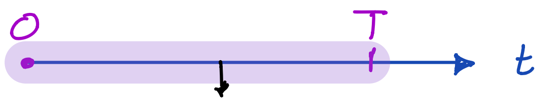
به نام حضرت دوست

98.10.07, Math for Econ, جلسه 26

بهینه‌سازی پویا



$v(k(t), c(t), t)$ instantaneous utility function

$\dot{k}(t) = g(k(t), c(t), t)$, $\dot{k}$: نرخ افزایش ثروت

چون افق برنامه‌ریزی ما لحظه‌ای نیست، می‌خواهیم مطلوبیت یک دوره را بیشینه کنیم.

$\Leftarrow$ هدف، انتخاب مسیر $c(t)$ به نحوی است که میانگین v را در طول یک دوره بیشینه کند.

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^T v(k(t), c(t), t)\,dt$$

(a) $\dot{k}(t) = g(k(t), c(t), t)$ قانون حرکت

(b) $k(0) = k_0$ شرط اولیه

(c) $e^{-\bar{r}(T).T}.\ k(T) \geq 0$ شرط نهایی

$\& \ \bar{r}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T r(t)\,dt$

شرط (c) چه می‌گوید؟

الف) $T < \infty \Rightarrow e^{-\bar{r}(T)T} k(T) \geq 0$

$k(T) \geq 0$

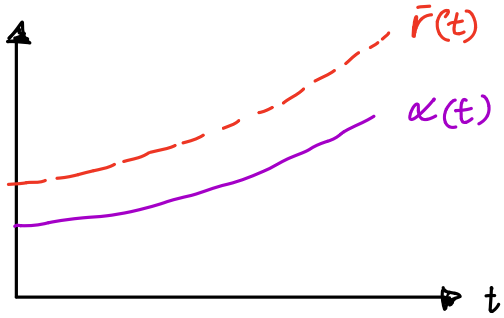
یعنی آخر بهینه‌سازی مقروض نباشی

No dying in debt!

ب) $T=\infty$ $\qquad \lim_{T\to\infty} e^{-\bar{r}(T).T}.\,k(T)\geq 0$

یعنی می‌توانیم همواره مقروض باشیم به شرطی که نرخ بازپس دادن وام کمتر از $\bar{r}(t)$ در هر نقطه باشد.

$k(t) = -a e^{\alpha(t)t}$, $\alpha(t)>0$, $\alpha(t)<\bar{r}(t)$



$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} e^{-\bar{r}(T)T}.-a e^{\alpha(T).T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} -a\,.\,e^{-(\bar{r}(T)-\alpha(T)).T} = 0$$

برای مقایسه، یکبار دیگر بهینه‌سازی ایستا را مرور می‌کنیم:

$$\max f(x) \quad s.t.\ g(x)\geq 0 \Rightarrow \mathcal{L} \doteq f(x)+\lambda g(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0 & \text{شرط مرتبه نخست} \\ \lambda g(x)=0 \quad \lambda\geq 0 \quad g\geq 0 & \text{متمم لنگی} \end{cases}$$

با همین رویکرد بررسی کنیم، شرط (c) شرطی ایستان است. ولی شرط (a) به ازای هر لحظه باید رعایت شود. در نتیجه، به جای یک μ کلیتا، به ازای هر لحظه یک $\mu(t)$ خواهیم داشت!

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int_0^T v(k(t),c(t),t)\,dt + \int_0^T \mu(t)\left(g(k(t),c(t),t) - \dot{k}(t)\right)dt \\ & + \nu\, e^{-\bar{r}(T)T} k(T) \\ & \left(\nu e^{-\bar{r}(T)T}k(T)=0,\ \nu\geq 0,\ e^{-\bar{r}(T)T}k(T)\geq 0\right) \quad \text{متمم لنگی ایستا} \end{aligned}}$$

ارزش تغییر در سرمایه به واحد مطلوبیت

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \int_0^T \Big[v(k(t), c(t), t) + \overbrace{\mu(t)}\, \underbrace{g(k(t), c(t), t)} \Big] dt$$

اثر غیر مستقیم مصرف در مطلوبیت (تعیین k)

$$- \int_0^T \mu(t)\, \dot{k}(t)\, dt + v e^{-\bar{r}(T)T} k(T)$$

$$\Longrightarrow H(k(t), c(t), t) : v(k(t), c(t), t) + \mu(t) g(k(t), c(t), t)$$

Hamiltonian Function

نمایانگر اثر مصرف روی مطلوبیت نقطه‌ای ...

$$- \int_0^T \mu(t)\, \dot{k}(t)\, dt = -\mu(t) k(t) \Big|_0^T + \int_0^T \dot{\mu}(t) k(t)\, dt$$

$$= -\mu(T) k(T) + \mu(0) k(0) + \int_0^T \dot{\mu}(t) k(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \int_0^T \big(H(k(t), c(t), t) + \dot{\mu}(t) k(t) \big) dt + \mu(0) k_0$$

$$+ \left(v e^{-\bar{r}(T)T} - \mu(T) \right) k(T)$$

FOC: ① $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial k(t)} = 0$, ② $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c(t)} = 0$, ③ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial k(T)} = 0$

1: $\dfrac{\partial H}{\partial k} + \dot{\mu} = 0$, $\dot{k} = g(k, c, t)$ (معادلات اویلر)

شروط «لازم» برای جواب مسئله بهینه‌سازی پویا

2: $\dfrac{\partial H}{\partial c} = 0$ (اصل ماکسیمم)

3: $v e^{-\bar{r}(T).T} = \mu(T)$, $\begin{cases} v e^{-\bar{r}(T)T} k(T) = 0 \\ e^{-\bar{r}(T).T} k(T) \geq 0 \quad v \geq 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow \mu(T) k(T) = 0$ (شرط ترآگذری)

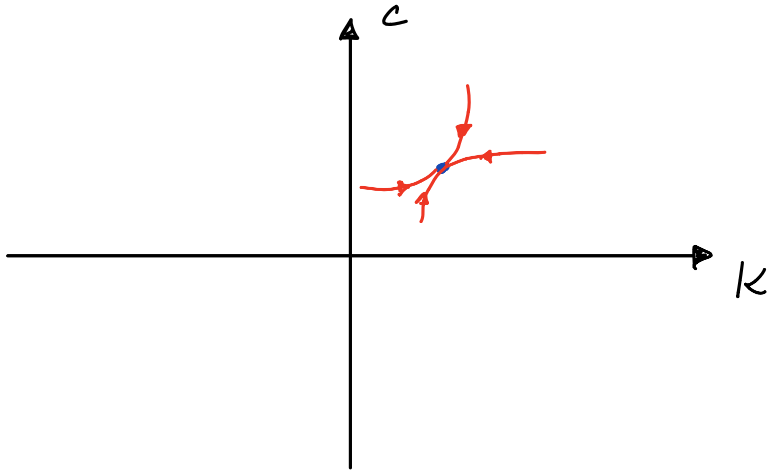
$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial C} = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\mu} \\ \dot{k} = g(k, c, t) \end{cases}$$

سه معادله سه مجهول

که دوتایی μ را حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} \dot{c} = h(k, c) \\ \dot{k} = g(k, c) \end{cases}$$

دستگاه معادلات (غیرخطی) صفحه‌ای



مثال: مصرف خانوار:

$W(t)$: ثروت خانوار

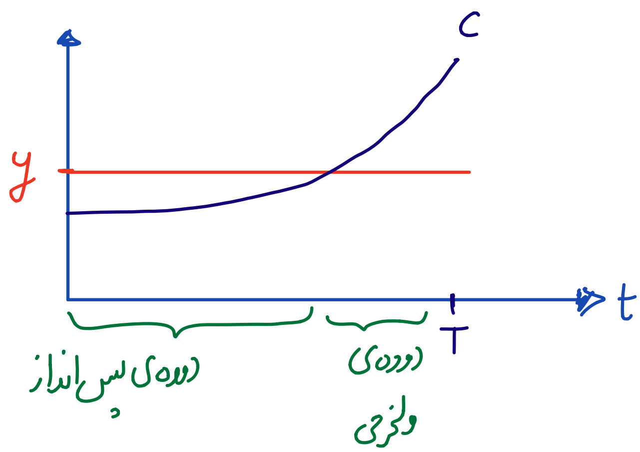
$\dot{W}(t) = r\,W(t) + S(t)$

y : درآمد ثابت

$y = S(t) + C(t)$: پس‌انداز + مصرف

$W(0) = W(T) = 0$

utility : $\max \int_0^T \log(c(t))\,dt$



$$\begin{cases} V(w, c, t) = \ln c(t) \\ \dot{w}(t) = r w(t) + y - c(t) \\ W(0) = 0 \\ W(T) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow H_t = \ln C_t + \mu_t (r w_t + y - c_t)$

$\dfrac{\partial H_t}{\partial C_t} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{C_t} - \mu_t = 0 \Rightarrow \dot{c}\mu + c\dot{\mu} = 0$ ①

$\dfrac{\partial H_t}{\partial w_t} = -\dot{\mu}_t \Rightarrow r\mu_t = -\dot{\mu}_t \Rightarrow \dfrac{-\dot{\mu}_t}{\mu_t} = r$ ②

$\dot{w}_t = r w_t + y - c_t$

1, 2 $\Rightarrow \dfrac{\dot{c}}{c} = r \Rightarrow c(t) = c_0 e^{rt}$

$$\Rightarrow \dot{w} = rw + \left(y - c_0 e^{rt}\right) \Rightarrow w(t) = w_0 e^{rt} + e^{rt}\int_0^t e^{-rs}\left(y - c_0 e^{rs}\right) ds$$

$$\Rightarrow w(t) = e^{rt}\left[y\int_0^t e^{-rs}\, ds - c(0)\int_0^t ds\right] = e^{rt}\left[\underbrace{y\left(\frac{-1}{r}e^{-rs}\right)\Big|_0^t}_{\frac{y}{r}(1-e^{-rt})} - c(0)\, t\right]$$

$$\Rightarrow w(t) = e^{rt}\left(\frac{y}{r}\left(1-e^{-rt}\right) - c(0)\, t\right)$$

$$w(T) = 0 \Rightarrow c(0) = \frac{y}{rT}\left(1-e^{-rT}\right) \Rightarrow c(t) = \frac{y}{rT}\left(1-e^{-rT}\right)e^{rt}$$