برآوردگرهای روش گشتاورهای تعمیم یافته

غلامرضا کشاورز حداد

اقتصاد سنجی ۲

4 أکتوبر 2021

مقدمه: روش برآورد گشتاورهای تعمیم یافته چیست؟

- روش برآورد GMM دربر گیرنده تخمین زنهای گشتاوری و تخمین زنهای گشتاورهای تعمیم یافته است.
- نشان داده می شود که:
  - روش های برآورد حداقل مربعات معمولی
  - متغیرهای ابزاری
  - حداقل مربعات تعمیم یافته
  - روش برآورد حداقل مربعات دو مرحله ای
  - حداکثرراستنمایی
- حالت خاصی از روش برآورد GMM است.

روش تخمین زنهاي گشتاورهاي تعميم يافته

- فرض کنيد مجموعه اي از مشاهدات مربوط به متغيرتصادفی z که قانون احتمال آن به پارامترهاي ناشناخته $\boldsymbol{\theta}$ بستگي دارد، در اختيار باشد.
- یک رهيافت رايج برآورد $\boldsymbol{\theta}$ براساس اصل حداکثر راستنمايي است، که در آن تخمين زن به گونه اي اختيار مي شود که براي آن مقدار از تخمين زن انتخاب شده، احتمال مشاهده شدن داده ها حداکثر گردد.
- روش GMM روشي ديگر براي برآورد پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ است.
- بيان کلي GMM توسط هانسن (1982) ابداع و ارايه شده است.

روش گشتاورهای تعمیم یافته

- روش GMM شکل گسترش يافته اي از روش گشتاورها استMM که در آن تعداد شرط هاي متعامد بودن (تعداد گشتاورها) بيشتر از تعداد پارامترها است.

- وجود شرط هاي اضافه بر تعداد پارامترها سبب افزايش کارآيي تخمين زن ها و نيز پديد آوردن جنبه هاي جديدي (از جمله ملاحظات نظری) مي گردد که مي تواند آزمون گردد.

- بسياري از روش هاي برآورد سنتي نظير حداقل مربعات معمولیLS، متغيرهای ابزاریIV و حداکثر راستنمايی MLE حالتهاي خاصي از GMM هستند، که در آن تعداد گشتاورها دقيقا برابر با تعداد پارامترهای مجهول هستند.

شرط های گشتاوری در GMM

- فرض کنید به تعداد q شرط گشتاوري غيرشرطي داشته باشيم:

$$E(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) = \begin{pmatrix} E(m_1(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \\ E(m_2(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \\ \vdots \\ E(m_q(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0)) \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{q\times 1} \qquad (1)$$

- كه در آن، ما علاقمند به برآورد بردار $(K \times 1)$ پارامتر $\boldsymbol{\beta}$ با $K \leq q$ هستیم.
- مقدار واقعی بردار پارامتر برابر (مقدار جامعه) برابر $\boldsymbol{\beta}_0$ است. فرض را براين قرار مي دهيم كه w_t يک فرَآيند (بردار) مانا است.

شرط های گشتاوری در GMM

- میانگین نمونه، یا شرطهاي گشتاور نمونهاي، ارزشيابي شده در بعضي از مقادير $\boldsymbol{\beta}$ ، عبارت است از:

$$\overline{m}(\boldsymbol{\beta}) = (1/T)\sum_{t=1}^{T} m_1(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta}_0) \tag{2}$$

- میانگین نمونه اي $\overline{m}(\boldsymbol{\beta})$ برداري از توابعي از متغيرهاي تصادفي است، بنابراين خود آنها نيز متغيرهاي تصادفي هستند و به نمونه استفاده شده بستگي دارند.

شرط های گشتاوری در روش گشتاورها MM

مثال

شرطهاي گشتاوري براى مدل سرى زمانى MA(1)

روش گشتاورها براي فرايند(۱)MA
در یک فرآیند (۱)MA میانگین متحرک $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ ، واریانس و نیز اتوکواریانس مرتبه یک این فرآیند به صورت زیر بدست میآید.

$$E(y_t) = 0 \quad E(y_t^2) = E[\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}]^2 = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2)$$
$$E(y_t y_{t-1}) = E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})] = \sigma_\varepsilon^2\theta$$

همتاهای نمونه ای این گشتاورهای جامعه عبارتند از:

$$var(y_t) = \sum_{t=1}^{T} y_t^2 / T, \qquad cov(y_t, y_{t-1}) = \sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1} / T$$

آنگاه شرطهای گشتاوری به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sum_{t=1}^{T} y_t^2 / T - \sigma_\epsilon^2(1+\theta^2) = 0$$
$$\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1} / T - \sigma_\epsilon^2\theta^2 = 0$$

شرط های گشتاوری در روش گشتاورها MM

مثال

شرطهاي گشتاوري براي IV/2SLS

- مدل خطي را در نظر بگيريد. كه در آن: $\boldsymbol{x}_t$ و $\boldsymbol{\beta}$ بردارهاي 1×K است. فرض كنيد $\boldsymbol{Z}_t$ يک بردار $1 \times q$ باشد.
- شرطهاي گشتاوري و همتاهاي نمونه اي آن عبارت است از:

$$\mathbf{0}_{q\times 1} = E\boldsymbol{z}_t u_t = E[\boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta})]$$

$$\overline{m}(\boldsymbol{\beta}) = (1/T)\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta}_0)$$

يا در شكل ماتريسی $\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})/T$

- اگر q=k باشد، تخمين زن بالا براي بردار $\boldsymbol{\beta}$ همان تخمين زنهاي IV.
- و اگر $\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{x}_t$ باشد، تخمين زنهاي OLS بدست مي آيند.

مقایسه نتایج GMM و OLS

مثال

کدهای استاتا

```
*OLS estimator and GMM are equivalent if instruments
*and instrumented covariates are the same
regress mpg gear_ratio turn

gmm (mpg - {b1}*gear_ratio - {b2}*turn - {b0}),
   instruments(gear_ratio turn)
```

مقایسه نتایج GMM و OLS

Source	SS	df	MS
Model	1339.68678	2	669.843392
Residual	1103.77268	71	15.546094
Total	2443.45946	73	33.4720474

Number of obs	=	74
F(2, 71)	=	43.09
Prob > F	=	0.0000
R-squared	=	0.5483
Adj R-squared	=	0.5355
Root MSE	=	3.9429

mpg	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
gear_ratio	3.032884	1.372978	2.21	0.030	.2952433	5.770524
turn	-.7330502	.1424009	-5.15	0.000	-1.01699	-.4491108
_cons	41.21801	8.990711	4.58	0.000	23.29104	59.14498

```
Number of parameters =   3
Number of moments    =   3
Initial weight matrix: Unadjusted                 Number of obs   =         74
GMM weight matrix:     Robust
```

	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
/b1	3.032884	1.501664	2.02	0.043	.0896757	5.976092
/b2	-.7330502	.117972	-6.21	0.000	-.9642711	-.5018293
/b0	41.21801	8.396739	4.91	0.000	24.76071	57.67532

Instruments for equation 1: gear_ratio turn _cons

شرط های گشتاوری در MM

مثال

شرط هاي گشتاوري براي MLE با فرض k=q

- تخمين زنهاي روش حداکثر راستنمايي، لگاريتم تابع راستنمايي، را نسبت به پارامترهاي $\boldsymbol{\beta}$ حداکثر مي سازد، که اين حداکثرسازي مستلزم برقراري شرطهاي مرتبه اول

$$(1/T)\sum_{t=1}^{T} \partial lnL(w_t, \boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$$

است.

- یکی از شرطها منتظم بودن، براي MLE اين است که $E\partial lnL(w_t, \boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ باشد.

$$\partial lnL(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2|\boldsymbol{w})/\partial \boldsymbol{\beta} = -2/\sigma^2(-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}_{K\times 1}$$

هم ارزی MM و حداکثر راستنمایی در مدلهاي خطی

1. ابتدا تخمین حداکثر راستنمایی مدل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$ که یک مدل رگرسیون خطی مرکب است، بررسی می گردد.
2. با فرض $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\boldsymbol{I})$
3. تابع راستنمایی برای این مدل به وسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_{\varepsilon}^{2}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (1/(2\sigma_{\varepsilon}^{2}\pi)^{N/2})\, exp\{-\varepsilon'\varepsilon/2\sigma_{\varepsilon}^{2}\}$$

$$= (1/(2\sigma_{\varepsilon}^{2}\pi)^{N/2})\, exp\{-(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})/2\sigma_{\varepsilon}^{2}\}$$

4. حال مشتق مرتبه اول لگاریتم $L(.)$ ، شرطهای گشتاوری مرتبه اول برای یک رگرسیون خطی را نتیجه می دهد.

$$\partial lnL(\boldsymbol{\beta}, \sigma^{2}|\boldsymbol{w})/\partial\boldsymbol{\beta} = -2/\sigma^{2}(-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}'\varepsilon = \mathbf{0}_{K\times 1}$$

هم ارزی MM و حداکثر راستنمایی در مدلهاي رگرسيون غيرخطی

1. ابتدا تخمین حداکثر راستنمایی مدل $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})+\varepsilon$ که یک مدل نسبتا ساده ای است، بررسی می گردد.
2. با فرض $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0},\sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{I})$ و بعنوان مثال خاص برای رگرسیون غیر خطی
$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})=A[\delta l^{-\rho}+(1-\delta)k^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$
3. تابع راستنمایی برای این مدل به وسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon^2|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(1/(2\sigma_\varepsilon^2\pi)^{N/2})exp\{-\varepsilon'\varepsilon/2\sigma_\varepsilon^2\}$$
$$=(1/(2\sigma_\varepsilon^2\pi)^{N/2})exp\{-(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}))'(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}))/2\sigma_\varepsilon^2\}$$

حال مشتق مرتبه اول لگاریتم $L(.)$ ، شرطهای گشتاوری مرتبه اول برای یک رگرسیون غیر خطی را نتیجه می دهد.

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}}=\frac{-1}{2\sigma_\varepsilon^2}.\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{0}_{K.1}$$

که در آن

$$S(\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}))'(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}))$$

مساله تعریف GMM

- فرض کنید $w_t = (y_t, x_t')'$ یک بردار از متغیرهای مدل و z_t متغیرهای ابزاری باشند.
- q شرط گشتاوری را در نظر بگیرید

$$E[m(w_t, z_t, \theta)] = 0$$

که در آن θ یک بردار $K \times 1$ و $m(.)$ یک تابع برداری R بعدی است.

- شرایط گشتاوری نمونه مربوطه را در نظر بگیرید:

$$\overline{m}_T(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m(w_t, z_t, \theta) = 0$$

- چه زمانی می توان q گشتاورهای نمونه را برای تخمین k پارامتر θ بکار برد؟

شرط رتبه ای

1. اگر $k > q$ باشد، هیچ راه حل واحدی برای $\overline{m}_T(\theta) = 0$ وجود ندارد و پارامترها قابل شناسایی نیست.
2. اگر $k = q$ باشد راه حل واحد برای $\overline{m}_T(\theta) = 0$ وجود دارد و شناسایی دقیق است.
   - این مورد یک تخمین زن MM است، مثل OLS و IV
3. اگر $k > q$ تعداد معادلات بیشتر از پارامترهاست و یک وضعیت بیش از حد مشخص رخ می دهد، GMM یک راه حل کارآمد است.

- فرض بفرمایید $k > q$ باشد، دو راه حل می تواند وجود داشته باشد:
  - نادیده گرفتن پاره ای از گشتاورها. پیامد این روش کاهش کارایی برآوردگرها و نادیده گرفتن دلالتهای نظری برخاسته از پایه های مدل نظری است.
  - بکار گیری این دانش نظری (همه گشتاورها) در برآورد کل k پارامتر مربوط به مدل نظری. **چگونه؟**

مسئله بهینه سازی تابع زیان

برآوردگر روش گشتاورهاي تعميم يافته

اين روش برآورد $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ، صورت درجه دوم وزني (وزن بزرگتر به گشتاوری که به صفر نزدیکتر است) زير را حداقل مي سازد.

$$J = \begin{bmatrix} \overline{m}_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ \overline{m}_q(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1q} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ w_{q1} & \cdots & w_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{m}_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ \overline{m}_q(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta})' \boldsymbol{W} \overline{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta})$$

که در آن $\overline{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\beta})$ میانگین نمونه اي $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\beta})$ و $\boldsymbol{W}$ یک ماتریس وزنی متقارن و با ساختار مثبت معین با ابعاد $q \times q$ است.

مسئله بهینه سازی تابع زیان ... و اندکی ریاضی

نکته ۱: مشتق گیري از توابع برداری غیرخطي. فرض کنید بردار $y_{n\times 1}$ تابعي از بردار $x_{m\times 1}$ باشد.

$$[y_1\, y_2 \cdots y_n]' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)]'$$

آنگاه $\partial y/\partial x'$ یک ماتریس $n \times m$ است.

$$\partial y/\partial \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \partial f_1(x)/\partial x' \\ \vdots \\ \partial f_n(x)/\partial x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1(x)/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1(x)/\partial x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n(x)/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n(x)/\partial x_m \end{bmatrix}$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان و اندکی ریاضی

نکته ۲: هنگامي که $y = Ax$ است، و در آن A یک ماتریس $n \times m$ مي باشد، آنگاه $f_i(x)$ در **نکته (۱)** یک تابع خطي خواهد بود و بدست مي آوریم که:

$$\partial y/\partial \boldsymbol{x}' = \partial(A\boldsymbol{x})/\partial \boldsymbol{x}' = A$$

نکته ۳: به عنوان یک حالت خاصي از **نکته (۲)**، هنگامي که $y = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}$ بوده و در آن هم $\boldsymbol{z}$ و هم $\boldsymbol{x}$ بردار باشند، آنگاه زیرا $\boldsymbol{z}'$ همان نقش $\mathbf{A}$ را ایفا مي کند.
نکته ۴: مشتق گیري ماتریسي از صورت هاي درجه دوم. فرض کنید $\boldsymbol{x}_{n\times 1}$ ، $f(\boldsymbol{x})$ و $\boldsymbol{A}_{m\times m}$ و متقارن باشد، آنگاه

$$\partial[f(x)'Af(x)]/\partial x = 2(\partial f(x)/\partial x')'Af(x)$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان و اندکی ریاضی

نکته ۵: اگر $x = f(x)$ آنگاه $\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{I}$ ، آنگاه $\partial(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ براي بردار $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{K\times 1}$ داريم:

$$\frac{\partial[\overline{m}(\boldsymbol{\beta})' W \overline{m}(\boldsymbol{\beta})]}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2 \begin{bmatrix} \partial \overline{m}_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}/\partial\beta_1) & \cdots & \partial \overline{m}_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}/\partial\beta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial \overline{m}_q(\hat{\boldsymbol{\beta}}/\partial\beta_1) & \cdots & \partial \overline{m}_q(\hat{\boldsymbol{\beta}}/\partial\beta_k) \end{bmatrix}' \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1q} & \cdots & w_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{m}_1(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ \vdots \\ \overline{m}_q(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \end{bmatrix}$$

$$= [\partial \overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}})_{K\times q}/\partial \boldsymbol{\beta}']'_{q\times q} \boldsymbol{W} \overline{m}_{q\times 1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

- رگرسیون ساده تک متغیره

$$y_t = x_t\beta_0 + \varepsilon_t$$

$$\overline{\boldsymbol{m}}(\beta) = (1/T)\sum_{t=1}^{T} x_t(y_t - x_t\beta)$$

$$J = \boldsymbol{W}[(1/T)\sum_{t=1}^{T} x_t(y_t - x_t\beta)]^2$$

- روشن است که اسکالر $\boldsymbol{W}$ در این بهینه سازي نقشي ندارد و وزنی سازی اهمیت خود را از دست می دهد

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

مثال

ادامه روش IV/2SLS

$$\overline{m}(\boldsymbol{\beta})' W \overline{m}(\boldsymbol{\beta}) = [(1/T)\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta})]' \boldsymbol{W}[(1/T)\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta})]$$

- اگر $q = K$ باشد، آنگاه مدل دقیقاً مشخص است.
- بنابراين در واقع برآوردگر $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ مي تواند با قرار دادن تمام شرطهاي گشتاوري برابر با صفر بدست آيد.
- آنگاه تخمين زن بدست آمده تخمين زنهاي IV خواهند بود، يعني

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = [(1/T)\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t \boldsymbol{x}_t']^{-1}[(1/T)\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t y_t] = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zx}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zy}$$

مسئله بهینه سازی تابع زیان ...

مثال:

$$\mathbf{0} = [(1/T)\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV})]$$

که در آن

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{zx} = \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t\boldsymbol{x}_t'/T$$

و بطور مشابه براي هر یک از گشتاورهاي دوم ماتریس ها، اگر $z_t = x_t$ باشد. آنگاه:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{xx}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{xy}$$

تخمین زن GMM

- قصد داریم q گشتاورهای $\overline{m}_T(\theta)$ را تا حد ممکن به صفر متمایل سازیم.
- فرض کنید یک ماتریس $q \times q$ متقارن و معین مثبت موزون W_T داریم.
- به این ترتیب فرم درجه دوم آن را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$J_T(\theta) = \overline{m}_T(\theta)' W_T \overline{m}_T(\theta) \quad (1 \times 1)$$

- تخمین زن GMM به عنوان بردار حداقل سازنده $J_T(\theta)$ نسبت به k پارامتر **(نه به تعداد q گشتاور)**، تعریف می شود.
- یعنی:

$$\hat{\theta}_{GMM}(W_T) = arg_{\hat{\theta}} min\{\overline{m}_T(\hat{\theta})' W_T \overline{m}_T(\hat{\theta})\}$$

- حل k معادله (خطی یا غیرخطی) برای k پارامتر

تخمین بهینه GMM

- ماتریس W_T می گوید که چه وزنی به هرکدام از شرایط گشتاوری داده شود.
- مقادیر مختلف برای W_T ، تخمین زن های متفاوتی را بدست می دهد،

$$\hat{\theta}_{GMM}(W_T)$$

- برآوردگر GMM با هر ماتریس وزنی W_T سازگار است. انتخاب بهینه W_T کدام است؟

تخمین بهینه GMM

- تعداد q گشتاور نمونه (که متغیرهای تصادفی هستند) $\overline{m}_T(\theta)$، تخمین زن های $E[m(.)]$ هستند.

دوقضیه مهم

(۱). قانون اعداد بزرگ دلالت بر این دارد که:

$$\overline{m}_T(\theta) \rightarrow_p E[m(.)] \quad for \quad T \rightarrow \infty$$

(۲). قضیه حد مرکزی نشان می دهد که:

$$\sqrt{T}\overline{m}_T(\theta) \rightarrow N(0, S)$$

که در آن S واریانس مجانبی گشتاوری $\sqrt{T}.\overline{m}_T(\theta)$ است.

- ماتریس وزن بهینه برای GMM یک ماتریس W_T^{opt} است به گونه ای که:

$$\lim_{T\rightarrow\infty} W_T^{opt} = S^{-1}$$

تخمین بهینه GMM

- بدون وجود خود همبستگی بین گشتاورهای نمونه ای، یک تخمین زن معمول $\hat{S}$ برای S عبارت است از:

$$\begin{aligned}\hat{S} &= V[\sqrt{T}.\overline{m}_T(\theta)] = T.V[\overline{m}_T(\theta)] \\ &= T.V[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m(w_t, z_t, \theta)] \\ &= \frac{1}{T}.\sum_{t=1}^{T} m(w_t, z_t, \theta) m(w_t, z_t, \theta)'\end{aligned}$$

- آنگاه، دلالت بر این دارد که:

$$W_T^{opt} = \hat{S}^{-1} = (\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m(w_t, z_t, \theta) m(w_t, z_t, \theta)')^{-1}$$

- همچنین باید اشاره کرد که W_T^{opt} در حالت کلی به θ بستگی دارد.

تخمین W^{opt} در عمل

- GMM دو مرحله ای (کارا)
  ۱. ماتریس موزون $W_{[1]}$ را انتخاب می کنیم. برای مثال، $W_{[1]} = I$ یا $W_{[1]} = (Z'Z)^{-1}$.
  ۲. یک تخمین سازگار را پیدا می کنیم $\hat{\theta}_{[1]} = argmin_\theta \overline{m}_T(\theta)' W_{[1]} \overline{m}_T(\theta)$ و وزنهای بهینه را تخمین می زنیم. W_T^{opt}
  ۳. تخمین بهینه GMM را پیدا می کنیم.

$$\hat{\theta}_{GMM} = argmin_\theta \overline{m}_T(\theta)' W_T^{opt} \overline{m}_T(\theta)$$

- GMM تکرار شونده
  با ماتریس موزون اولیه $W_{[1]}$ شروع می کنیم.
  ۱. یک تخمین $\hat{\theta}_{[1]}$ را پیدا می کنیم
  ۲. یک ماتریس وزونی جدید $W_{[2]}^{opt}$ را پیدا می کنیم
  ۳. فرآیند تکرار بین $\hat{\theta}_{[.]}$ و $W_{[.]}^{opt}$ را ادامه می دهیم تا هریک به خودشان همگرا شوند.

مثال معروف هانسن سینگلتون

- یک واحد بهینه با تابع مطلوبیت توانی مصرف را در نظر بگیرید $U(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$. شرایط مرتبه اول حداکثرسازی مطلوبیت تنزیل یافته مصرف آتی به شرح زیر است:

$$E\left[\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}(1+r_{t+1})-1\middle|I_t\right]=0$$

که در آن I_t مجموعه اطلاعات در زمان t است.

- فرض کنید انتظارات عقلایی وجود دارد. حال اگر $z_t \in I_t$ در این صورت باید بر امید خطا متعامد باشد،

$$\begin{aligned} &f(C_{t+1}, C_t, r_{t+1}; z_t; \delta, \gamma) \\ &= E\left[\left(\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}(1+r_{t+1})-1\right)z_t\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- این مورد یک شرط گشتاوری است. ما به حداقل $q=2$ متغیر ابزاری در z_t نیاز داریم.

Although θ_i is unobservable, it can be uniquely calculated from (3). By substitution of $\hat{z}(m;d)$ in (5), the explicit functional form of θ_i is derived as

$$\hat{\theta}_i = \varphi(m_i, p_i, y_i, \hat{z}(m_i; d_i), \gamma) \tag{6}$$

More specifically, making use of Equation 1, for $(m) \geqslant 0$ we have

$$\varphi(m_i, p_i, \hat{z}(m_i; d_i), \hat{\gamma}) = m_i - [(1/\gamma_2)(y_i - p_i - \hat{z}_i(m_i; d_i))^{-\gamma_1}(\hat{z}'(m_i; d_i))]^{-1/\gamma_3} \tag{7}$$

The intuition behind $z'(m) \geqslant 0$ is, while medical care utilisation raises, out-of-pocket expenditure should increase as well. Components of exogenous vector are income, household size and intercept term, which are of the most association with explanatory variables of model (6) and on the other hand the least correlation with θ_i.

Figure: Keshavarz Haddad, GholamReza and Mahdieh Zomorrodi Anbaji, Analysis of Adverse Selection and Moral Hazard in the Health Insurance Market of Iran, The Geneva Papers, ,2010 ,35 (599—581)

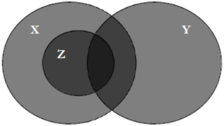
متغیرهای ابزاری مناسب چه ویژگیهایی دارند؟

- فرض را براین قرار می دهیم که مجموعه ای از متغیرهای $\boldsymbol{Z}$ وجود دارند، بطوریکه:
  1. قید مرتبط بودن: $plim(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}/T) \neq \mathbf{0}$ (relevance):
  2. قید مستثنی بودن: $plim(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\epsilon}/T) \neq \mathbf{0}$ (exclusion):

- **بیان نموداری دو قید بالا**

می خواهیم تغییرات $\boldsymbol{Z}$، که نابسته با جزء اخلال $\boldsymbol{\epsilon}$ است را برای توضیح تغییرات $\boldsymbol{y}$ بکار بگیریم.

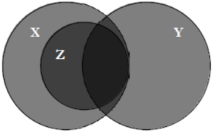
- قید (۱) این امکان را برای ما فراهم می سازد.
- فرض کنید رابطه $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{X}$ در نمودار زیر نشان داده شده باشد.



شکل: تنها آن بخشی از تغییرات $\boldsymbol{X}$ که توسط $\boldsymbol{Z}$ می تواند توضیح داده شود، در توضیح $\boldsymbol{y}$ مورد استفاده قرار می گیرد.

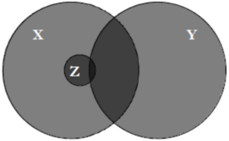
برآوردگرهای ابزاری: ابزارهای پرتوان و کم توان

حالت ایدآل



شکل: تغییرات زیادی از $\boldsymbol{X}$ توسط $\boldsymbol{Z}$ می تواند توضیح داده شود، و مقدار بیشتری از اشتراک $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{y}$ با تغییرات $\boldsymbol{Z}$ اشتراک دارد. می گوییم $\boldsymbol{Z}$ یک متغیر ابزاری پرتوان است.

حالت رایج



شکل: تنها بخشی اندکی از تغییرات $\boldsymbol{X}$ توسط $\boldsymbol{Z}$ می تواند توضیح داده شود، و آنچه هم توصیح داده می شود در توضیح $\boldsymbol{y}$ چندان مورد استفاده قرار نمی گیرد. می گوییم $\boldsymbol{Z}$ یک متغیر ابزاری کم توان است.

برآوردگرهای ابزاری: مصایب متغیرهای ابزاری کم توان

- متغیر ابزاری کم توان منجر به دو مشکل جدی می‌گردد:
  1. برآوردگر 2sls با متغیرهای ابزاری ضعیف برای نمونه‌های با حجم کوچک تورش‌دار هستند.
  2. میزان ناسازگار بودن ناشی از نقض قید $cov(z_i, u_i) = 0$ در صورت ضعیف بودن متغیرهای ابزاری به شدت افزایش می‌یابد.

- برای نشان دادن دو نکته یادشده در بالا از تورش برآوردگرهای 2sls در نمونه‌های کوچک شروع می‌کنیم.
- برای بیان شهودی این وضعیت، ساده‌ترین فرم از معادلات ساختاری و معادله رگرسیون اول را در نظر می‌گیریم.

$$y_i = \beta x_i + \eta_i$$

(معادله ساختاری)

$$x_i = \pi_1 z_i + \xi_i$$

(معادله رگرسیون مرحله اول)

برآوردگرهای ابزاری: مصایب متغیرهای ابزاری کم توان

- برای حفظ سادگی این رگرسیون‌ها عرض از مبدأ ندارند، بااین حال این نتیجه برای رگرسیونهای مرکب قابل تعمیم است.
- اگر متغیر ابزاری z_i غیرمرتبط باشد، آنگاه $\pi_1 = 0$ می گردد.
- به خاطر داریم که

$$\beta_{IV} = cov(y_i, z_i)/cov(x_i, z_i)$$

- و نیز یاد می‌آوریم که

$$cov(x_i, z_i) = cov(_1 z_i + \xi_i, z_i) = \pi_1.\sigma_z^2$$

- اگر $\pi_1 = 0$ ، آنگاه $cov(x_i, z_i) = 0$ ، در نتیجه برآوردگر IV نمی‌تواند وجود داشته باشد.
- با این حال، حتی اگر π_1 واقعی در رگرسیون مرحله اول جامعه برابر با صفر باشد، ضرورتا همتای نمونه‌ای آن دقیقاً برابر با صفر نمی گردد. این ویژگی سبب می‌شود که در عمل β_{IV} وجود داشته باشد.

مثال کاربردی: معادله پرداختی به مدیران عامل

- فرض کنید می خواهیم رابطه بین پرداختی به مدیران عامل شرکتها (y) و شبکه مدیرعامل (x) را مطالعه کنیم.
- برای این منظور معمولاً، از مدل رگرسیون خطی استفاده می شود که رابطه y و x را با در نظر گرفتن "متغیرهای کنترلی" اضافی (W) که سایر ویژگی های آن را کنترل می کند.
- بین مبالغ پرداختی به یک مدیرعامل را با دیگری تفاوت وجود دارد.
- منشا این تفاوت بوسیله عامل مشاهده ناپذیر ϵ_i نشان داده می شود که با W یا x نمی تواند کنترل بشود.
- مدل این است:

$$y = x\beta + W\gamma + \epsilon$$

اگر شبکه مدیرعامل تحت تأثیر مهارتهای طبیعی مدیرعامل باشد، ما با یک مشکل روبرو هستیم:

مثال کاربردی: معادله پرداختی به مدیران عامل

- ادامه:
  - هر دو این متغیرهای توضیحی y و x درون زا هستند. یعنی تحت تأثیر مهارت مشاهده ناپذیر مدیرعامل هستند.
  - اگر بتوانیم متغیر مهارت را برای هر مدیرعامل پیدا و مشاهده کنیم مشکل حل می شود.
  - در غیر این صورت یا باید یک متغیر جانشین پیدا بکنیم، یا متغیر ابزاری را بیابیم که هردو شرط یاد شده را برقرار سازد.

GIVE(Generalized IV estimator) خطی و GMM

- مدل رگرسیونی خطی با k متغیر توضیحی را در نظر گیرید.

$$y_t = x'_{1t}\beta_1 + x'_{2t}\beta_2 + \epsilon_t = x'_t\beta + \varepsilon_t$$

که در آن $E[x_{1t}\epsilon_t] = 0$ اما متغیرهای بردار x_{2t} درونزا هستند $E[x_{2t}\epsilon_t] \neq 0$.

- فرض کنید $q > k$ متغیر ابزاری $z_t = (x'_1, z'_2)$ وجود دارد، به گونه ای که

$$E[z_t\epsilon_t] = E[z_t(y_t - x'_t\beta)] = 0_{(q\times 1)}.$$

قابل شناسایی بودن پارامترهای مدل نیازمند یک همبستگی غیر صفر بین z_{2t} و x_{2t} است. **شرایط رتبه ای.**

- گشتاور نمونه

$$\overline{m}_T(\beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(z_t(y_t - x'_t\beta)) = \frac{1}{T}Z'(Y - X\beta).$$

است. باید اشاره کرد که نمی توان به صورت مستقیم $\overline{m}_T(\beta) = 0$ را حل کرد.
$Z'X$ یک ماتریس $q \times k$ از رتبه k است، و قابلیت معکوس پذیری ندارد.

- بجای آن فرم درجه دوم زیر را حداقل می کنیم

$$\begin{aligned} J_T(\beta) &= \overline{m}_T(\beta)' W_T \overline{m}_T(\beta) && (4) \\ &= \left(\frac{1}{T} Z'(Y - X\beta)\right)' W_T \left(\frac{1}{T} Z'(Y - X\beta)\right) && (5) \\ &= \frac{1}{T^2}(Y'Z - \beta' X' Z) W_T (Z' Y - Z' X\beta) && (6) \\ &= \frac{1}{T^2}(Y' Z W_T Z' Y - 2\beta' X' Z W_T Z' Y + \beta' X' Z W_T Z' X\beta) && (7) \end{aligned}$$

- برای حداقل کردن $J_T(\beta)$, مشتقات جزیی را بدست آورده و k معادله را حل می کنیم.

$$\frac{\partial J_T(\beta)}{\partial \beta} = 0_{(k \times 1}$$

- تخمین زن GMM برای k معادله شرط مرتبه اول را حل می کند.

$$\frac{\partial J_T(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial (T^{-2}(Y'ZW_TZ'Y - 2\beta'X'ZW_TZ'Y + \beta'X'ZW_TZ'X\beta))}{\partial \beta}$$

$$-2T^{-2}X'ZW_TZ'Y + 2T^{-2}X'ZW_TZ'X\beta$$

$$= 0$$

آنگاه:

$$\hat{\beta}_{GMM}(W_T) = (X'ZW_TZ'X)^{-1}X'ZW_TZ'Y$$

- ماتریس وزنی بهینه، معکوس واریانس گشتاورهاست، برای مثال:

$$W_T^{opt} = S^{-1}$$

که در آن

$$S = V[\sqrt{T}.\overline{m}_T(\theta)] = \frac{1}{T}V[Z'\epsilon] = \frac{1}{T}E[Z'\epsilon\epsilon'Z] = \frac{1}{T}Z'\Omega Z$$

و $E[\epsilon\epsilon'] = \Omega$ قرار داده شده است. **راستی** $1/T$ **از کجا پیدا شد؟**

همسانی واریانس جزء اخلال

- اگر $E[\epsilon\epsilon'] = \Omega = \sigma^2 I$ تخمین زن معمول S می شود:

$$\hat{S} = \frac{1}{T} Z' \hat{\Omega} Z = \frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z$$

که در آن $\hat{\sigma}^2$ تخمین زن سازگاری از σ^2 است.

- پس تخمین زن GMM می شود:

$$\hat{\beta}_{GMM} = (X' Z \hat{S}^{-1} Z' X)^{-1} X' Z \hat{S}^{-1} Z' Y$$

$$= (X' Z (\frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z)^{-1} Z' X)^{-1} X' Z (\frac{1}{T} \hat{\sigma}^2 Z' Z)^{-1} Z' Y$$

$$= (X' Z (Z' Z)^{-1} Z' X)^{-1} X' Z (Z' Z)^{-1} Z' Y$$

$$= \hat{\beta}_{GIVE} = \hat{\beta}_{2SLS}$$

تحت همسانی واریانس، تخمین زن GMM بهینه، همان GIVE یا generalized instrumental variable estimation بوده، که در آن k > q است.

GIVE در مقابلGMM

مثال

کدهای استاتا

```
webuse hsng2
ivregress 2sls rent pcturban (hsngval
= faminc i.region)
ivregress gmm rent pcturban (hsngval
= faminc i.region)
```

GIVE در مقابل GMM

مقایسه خروجی ها

```
. ivregress 2sls rent pcturban (hsngval = faminc i.region)

Instrumental variables (2SLS) regression          Number of obs   =         50
                                                  Wald chi2(2)    =      90.76
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
                                                  R-squared       =     0.5989
                                                  Root MSE        =     22.166

------------------------------------------------------------------------------
        rent |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     hsngval |   .0022398   .0003284     6.82   0.000     .0015961    .0028836
    pcturban |    .081516   .2987652     0.27   0.785    -.504053     .667085
       _cons |   120.7065   15.22839     7.93   0.000     90.85942    150.5536
------------------------------------------------------------------------------
Instrumented:  hsngval
Instruments:   pcturban faminc 2.region 3.region 4.region
```

GIVE در مقابل GMM

مقایسه خروجی ها

```
. ivregress gmm rent pcturban (hsngval = faminc i.region)

Instrumental variables (GMM) regression           Number of obs   =         50
                                                  Wald chi2(2)    =     112.09
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
                                                  R-squared       =     0.6616
GMM weight matrix: Robust                         Root MSE        =     20.358

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
        rent |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     hsngval |   .0014643   .0004473     3.27   0.001     .0005877     .002341
    pcturban |   .7615482   .2895105     2.63   0.009     .1941181    1.328978
       _cons |   112.1227   10.80234    10.38   0.000     90.95052    133.2949
------------------------------------------------------------------------------
Instrumented:  hsngval
Instruments:   pcturban faminc 2.region 3.region 4.region
```

- بخاطر آورید که

$$\hat{\beta}_{GMM} \rightarrow N(\beta, \frac{1}{T}(D' W^{opt} D)^{-1})$$

مشتقات جزیی به شکل زیر است:

$$D_{T_{R\times K}} = \frac{\partial \overline{m}_T(\beta)}{\partial \beta'} = \frac{\partial(\frac{1}{T}Z'(Y - X\beta))}{\partial \beta'} = -\frac{1}{T}Z'X = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t x_t'$$

- واریانس می تواند به شکل زیر تخمین زده شود:

$$V[\hat{\beta}_{GMM}] = \frac{1}{T}(D_T' W^{opt} D_T)^{-1}$$

$$= \frac{1}{T}((-\frac{1}{T}Z'X)'(\frac{1}{T}\hat{\sigma}^2 Z'Z)^{-1}(-\frac{1}{T}Z'X))^{-1}$$

$$\hat{\sigma}^2(X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}$$

که تحت عنوان 2SLS شناخته می شود.

ناهمسانی واریانس بدون وجود خودهمبستگی جر اخلال

- در حالتی که ناهمسانی واریانس برقرار باشد اما خودهمبستگی وجود نداشته باشد،

$$E[\epsilon\epsilon'] = \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

می توانیم از تخمین زن

$$\hat{S} = \frac{1}{T} Z' \hat{\Omega} Z = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_t^2 z_t z_t'$$

استفاده کنیم.
بدست می آوریم:

$$\beta_{GMM}(\hat{S}^{-1}) = (X' Z \hat{S}^{-1} Z' X)^{-1} X' Z \hat{S}^{-1} Z' Y$$

- واریانس تخمین زن ها می شود:

$$V[\hat{\beta}_{GMM}] = \frac{1}{T}(D'_T W^{opt} D_T)^{-1}$$

$$= \frac{1}{T}((-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t z'_t)(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t^2 z_t z'_t)^{-1}(-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t x'_t))^{-1}$$

$$(\sum_{t=1}^{T} x_t z'_t)^{-1} \sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t^2 z_t {z'_t}^{-1}(\sum_{t=1}^{T} z_t x'_t)^{-1}$$

که تخمین زن واریانس سازگار ناهمسان نویز سفید است.

خودهمبستگی

- $W_T^{opt} = \hat{S}^{-1}$ ماتریس موزون است که

$$\hat{S} = V[\sqrt{T}.\overline{m}_T(\theta)] = T^{-1}\, V[\sum_{t=1}^{T}(z_t\epsilon_t)]$$

با خودهمبستگی ما نیازمند بررسی و محاسبه واریانس ها هستیم.

- این مورد با کاربرد تخمین زن های ناهمسان و خود همبسته قابل انجام است. فرض کنید

$$\Gamma_{j_{R\times R}} = cov(z_t\epsilon_t, z_{t-j}\epsilon_{t-j}) = E[(z_t\epsilon_t)(z_{t-j}\epsilon_{t-j})']$$

ماتریس کوواریانس با تاخیر یا وقفه j باشد. پس

$$T.S = T^{-1}\{V(z_t\epsilon_t) + Cov(z_t\epsilon_t, z_{t-1}\epsilon_{t-1} + Cov(z_t\epsilon_t, z_{t-2}\epsilon_{t-2}) + \cdots$$

$$+Cov(z_t\epsilon_t, z_{t+1}\epsilon_{t+1}) + Cov(z_t\epsilon_t, z_{t+2}\epsilon_{t+2} + \cdots\}$$

$$= T^{-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Gamma_j$$

- اگر به این بحث بپردازیم که $\Gamma_j = 0$ برای j بزرگتر از تاخیر q است، می توانیم از تخمین زن

$$\hat{S} = T^{-1} \sum_{j=-q}^{q} \hat{\Gamma}_j$$

استفاده کنیم، که کوواریانس ها از کاربست ماتریسهای

$$\hat{\Gamma}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^{T} (z_t \hat{\epsilon}_t)(z_{t-j} \hat{\epsilon}_{t-j})'$$

تخمین زده می شود.

- $\hat{S}$ بدست آمده ضرورتا معین مثبت نیست. در مقابل کوواریانس ها وزن های کاهنده تخمین زن **نیویی-وست** به خود می گیرد

آزمون فرضیه ها در GMM

فرض را بر این قرار بدهید که بخواهیم S قید خطي $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{r}$ با $\boldsymbol{R}_{s\times K}$ و $\boldsymbol{r}^{s\times 1}$ آزمون کنیم، آنگاه تحت فرضیه صفر؛

$$\sqrt{T}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \to^d N(\boldsymbol{0}_{s\times 1}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}')$$

نکته (8): (توزیع صورتهاي درجه دوم): اگر بردار $N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \sim \boldsymbol{x}_{n\times 1}$ آنگاه $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x} \sim \chi^2_n$ تحت فرضیه صفر تابع نمونه آزمون والد داراي توزیع متغیر تصادفي چي دو (کاي دو) است.

$$T(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \to^d \chi^2_s \qquad (8)$$

آزمون فرضیه ها در GMM

مثال

کدهای استاتا

```
gmm (mpg - {b1}*gear_ratio - {b2}*turn - {b0}),
 instruments(gear_ratio turn trunk)
estat overid
matrix B= e(b)'
matrix list B
matrix VC=e(V)
matrix list VC
matrix define R=(0, 1, 1)
matrix define r=(0)
matrix J=e(N)*(R*B-r)'*inv(R*VC*R')*(R*B-r)
matrix list J
* e(Q)
```

آزمون فرضیه ها در GMM

همچنين مي توانيم فرضيه قيدهاي بيش از حد مشخص نمايي را نيز آزمون نماييم. شرايط مرتبه اول نشان مي دهد که ترکيب خطي از q شرط گشتاوري در $\hat{\beta}$ رابر با صفر مي گردند. بنابراين $q-K$ قيد بيش از حد مشخص نمايي داريم که در صورت که مدل بطور صحيح برازش شده باشد، بايد اين قيدها نزديک به صفر باشند. تحت فرضيه صفر اينکه شرطهاي گشتاوري برقرار هستند (بنابراين قيدهاي بيش از حد مشخص نمايي برقرار مي شوند) مي دانيم که $\sqrt{T}\overline{m}(\beta_0)$ يک متوسط نمونه (مقياس شده) بوده، و بنابراين (بنابه قضاياي حدي مرکزي) داراي يک توزيع نرمال مجانبي است.

بطور خلاصه؛

$$\sqrt{T}\overline{m}(\boldsymbol{\beta}_0) \to^d N(\mathbf{0}_{q\times 1}, \boldsymbol{S}_0)$$

- آزمون تشخیص به قرار زیر است:

$$
\begin{aligned}
\xi &= T.\overline{m}_T(\hat{\theta}_{GMM})'\hat{S}^{-1}\overline{m}_T(\hat{\theta}_{GMM}) \\
&= T.(\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t z_t)'(\frac{\hat{\sigma}^2}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t z_t')^{-1}(\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t z_t) \\
&= (\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t z_t)'(\hat{\sigma}^2\sum_{t=1}^{T} z_t z_t')^{-1}(\sum_{t=1}^{T}\hat{\epsilon}_t z_t) \\
&\to \chi^2(R-K)
\end{aligned}
$$

در فرم خطی با آزمون سارگان نشان داده می شود.

- یک راه ساده برای محاسبه ξ مدنظر قرار دادن رگرسیون زیر است:

$$
\hat{\epsilon}_t = z_t'\gamma + residual
$$

و آماره آزمون آن به صورت $\xi = T.R^2$ باید محاسبه شود.

آزمون فرضیه ها در GMM

بنابراین احتمالاً اکنون شما انتظار دارید که صورت درجه دوم $T\overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{S}_0^{-1}\overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ در توزیع به یک متغیر تصادفي χ_q^2 نتیجه درست این است که اگر ماتریس وزن بهینه را انتخاب کنیم آنگاه

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}_0^{-1} \quad \textit{if} \quad T\overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{S}_0^{-1}\overline{m}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \to^{d} \chi_{q-k}^2 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}_0^{-1} \quad \textit{if} \quad T.J(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \sim \chi_{q-K}^2 \tag{10}$$

به همین دلیل به آن تابع نمونه اي آزمون (آماره) نیز مي‌گویند.

آزمون فرضیه ها در GMM

آزمون ديگري كه با استفاده از تابع نمونه اي $J(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ مي توان ساخت، تابع آزمون مقايسه مدل مقيد و كمتر مقيد است، كه در آن از ماتريس وزن بهينه $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}_0^{-1}$ براي برآورد هر دو مدل بدست آمده از مدل كمتر مقيد استفاده مي شود. مي توان نشان داد كه آزمون s تا قيد به صورت زير است.

$$W = \boldsymbol{S}_0^{-1} \quad if \quad T.[J(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{r}) - J(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{lr})] \sim \chi_s^2 \tag{11}$$

```
*OLS estimator and GMM are equivalent if instruments and
instrumented covariates are the same

regress mpg gear_ratio turn

gmm (mpg - {b1}*gear_ratio - {b2}*turn - {b0}),
instruments(gear_ratio turn)
```

mpg	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
gear_ratio	3.032884	1.372978	2.21	0.030	.2952433	5.770524
turn	-.7330502	.1424009	-5.15	0.000	-1.01699	-.4491108
_cons	41.21801	8.990711	4.58	0.000	23.29104	59.14498

	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
/b1	3.032884	1.501664	2.02	0.043	.0896757	5.976092
/b2	-.7330502	.117972	-6.21	0.000	-.9642711	-.5018293
/b0	41.21801	8.396739	4.91	0.000	24.76071	57.67532

Instruments for equation 1: gear_ratio turn _cons

```
*Two-stage least squares (same as ivregress 2sls) and K<q ivregress
2sls mpg gear_ratio (turn = weight length headroom)

gmm (mpg - {b1}*turn - {b2}*gear_ratio - {b0}),
instruments(gear_ratio weight length headroom) onestep
```

mpg	Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
turn	-1.246426	.2012157	-6.19	0.000	-1.640801	-.8520502
gear_ratio	-.3146499	1.697806	-0.19	0.853	-3.642288	3.012988
_cons	71.66502	12.3775	5.79	0.000	47.40556	95.92447

```
Instrumented:  turn
Instruments:   gear_ratio weight length headroom
```

	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
/b1	-1.246426	.1970566	-6.33	0.000	-1.632649	-.8602019
/b2	-.3146499	1.863079	-0.17	0.866	-3.966217	3.336917
/b0	71.66502	12.68722	5.65	0.000	46.79853	96.53151

```
Instruments for equation 1: gear_ratio weight length headroom _cons
```

```
*Two-step GMM estimation (same as ivregress gmm) and k<q

 ivregress gmm mpg gear_ratio (turn = weight length headroom)

gmm (mpg - {b1}*turn - {b2}*gear_ratio - {b0}),
instruments(gear_ratio weight length headroom) wmatrix(robust)
```

	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
/b1	-1.208549	.1882903	-6.42	0.000	-1.577591	-.8395071
/b2	.130328	1.75499	0.07	0.941	-3.30939	3.570046
/b0	68.89218	12.05955	5.71	0.000	45.25589	92.52847

Instruments for equation 1: gear_ratio weight length headroom _cons

mpg	Coef.	Robust Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
turn	-1.208549	.1882903	-6.42	0.000	-1.577591	-.8395071
gear_ratio	.130328	1.75499	0.07	0.941	-3.30939	3.570046
_cons	68.89218	12.05955	5.71	0.000	45.25589	92.52847

Instrumented: turn
Instruments: gear_ratio weight length headroom