ntext0Ed1976teorianty/global//global/global

Provas e Soluções
Aulas
Moésio M. de Sales

1 Prova 2016

Veja [1]

Questão 31 O produto $x.y$ é igual a 338. Adicionando se 3 unidades a cada um dos números (x e y), o novo produto é 464. A soma $x+y$ vale:

1. ( ) 28.
2. ( ) 39.
3. ( )171.
4. ( ) 339.

Solução 1.1 *A soma $x+y$ vale:*

$$\begin{cases} x\cdot y = 338 \\ (x+3)(y+3) = 464 \end{cases}$$

Na segunda equação

$$\begin{aligned}
(x+3)(y+3) = xy + 3x + 3y + 9 &= 464 \\
xy + 3(x+y) + 9 &= 464 \\
338 + 3(x+y) + 9 &= 464 \\
3(x+y) + 347 &= 464 \\
(x+y) &= \frac{464-347}{3} = \frac{117}{3} = 39
\end{aligned}$$

Questão 32 A expressão $0,000028$ pode ser representada através da potência:

1. ( )$2,8\times10^{-5}$.
2. ( )$2,8\times10^{-4}$.
3. ( )$2,8\times10^{4}$.
4. ( )$2,8\times10^{5}$.

Solução 1.2

$$0,000028 = \frac{2,8}{100000} = 2,8\times10^{-5}$$

Questão 33 João, José, Pedro e Tiago estãc em um restaurante e pedem uma pizza. Ao chegar o pedido, eles percebem que a pizza não veio fatiada. Eles decidem entre si a seguinte divisão: João comerá 1/8 da pizza, José comerá 9/40 e Pedro comerá 17/80 da pízza. Desta forma, sobrará para Tiago;

1. ( )14/40 da pízza.
2. ( )17/32 da pizza.
3. ( )7/16 da pízza.
4. ( )1/2 da pizza.

Solução 1.3 ***Solução 1.4***

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}+\frac{9}{40}+\frac{17}{80} &= \frac{10\times1+2\times9+17}{80} \\
&= \frac{10+18+17}{80} \\
&= \frac{45}{80} = \frac{9}{16} \\
\textit{Sobrando} &= 1-\frac{9}{16} = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}
\end{aligned}$$

Questão 35 Uma mulher compra 5 canetas e 3 lápis pagando um valor total de $R\$14,50$. Um mês depois ela retorna à mesma loja para comprar 8 canetas e 5 lápis e paga $R\$23,50$. Supondo que não houve variação nos preços, assinale o valor de cada caneta e de cada lápis:

1. ( ) A caneta custa $R\$1,50$ e o lápis $R\$2,00$.
2. ( ) A caneta custa $R\$1,00$ e o lápis $R\$2,50$.
3. ( ) A caneta custa $R\$2,50$ e o lápis $R\$1,00$.
4. ( ) A caneta custa $R\$2,00$ e o lápis $R\$1,50$.

Solução 1.5

$$\textit{Sejam } x \textit{ e } y \textit{ os valores por unidades das canetas e lápis, respectivamente}$$
$$\begin{cases} 5x+3y=14,50 \\ 8x+5y=23,50 \end{cases}$$
$$\textit{Resolvendo o sistema} \begin{cases} 5x+3y=14,50(\times-8) \\ 8x+5y=23,50(\times 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -40x-24y=-116 \\ 40x+25y=117,5 \end{cases}$$
$$\textit{Somando } y=117,5-116=1,5$$
$$\textit{Substituindo } 5x+3y=14,50 \Rightarrow 5x+3(1,5)=14,50 \Rightarrow x=\frac{14,5-4,5}{5}=2$$

Questão 36 Para comprar camisas e calções, um homem dispõe de uma certa quantia. Na loja A o calção custa $R\$40,00$ e a camisa custa $R\$60,00$. Já na loja B, o calção custa $R\$35,00$ e a camisa custa $R\$70,00$. Independentemente da escolha da loja, o número de calções comprados não mudará. O mesmo vale para o número de camisas. Nestas condições, para que o valor total da compra seja o mesmo em ambas as lojas:

1. ( ) a quantidade de calções deve ser igual à quantidade de camisas.
2. ( ) a quantidade de calções deve ser o dobro da quantidade de camisas.
3. ( ) a quantidade de calções deve ser a metade da quantidade de camisas.
4. ( ) a quantidade de calções deve ser um terço da quantidade de camisas.

Solução 1.6

$$\textit{Sejam } x \textit{ e } y \textit{ as quantidades de calções e camisas, respectivamente}$$
$$\begin{cases} 40x+60y=\textit{preço em } A \\ 35x+70y=\textit{preço em } B \end{cases}$$
$$\textit{Como o preço devem ser iguais}$$
$$40x+60y=35x+70y \Rightarrow 40x-35x=70y-60y \Rightarrow 5x=10y \Rightarrow x=2y$$

Resposta: Item 2

Questão 37 Para $x=1$, o resto da divisão de $5x^4+3x^3+x^2+1$ por x^2+x , vale:

1. ( )-4.
2. ( ) -2.
3. ( ) 2.
4. ( ) 4.

Solução 1.7

$$\textit{Seja } P(x) = 5x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 \textit{ e } D(x) = x^2 + x$$
$$\textit{Queremos } \Rightarrow R(1)$$
$$\textit{De forma geral } P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \textit{ onde grau}R < \textit{grau}Q$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +3x^3 & +x^2 & & +1 & x^2 + x \\
\cline{6-6}
-5x^4 & -5x^3 & & & & 5x^2 - 2x + 3 \\
\cline{1-2}
 & -2x^3 & +x^2 & & & \\
 & 2x^3 & +2x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 3x^2 & & & \\
 & & -3x^2 & -3x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -3x & +1 &
\end{array}$$

Ou seja, $R(x) = -3x + 1 \Rightarrow R(1) = -3 + 1 = -2$

Questão 38 O conjunto solução da inequação $x - 8 > 7 - 2x$ é:

1. ( ) $\emptyset$.
2. ( ) $\{6\}$.
3. ( )$\{x \in \mathbb{R}; x < 5\}$.
4. ( )$\{x \in \mathbb{R}; x > 5\}$.

Solução 1.8

$$\begin{aligned}
x - 8 &> 7 - 2x \\
x + 2x &> 7 + 8 \\
3x &> 15 \\
x &> \frac{15}{3} = 5
\end{aligned}$$

Portanto, $\{x \in \mathbb{R}; x > 5\}$

Questão 39 Uma função é dita injetiva quando elementos diferentes (no domínio) têm imagens diferentes (no contra- dominio). Quando todo elemento do contra-domínio é imagem de algum elemento do domínio, diz-se que a função é sobrejetiva. Assinale a opção correta:

1. ( ) A função $f(x) = x^2$ com domínio e contra-dominio no conjunto dos números reais, é injetiva.
2. ( ) A função $f(x) = 2x + 1$ com domínio e contra-domínio sendo o conjunto dos números reais não negativos, é sobrejetiva.
3. ( ) A função $f(x) = 2x$ com domínio e contra-domínio no conjunto dos números reais, é injetiva e sobrejetiva.
4. ( ) A função $f(x) = x^2 + 1$ com domínio e contra-domínlo no conjunto dos números reais não negativos, é injetiva e sobrejetiva.

Solução 1.9

1. *(F)* $f(1) = 1^2 = f(-1) = (-1)^2$
2. *(F) Pois, existiria* $x = -2$*, por exemplo, tal que* $f(-2) = 2(-2) + 1 = -3$ *que não pertence aos reais positivos.*
3. *(V)*
4. *(F) Temos que* $0 \in \mathbb{R}_+$ *mas não existe* $x \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $f(x) = x^2 + 1 = 0$ *logo não é sobrejetiva.*

Questão 40 Sejam A, B, C conjuntos não vazios e finitos. O conjunto $A \cap B \cap C$ tem três elementos. O conjunto com a menor quantidade de elementos, tem seis elementos. Assinale a alternativa correta.

Vamos discutindo ao longo dos dias.

1. () A união $A \cup B \cup C$ tem no mínimo 6 elementos.
2. () A união $A \cup B \cup C$ tem no mínimo 9 elementos.
3. () A união $A \cup B \cup C$ tem no mínimo 18 elementos.
4. () A união $A \cup B \cup C$ tem no mínimo 21 elementos.

Solução 1.10 *Temos que* $|A \cap B \cap C| = 3$. *Suponha , sem perda de generalidade, que* $6 \leq |A| \leq |B| \leq |C|$
Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão:

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
\textit{Substituindo } |A \cap B \cap C| = 3 & \\
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 3 \\
& \quad \textit{Agora como o menor dos conjuntos têm no mínimo } 6 \\
|A \cup B \cup C| &\geq 6 + 6 + 6 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 3 \\
|A \cup B \cup C| &\geq 21 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\
\textit{As intersecções} & \quad |A \cap B|,\ |A \cap C|,\ |B \cap C| \textit{ Têm no mínimo 3 elementos em} \\
& \quad \textit{comum. Como existe um conjunto com 6 elementos,temos que} \\
& \quad \textit{no máximo duas das intersecções tem no máximo} \\
& \quad \textit{6 elementos, digamos} \\
|A \cup B \cup C| &\geq 21 - 6 - 6 - |B \cap C| \\
& \quad \textit{Essa última intersecção terá 3 elementos em comum} \\
|A \cup B \cup C| &\geq 21 - 6 - 6 - 3 \\
|A \cup B \cup C| &\geq 6
\end{aligned}
$$

Vamos discutir essa solução.

Questão 41 Um triângulo equilátero ABC tem área S. Ao tomarmos os pontos médios de cada lado, obtemos um novo triângulo EFG. A relação entre a área de EFG e ABC é:

1. () $\frac{1}{4}$
2. () $\frac{1}{2}$
3. () 2
4. () 4

Solução 1.11 *Temos que*

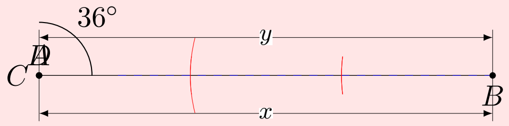
C

Os quatro triângulos da figura são congruentes e portanto a área do

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ABC} &= 4 \cdot \Delta_{EFG} \\
\frac{\Delta_{ABC}}{\Delta_{EFG}} &= 4 \\
\frac{\Delta_{EFG}}{\Delta_{ABC}} &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

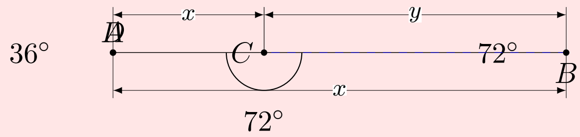
Questão 42 Um triângulo isósceles ABC tem apenas um dos ângulos internos medindo 36^o em A. Pelo vértice B traça-se a bissetriz do ângulo interno até encontrar o lado AC no ponto D. Se x é comprimento do lado AB e y o comprimento do lado BC, então o segmento AD mede:

1. ( )$x^2 - y^2$.
2. ( )$x^2 + y^2$.
3. ( )$(x^2 - y^2)/x$.
4. ( )$(x^2 + y^2)/x$.



Solução 1.12

Como o ângulo em A é único então a base do triângulo é o lado BC e AC = AB, com os ângulos da base medindo $2\widehat{B} + 36° = 180°$, *ou seja,* $\widehat{C} = \widehat{B} = \frac{180-36}{2} = 72°$.



Como BD é bissetriz de $A\widehat{B}C$, *pelo teorema da* BISSETRIZ INTERNA:

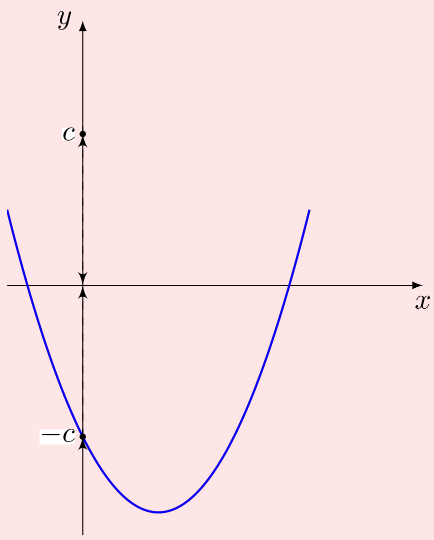
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} &= \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} \\
\frac{x}{\overline{AD}} &= \frac{y}{x - \overline{AD}} \\
x(x - \overline{AD}) &= y\overline{AD} \\
x^2 &= x\overline{AD} + y\overline{AD} \\
x^2 &= (x + y)\overline{AD}
\end{aligned}$$

Questão 43 Ao resolver uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = O$ na qual $a > O$, um estudante comete um equívoco e troca o sinal do termo independente. O vértice da parábola encontrada está a que distancia do vértice da parábola correta?

Infelizmente meu notebook tá com problema e as figuras não compilaram. Vou corrigir no próximo update

1. ( )0.
2. ( )$|c|$.
3. ( )$|2c|$.
4. ( )$|4c|$.

Solução 1.13 .



A distância será $|c - (-c)| = |2c|$

2 Prova 2018

Questão 33
Na barraca do Zé Docinho, trufas e cocadas são vendidas. Ana comprou 5 trufas, 3 cocadas e gastou $R\$9,90$. No dia seguinte, Zé Docinho estava liquidando o estoque: 10% de desconto em tudo! Daniele comprou 4 trufas, 8 cocadas e pagou $R\$11,16$. A unidade da trufa e da cocada custaram para Ana, respectivamente:

1. ( ) $R\$1,80, R\$0,30$.
2. ( ) $R\$1,20, R\$1,30$.
3. ( ) $R\$0,60, R\$2,30$.
4. ( ) $R\$1,50, R\$0,80$.

Solução 2.1 *Sejam t o valor da trufa e c o valor da cocada. Temos*

$$5t + 3c = 9,9$$

Após o desconto de 10%:

$$\begin{aligned} t \to 90\% \text{ de } t \to \frac{90}{100}t &= \frac{9t}{10} \\ c \to 90\% \text{ de } c \to \frac{90}{100}c &= \frac{9c}{10} \end{aligned}$$

como o novo preço:

$$\begin{aligned} 4\frac{9t}{10} + 8\frac{9c}{10} &= 11,16 \\ \frac{18t}{5} + \frac{36c}{5} &= 11,16 \\ 18t + 36c = 55,8 \end{aligned}$$

55.8/3 = 18.6000 Temos o sistemas:

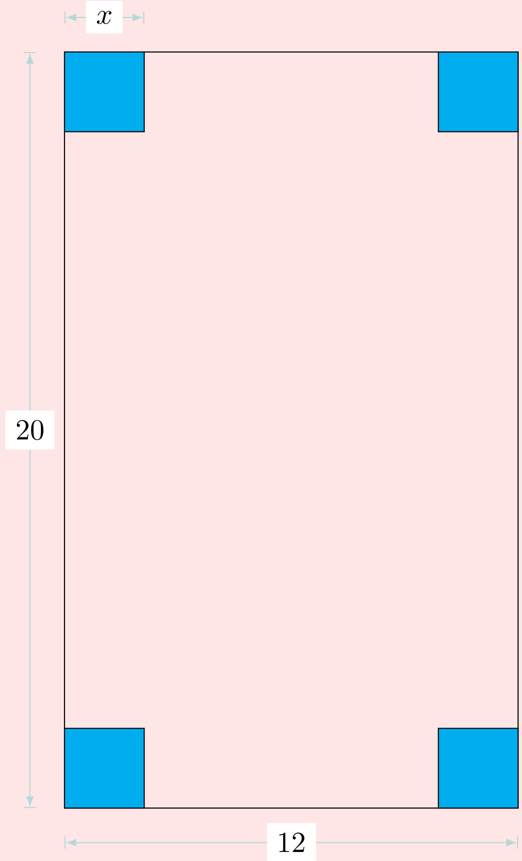
$$\begin{cases} 5t + 3c = 9,9 \\ 18t + 36c = 55,8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$t = \frac{3}{2} = 1,5 \quad c = \frac{4}{5} = 0,8$$

Questão 34
Com um pedaço retangular de papelão de dimensões $20cm \times 12cm$ deseja-se construir uma caixa sem tampa. Para tanto, recorta-se de cada canto do papelão um quadrado de lado x. Assim, surgem abas que serão levantadas, dando forma à caixa. Qual intervalo melhor representa as possibilidades para os valores de x?

1. ( ) $(0, 6)$.
2. ( ) $(0, 10)$.
3. ( ) $(0, 12)$.
4. ( ) $(0, 20)$.



Solução 2.2

Para um determinado lado, devemos ter x positivo

$$\begin{aligned} 12 - 2x &> 0 \\ -2x &> -12 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 20 - 2x &> 0 \\ -2x &> -20 \\ 2x &< 20 \\ x &< 10 \end{aligned}$$

Em qualquer caso, x deve ser positivo e menor que 6, devemos ter: $x \in (0, 6)$.

Questão 47

O resto da divisão do polinômio $p(x)$ por $x - 1$ é igual a 5. Dividindo o mesmo polinômio por $x + 1$, obtém-se o mesmo resto: 5. Dividindo o polinômio $p(x)$ por $(x - 1) \cdot (x + 1)$, o resto obtido é:

1. ( ) 0.
2. ( ) 5.
3. ( ) 25.
4. ( ) 125.

Solução 2.3 *Temos que*

$$\begin{cases} p(x) = (x-1)q_1(x) + 5 \\ p(x) = (x+1)q_2(x) + 5 \end{cases}$$

Usando o Teorema do Resto:

$$p(1) = 5$$
$$p(-1) = 5$$

Queremos determinar $R(x)$ na equação:

$$p(x) = (x-1)(x+1)q(x) + R(x)$$

Como $(x-1)(x+1)$ tem grau 2, logo o resto $R(x)$ tem no máximo grau 1 ,ou sejam $R(x) = ax + b$, reescrevendo:

$$p(x) = (x-1)(x+1)q(x) + ax + b$$

Aplicando os valores $p(1)$ e $p(-1)$:

$$\begin{cases} p(1) = (1-1)(1+1)q(1) + a \cdot 1 + b = a + b = 5 \\ p(-1) = (-1-1)(-1+1)q(-1) + a \cdot (-1) + b = -a + b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -a + b = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos: $a = 0$ e $b = 5$. Portando, $R(x) = 5$.

O teorema do Resto de Polinômios Afirma que divisão de um polinômio $p(x)$ pelo binômio $ax + b$ tem como resto $p(\frac{-b}{a})$

Notes

Referências

[1] Edgard de Alencar Filho. *Teoria elementar dos conjuntos*. Nobel, 1976.