

El objetivo de esta tarea es que entiendas con un poco más de profundidad la complejidad de los problemas de ciclos Eulerianos y Hamiltonianos.

1. ¿Cuáles de las figuras que se muestran en la Figura 1 se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin trazar el mismo segmento de recta más de una vez? Explica en cada caso por qué es posible o por qué no es posible.

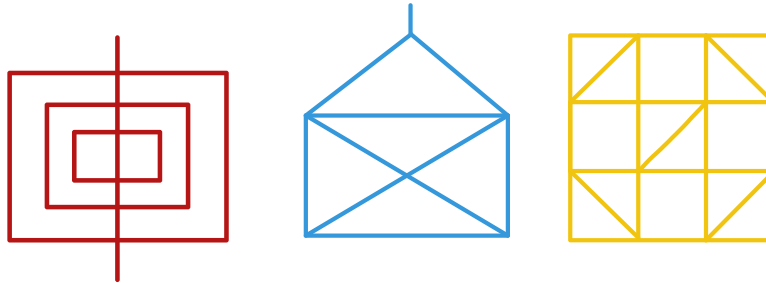


Figura 1: Dibuja sin levantar el lápiz.

Podemos asociar una gráfica a cada figura, en la cual cada vez que hay una bifurcación en la figura, y una arista por cada segmento que esté entre dos vértices. Se muestra en la Figura 2 los vértices correspondientes a los dibujos y en la Figura 3 las gráficas asociadas a los dibujos.

Ahora el problema de saber si se pueden dibujar las figuras sin levantar el lápiz se reduce a saber si la gráfica asociada tiene un trail Euleriano.

La primera gráfica tiene un trail Euleriano ya que solo hay dos vértices de grado impar. La segunda gráfica no tiene un trail Euleriano ya que tiene cuatro vértices impares, y la tercera gráfica tiene un ciclo Euleriano ya que todos sus vértices son pares.

Así que se pueden dibujar el primer y el tercer dibujo sin levantar el lápiz. ■

2. Si es posible, da un ejemplo de una gráfica Euleriana con V par y E impar. Si no es posible, explica por qué.

La gráfica de la figura 4 es Euleriana, tiene el ciclo euleriano a, c, f, e, d, c, b, a . En general, la gráfica compuesta por cualesquiera dos ciclos $C_i C_j$, i impar, j par

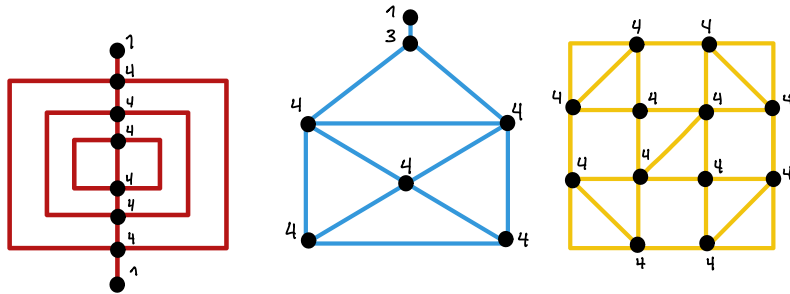


Figura 2: Vértices asociados a los dibujos

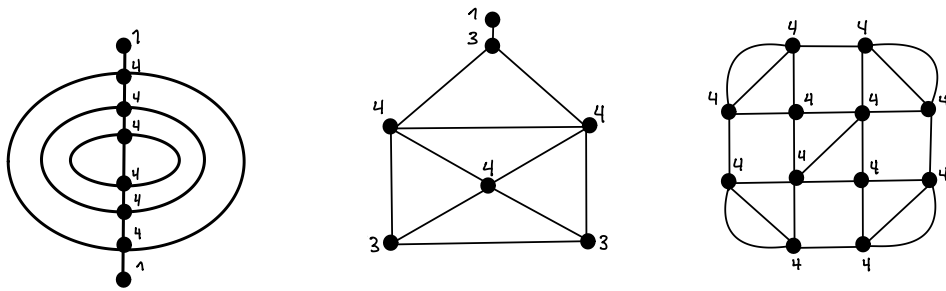


Figura 3: gráficas asociadas a los dibujos

unidos con un vértice en común tiene un ciclo Euleriano, primero comenzando desde cualquier vértice de C_i , luego recorriendo C_i hasta encontrar el vértice en común c , después recorreremos todo C_j hasta volver a c , y por último recorreremos las aristas de C_i que no habíamos recorrido hasta el vértice inicial.

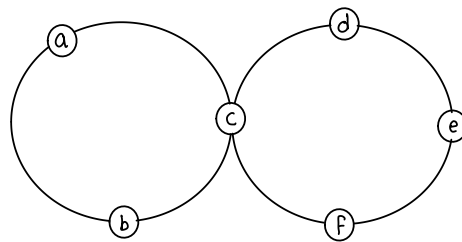
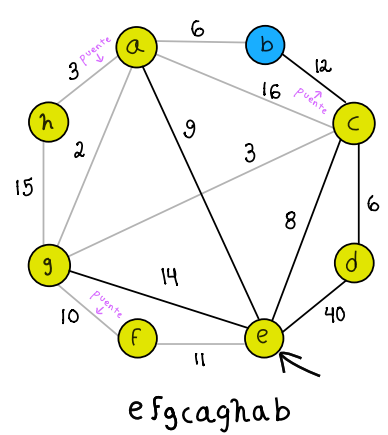
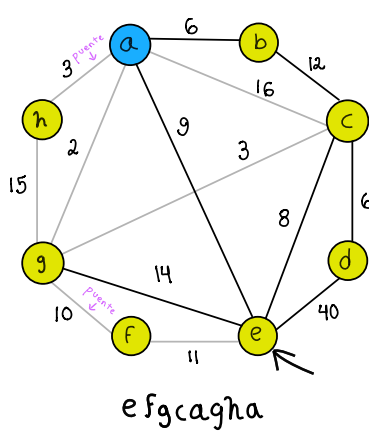
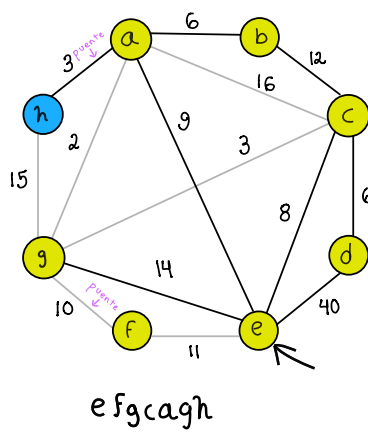
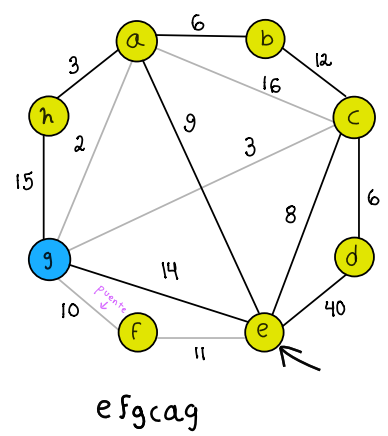
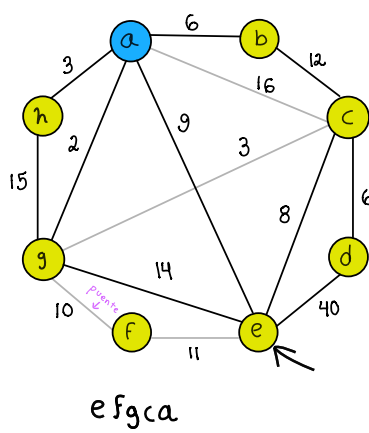
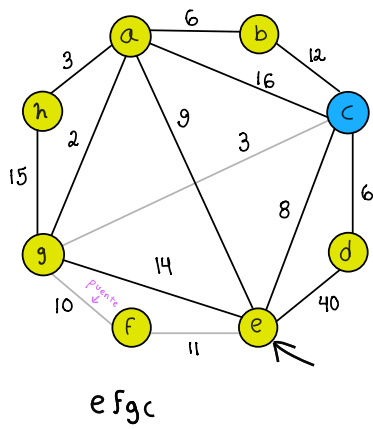
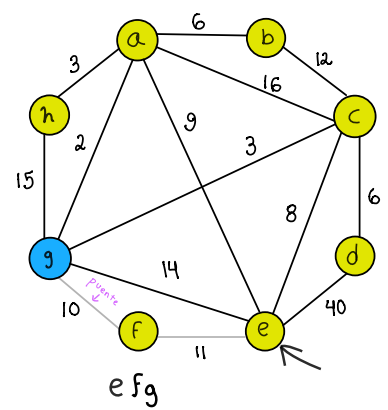
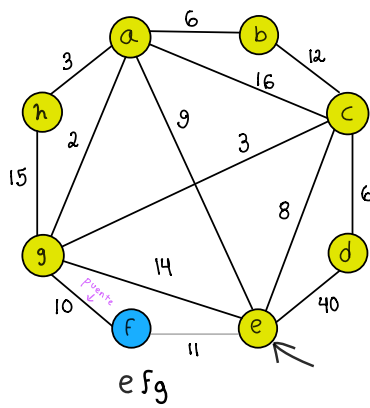
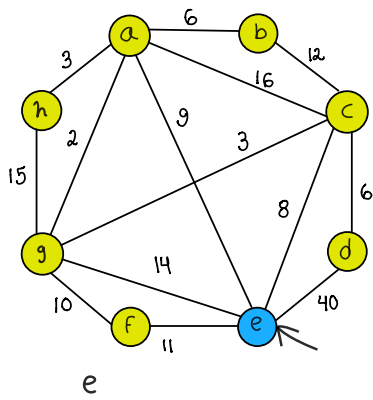


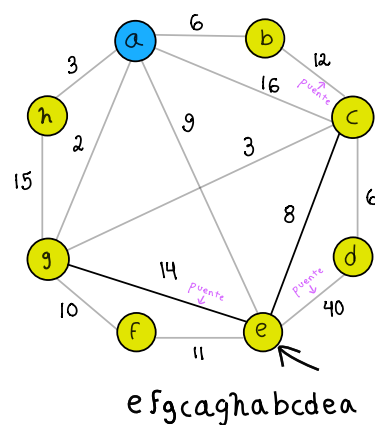
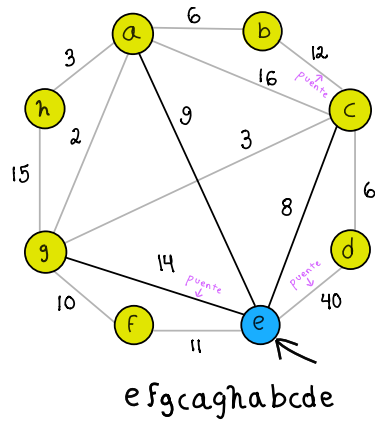
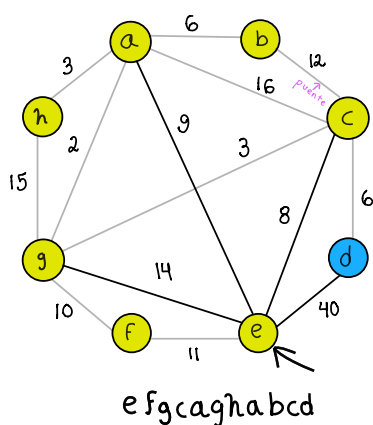
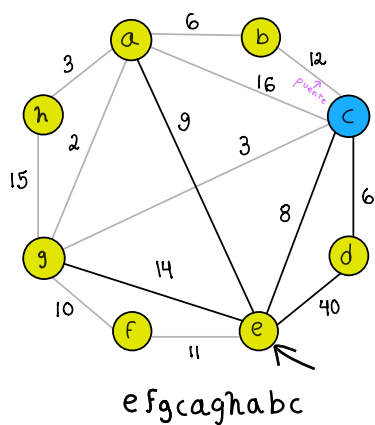
Figura 4: gráficas asociadas a los dibujos

■

3. Ejecuta los dos algoritmos que vimos en clase para encontrar un tour Euleriano en la gráfica de la Figura 5.

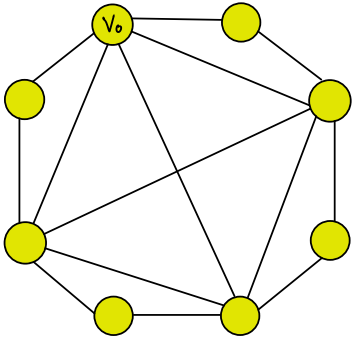
Algoritmo de Fleury



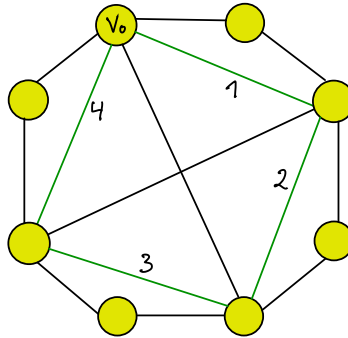


no hay un
tour Euleriano

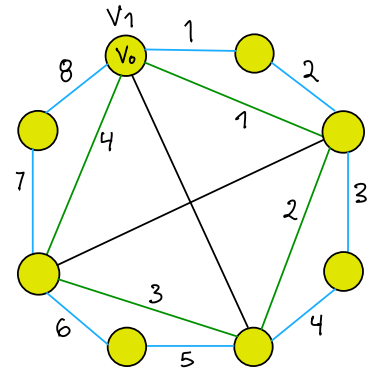
Algoritmo de Hierholzer



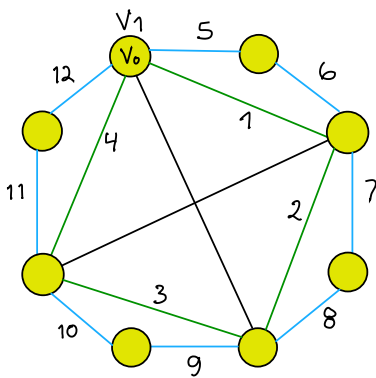
$T_0 \ T_1$



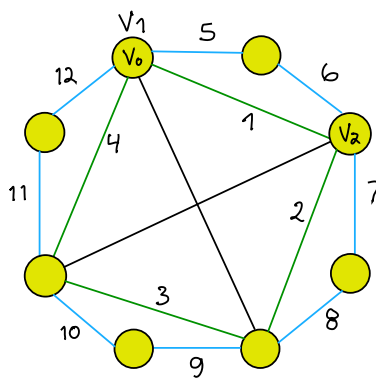
$T_0 \ T_0'$



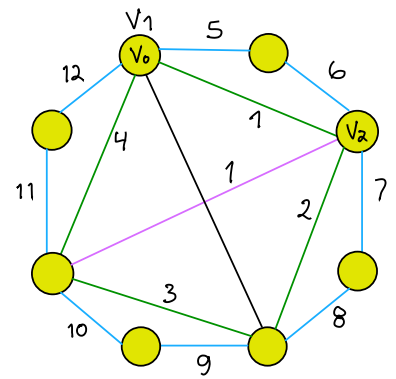
$T_1 = T_0 \cup T_0'$



$T_1 = T_0 \cup T_0'$



$T_1 = T_0 \cup T_0' \ T_2$



No es posible formar el trail T_2
La gráfica no es euleriana

3. Considera el algoritmo de programación dinámica que vimos en clase para encontrar un tour Hamiltoniano. En las ecuaciones recursivas usábamos el peso de la arista i, j cuando fuera necesario, sin embargo, para que el algoritmo sea correcto es necesario usar el peso del camino más corto entre el vértice i y el vértice j . Modifica las ecuaciones para reflejar este cambio. Una vez que hagas esto, ejecuta el algoritmo para encontrar un tour Hamiltoniano en la gráfica de la Figura 5. Como la gráfica es no dirigida, supón que cada arista (i, j) representa a dos aristas: dirigidas (i, j) y (j, i) , ambas con el mismo peso. Usa Sage para calcular las rutas más cortas entre los pares de vértices.

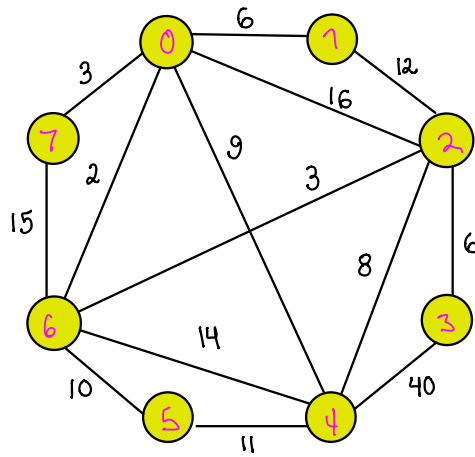


Figura 5: Gráfica para problema.

Rutas más cortas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & \infty & 9 & \infty & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 11 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 11 & 0 & 6 & 8 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 0 & 14 & \infty & \infty & \infty \\ 9 & \infty & 8 & 14 & 0 & 11 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 11 & 0 & 10 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & 11 & 10 & 0 & 5 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Subconjuntos de tamaño 1		
S	función de costo	resultado
$S = \{x_1\}$	$cost(x_1, \{x_1\}) = d_{0,1}$	6
$S = \{x_2\}$	$cost(x_2, \{x_2\}) = d_{0,2}$	5
$S = \{x_3\}$	$cost(x_3, \{x_3\}) = d_{0,3}$	∞
$S = \{x_4\}$	$cost(x_4, \{x_4\}) = d_{0,4}$	9
$S = \{x_5\}$	$cost(x_5, \{x_5\}) = d_{0,5}$	∞
$S = \{x_6\}$	$cost(x_6, \{x_6\}) = d_{0,6}$	2
$S = \{x_7\}$	$cost(x_7, \{x_7\}) = d_{0,7}$	3

Subconjuntos de tamaño 2		
S	función de costo	resultado
$S = \{x_1, x_2\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2\}) = \min\{5 + 11\}$	16
	$cost(x_2, \{x_1, x_2\}) = \min\{6 + 11\}$	17
$S = \{x_1, x_3\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_3\}) = \min\{\infty + \infty\}$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_3\}) = \min\{6 + \infty\}$	∞
$S = \{x_1, x_4\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_4\}) = \min\{9 + \infty\}$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_4\}) = \min\{6 + \infty\}$	∞
$S = \{x_1, x_5\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_5\}) = \min\{\infty + \infty\}$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_5\}) = \min\{6 + \infty\}$	∞
$S = \{x_1, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_6\}) = \min\{2 + \infty\}$	∞
	$cost(x_6, \{x_1, x_6\}) = \min\{6 + \infty\}$	∞
$S = \{x_1, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_7\}) = \min\{3 + \infty\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_1, x_7\}) = \min\{6 + \infty\}$	∞
$S = \{x_2, x_3\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3\}) = \min\{\infty + 6\}$	∞
	$cost(x_3, \{x_2, x_3\}) = \min\{5 + 6\}$	11
$S = \{x_2, x_4\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_4\}) = \min\{9 + 8\}$	17
	$cost(x_4, \{x_2, x_4\}) = \min\{5 + 8\}$	13
$S = \{x_2, x_5\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_5\}) = \min\{\infty + \infty\}$	∞
	$cost(x_5, \{x_2, x_5\}) = \min\{5 + \infty\}$	∞
$S = \{x_2, x_6\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_6\}) = \min\{2 + 3\}$	5
	$cost(x_6, \{x_2, x_6\}) = \min\{5 + 3\}$	8
$S = \{x_2, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_7\}) = \min\{3 + \infty\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_2, x_7\}) = \min\{5 + \infty\}$	∞
$S = \{x_3, x_4\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_4\}) = \min\{9 + 14\}$	23
	$cost(x_4, \{x_3, x_4\}) = \min\{\infty + 14\}$	∞
$S = \{x_3, x_5\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_5\}) = \min\{\infty + \infty\}$	∞
	$cost(x_5, \{x_3, x_5\}) = \min\{\infty + \infty\}$	∞
$S = \{x_3, x_6\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_6\}) = \min\{2 + \infty\}$	∞
	$cost(x_6, \{x_3, x_6\}) = \min\{\infty + \infty\}$	∞
$S = \{x_3, x_7\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_7\}) = \min\{3 + \infty\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_3, x_7\}) = \min\{\infty + \infty\}$	∞
$S = \{x_4, x_5\}$	$cost(x_4, \{x_4, x_5\}) = \min\{\infty + 11\}$	∞
	$cost(x_5, \{x_4, x_5\}) = \min\{9 + 11\}$	20
$S = \{x_4, x_6\}$	$cost(x_4, \{x_4, x_6\}) = \min\{2 + 11\}$	13
	$cost(x_6, \{x_4, x_6\}) = \min\{9 + 11\}$	20
$S = \{x_4, x_7\}$	$cost(x_4, \{x_4, x_7\}) = \min\{3 + \infty\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_4, x_7\}) = \min\{9 + \infty\}$	∞
$S = \{x_5, x_6\}$	$cost(x_5, \{x_5, x_6\}) = \min\{2 + 10\}$	12
	$cost(x_6, \{x_5, x_6\}) = \min\{\infty + 10\}$	∞
$S = \{x_5, x_7\}$	$cost(x_5, \{x_5, x_7\}) = \min\{3 + \infty\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty\}$	∞
$S = \{x_6, x_7\}$	$cost(x_6, \{x_6, x_7\}) = \min\{3 + 5\}$	8
	$cost(x_7, \{x_6, x_7\}) = \min\{2 + 5\}$	7

Subconjuntos de tamaño 3		
S	función de costo	resultado
$S = \{x_1, x_2, x_3\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3\}) = \min\{\infty + 11,0, 11,0 + \infty\}$ $cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3\}) = \min\{\infty + 11,0, \infty + 6,0\}$ $cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3\}) = \min\{16,0 + \infty, 17,0 + 6,0\}$	∞ ∞ 23,0
$S = \{x_1, x_2, x_4\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_4\}) = \min\{17,0 + 11,0, 13,0 + \infty\}$ $cost(x_2, \{x_1, x_2, x_4\}) = \min\{\infty + 11,0, \infty + 8,0\}$ $cost(x_4, \{x_1, x_2, x_4\}) = \min\{16,0 + \infty, 17,0 + 8,0\}$	28,0 ∞ 25,0
$S = \{x_1, x_2, x_5\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_5\}) = \min\{\infty + 11,0, \infty + \infty\}$ $cost(x_2, \{x_1, x_2, x_5\}) = \min\{\infty + 11,0, \infty + \infty\}$ $cost(x_5, \{x_1, x_2, x_5\}) = \min\{16,0 + \infty, 17,0 + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_2, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_6\}) = \min\{5,0 + 11,0, 8,0 + \infty\}$ $cost(x_2, \{x_1, x_2, x_6\}) = \min\{\infty + 11,0, \infty + 3,0\}$ $cost(x_6, \{x_1, x_2, x_6\}) = \min\{16,0 + \infty, 17,0 + 3,0\}$	16,0 ∞ 20,0
$S = \{x_1, x_2, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_7\}) = \min\{\infty + 11,0, \infty + \infty\}$ $cost(x_2, \{x_1, x_2, x_7\}) = \min\{\infty + 11,0, \infty + \infty\}$ $cost(x_7, \{x_1, x_2, x_7\}) = \min\{16,0 + \infty, 17,0 + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_3, x_4\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_3, x_4\}) = \min\{23,0 + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_3, \{x_1, x_3, x_4\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 14,0\}$ $cost(x_4, \{x_1, x_3, x_4\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 14,0\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_3, x_5\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_3, x_5\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_3, \{x_1, x_3, x_5\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_5, \{x_1, x_3, x_5\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_3, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_3, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_3, \{x_1, x_3, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_6, \{x_1, x_3, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_3, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_3, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_3, \{x_1, x_3, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_7, \{x_1, x_3, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_4, x_5\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_4, x_5\}) = \min\{\infty + \infty, 20,0 + \infty\}$ $cost(x_4, \{x_1, x_4, x_5\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 11,0\}$ $cost(x_5, \{x_1, x_4, x_5\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 11,0\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_4, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_4, x_6\}) = \min\{13,0 + \infty, 20,0 + \infty\}$ $cost(x_4, \{x_1, x_4, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 11,0\}$ $cost(x_6, \{x_1, x_4, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 11,0\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_4, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_4, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_4, \{x_1, x_4, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_7, \{x_1, x_4, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_5, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_5, x_6\}) = \min\{12,0 + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_5, \{x_1, x_5, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 10,0\}$ $cost(x_6, \{x_1, x_5, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 10,0\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_5, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_5, \{x_1, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_7, \{x_1, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞ ∞ ∞

$S = \{x_1, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_6, x_7\}) = \min\{8, 0 + \infty, 7, 0 + \infty\}$ $cost(x_6, \{x_1, x_6, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 5, 0\}$ $cost(x_7, \{x_1, x_6, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 5, 0\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_3, x_4\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_4\}) = \min\{23, 0 + 6, 0, \infty + 8, 0\}$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_4\}) = \min\{17, 0 + 6, 0, 13, 0 + 14, 0\}$ $cost(x_4, \{x_2, x_3, x_4\}) = \min\{\infty + 8, 0, 11, 0 + 14, 0\}$	29,0 23,0 25,0
$S = \{x_2, x_3, x_5\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_5\}) = \min\{\infty + 6, 0, \infty + \infty\}$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_5\}) = \min\{\infty + 6, 0, \infty + \infty\}$ $cost(x_5, \{x_2, x_3, x_5\}) = \min\{\infty + \infty, 11, 0 + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_3, x_6\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_6\}) = \min\{\infty + 6, 0, \infty + 3, 0\}$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_6\}) = \min\{5, 0 + 6, 0, 8, 0 + \infty\}$ $cost(x_6, \{x_2, x_3, x_6\}) = \min\{\infty + 3, 0, 11, 0 + \infty\}$	∞ 11,0 ∞
$S = \{x_2, x_3, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_7\}) = \min\{\infty + 6, 0, \infty + \infty\}$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_7\}) = \min\{\infty + 6, 0, \infty + \infty\}$ $cost(x_7, \{x_2, x_3, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, 11, 0 + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_4, x_5\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_4, x_5\}) = \min\{\infty + 8, 0, 20, 0 + \infty\}$ $cost(x_4, \{x_2, x_4, x_5\}) = \min\{\infty + 8, 0, \infty + 11, 0\}$ $cost(x_5, \{x_2, x_4, x_5\}) = \min\{17, 0 + \infty, 13, 0 + 11, 0\}$	∞ ∞ 24,0
$S = \{x_2, x_4, x_6\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_4, x_6\}) = \min\{13, 0 + 8, 0, 20, 0 + 3, 0\}$ $cost(x_4, \{x_2, x_4, x_6\}) = \min\{5, 0 + 8, 0, 8, 0 + 11, 0\}$ $cost(x_6, \{x_2, x_4, x_6\}) = \min\{17, 0 + 3, 0, 13, 0 + 11, 0\}$	21,0 13,0 20,0
$S = \{x_2, x_4, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_4, x_7\}) = \min\{\infty + 8, 0, \infty + \infty\}$ $cost(x_4, \{x_2, x_4, x_7\}) = \min\{\infty + 8, 0, \infty + \infty\}$ $cost(x_7, \{x_2, x_4, x_7\}) = \min\{17, 0 + \infty, 13, 0 + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_5, x_6\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_5, x_6\}) = \min\{12, 0 + \infty, \infty + 3, 0\}$ $cost(x_5, \{x_2, x_5, x_6\}) = \min\{5, 0 + \infty, 8, 0 + 10, 0\}$ $cost(x_6, \{x_2, x_5, x_6\}) = \min\{\infty + 3, 0, \infty + 10, 0\}$	∞ 18,0 ∞
$S = \{x_2, x_5, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_5, \{x_2, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_7, \{x_2, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_6, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_6, x_7\}) = \min\{8, 0 + 3, 0, 7, 0 + \infty\}$ $cost(x_6, \{x_2, x_6, x_7\}) = \min\{\infty + 3, 0, \infty + 5, 0\}$ $cost(x_7, \{x_2, x_6, x_7\}) = \min\{5, 0 + \infty, 8, 0 + 5, 0\}$	11,0 ∞ 13,0
$S = \{x_3, x_4, x_5\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_4, x_5\}) = \min\{\infty + 14, 0, 20, 0 + \infty\}$ $cost(x_4, \{x_3, x_4, x_5\}) = \min\{\infty + 14, 0, \infty + 11, 0\}$ $cost(x_5, \{x_3, x_4, x_5\}) = \min\{23, 0 + \infty, \infty + 11, 0\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_3, x_4, x_6\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_4, x_6\}) = \min\{13, 0 + 14, 0, 20, 0 + \infty\}$ $cost(x_4, \{x_3, x_4, x_6\}) = \min\{\infty + 14, 0, \infty + 11, 0\}$ $cost(x_6, \{x_3, x_4, x_6\}) = \min\{23, 0 + \infty, \infty + 11, 0\}$	27,0 ∞ ∞
$S = \{x_3, x_4, x_7\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_4, x_7\}) = \min\{\infty + 14, 0, \infty + \infty\}$ $cost(x_4, \{x_3, x_4, x_7\}) = \min\{\infty + 14, 0, \infty + \infty\}$ $cost(x_7, \{x_3, x_4, x_7\}) = \min\{23, 0 + \infty, \infty + \infty\}$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_3, x_5, x_6\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_5, x_6\}) = \min\{12, 0 + \infty, \infty + \infty\}$ $cost(x_5, \{x_3, x_5, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 10, 0\}$	∞ ∞

	$cost(x_6, \{x_3, x_5, x_6\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 10, 0\}$	∞
$S = \{x_3, x_5, x_7\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞
	$cost(x_5, \{x_3, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_3, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + \infty\}$	∞
$S = \{x_3, x_6, x_7\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_6, x_7\}) = \min\{8, 0 + \infty, 7, 0 + \infty\}$	∞
	$cost(x_6, \{x_3, x_6, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 5, 0\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_3, x_6, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, \infty + 5, 0\}$	∞
$S = \{x_4, x_5, x_6\}$	$cost(x_4, \{x_4, x_5, x_6\}) = \min\{12, 0 + 11, 0, \infty + 11, 0\}$	23,0
	$cost(x_5, \{x_4, x_5, x_6\}) = \min\{13, 0 + 11, 0, 20, 0 + 10, 0\}$	24,0
	$cost(x_6, \{x_4, x_5, x_6\}) = \min\{\infty + 11, 0, 20, 0 + 10, 0\}$	30,0
$S = \{x_4, x_5, x_7\}$	$cost(x_4, \{x_4, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + 11, 0, \infty + \infty\}$	∞
	$cost(x_5, \{x_4, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + 11, 0, \infty + \infty\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_4, x_5, x_7\}) = \min\{\infty + \infty, 20, 0 + \infty\}$	∞
$S = \{x_4, x_6, x_7\}$	$cost(x_4, \{x_4, x_6, x_7\}) = \min\{8, 0 + 11, 0, 7, 0 + \infty\}$	19,0
	$cost(x_6, \{x_4, x_6, x_7\}) = \min\{\infty + 11, 0, \infty + 5, 0\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_4, x_6, x_7\}) = \min\{13, 0 + \infty, 20, 0 + 5, 0\}$	25,0
$S = \{x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_5, \{x_5, x_6, x_7\}) = \min\{8, 0 + 10, 0, 7, 0 + \infty\}$	18,0
	$cost(x_6, \{x_5, x_6, x_7\}) = \min\{\infty + 10, 0, \infty + 5, 0\}$	∞
	$cost(x_7, \{x_5, x_6, x_7\}) = \min\{12, 0 + \infty, \infty + 5, 0\}$	∞

Subconjuntos de tamaño 4		
S	función de costo	resultado
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = \min 29 + 11, 23 + \infty, 25 + \infty$	40
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + 8$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = \min 28 + \infty, \infty + 6, 25 + 14$	39
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = \min \infty + \infty, \infty + 8, 23 + 14$	37
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}) = \min \infty + 11, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}) = \min \infty + \infty, \infty + 6, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, 23 + \infty$	∞
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_6\}) = \min \infty + 11, 11 + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_6\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + 3$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_6\}) = \min 16 + \infty, \infty + 6, 20 + \infty$	∞
	$cost(x_6, \{x_1, x_2, x_3, x_6\}) = \min \infty + \infty, \infty + 3, 23 + \infty$	∞
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 6, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_7, \{x_1, x_2, x_3, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, 23 + \infty$	∞
$S = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_4, x_5\}) = \min \infty + 11, \infty + \infty, 24 + \infty$	∞
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_4, x_5\}) = \min \infty + 11, \infty + 8, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_4, x_5\}) = \min \infty + \infty, \infty + 8, \infty + 11$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_2, x_4, x_5\}) = \min 28 + \infty, \infty + \infty, 25 + 11$	36
$S = \{x_1, x_2, x_4, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_4, x_6\}) = \min 21 + 11, 13 + \infty, 20 + \infty$	32
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_4, x_6\}) = \min \infty + 11, \infty + 8, \infty + 3$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_4, x_6\}) = \min 16 + \infty, \infty + 8, 20 + 11$	31

$S = \{x_1, x_4, x_5, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_4, \{x_1, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_1, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_7, \{x_1, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_4, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_4, x_6, x_7\}) = \min 19 + \infty, \infty + \infty, 25 + \infty$ $cost(x_4, \{x_1, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_1, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_1, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_5, x_6, x_7\}) = \min 18 + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_1, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 10, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_1, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 10, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_1, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}) = \min \infty + 6, \infty + 8, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}) = \min \infty + 6, \infty + 14, 24 + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}) = \min \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11$ $cost(x_5, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}) = \min 29 + \infty, 23 + \infty, 25 + 11$	∞ ∞ ∞ 36
$S = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_4, x_6\}) = \min 27 + 6, \infty + 8, \infty + 3$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_4, x_6\}) = \min 21 + 6, 13 + 14, 20 + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_3, x_4, x_6\}) = \min \infty + 8, 11 + 14, \infty + 11$ $cost(x_6, \{x_2, x_3, x_4, x_6\}) = \min 29 + 3, 23 + \infty, 25 + 11$	33 27 25 32
$S = \{x_2, x_3, x_4, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_4, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + 8, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_4, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + 14, \infty + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_3, x_4, x_7\}) = \min \infty + 8, \infty + 14, \infty + \infty$ $cost(x_7, \{x_2, x_3, x_4, x_7\}) = \min 29 + \infty, 23 + \infty, 25 + \infty$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_5, x_6\}) = \min \infty + 6, \infty + \infty, \infty + 3$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_5, x_6\}) = \min \infty + 6, 18 + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_2, x_3, x_5, x_6\}) = \min \infty + \infty, 11 + \infty, \infty + 10$ $cost(x_6, \{x_2, x_3, x_5, x_6\}) = \min \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 10$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_3, x_5, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_5, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_5, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_2, x_3, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_7, \{x_2, x_3, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_3, x_6, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_6, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + 3, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_6, x_7\}) = \min 11 + 6, \infty + \infty, 13 + \infty$ $cost(x_6, \{x_2, x_3, x_6, x_7\}) = \min \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_2, x_3, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, 11 + \infty, \infty + 5$	∞ 17 ∞ ∞
$S = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_4, x_5, x_6\}) = \min 23 + 8, 24 + \infty, 30 + 3$ $cost(x_4, \{x_2, x_4, x_5, x_6\}) = \min \infty + 8, 18 + 11, \infty + 11$ $cost(x_5, \{x_2, x_4, x_5, x_6\}) = \min 21 + \infty, 13 + 11, 20 + 10$ $cost(x_6, \{x_2, x_4, x_5, x_6\}) = \min \infty + 3, \infty + 11, 24 + 10$	31 29 24 34
$S = \{x_2, x_4, x_5, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + 8, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + 8, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_2, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_7, \{x_2, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, 24 + \infty$	∞ ∞ ∞ ∞

$S = \{x_2, x_4, x_6, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_4, x_6, x_7\}) = min19 + 8, \infty + 3, 25 + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_4, x_6, x_7\}) = min11 + 8, \infty + 11, 13 + \infty$ $cost(x_6, \{x_2, x_4, x_6, x_7\}) = min\infty + 3, \infty + 11, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_2, x_4, x_6, x_7\}) = min21 + \infty, 13 + \infty, 20 + 5$	27 19 ∞ 25
$S = \{x_2, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_5, x_6, x_7\}) = min18 + \infty, \infty + 3, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_2, x_5, x_6, x_7\}) = min11 + \infty, \infty + 10, 13 + \infty$ $cost(x_6, \{x_2, x_5, x_6, x_7\}) = min\infty + 3, \infty + 10, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_2, x_5, x_6, x_7\}) = min\infty + \infty, 18 + \infty, \infty + 5$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}) = min23 + 14, 24 + \infty, 30 + \infty$ $cost(x_4, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}) = min\infty + 14, \infty + 11, \infty + 11$ $cost(x_5, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}) = min27 + \infty, \infty + 11, \infty + 10$ $cost(x_6, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}) = min\infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10$	37 ∞ ∞ ∞
$S = \{x_3, x_4, x_5, x_7\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_4, x_5, x_7\}) = min\infty + 14, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_4, \{x_3, x_4, x_5, x_7\}) = min\infty + 14, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_3, x_4, x_5, x_7\}) = min\infty + \infty, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_7, \{x_3, x_4, x_5, x_7\}) = min\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_3, x_4, x_6, x_7\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_4, x_6, x_7\}) = min19 + 14, \infty + \infty, 25 + \infty$ $cost(x_4, \{x_3, x_4, x_6, x_7\}) = min\infty + 14, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_3, x_4, x_6, x_7\}) = min\infty + \infty, \infty + 11, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_3, x_4, x_6, x_7\}) = min27 + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	33 ∞ ∞ ∞
$S = \{x_3, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_5, x_6, x_7\}) = min18 + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_3, x_5, x_6, x_7\}) = min\infty + \infty, \infty + 10, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_3, x_5, x_6, x_7\}) = min\infty + \infty, \infty + 10, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_3, x_5, x_6, x_7\}) = min\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_4, \{x_4, x_5, x_6, x_7\}) = min18 + 11, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_4, x_5, x_6, x_7\}) = min19 + 11, \infty + 10, 25 + \infty$ $cost(x_6, \{x_4, x_5, x_6, x_7\}) = min\infty + 11, \infty + 10, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_4, x_5, x_6, x_7\}) = min23 + \infty, 24 + \infty, 30 + 5$	29 30 ∞ 35

■

Subconjuntos de tamaño 5		
S	función de costo	resultado
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = min\infty + 11, \infty + \infty, \infty + \infty, 36 + \infty$	∞
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = min\infty + 11, \infty + 6, \infty + 8, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = min\infty + \infty, \infty + 6, \infty + 14, 36 + \infty$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = min\infty + \infty, \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = min40 + \infty, \infty + \infty, 39 + \infty, 37 + 11$	48
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}) = min33 + 11, 27 + \infty, 25 + \infty, 32 + \infty$	44
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}) = min\infty + 11, \infty + 6, \infty + 8, \infty + 3$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}) = min32 + \infty, \infty + 6, 31 + 14, 36 + \infty$	45
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}) = min\infty + \infty, \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11$	∞
	$cost(x_6, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}) = min40 + \infty, \infty + 3, 39 + \infty, 37 + 11$	48
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}) = min\infty + 11, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}) = min\infty + 11, \infty + 6, \infty + 8, \infty + \infty$	∞

[illegible]

	$cost(x_4, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 14, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_7, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min 33 + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 14, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_4, \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 14, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞ ∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 10, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 10, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞ ∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 29 + \infty, 30 + \infty, \infty + \infty, 35 + \infty$ $cost(x_4, \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞ ∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min 37 + 6, \infty + 8, \infty + \infty, \infty + 3$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min 31 + 6, 29 + 14, 24 + \infty, 34 + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11, \infty + 11$ $cost(x_5, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min 33 + \infty, 27 + \infty, 25 + 11, 32 + 10$ $cost(x_6, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 11, 36 + 10$	43 37 ∞ 36 46
$S = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + 8, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + 14, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_7, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, 36 + \infty$	∞ ∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min 33 + 6, \infty + 8, \infty + 3, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min 27 + 6, 19 + 14, \infty + \infty, 25 + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + 8, 17 + 14, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min 33 + \infty, 27 + \infty, 25 + \infty, 32 + 5$	39 33 31 ∞ 37
$S = \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty$ $cost(x_3, \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 6, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, 17 + \infty, \infty + 10, \infty + \infty$ $cost(x_6, \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 10, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞ ∞ ∞ ∞ ∞
$S = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 29 + 8, 30 + \infty, \infty + 3, 35 + \infty$ $cost(x_4, \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 8, \infty + 11, \infty + 11, \infty + \infty$ $cost(x_5, \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 27 + \infty, 19 + 11, \infty + 10, 25 + \infty$ $cost(x_6, \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 3, \infty + 11, \infty + 10, \infty + 5$ $cost(x_7, \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 31 + \infty, 29 + \infty, 24 + \infty, 34 + 5$	37 ∞ 30 ∞ 39
$S = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_3, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 29 + 14, 30 + \infty, \infty + \infty, 35 + \infty$ $cost(x_4, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 14, \infty + 11, \infty + 11, \infty + \infty$	43 ∞

	$cost(x_5, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 33 + \infty, \infty + 11, \infty + 10, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_6, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, \infty + 5$	∞
	$cost(x_7, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 37 + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞

Subconjuntos de tamaño 6		
S	función de costo	resultado
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min 43 + 11, 37 + \infty, \infty + \infty, 36 + \infty, 46 + \infty$	54
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + 8, \infty + \infty, \infty + 3$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min 42 + \infty, \infty + 6, 41 + 14, 42 + \infty, 46 + \infty$	55
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min \infty + \infty, \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11, \infty + 11$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min 44 + \infty, \infty + \infty, 45 + \infty, \infty + 11, 48 + 10$	58
	$cost(x_6, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}) = \min \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 11, 48 + 10$	58
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + 8, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 6, \infty + 14, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_7, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, 48 + \infty$	∞
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min 39 + 11, 33 + \infty, 31 + \infty, \infty + \infty, 37 + \infty$	50
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + 8, \infty + 3, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min 38 + \infty, \infty + 6, \infty + 14, \infty + \infty, 41 + \infty$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_6, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 5$	∞
	$cost(x_7, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}) = \min 44 + \infty, \infty + \infty, 45 + \infty, \infty + \infty, 48 + 5$	53
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 6, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 10, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_6, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 10, \infty + 5$	∞
	$cost(x_7, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞
$S = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 37 + 11, \infty + \infty, 30 + \infty, \infty + \infty, 39 + \infty$	48
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + 8, \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 8, \infty + 11, \infty + 11, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 38 + \infty, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, 41 + \infty$	∞
	$cost(x_6, \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 3, \infty + 11, \infty + 10, \infty + 5$	∞
	$cost(x_7, \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 42 + \infty, \infty + \infty, 41 + \infty, 42 + \infty, 46 + 5$	51
$S = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 43 + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 14, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 14, \infty + 11, \infty + 11, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_6, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, \infty + 5$	∞
	$cost(x_7, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 5$	∞
$S = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_2, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 43 + 6, \infty + 8, \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty$	49
	$cost(x_3, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 37 + 6, \infty + 14, 30 + \infty, \infty + \infty, 39 + \infty$	43
	$cost(x_4, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11, \infty + 11, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_5, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 39 + \infty, 33 + \infty, 31 + 11, \infty + 10, 37 + \infty$	42
	$cost(x_6, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, \infty + 5$	∞
	$cost(x_7, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 43 + \infty, 37 + \infty, \infty + \infty, 36 + \infty, 46 + 5$	51

Subconjuntos de tamaño 7		
S	función de costo	resultado
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$	$cost(x_1, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 49 + 11, 43 + \infty, \infty + \infty, 42 + \infty, \infty + \infty, 51 + \infty$	60
	$cost(x_2, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + 11, \infty + 6, \infty + 8, \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_3, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 48 + \infty, \infty + 6, \infty + 14, \infty + \infty, \infty + \infty, 51 + \infty$	∞
	$cost(x_4, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 8, \infty + 14, \infty + 11, \infty + 11, \infty + \infty$	∞
	$cost(x_5, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 50 + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, 53 + \infty$	∞
	$cost(x_6, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min \infty + \infty, \infty + 3, \infty + \infty, \infty + 11, \infty + 10, \infty + 5$	∞
	$cost(x_7, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}) = \min 54 + \infty, \infty + \infty, 55 + \infty, \infty + \infty, 58 + \infty, 58 + 5$	63
Ciclo Hamiltoniano		
función de costo		resultado
$\min\{60 + d_{1,0}, \infty, \dots, 63 + d_{7,0}\}$		66

3. En clase mencioné que los sólidos platónicos son Hamiltonianos, y les conté que el problema de encontrar un ciclo Hamiltoniano en una gráfica proviene del Icosian Game, que se juega en un tablero con forma de dodecahedro. Juan preguntó en clase si para cualesquiera cinco vértices iniciales se puede completar el ciclo. En este problema vamos a explorar el juego y la pregunta de Juan.

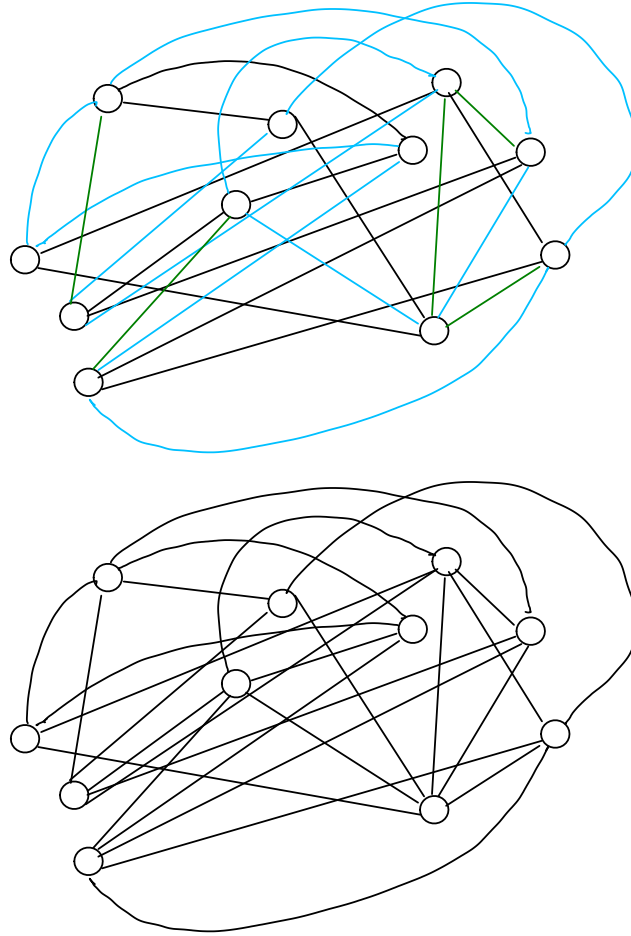
- Juega el Icosian Game en el dodecahedro, intenta elegir cinco vértices de tal forma que generen una combinación que haga realmente complicado completar el ciclo. Responde a la pregunta de Juan.
- ¿Cuál de los sólidos platónicos elegirías como tablero para que sea más complicado el Icosian Game? Explica tu elección.
- Si pudieras diseñar un tablero (finito) que hiciera ultra complicado el Icosian Game ¿cómo sería? Describe sus características y argumenta por qué consideras que sería más complicado el juego en el mismo.
- Al jugar el Icosian Game durante un rato no encontré alguna instancia del juego que fuera realmente complicada, yo creo que eso es por toda la simetría que hay en el tablero, mientras más lo jugaba más fácil me parecía completar los ciclos.

Yo creo que siempre es posible formar un ciclo Hamiltoniano comenzando con cinco vértices. Un argumento de que porque es cierto es el siguiente:

Supongamos por contradicción que no existe un camino P_5 que se pueda extender a un ciclo Hamiltoniano. Todos los P_5 son idénticos ya que las caras de el dodecaedro son idénticas, así que si no existe un camino P_5 que se pueda extender, entonces no hay ningún P_5 que se pueda extender, pero podemos tomar cualquier ciclo Hamiltoniano (que sabemos que si hay ciclos Hamiltonianos) y tomar los primeros cinco vértices para formar un P_5 , contradiciendo que un P_5 no se puede extender.

- El tetraedro, el cubo y el octaedro forman una gráfica muy pequeña, así que es muy sencillo el Icosian Game en esos tableros. Estuve jugando el Icosian Game en el icosaedro y noté que es mas sencillo que en el dodecaedro, ya que el icosaedro tiene 20 caras de tamaño tres, eso hace que sea más simétrico que el Icosian Game del dodecaedro, así que yo elegiría el dodecaedro como el tablero que complica más el Icosian Game.

- El Icosian Game es sencillo en los sólidos platónicos porque los tableros tienen mucha simetría y estructura, así que para formar un tablero ultra complicado buscaría construir un tablero con la menor estructura posible. Primero pondría n vértices en una posición aleatoria, luego formaría dos o más caminos Hamiltonianos aleatorios (el número mínimo de soluciones, pero tiene que ser al menos dos ya que con uno solo se vuelve mucho más sencillo el juego (no hay otros caminos con los que se combine y puedas elegir una elección incorrecta), y por último agregaría algunas aristas aleatoriamente que no formen parte de los caminos anteriores. Abajo se muestra un ejemplo de una gráfica Hamiltoniana con once vértices, las aristas negras forman el primer ciclo, las aristas azules forman el segundo ciclo Hamiltoniano, y las aristas verdes son aristas aleatorias.



■

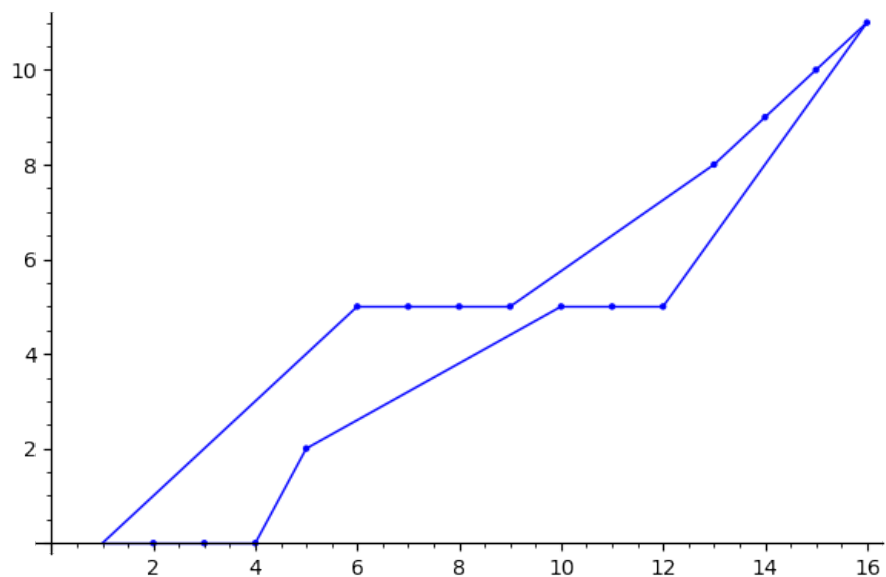
3. En este problema vas a jugar con los datos de www.math.uwaterloo.ca/tsp/index.html

Revisa la página y revisa las bases de datos que hay en la misma. En Sage existen las funciones para calcular ciclos Hamiltonianos y para resolver el Traveling Salesperson Problem, como sabemos ambos problemas son NP-completos, así que las funciones de Sage pueden terminar en unos segundos o tardar varias horas o no terminar nunca, dependiendo de las características de la gráfica que reciban como entrada.

Elige alguna base de datos de TSP de la UWaterloo. Alimenta a alguna de las funciones de Sage, mencionadas en el párrafo anterior, con instancias de dicha base de datos de tal forma que puedas obtener ciclos Hamiltonianos. Eres libre de hacer el número de pruebas que desees. Describe qué observas y qué aprendes con este ejercicio. Muestra tus resultados gráficamente.

Intenté primero resolver el Traveling Salesperson Problem en la gráfica más pequeña que encontré, que es la de 131 puntos de el siguiente enlace

<http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/vlsi/index.html>, pero nunca pude hacer que terminara de ejecutar el algoritmo de Sage para resolver el TSP, la instancia más grande que pude resolver fue de 16 puntos (tomé los primeros 16), y el costo mínimo fue 39.60. Una imagen del ciclo formado se muestra abajo.



Yo no encontré una función en Sage que resolviera la versión euclideana del TSP, así que tuve que usar la función para resolver el TSP general, generando primero la gráfica completa con la distancia entre los puntos como pesos. Tal vez hubiera podido resolver instancias más grandes si Sage tuviera una función que usara el hecho que son puntos en el plano. ■