به نام حضرت دوست

98.10.14, Math for Econ, جلسه 28

مدل رمزی را بررسی کردیم: سرانه سرمایه k سرانه مصرف c

$$\underset{CRRA}{u(c)} = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \gamma>0,\ \gamma\neq 1 \\ \ln(c) & \gamma=1 \end{cases}$$

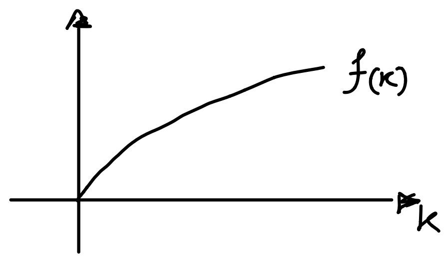
$$\delta_u(c) = -\left(\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right)^{-1}$$

for CRRA: $\delta_u(c) = \dfrac{1}{\gamma}$

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t)\,dt$$

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k) - c - nk \\ \dot{c} = \dfrac{c}{\gamma}\left(f'(k) - n - \rho\right) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0$$



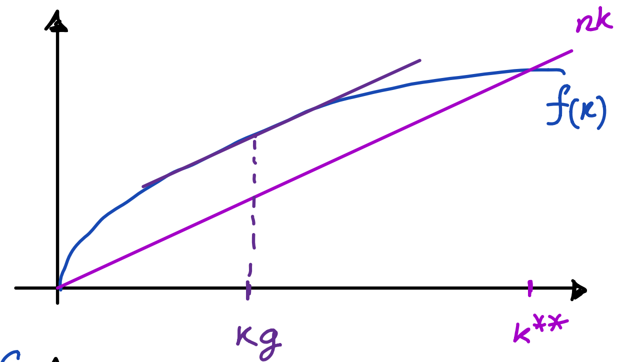
$f'(0)=\infty$

$f'(\infty)=0$

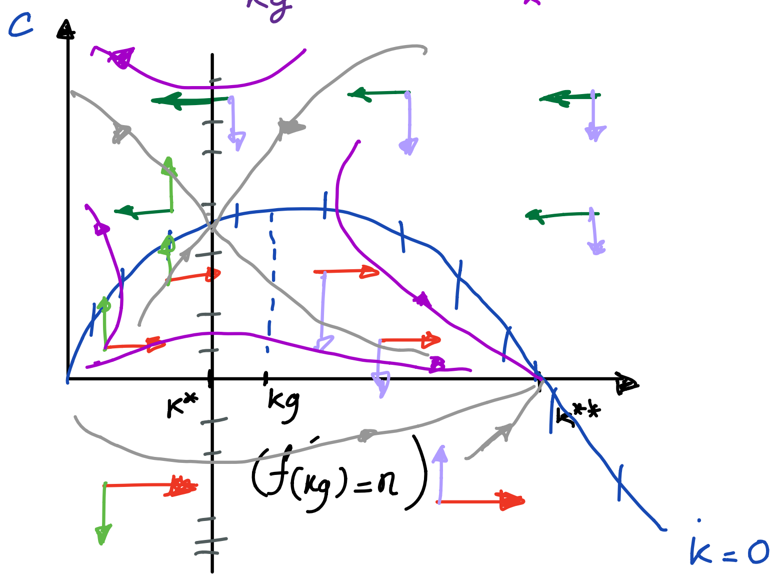
$f(0)=0$

$\dot{k}=0 \iff c = f(k) - nk$

$k=0 \rightsquigarrow c(0) = f(0) - 0 = 0$



$f(k^{**}) = nk^{**} \Rightarrow c(k^{**}) = 0$



$f(k) - nk > c \Rightarrow \dot{k} > 0$

$f(k) - nk < c \Rightarrow \dot{k} < 0$

$$\dot{c}=0 \iff \begin{cases} c=0 \\ \text{یا} \\ f'(k) = n+\rho \end{cases}$$

f' پیوسته و نزولی است. از ∞ شروع شده و به 0 ختم می‌شود. پس هر عدد مثبتی را اختیار می‌کند، از جمله $n+\rho$

یعنی $k^*>0$ وجود دارد طوری که $f'(k^*)=n+\rho$.

چون f' نزولی است، $f'(k_g)=n$, $f'(k^*)=n+\rho$ $\Longleftarrow$ $k^*<k_g$

$k<k^*$ (f' نزولی است) $\Longrightarrow f'(k)>n+\rho \Rightarrow \dot{c}>0$

if $\rho=0 \Rightarrow k^g=k^*$

ow: $k^g<k^*$ $\Leftarrow$ یعنی رجحان زمانی موجب می‌شود میان k_g , k^* تفاوت باشد.

if $\underbrace{\rho=0}_{\text{زودتر مصرف کنم}} \rightsquigarrow k^g=k^*$

k^*: سرمایه‌ی طلایی مصرف شود

کل مسیرها وقتی $t\to\infty$
1ـ به محور c ها ختم می‌شوند $k=0$
2ـ بازوی پایدار به (k^*,c^*) می‌رسد.
3ـ به نقطه‌ی $(k^{**},0)$ ختم می‌شوند.

مسیر 2: $\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}c_t^{-\theta}k_t=\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}c^{*-\theta}k^*=0$ $\qquad \lambda(t)=u'(c)=c^{-\theta}$

شرط تراگذری رعایت می‌شود.

مسیر 1: روی این مسیرها به $k=0$ می‌رسیم. $\qquad f'(k)\to\infty \Rightarrow \dot{c}>0$ (1)

اما وقتی $k=0$، بلافاصله مصرف به 0 می‌رسد، یعنی $\dot{c}<0$ $\Leftarrow$ (1) ✗

مسیر 3: مسیرهایی که به سمت $(k^{**}, 0)$ منتهی می‌شود:

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{e^{-\rho t}}_{\to 0} \underbrace{c_t^{-\sigma}}_{\to \infty} k_t$$

$$A(t) = e^{-\rho t} c_t^{-\sigma} \rightsquigarrow \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{(e^{-\rho t})}}{(e^{-\rho t})} + \frac{\dot{(c_t^{-\sigma})}}{(c_t^{-\sigma})} = -\rho - \sigma \frac{\dot{c}}{c} \quad (2)$$

$$= -\rho + n + \rho - f'(k) = n - f'(k) \rightsquigarrow k \to k^{**} \quad n - f'(k) > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} c_t^{-\sigma} k_t \to \infty \quad \times$$

اثبات کردیم مسیرهای 1 و 3 شرط تراگذری را ارضا نمی‌کنند.