Atividade 1 - Recorrências
Matemática Discreta
Sistemas de Informação

Moésio M. de Sales[1]

Alun@:	30 de maio de 2022
Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção. **1 Ponto**	

1. Se $x_{n+1} = 2x_n$ e $x_1 = 3$, determine x_n.
2. Se $x_{n+1} = x_n + 3$ e $x_1 = 2$, determine x_n
3. Se $x_{n+1} = 5x_n + 3$ e $x_1 = 1$, determine x_n
4. Resolva a equação $x_{n+1} = (n+1)x_n + n$, $x_1 = 1$.

Solução:

Da equação $x_{n+1} = (n+1)x_n + n$ com $x_1 = 1$, temos que $f(n) = n$ e $g(n) = n + 1$

Considere a homogênea

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1)x_n \\ n = 1 \rightarrow x_2 &= 2x_1 \\ n = 2 \rightarrow x_3 &= 3x_2 \\ &\cdots \\ n = n \rightarrow x_n &= nx_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando

$$x_n = x_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Para $x_1 = 1$

$$\begin{aligned} x_n &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \\ x_n &= n! \end{aligned}$$

Isso é nossa a_n

$$a_n = n!$$

[1] moesio@ifce.edu.br

Considere a recorrência $x_n = a_n y_n$, nossa equação a determinar será

$$x_n = n! y_n \tag{1}$$

Do teorema fundamental, devemos encontrar

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(n)}{a_n g(n)}$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{n}{n!(n+1)}$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{n}{(n+1)!}$$

Resolvendo

$$n = 1 \to y_2 = y_1 + \frac{1}{2!}$$
$$n = 2 \to y_3 = y_2 + \frac{2}{3!}$$
$$n = 3 \to y_4 = y_3 + \frac{3}{4!}$$
$$\dots$$
$$n = n \to y_n = y_{n-1} + \frac{n-1}{n!}$$

Somando

$$y_n = y_1 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} \right)$$

Observe a relação

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$$

Aplicando na última equação

5. Resolva a equação $(n+1)x_{n+1} + nx_n = 2n - 3$, $x_1 = 1$.

6. Resolva a equação $x_{n+1} - nx_n = (n+1)!$, $x_1 = 1$.

7. Para sequências definidas por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, $x_0 = x_1 = 1$, determine x_{50}.

8. Para sequências definidas por $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 10x_n$, $x_0 = x_1 = 1$, determine x_{20}.

9. Para sequências definidas por $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 5x_n$, $x_0 = x_1 = 1$, determine x_{10}.

10. Quantas são as sequências com n letras, cada uma igual a a, b ou c, de modo que não há duas letras a seguidas?

11. Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

12. Resolver a recorrência $x_n = 6x_{n-1} - 8x_{n-2} + 2$, com $x_1 = x_2 = 1$.

13. Resolva a equação a seguir.

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 3^n, \ x_0 = 1, \ x_1 = 2$$

.

Solução:

A equação homogenêna h_n : $x_{n+1} - 5x_n + 6x_n = 0$, tem como equação cracterística $r^2 - 5r + 6 = 0$ e suas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Portanto, solução da homogênea é

$$h_n = C_1 2^n + C_2 3^n \tag{2}$$

Considere a equação

$$= n + 3^n$$

Ela é da forma

$$t_n = An + B + C3^n$$

Mas teremos que aumentar o grau para

$$= An + B + nC3^n$$

Assim, teremos que

$$\begin{gathered} A(n+2) + B + C(n+2)3^{n+2} - 5A(n+1) - 5B - 5C(n+1)3^{n+1} \\ +6An + 6B + 6C3^n = n + 3^n \end{gathered}$$

Simplificando

$$3An - 3A + 2B + 5C3^n = n + 3^n \tag{3}$$

o que nos dá

$$A = \frac{1}{2}, \ B = \frac{3}{4} \text{ e } C = \frac{1}{5} \tag{4}$$

Logo, a solução particular é

$$x_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}3^n \tag{5}$$

Finalmente a solução geral é $x_n = h_n + t_n$

$$x_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}3^n + C_1 2^n + C_2 3^n$$

14. Resolva a equação

$$x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \ x_0 = 3; \quad x_1 = -6$$

15. (MMS-2018-Adaptado) Durante a guerra de judeus e romanos, Josephus estava entre rebeldes judeus encurralados em uma caverna pelos romanos. Preferindo o suícidio a captura, os rebeldes decidiram formar um círculo e, contando ao longo deste, suicida-se uma pessoa sim, uma não, até não sobrar ninguém.

(a) Se na caverna estavam 11 rebeldes. Determine qual posição Josephus deveria escolher para sair ileso desse círculo malígno.

(b) Se na caverna estavam n rebeldes. Determine qual posição Josephus deveria escolher para sair ileso desse círculo malígno.

16. O DNA de um aluno de discreta é formado por sequências de cinco proteínas chamadas 0, 1, c, x, e y. Nas sequências, nunca aparecem cx, cy, yx e yy. Todas as outras possibilidades são permitidas.

(a) Quantas são as possíveis sequências de DNA de um aluno de discreta com n proteínas?

Sugestão: Sejam a_n a quantidade de sequências de n proteínas que não terminam com c ou y e b_n a quantidade de sequências que terminam com c ou y. Queremos $x_n = a_n + b_n$ (Por quê?).

$$\begin{cases} a_0 = 1, \ b_0 = 0 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

Note que, $a_1 = 3$ e $b_1 = 2$(Por quê?). Isolando as variáveis...

(b) Quantas são as possíveis sequências de DNA de um aluno de discreta com 10 proteínas?

17. O salário de Carmelino no mês n é $S_n = 10+3n$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas de suas aplicações financeiras. Ele poupa anualmente $1/p$ de sua renda e investe sua poupança a juros mensais de taxa i. Determine a renda de Carmelino no mês n.

Sugestão: $x_n = S_n + iy_{n-1}$, $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n$, onde y_n e o montante da poupança no final do mês n. Tire o valor de y na primeira equação e substitua na segunda.