Notas de Aula X
Lógica Matemática
Sistema de Informação

Moésio M. de Sales[1]

1 Quantificadores

1.1 Quantificador Universal

Definição 1.1 (Quantificador universal) *Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto não vazio A ($A \neq \emptyset$) e seja V_p o seu conjunto-verdade[1, 2]:*

$$V_p = \{x | x \in A \land p(x)\}$$

Quando $V_p = A$, isto é, todos os elementos do conjunto A satisfazem a sentença aberta $p(x)$, podemos, então, afirmar:

1. *Para todo elemento x de A, $p(x)$ é verdadeira (V);*
2. *Qualquer que seja o elemento x de A, $p(x)$ é verdadeira (V)*

Dada uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A, o símbolo $\forall$, referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme $p(x)$ exprime ou não uma condição universal no conjunto A. A esta operação lógica dá-se o nome de Quantificação Universal.

No simbolismo da Lógica Matemática indica-se este fato, abreviadamente, de uma das seguintes maneiras:

1. $(\forall x \in A)(p(x))$
2. $\forall x \in A, p(x)$
3. $\forall x \in A : \; p(x)$

Ou simplesmente:

1. $(\forall x)(p(x))$
2. $\forall x, p(x)$
3. $\forall : \; p(x)$

Logo,

$$(\forall x \in A)(p(x)) \Leftrightarrow V_p = A$$

Definição 1.2 *Quando, em particular, A seja um conjunto finito com n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, isto é, $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, é óbvio que a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$ equivalente à conjunção das n proposições $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n)$, ou seja, simbolicamente:*

$$(\forall x \in A)(p(x)) \Leftrightarrow (p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n))$$

[1] moesio@ifce.edu.br

1.2 Quantificador Existencial

Definição 1.3 (Quantificador existencial) *Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto não vazio A $(A \neq \emptyset)$ e seja V_p o seu conjunío-verdade:*

$$V_p = \{x | x \in A \wedge p(x)\}$$

Quando V_p não é vazio $V_p \neq \emptyset$, então, pelo menos um elemento, do conjunto A satisfaz a sentença aberta $p(x)$, e podemos afirmar:

1. *Existe pelo menos um x de A, tal que $p(x)$ é verdadeira (V);*
2. *Para algum x de A, $p(x)$ é verdadeira (V)*

Uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A,o símbolo $\exists$, referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme $p(x)$ exprime ou não uma condição possível no conjunto A, A esta operação lógica dá-se o nome de Quantificação Existencial.

No simbolismo da Lógica Matemática indica-se este fato, abreviada mente, de uma das seguintes maneiras:

1. $(\exists x \in A)(p(x))$
2. $\exists x \in A, p(x)$
3. $\exists x \in A : p(x)$

Subsiste, pois, a equivalência:

$$(\exists x \in A)(p(x)) \Leftrightarrow V_p \neq \emptyset$$

Definição 1.4 *Quando, em particular, A seja um conjunto finito com n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, isto é, $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, é óbvio que a proposição $(\exists x \in A)(p(x))$ equivalente à disjunção das n proposições $p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n)$, ou seja, simbolicamente:*

$$(\exists x \in A)(p(x)) \Leftrightarrow (p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n))$$

1.3 Variável Aparente e Variável Livre

Definição 1.5 *Quando há um quantificador a incidir sobre uma variável, esta diz-se* aparente *ou muda; caso contrário, a variável diz-se* livre.

Exemplo 1.1 *A letra x é variável livre nas sentenças abertas:*

$$3x - 1 = 14 \text{ (equação)}, \ x + 1 > x \ \text{ (inequação)}$$

Exemplo 1.2 *A letra x é variável aparente nas proposições:*

$$(\exists x)(3x - 1 = 14), \ (\forall x)(x + 1 > x)$$

Princípio 1.1 *Todas às vezes que uma variável aparente é substituída, em todos os lugares que ocupa numa expressão, por outra variável que não figure na mesma expressão, obtém-se uma expressão equivalente.*

1.4 Quantificador de Existência e Unicidade

Considerando a sentença aberta $x^3 = 27$ em $\mathbb{R}$ e as proposições:

(i) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^3 = 27)$

(ii) $x^3 = 27 \wedge y^3 = 27 \Rightarrow x = y$

A conjunção das duas proposições diz que existe um $x \in \mathbb{R}$ e um só tal que $x^3 = 27$. Para indicar este fato, escreve-se:

$$(\exists! x \in \mathbb{R})(x^3 = 27)$$

onde o símbolo $\exists!$ é chamado quantificador existencial de unicidade e se lê: "Existe um e um só" .

Exemplo 1.3 *São obviamente verdadeiras as proposições:*

- $(\exists! x \in \mathbb{N})(x^2 - 9 = 0)$
- $(\exists! x \in \mathbb{Z})(-1 < x < 1)$
- $(\exists! x \in \mathbb{R})(|x| = 0)$

1.5 Negação das Proposições com Quantificadores

Definição 1.6 (Negação universal) *De modo geral, a negação da proposição $(\forall x \in A)(p(x))$ é equivalente a afirmação de que, para ao menos um $x \in A, p(x)$ é falsa ou $\neg p(x)$ é verdadeira.*

Logo, subsiste a equivalência:

$$\neg[(\forall x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\neg p(x))$$

Definição 1.7 (Negação existencial) *Analogamente, a negação da proposição $(\exists x \in A)(p(x))$ é equivalente a afirmação de que, para todo $x \in A, p(x)$ é falsa ou $\neg p(x)$ é verdadeira.*

Logo, subsiste a equivalência:

$$\neg[(\exists x \in A)(p(x))] \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\neg p(x))$$

Exemplo 1.4 *A negação da proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma A que está doente" é a proposição: " Qualquer que seja o aluno da turma A, ele não está doente", ou seja, mais simplesmente: " Nenhum aluno da turma A está doente".*

Exemplo 1.5 $\neg(\forall n \in \mathbb{N})(n + 2 > 8) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n + 2 \leq 8)$

1.6 Contraexemplo

Definição 1.8 (Contraexemplo) *Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall x \in A)(p(x))$ é falsa (F) basta mostrar que a sua negação $(\exists x \in A)(\neg p(x))$ verdadeira (V), isto é, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa (F), Pois bem, o elemento x_0, diz-se um contraexemplo para a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$.*

Exemplo 1.6 *A proposição $(\forall x \in \mathbb{R})((x + 2)^2 = x^2 + 4)$ é falsa, sendo, por exemplo, $x_0 = 1$ um contraexemplo:* $(1 + 2)^2 \neq 1^2 + 4$ *ou* $9 \neq 5$

1.7 Exercícios

1. Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})(|x| = x)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$

(c) $(\exists x \in \mathbb{R})(|x| = 0)$

(d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x + 2 = x)$

(e) $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 1 > x)$

(f) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = x)$

2. Dar a negação das proporsições do Exercício 1.

3. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$

(b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$

(c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$

(d) $(\forall x \in A)(x + 3 < 7)$

(e) $(\exists x \in A)(3^x > 72)$

(f) $(\exists x \in A)(x^2 + 2x = 15)$

4. Dar a negação das proposições do Exercício 3.

5. Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\exists x \in A)(2x = x)$

(b) $(\exists x \in A)(x^2 + 3x = 2)$

(c) $(\exists x \in A)(x^2 + 5 = 2x)$

(d) $(\forall x \in A)(2x + 3x = 5x)$

6. Dar a negação das proposições do Exercício 5.

Referências

[1] Edgar de Alencar Filho. *Iniciação à lógica matemática*. Nobel, 2002.

[2] C.A.F. Bispo, L.B. Castanheira e O.M.S. Filho. *Introduçao A Logica Matemática*. CENGAGE DO BRASIL.