0 = \frac{5}{2} \Longrightarrow y_x = 2^x\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = 2^x(4) - \frac{3}{2} \Longrightarrow y_x = 2^{x+2} - \frac{3}{2}$$



## معادله تفاضلی خطی مرتبه دوم

۱۴_۱۲ این معادله تفاضلی به‌صورت کلی

$$Ay_{x+2} + By_{x+1} + Cy_x = f(x)$$

می‌باشد، برای حل آن معادله درجه دوم $Ak^2 + Bk + C = 0$ را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن $(k_1, k_2)$ را به‌دست می‌آوریم:

| | |
|---|---|
| ۱) اگر $\Delta > 0$، دو ریشه $k_1$ و $k_2$، آنگاه: | $y_x = c_1k_1^x + c_2k_2^x + y^*$ |
| ۲) اگر $\Delta = 0$، ریشه مضاعف $k_1 = k_2$، آنگاه: | $y_x = c_1k_1^x + c_2xk_1^x + y^*$ |
| ۳) اگر $\Delta < 0$، ریشه مختلط $a \pm bi$، آنگاه: | $y_x = r^x(c_1\cos\theta x + c_2\sin\theta x) + y^*$ |

در حالت (۳) داریم $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

برای تعیین $y^*$ دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

الف) اگر $f(x) = 0$ باشد، آنگاه $y^* = 0$ است.

ب) اگر $f(x)$ مقدار ثابتی باشد، یعنی $f(x) = D$ در معادله $Ay_{x+2} + By_{x+1} + Cy_x = D$ باید به‌جای $y_x = f(x)$، $f(x) = y^*$ را قرار داد. در صورتی که $y^*$ به‌طریق فوق به‌دست نیامد باید $f(x) = xy^*$ را قرار دهیم و اگر باز هم به‌دست نیامد $f(x) = x^2y^*$.

**مثال ۸** جواب عمومی معادله‌ی تفاضلی $y_{x+2} + 16y_x = 17$ و همچنین جواب خصوصی آن را اگر $y_0 = 0$ و $y_1 = 1$ باشد پیدا کنید.

حل

$$k^2 + 16 = 0, \Delta < 0, k^2 = -16 \Longrightarrow k = \pm 4i$$

$$r = \sqrt{0 + 16} \Longrightarrow r = 4, \tan\theta = \frac{4}{0} = \infty \Longrightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$y_x = 4^x\left(c_1\cos\frac{\pi}{2}x + c_2\sin\frac{\pi}{2}x\right) + y^*$$

$$y^*: y^* + 16y^* = 17 \Longrightarrow y^* = 1 \Longrightarrow y_x = 4^x\left(c_1\cos\frac{\pi}{2}x + c_2\sin\frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \Longrightarrow 4^0(c_1\cos 0 + c_2\sin 0) = 0\\ y_1 = 1 \Longrightarrow 4^1\left(c_1\cos\frac{\pi}{2} + c_2\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + 0 = 0 \Longrightarrow c_1 = 0\\ 4(0 + c_2) = 1 \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{4}\end{cases}$$

$$y_x = 4^x\left(\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}x\right) + 1 = 4^{x-1}\sin\frac{\pi}{2}x + 1$$