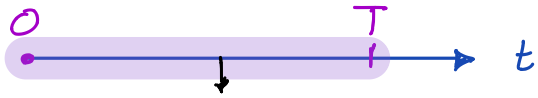
به نام حضرت دوست

98.10.07, Math for Econ, جلسه 26



$v(k(t), c(t), t)$ instantaneous utility function

بهینه‌سازی پویا

$\dot{k}(t) = g(k(t), c(t), t)$, $\dot{k}$: نرخ افزایش ثروت

چون افق برنامه‌ریزی ما لحظه‌ای نیست، می‌خواهیم مطلوبیت یک دوره را بیشینه کنیم.

$\Leftarrow$ هدف، انتخاب مسیر $c(t)$ به نحوی است که میانگین v را در طول یک دوره بیشینه کند.

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^T v(k(t), c(t), t)\, dt$$

(a) $\dot{k}(t) = g(k(t), c(t), t)$ قانون حرکت

(b) $k(0) = k_0$ شرط اولیه

(c) $e^{-\bar{r}(T).T} \cdot k(T) \geq 0$ شرط نهایی

$\&\ \bar{r}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T r(t)\, dt$

شرط (c) چه می‌گوید؟ الف) $T < \infty$ $\Leftarrow$ $e^{-\bar{r}(T)T} k(T) \geq 0$

$k(T) \geq 0$

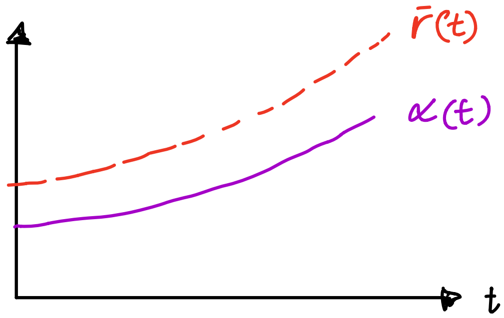
یعنی آخر بهینه‌سازی مقروض نباشی

No dying in debt!

ب) $T=\infty$ $\qquad \lim_{T\to\infty} e^{-\bar{r}(T).T}.\,k(T)\geq 0$

یعنی می‌توانیم همواره مقروض باشیم به شرطی که نرخ بازپس دادن وام کمتر از $\bar{r}(t)$ در هر نقطه باشد.

$$k(t)=-ae^{\alpha(t)t}\ ,\ \alpha(t)>0\ ,\ \alpha(t)<\bar{r}(t)$$



$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} e^{-\bar{r}(T)T}\cdot -ae^{\alpha(T).T}$$

$$=\lim_{T\to\infty} -a\cdot e^{-(\bar{r}(T)-\alpha(T)).T}=0$$

برای مقایسه، یکبار دیگر بهینه‌سازی ایستا را مرور می‌کنیم:

$$\max f(x) \quad s.t.\ g(x)\geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}\doteq f(x)+\lambda g(x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0 & \text{شرط مرتبه نخست} \\ \lambda g(x)=0 \quad \lambda\geq 0 \quad g\geq 0 & \text{متمم لنگی} \end{cases}$$

با همین رویکرد بررسی کنیم، شرط (c) شرطی ایستا است. ولی شرط (a) به ازای هر لحظه باید رعایت شود. در نتیجه، به جای یک μ کلی، به ازای هر لحظه یک $\mu(t)$ خواهیم داشت!

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}=\int_0^T v(k(t),c(t),t)\,dt+\int_0^T \mu(t)\left(g(k(t),c(t),t)-\dot{k}(t)\right)dt \\ \quad +\ \nu e^{-\bar{r}(T)T}k(T) \\ \left(\nu e^{-\bar{r}(T)T}k(T)=0,\ \nu\geq 0,\ e^{-\bar{r}(T)T}k(T)\geq 0\right) \ \text{متمم لنگی ایستا} \end{array}}$$

ارزش تغییر در سرمایه به واحد مطلوبیت

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \int_0^T \Big[v(k(t), c(t), t) + \overset{\frown}{\mu(t)}\, \underbrace{g(k(t), c(t), t)}_{\text{اثر غیر مستقیم مصرف در مطلوبیت (تعیین } k)} \Big] dt$$

$$- \int_0^T \mu(t)\, \dot{k}(t)\, dt + v e^{-\bar{r}(T)T} k(T)$$

$$\boxed{\Rightarrow H(k(t), c(t), t) : v(k(t), c(t), t) + \mu(t)\, g(k(t), c(t), t)}$$

Hamiltonian Function نمایانگر اثر مصرف روی مطلوبیت نقطه‌ای

$$-\int_0^T \mu(t)\, \dot{k}(t)\, dt = -\mu(t) k(t) \Big|_0^T + \int_0^T \dot{\mu}(t) k(t) dt$$

$$= -\mu(T) k(T) + \mu(0) k(0) + \int_0^T \dot{\mu}(t) k(t) dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \int_0^T \Big(H(k(t), c(t), t) + \dot{\mu}(t) k(t) \Big) dt + \mu(0) k_0$$

$$+ \left(v e^{-\bar{r}(T)T} - \mu(T) \right) k(T)$$

FOC : ① $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial k(t)} = 0$, ② $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c(t)} = 0$, ③ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial k(T)} = 0$

1: $\dfrac{\partial H}{\partial k} + \dot{\mu} = 0$, $\dot{k} = g(k, c, t)$ (معادلات اویلر)

شروط "لازم" برای جواب مسئله بهینه سازی پویا

2: $\dfrac{\partial H}{\partial c} = 0$ (اصل ماکسیمم)

3: $v e^{-\bar{r}(T) \cdot T} = \mu(T)$, $\begin{cases} v e^{-\bar{r}(T)T} k(T) = 0 \\ e^{-\bar{r}(T) \cdot T} k(T) \geq 0 \quad v \geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \mu(T) k(T) = 0$ (شرط تراگذری)

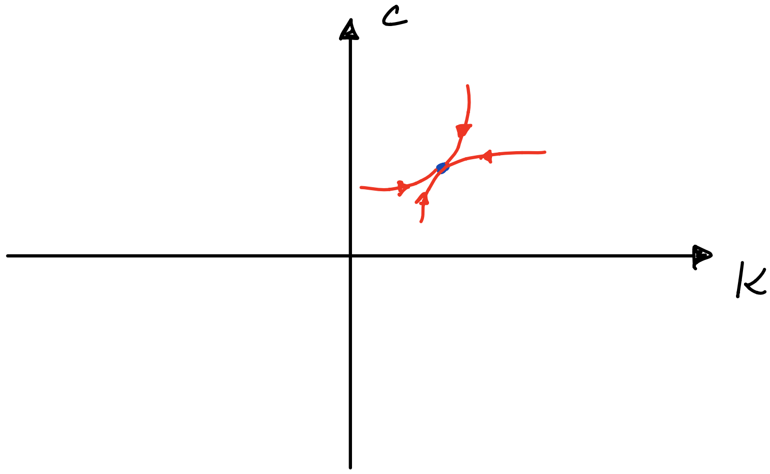
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial C} = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\mu} \\ \dot{k} = g(k, c, t) \end{cases}$$

سه معادله سه مجهول

که دومی μ را حذف می‌کنم

$$\begin{cases} \dot{c} = h(k, c) \\ \dot{k} = g(k, c) \end{cases}$$

دستگاه معادلات (غیرخطی) صفحه‌ای



مثال: مصرف خانوار:

$W(t)$: ثروت خانوار

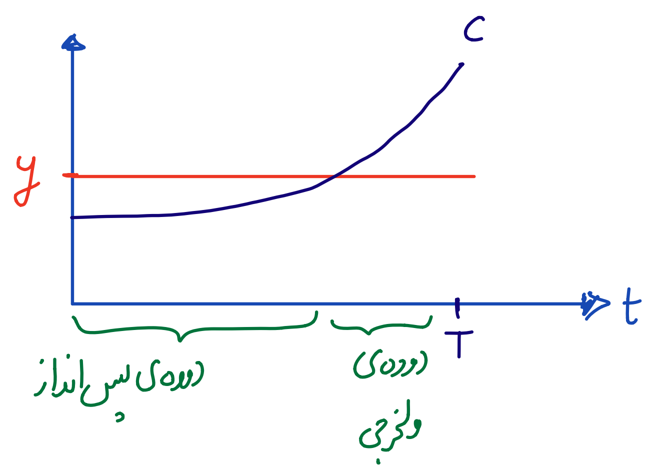
$\dot{w}(t) = r\,w(t) + s(t)$

y : درآمد ثابت

$y = s(t) + c(t)$: پس‌انداز + مصرف

$W(0) = W(T) = 0$

utility : $\max \int_0^T \log(c(t))\, dt$



$$\begin{cases} V(w, c, t) = \ln c(t) \\ \dot{w}(t) = r w(t) + y - c(t) \\ W(0) = 0 \\ W(T) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H_t = \ln c_t + \mu_t (r w_t + y - c_t)$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c_t} - \mu_t = 0 \Rightarrow \dot{c}\mu + c\dot{\mu} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial w_t} = -\dot{\mu}_t \Rightarrow r\mu_t = -\dot{\mu}_t \Rightarrow \frac{-\dot{\mu}_t}{\mu_t} = r \quad (2)$$

$$\dot{w}_t = r w_t + y - c_t$$

$$1, 2 \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = r \Rightarrow c(t) = c_0 e^{rt}$$

$$\Rightarrow \dot{w} = rw + (y - c_0 e^{rt}) \quad \Rightarrow W(t) = w_0 e^{rt} + e^{rt} \int_0^t e^{-rs}(y - c_0 e^{rs}) ds$$

$$\Rightarrow W(t) = e^{rt}\left[y \int_0^t e^{-rs} ds - c(0) \int_0^t ds \right] = e^{rt}\left[\underbrace{y \left(\frac{-1}{r} e^{-rs} \right) \Big|_0^t}_{\frac{y}{r}(1-e^{-rt})} - c(0)\, t \right]$$

$$\Rightarrow W(t) = e^{rt}\left(\frac{y}{r}(1 - e^{-rt}) - c(0)t \right)$$

$$W(T) = 0 \quad \Rightarrow c(0) = \frac{y}{rT}(1 - e^{-rT}) \Rightarrow c(t) = \frac{y}{rT}(1 - e^{-rT})e^{rt}$$