

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Галунин Сергей Александрович  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 23.12.2025 12:07:09  
Уникальный программный ключ:  
08ef34338325bdb0ac5a47baa5472ce36cc3fc3b

Приложение к ОПОП  
«Информационно-управляющие  
системы»



**СПбГЭТУ «ЛЭТИ»**  
ПЕРВЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина)»  
(СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)**

---

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

ДИСЦИПЛИНЫ

**«КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ГРАФОВ»**

для подготовки бакалавров

по направлению

09.03.02 «Информационные системы и технологии»

по профилю

**«Информационно-управляющие системы»**

Санкт-Петербург

2025

## **ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ**

Разработчики:

доцент, к.ф-м.н. Рыбин С.В.

заведующий кафедрой, д.пед.н., доцент Поздняков С.Н.

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры АМ

17.01.2025, протокол № 6

Рабочая программа рассмотрена и одобрена учебно-методической комиссией

ФКТИ, 28.01.2025, протокол № 1

Согласовано в ИС ИОТ

Начальник ОМОЛА Загороднюк О.В.

## 1 СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Обеспечивающий факультет	ФКТИ
--------------------------	------

Обеспечивающая кафедра	АМ
------------------------	----

Общая трудоемкость (ЗЕТ)	4
--------------------------	---

Курс	2
------	---

Семестр	3
---------	---

### **Виды занятий**

Лекции (академ. часов)	34
------------------------	----

Практические занятия (академ. часов)	34
--------------------------------------	----

Иная контактная работа (академ. часов)	1
--	---

Все контактные часы (академ. часов)	69
-------------------------------------	----

Самостоятельная работа, включая часы на контроль (академ. часов)	75
---	----

Всего (академ. часов)	144
-----------------------	-----

### **Вид промежуточной аттестации**

Экзамен (курс)	2
----------------	---

## **2 АННОТАЦИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **«КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ГРАФОВ»**

Много комбинаторных вопросов исторически рассматривались изолированно, представляя специальное решение проблемы, возникшей в некотором математическом контексте. В конце двадцатого века были разработаны общие теоретические методы, превратившие комбинаторику в независимую отрасль математики.

Дисциплина объединяет классические комбинаторные идеи и их обобщения с прикладной проблематикой, в том числе, генерированием комбинаторных объектов, кодированием. Обсуждается техника работы с производящими функциями. Большой раздел связан с базовыми понятиями теории графов и примерами алгоритмов на графах. Этот раздел можно назвать «прикладной теорией алгоритмов», так как в нем на важных примерах обсуждаются общие принципы доказательства корректности алгоритмов и их эффективности.

## **SUBJECT SUMMARY**

### **«COMBINATORICS AND GRAPH THEORY»**

Many combinatorial questions were historically considered in isolation, representing a special solution to the problem that arose in a certain mathematical context. At the end of the twentieth century, general theoretical methods were developed that transformed combinatorics into an independent branch of mathematics.

Discipline unites classic combinatorial ideas and their generalizations with application issues, including the generation of combinatorial objects, coding. We discuss the technique of working with generating functions, to the basic concepts of graph theory and examples of algorithms on graphs.

## **3 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

### **3.1 Цели и задачи дисциплины**

#### **1. Цели изучения дисциплины:**

- формирование достаточно высокой математической культуры;
- знакомство студентов с основными понятиями, методами и алгоритмам работы с дискретными объектами;
- развитие логического мышления;
- привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности;
- знакомство с современными информационными моделями (комбинаторными и графовыми), применяемыми при решении задач профессиональной деятельности.

Методы и алгоритмы работы с дискретными объектами, являясь предметом изучения дисциплины, участвуют в развитии логического мышления и формировании навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

#### **2. В рамках реализации цели решаются учебные задачи дисциплины:**

- развить логическую культуру мышления студента;
- развить способность обосновывать свои суждения и выбор метода решения возникающих задач;
- сформировать навыки построения моделей и проведения расчетов для дискретных структур;
- научить студентов применять основные математические методы, используемые при моделировании реальных систем;
- выработать у студентов методологию математического подхода к анализу естественно-научных задач и проблем из других областей;

-выработать у студентов способность создать математическую модель рассматриваемого объекта и провести ее детальное исследование с анализом результатов.

3. В результате изучения дисциплины студенты должны приобрести знания по следующей тематике:

- основные комбинаторные конструкции и приемы;
- понятие производящей функции. Однородные и неоднородные рекуррентные уравнения;
- приемы и алгоритмы перечислительной комбинаторики;
- принцип включения – исключения и его применения;
- понятие бинарного отношения, его представления и свойства;
- алгоритмы построения классов эквивалентности, топологической сортировки, транзитивного замыкания;
- простейшие определения и свойства графов;
- Эйлеровы цепи. Деревья, каркасы. Главные циклы и коциклы. Двудольные графы;
- планарность. Гомеоморфизм графов. Раскраска графов. Паросочетания.

4. В результате изучения дисциплины студенты должны приобрести следующие умения:

- решать комбинаторные задачи на использование правил умножения, сложения, дополнения, взаимно-однозначное соответствие (сочетания с повторениями), принципа включения-исключения;
- использовать аппарат производящих функций для сведения комбинаторных задач к задачам полиномиальной алгебры;
- использовать алгоритмы перечислительной комбинаторики для перечисления подмножеств, элементов декартового произведения, перестановок;
- применять алгоритмы кодирования RSA, Хаффмена и полиномиального кодирования;

-строить эйлерову цепь, минимальное остовое дерева нагруженного графа, главные циклы и коциклы, наибольшее паросочетания.

5. В результате изучения дисциплины студенты должны приобрести навыки работы с алгоритмами перечислительной комбинаторики, алгоритмами на бинарных отношениях, построения основных характеристик графов.

### **3.2 Место дисциплины в структуре ОПОП**

Дисциплина изучается на основе ранее освоенных дисциплин учебного плана:

1. «Алгебра и геометрия»
2. «Информатика»
3. «Математический анализ»
4. «Дискретная математика и теоретическая информатика»

и обеспечивает изучение последующих дисциплин:

1. «Математическая логика и теория алгоритмов»
2. «Теория принятия решений»
3. «Компьютерная графика»

### 3.3 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения образовательной программы обучающийся должен достичь следующие результаты обучения по дисциплине:

Код компетенции/ индикатора компетенции	Наименование компетенции/индикатора компетенции
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
УК-1.2	<i>Применяет методы системного подхода и критического анализа проблемных ситуаций; разрабатывает стратегию действий, принимает конкретные решения для ее реализации</i>



## 4 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1 Содержание разделов дисциплины

#### 4.1.1 Наименование тем и часы на все виды нагрузки

№ п/п	Наименование темы дисциплины	Лек, ач	Пр, ач	ИКР, ач	СР, ач
1	Введение	1			
2	Основные понятия комбинаторики	5	6		11
3	Бинарные отношения	6	4		16
4	Основные понятия теории графов	6	6		14
5	Деревья	6	6		10
6	Планарность	3	6		10
7	Поиск кратчайших путей	6	6		14
8	Заключение	1		1	
	Итого, ач	34	34	1	75
	Из них ач на контроль	0	0	0	35
	Общая трудоемкость освоения, ач/зе	144/4			

#### 4.1.2 Содержание

№ п/п	Наименование темы дисциплины	Содержание
1	Введение	История формирования дисциплины. Значение дисциплины в моделировании.
2	Основные понятия комбинаторики	Размещения и сочетания без повторений с повторениями. Бином Ньютона и его комбинаторное использование, биномиальные коэффициенты. Числа Стирлинга первого и второго рода и их свойства. Числа Белла. Принцип включения – исключения и его применения. Задача о беспорядках. Принцип Дирихле и его применение.
3	Бинарные отношения	Свойства бинарных отношений. Способы задания. Отношения эквивалентности и толерантности. Метод раскраски. Отношения предпорядка и порядка. Алгоритм топологической сортировки. Частично упорядоченные множества, диаграмма Хассе. Транзитивное замыкание бинарного отношения. Алгоритм Уоршелла.
4	Основные понятия теории графов	Простейшие определения и свойства графов. Методы представления данных. Поиск в глубину и в ширину. Связность, поиск мостов и компонент связности. Алгоритм Косарайю и Шарира. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Алгоритм Флэри.

№ п/п	Наименование темы дисциплины	Содержание
5	Деревья	Деревья, теорема Кэли, код Прюфера, корневые деревья. Обход дерева, перебор с возвратом. Метод ветвей и границ. Каркасы. Главные циклы и разрезы. Минимальные остовые деревья нагруженных графов. Жадные алгоритмы Прима и Краскала. Сбалансированные деревья. Черно-красные деревья. Двудольные графы. Теорема Кёнига, паросочетания, построение максимального паросочетания.
6	Планарность	Планарность. Теорема Эйлера. Гомеоморфизм графов. Раскраска графов, теорема Хивуда, эвристические методы раскраски. Хроматические графы, хроматические многочлены.
7	Поиск кратчайших путей	Задача нахождения кратчайших путей в графе. Алгоритмы Форда-Беллмана, Дейкстры и Флойда. Кратчайший путь в лабиринте (волновой алгоритм). Эвристические алгоритмы поиска: муравьиный алгоритм, алгоритм A*.
8	Заключение	Обзор приложений.

## 4.2 Перечень лабораторных работ

Лабораторные работы не предусмотрены.

## 4.3 Перечень практических занятий

Наименование практических занятий	Количество ауд. часов
1. Принцип включения-исключения.	2
2. Принцип Дирихле.	2
3. Исследование бинарного отношения.	4
4. Алгоритмы топологической сортировки и Уоршелла.	2
5. Построение эйлеровой цепи в графе.	2
6. Построение минимального остового дерева нагруженного графа.	2
7. Код Прюфера	2
8. Поиск мостов и компонент связности.	2
9. Алгоритм Косарайю и Шарира.	2
10. Построение эйлерова пути в графе.	2
11. Построение наибольшего паросочетания.	2
12. Правильная раскраска графа.	4
13. Нахождение кратчайших путей в графе.	4
14. Кратчайший путь в лабиринте.	2
Итого	34

#### 4.4 Курсовое проектирование

Курсовая работа (проект) не предусмотрены.

#### 4.5 Реферат

Реферат не предусмотрен.

#### 4.6 Индивидуальное домашнее задание

В процессе обучения по дисциплине «**Комбинаторика и теория графов**» студент обязан выполнить Индивидуальное домашнее задание по первой теме курса (ИДЗ №1) - Бинарные отношения. После его выполнения предусматривается проверка ИДЗ №1 преподавателем, а далее защита (в течение семестра на консультационных занятиях) выполненной работы или проведение работы над ошибками, если это необходимо. Выполнение ИДЗ №1, оформление решения студентами осуществляется индивидуально по требованиям, принятым в СПбГЭТУ "ЛЭТИ".

Требования по оформлению ИДЗ:

- Формат оформления: произвольный формат (печатный или рукописный). При выборе печатного формата следует использовать редакторы Word или Excel. При выборе рукописного формата следует оформить работу на двойных листах в клетку или листах формата А4, или в тетради (в клетку) объемом не более 12 листов.
- При рукописном оформлении ИДЗ следует писать аккуратно черными или синими чернилами, с обязательным использованием линейки и карандаша при выполнении чертежей. При печатном оформлении ИДЗ рекомендуется использовать шрифт Times New Roman, Calibri или Ariel; размер шрифта 12-14 пунктов, межстрочный интервал 1,15-1,5 пунктов. Каждую задачу следует оформлять на новом листе.

- Таблицы и рисунки следует оформлять, придерживаясь сквозного просмотра. Т.е. если в задаче предусмотрена таблица или рисунок, то они должны приведены внутри или в конце решаемой задачи. Общее приложение для всех рисунков и таблиц не предусматривается.
- Объем ИДЗ зависит только от количества задач и/или заданий. каждая задача должна содержать исходные данные, решение и ответ.
- Количество используемых источников не ограничено.
- ИДЗ состоит из: титульного листа (название дисциплины, ФИО, звание преподавателя, номер группы, ФИО студента, номер варианта, дата сдачи работы) списка решенных задач и/или заданий, списка используемых источников.
- Формат сдачи работы зависит от общих требований Университета (при очном обучении - ИДЗ сдается преподавателю в письменном виде или печатном виде; при дистанционном обучении - в печатном или электронном виде работы размещается в Moodle или отправляются преподавателю на электронную почту).

## Примерные варианты ИДЗ№1 «Бинарные отношения»

### Вар. 1 (930107)

Отношение задано на множестве двузначных чисел  $M = \{86; 76; 66; 96; 43\}$ :  $abRcd \Leftrightarrow a < c, b \geq d$ . Выполните следующие задания:

1. нарисуйте граф отношения и постройте матрицу смежности этого графа;
2. определите, является ли отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным. Дайте обоснование своим ответам;
3. определите, является ли это отношение отношением эквивалентности, отношением порядка (строгого, нестрогого, частичного, линейного); дайте обоснование своему ответу;
4. ответьте, применим ли к этому отношению алгоритм топологической сортировки; если алгоритм применим, примените его; приведите протокол работы алгоритма, интерпретируя его на графе и матрице смежности (для определенности при проверке, при наличии нескольких минимальных элементов договоримся выбирать первый в лексикографическом порядке); дайте объяснение смыслу алгоритма топологической сортировки. В качестве ответа привести линейно упорядоченные элементы множества.

### Вар. 2 (930107)

Отношение задано на множестве двузначных чисел  $M = \{71; 95; 56; 55; 67\}$ :  $abRcd \Leftrightarrow a = d, b < c$ . Выполните следующие задания:

1. нарисуйте граф отношения и постройте матрицу смежности этого графа;
2. определите, является ли отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным. Дайте обоснование своим ответам;
3. определите, является ли это отношение отношением эквивалентности, отношением порядка (строгого, нестрогого, частичного, линейного); дайте обоснование своему ответу;
4. ответьте, применим ли к этому отношению алгоритм топологической сортировки; если алгоритм применим, примените его; приведите протокол работы алгоритма, интерпретируя его на графе и матрице смежности (для определенности при проверке, при наличии нескольких минимальных элементов договоримся выбирать первый в лексикографическом порядке); дайте объяснение смыслу алгоритма топологической сортировки. В качестве ответа привести линейно упорядоченные элементы множества.

### Вар. 3 (930107)

Отношение задано на множестве двузначных чисел  $M = \{47; 36; 99; 11; 28\}$ :  $abRcd \Leftrightarrow a < c, b < d$ . Выполните следующие задания:

1. нарисуйте граф отношения и постройте матрицу смежности этого графа;
2. определите, является ли отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным. Дайте обоснование своим ответам;
3. определите, является ли это отношение отношением эквивалентности, отношением порядка (строгого, нестрогого, частичного, линейного); дайте обоснование своему ответу;
4. ответьте, применим ли к этому отношению алгоритм топологической сортировки; если алгоритм применим, примените его; приведите протокол работы алгоритма, интерпретируя его на графе и матрице смежности (для определенности при проверке, при наличии нескольких минимальных элементов договоримся выбирать первый в лексикографическом порядке); дайте объяснение смыслу алгоритма топологической сортировки. В качестве ответа привести линейно упорядоченные элементы множества.

### Вар. 4 (930107)

Отношение задано на множестве двузначных чисел  $M = \{16; 55; 49; 91; 46\}$ :  $abRcd \Leftrightarrow a \geq c, b \geq d$ . Выполните следующие задания:

1. нарисуйте граф отношения и постройте матрицу смежности этого графа;
2. определите, является ли отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным. Дайте обоснование своим ответам;
3. определите, является ли это отношение отношением эквивалентности, отношением порядка (строгого, нестрогого, частичного, линейного); дайте обоснование своему ответу;
4. ответьте, применим ли к этому отношению алгоритм топологической сортировки; если алгоритм применим, примените его; приведите протокол работы алгоритма, интерпретируя его на графе и матрице смежности (для определенности при проверке, при наличии нескольких минимальных элементов договоримся выбирать первый в лексикографическом порядке); дайте объяснение смыслу алгоритма топологической сортировки. В качестве ответа привести линейно упорядоченные элементы множества.

## 4.7 Доклад

Доклад не предусмотрен.

## 4.8 Кейс

Кейс не предусмотрен.

## 4.9 Организация и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

Изучение дисциплины сопровождается самостоятельной работой студентов с рекомендованными преподавателем учебными, научными источниками и

информационными ресурсами сети Интернет.

Планирование времени для изучения дисциплины осуществляется на весь период обучения. Обучающимся, в рамках внеаудиторной самостоятельной работы, необходимо регулярно дополнять сведениями из литературных источников материал, законспектированный на лекциях. При этом на основе изучения рекомендованной литературы целесообразно составить конспект основных положений, терминов и определений, необходимых для освоения разделов учебной дисциплины.

Одной из форм обучения и контроля самостоятельной работы является консультирование по новым научным направлениям, осуществляемое руководителями научных направлений работы кафедры, реализующей данную дисциплину. Обычное консультирование предполагает особым образом организованное взаимодействие между преподавателем и студентами, при этом предполагается, что консультант знает готовое решение, которое он может предписать консультируемому, и он владеет способами деятельности, которые указывают путь решения проблемы. Научное же консультирование в рамках личного общения или в рамках заседания научного семинара не предполагает знание готовых решений, так как связано с актуальной научной проблематикой.

<b>Текущая СРС</b>	<b>Примерная трудоемкость, ач</b>
Работа с лекционным материалом, с учебной литературой	12
Опережающая самостоятельная работа (изучение нового материала до его изложения на занятиях)	8
Самостоятельное изучение разделов дисциплины	0
Выполнение домашних заданий, домашних контрольных работ	10
Подготовка к лабораторным работам, к практическим и семинарским занятиям	0
Подготовка к контрольным работам, коллоквиумам	10
Выполнение расчетно-графических работ	0
Выполнение курсового проекта или курсовой работы	0
Поиск, изучение и презентация информации по заданной проблеме, анализ научных публикаций по заданной теме	0
Работа над междисциплинарным проектом	0

<b>Текущая СРС</b>	<b>Примерная трудоемкость, ач</b>
Анализ данных по заданной теме, выполнение расчетов, составление схем и моделей, на основе собранных данных	0
Подготовка к зачету, дифференцированному зачету, экзамену	35
<b>ИТОГО СРС</b>	<b>75</b>

## 5 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

### 5.1 Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

№ п/п	Название, библиографическое описание	К-во экз. в библ.
Основная литература		
1	Поздняков, Сергей Николаевич. Дискретная математика [Текст] : учеб. для вузов по направлениям подгот. "Информатика и вычисл. техника", "Информационные системы", "Информационная безопасность" / С.Н. Поздняков, С.В. Рыбин, 2008. -448 с.	493
2	Новиков Ф.А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 3-е изд. Стандарт третьего поколения [Электронный ресурс] / Ф.А. Новиков, 2017. -496 с.	неогр.
3	Поздняков, Сергей Николаевич. Компьютерная математика [Текст] : учеб. пособие / С.Н. Поздняков, С.В. Рыбин, 2005. -64 с.	406
4	Дискретная математика. Реализация переключательных функций в универсальных базисах [Текст] : Учеб. пособие / [А.В.Крайников, Л.А.Чугунов, Г.И.Степашкин, В.С.Фомичев], 2002. -87 с.	неогр.
Дополнительная литература		
1	Кузнецов, Олег Петрович. Дискретная математика для инженера [Текст] / О. П. Кузнецов, 2007. -394, [1] с.	неогр.
2	Ахо, Альфред В. Структуры данных и алгоритмы [Текст] : монография / А.В.Ахо, Д.Э.Хопкрофт, Дж.Д.Ульман, 2001. -382 с.	43
3	Дискретная математика [Электронный ресурс] : метод. указания по решению задач / Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет им. В.И. Ульянова (Ленина) "ЛЭТИ", 2013. -1 эл. опт. диск (CD-ROM)	неогр.
4	Асанов М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы [Электронный ресурс] : учебное пособие / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин, 2020. -364 с.	неогр.

### 5.2 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», используемых при освоении дисциплины

№ п/п	Электронный адрес
1	Обсуждение и C++ реализация алгоритмов теории графов и комбинаторики. <a href="https://e-maxx.ru/algo/">https://e-maxx.ru/algo/</a>
2	Обзор литературы по теории графов и комбинаторике. <a href="http://www.diary.ru/~eek/p52629673.htm">http://www.diary.ru/~eek/p52629673.htm</a>



№ п/п	Электронный адрес
3	Студенческая научная лаборатория по вычислительной комбинаторике. <a href="http://vk.etu.ru/">http://vk.etu.ru/</a>

### 5.3 Адрес сайта курса

Адрес сайта курса: <https://vec.etu.ru/moodle/course/view.php?id=18182>

## 6 Критерии оценивания и оценочные материалы

### 6.1 Критерии оценивания

Для дисциплины «Комбинаторика и теория графов» предусмотрены следующие формы промежуточной аттестации: экзамен.

#### Экзамен

Оценка	Описание
Неудовлетворительно	Курс не освоен. Студент испытывает серьезные трудности при ответе на ключевые вопросы дисциплины
Удовлетворительно	Студент в целом овладел курсом, но некоторые разделы освоены на уровне определений и формулировок теорем
Хорошо	Студент овладел курсом, но в отдельных вопросах испытывает затруднения. Умеет решать задачи
Отлично	Студент демонстрирует полное овладение курсом, способен применять полученные знания при решении конкретных задач.

## Особенности допуска

Форма проведения, регламент экзамена и правила выставления оценки определяются лектором для каждого потока, и сдаются на кафедру вместе с экзаменационными вопросами до начала экзаменационной сессии.

Текущая аттестация студентов может учитываться при проведении экзамена в одном из двух видов:

-«допуск» до экзамена. Допущенными до экзамена считаются студенты, получившие по итогам текущей аттестации оценку выше порогового уровня (имеющие в сводных электронных ведомостях кафедры итоговую оценку 3, 4, 5).

-«часть экзамена». Доля участия суммарной многобалльной оценки текущей аттестации (оценки за практические занятия) в экзаменационной оценке определяется лектором и доводится до сведения студентов и ассистентов в начале семестра.

Особенностью проведения промежуточной аттестации, позволяющей судить о способности обосновывать свои суждения и выбор метода решения возникающих задач по дисциплине "Комбинаторика и теория графов" являются:

-включение в экзаменационный билет задач по основным разделам дисциплины. Студенту предлагается решить эти экзаменационные задачи, а при устном ответе указать с какими теоретическими положениями курса связаны алгоритмы их решения. Тем самым проверяется формирование умения теоретического обоснования практических заданий;

-возможность сдачи экзамена в альтернативной форме. Студенту, по желанию, предлагается учебно-научная задача для выполнения проекта по актуальной тематике, связанной с содержанием курса. Защита проекта приравнивается к сдаче экзамена.

## 6.2 Оценочные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

### Вопросы к экзамену

№ п/п	Описание
1	Бинарные отношения и их свойства
2	Отношение эквивалентности и алгоритм построения классов эквивалентности
3	Отношение предпорядка и порядка. Алгоритм топологической сортировки
4	Транзитивное замыкание бинарного отношения. Построение замыкания через умножение матриц. Алгоритм Уоршалла.
5	Деревья, характеристические свойства дерева.
6	Теорема Кэли о числе деревьев (код Прюфера).
7	Эйлеровы пути и графы. Алгоритм Флёрри.
8	Теорема о пространстве циклов графа. Коциклы (разрезы).
9	Формула Эйлера для плоских графов и многогранников.
10	Планарные графы. Полные и двудольные графы. Доказательство непланарности $K_5$ и $K_{3,3}$
11	Гомеоморфизм графов. Теорема Куратовского -Понтрягина о критерии непланарности.
12	Алгоритм подсчета числа правильных раскрасок. Хроматический многочлен.
13	Поиск в глубину и в ширину в корневом дереве и произвольном графе. Рекурсивный и итеративный алгоритмы.
14	Кратчайший путь в лабиринте. Волновой алгоритм.
15	Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм построения максимального паросочетания.
16	Минимальное вершинное покрытие. Теорема Кёнига.
17	Связность, сильная связность. Алгоритм Косарайю-Шарира.
18	Алгоритмы построения минимальных остовных деревьев: Прима, Краскала, Бору-увки.
19	Построение кратчайших путей в графе. Алгоритмы Форда-Беллмана, Дейкстры, Флойда.
20	Алгоритм перебора с возвратом.
21	Поиск гамильтонова пути в графе.
22	Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера.

### Форма билета

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» имени В.И. Ульянова (Ленина)»

---

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № \_\_\_\_\_**

Дисциплина **Комбинаторика и теория графов** ФКТИ

**1.** Про граф на вершинах  $A, B, C, D, E, F$  известно, что при протоколировании алгоритма Дейкстры, запущенного с вершины  $A$ , по шагам внешнего цикла были отмечены изменения пометок следующих вершин (инициализация пометок производится весами рёбер): 1 шаг:  $B, C$ ; 2 шаг:  $B, C$ ; 3 шаг:  $B, C$ ; 4 шаг:  $B, E$ ; 5 шаг:  $E$

**1.1.** приведите пример графа, на котором алгоритм Дейкстры работает таким образом

**1.2.** перечислите все возможные варианты последовательностей перевода вершин графа в обработанные по шагам алгоритма Дейкстры

**2.** Дан непланарный граф. Оценить утверждение: количество его рёбер не меньше 9.

**3.1.** Приведите пример графа отношения эквивалентности на 10 вершинах с 12 рёбрами, не считая петель.

**3.2.** Сколько рёбер (не считая петель) может иметь граф отношения эквивалентности на 10 вершинах?

**3.3.** Сколько отношений эквивалентности можно задать на 10 элементах так, чтобы матрица отношения имела ровно 34 единицы?

УТВЕРЖДАЮ

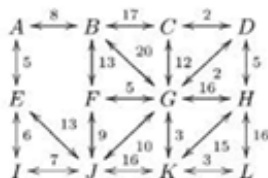
Заведующий кафедрой

С.Н. Поздняков

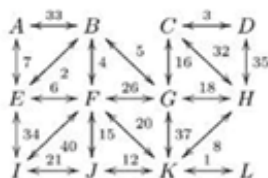
**Образцы задач (заданий) для контрольных (проверочных) работ**

## Примерный вариант проверочной работы по теме «Деревья»

Для заданного на рисунке графа постройте минимальное остовное дерево, применив алгоритм Прима (построение начинать с вершины  $E$ ). В ответе укажите порядок включения ребер.



Для заданного на рисунке графа постройте минимальное остовное дерево, применив алгоритм Краскала. В качестве ответа приведите цвета вершин при каждом добавлении очередного ребра. Начальная раскраска:  $A — 1, B — 2, \dots$ . Добавляемое ребро перекрашивает цвет с меньшим номером в цвет с большим номером.



## Примерные вопросы и варианты практических заданий для коллоквиумов по темам "Основные понятия комбинаторики" и "Основные понятия теории графов"

### Вопросы по "Основным понятиям комбинаторики"

1. Правила суммы и произведения, типы выборок (дать определение, пояснить на примере).
2. Доказать, что  $\overline{A}_n^r = n^r$ .
3. Доказать, что  $A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$  при  $n \geq r$ , и  $A_n^r = 0$  при  $n < r$ .
4. Доказать, что  $C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$  при  $n \geq r$ , и  $C_n^r = 0$  при  $n < r$ .
5. Доказать, что  $\overline{C}_n^r = C_{r+n-1}^r$ .
6. Доказать теорему о числе упорядоченных разбиений множества на  $k$  подмножеств.
7. Доказать теорему о числе слов, записанных с помощью определённого набора букв.
8. Доказать теорему о числе неупорядоченных разбиений множества на  $k$  подмножеств.
9. Полиномиальная формула.
10. Формула включений и исключений.
11. Следствие из формулы включений и исключений и её особая форма записи.
12. Задача о беспорядках.

**Вопросы по "Основным понятиям теории графов"**

1. Неориентированный, ориентированный граф. Дать определение, привести примеры.
2. Полный граф. Дополнение графа. Нуль-граф. Определения, примеры.
3. Степень вершины. Маршрут, путь. Простая цепь. Цикл.
4. Связность графа, подграф.
5. Эйлеровы графы, полуэйлеровы графы.
6. Алгоритм Флёрри; его применение.
7. Лабиринты.
8. Изоморфизм графов.
9. Способы задания графа с помощью матриц (матрица смежности, матрица инцидентности).

## Практические задания

### Вариант 1

1. Упростить выражение и вычислить его значение при  $n$  равном 5:

$$\frac{(n+2)!}{(n-2)!(n^2-1)}.$$

2. Сколько существует десятизначных трехразрядных чисел, в которых первая цифра четная, вторая нечетная, а третья любая?
3. Компьютерные взломщики составили программу, определяющую пароль пользователя, состоящий из 6 маленьких различных латинских букв (всего 26 букв). Сколько вариантов различных паролей необходимо испытать в худшем случае? Оцените приблизительно, сколько на это потребуется дней, если предположить, что компьютер за 1 секунду перебирает 100 вариантов.
4. Граф  $G$  задан списком ребер (каждый элемент списка – это тройка чисел: номера двух смежных вершин и вес ребра их соединяющего): (1,2,3), (1,3,7), (1,6,8), (2,6,4), (2,8,1), (3,4,5), (3,6,9), (3,7,2), (4,8,1), (5,6,4), (5,7,1). Требуется
  1. Нарисовать граф  $G$ ;
  2. Найти степенную последовательность графа  $G$ . Укажите четные и нечетные вершины;
  3. Обозначить ребра и найти матрицу инцидентности графа;
  4. Определить минимальное число ребер, которые надо убрать, чтобы граф распался на две компоненты связности;
  5. Найти в графе одну простую цепь наибольшей длины;
  6. Постройте дополнение заданного графа;
  7. Найти минимальный остов графа и его вес.

### Вариант 2



1. Упростить выражение и вычислить его значение при  $n = 7, k = 5$  :

$$\frac{n! C_n^k}{A_n^k}.$$

2. Старший разряд трехзначного числа некоторой системы счисления может содержать одну цифру из 9, младший одну из  $x$ , а средний – на две меньше, чем младший. Найдите  $x$ , если известно, что всего таких чисел существует 315?
3. Составляют буквенно-цифровой код: записывают сначала в некотором порядке две любых различных цифры, затем справа приписывают пять букв: a, b, c, d, e, также в определенном порядке. Сколько существует таких кодов?
4. Граф  $G$  задан списком ребер (каждый элемент списка – это тройка чисел: номера двух смежных вершин и вес ребра их соединяющего). Требуется
1. Нарисовать граф  $G$ ;
  2. Найти степенную последовательность графа  $G$ . Укажите четные и нечетные вершины;
  3. Найти матрицу смежности графа  $G$ ;
  4. Определить минимальное число ребер, которые надо убрать, чтобы граф распался на две компоненты связности;
  5. Найти в графе одну простую цепь наибольшей длины;
  6. Постройте дополнение заданного графа;
  7. Найти минимальный остов графа и его вес.

### Вариант 3

1. Упростить выражение и вычислить его значение при  $n = 4$ :

$$\frac{(n^2 - 4)(n - 3)!}{(n + 2)!}.$$

2. Сколько существует десятизначных двухразрядных чисел, в которых первая цифра четная, а вторая нечетная?
3. Составляют специальный код: записывают сначала в некотором порядке пять согласных букв: б, в, г, д, ж, затем справа приписывают две любых различных гласных буквы (всего гласных букв 10) также в определенном порядке. Сколько существует таких кодов?
4. Граф  $G$  задан списком ребер (каждый элемент списка – это тройка чисел: номера двух смежных вершин и вес ребра их соединяющего): (1,4,8), (1,5,4), (1,6,6), (1,8,3), (2,3,1), (2,6,5), (3,8,7), (4,5,9), (4,7,2), (6,7,5), (7,8,1). Требуется
1. Нарисовать граф  $G$ ;
  2. Найти степенную последовательность графа  $G$ . Укажите четные и нечетные вершины;
  3. Обозначить ребра и найти матрицу инцидентности графа;
  4. Определить минимальное число ребер, которые надо убрать, чтобы граф распался на две компоненты связности;
  5. Найти в графе одну простую цепь наибольшей длины;
  6. Постройте дополнение заданного графа;
  7. Найти минимальный остов графа и его вес.

### Вариант 4

1. Упростить выражение и вычислить его значение при  $n = 3$ :

$$\frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n-2)!}.$$

2. В спортивном классе учатся 25 человек. 10 человек занимаются плаванием, 13 человек занимаются гимнастикой, причем 5 человек занимаются обоими видами спорта. Сколько человек занимаются другими видами спорта?
3. Сколько существует семизначных чисел, в каждом из которых две пятерки, две четверки и три двойки?
4. Граф  $G$  задан списком ребер (каждый элемент списка – это тройка чисел: номера двух смежных вершин и вес ребра их соединяющего): (1,2,8), (1,4,7), (1,6,5), (2,3,4), (2,4,2), (3,8,6), (4,5,1), (4,6,7), (4,7,2), (4,8,4), (5,6,6), (6,8,1), (7,8,2). Требуется
1. Нарисовать граф  $G$ ;
  2. Найти степенную последовательность графа  $G$ . Укажите четные и нечетные вершины;
  3. Найти матрицу смежности графа  $G$ ;
  4. Определить минимальное число ребер, которые надо убрать, чтобы граф распался на две компоненты связности;
  5. Найти в графе одну простую цепь наибольшей длины;
  6. Постройте дополнение заданного графа;
  7. Найти минимальный остов графа и его вес.

## Вариант 5

1. Упростить выражение и вычислить его значение при  $n = 3$ :

$$\frac{6 \cdot (n-1)! \cdot (n+1)!}{n!}.$$

2. Сколько различных вариантов количества очков может выпасть при бросании трех кубиков?
3. Сколько разных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2?
4. Граф  $G$  задан списком ребер (каждый элемент списка – это тройка чисел: номера двух смежных вершин и вес ребра их соединяющего): (1,2,3), (1,3,5), (1,6,7), (1,8,9), (2,7,6), (3,4,1), (3,6,2), (3,8,7), (4,5,4), (5,6,3), (6,8,1), (7,8,9). Требуется
1. Нарисовать граф  $G$ ;
  2. Найти степенную последовательность графа  $G$ . Укажите четные и нечетные вершины;
  3. Найти матрицу смежности графа  $G$ ;
  4. Определить минимальное число ребер, которые надо убрать, чтобы граф распался на две компоненты связности;
  5. Найти в графе одну простую цепь наибольшей длины;
  6. Постройте дополнение заданного графа;
  7. Найти минимальный остов графа и его вес.

Весь комплект контрольно-измерительных материалов для проверки сформированности компетенции (индикатора компетенции) размещен в закрытой части по адресу, указанному в п. 5.3

### 6.3 График текущего контроля успеваемости

Неделя	Темы занятий	Вид контроля
4	Бинарные отношения	
5		ИДЗ / ИДРГЗ / ИДРЗ
10	Основные понятия теории графов	
11		Контрольная работа

### 6.4 Методика текущего контроля

#### на лекционных занятиях

Текущий контроль включает в себя контроль посещаемости (не менее **80** % занятий). В течение семестра проводится коллоквиум по основным теоретическим положениям курса, что позволяет оценить умение воспринимать и осмысливать теоретические положения. Каждый студент получает вопрос по теоретической части (представлены в оценочных материалах как экзаменационные вопросы), после чего ему предоставляется время для подготовки ответа. При обсуждении ответа преподаватель может задать несколько уточняющих вопросов по использованию этих теоретических положений при решении задач. В случае если студент демонстрирует достаточное знание вопроса, коллоквиум по теоретической части считается сданным.

#### на практических занятиях

В процессе обучения по дисциплине «**Комбинаторика и теория графов**» студент обязан выполнить индивидуальное домашнее задание по первой теме курса (ИДЗ, КТ №1) и проверочную контрольную работу (К.р., КТ №2) по теме "Деревья". После его выполнения предусматривается проверка ИДЗ №1 и К.р. №2 преподавателем, а далее защита выполненной работы над ошибками, если это необходимо. Выполнение ИДЗ (КТ №1) и К.р. (КТ №2), оформление решения студентами осуществляется индивидуально по требованиям, принятым в СПбГЭТУ "ЛЭТИ".

Текущий контроль включает в себя выполнение, сдачу в срок ИДЗ (КТ

№1) и К.р. (КТ №2). Примерный вариант ИДЗ (КТ №1) и К.р. (КТ №2) приведен в оценочных материалах для проведения ТК и ПА.

В ходе проведения семинарских и практических занятий целесообразно привлечение студентов к как можно более активному участию в дискуссиях, решении задач, обсуждениях и т.д. При этом активность студентов также может учитываться преподавателем, как один из способов текущего контроля на практических занятиях.

### **самостоятельной работы студентов**

Контроль самостоятельной работы студентов осуществляется на лекционных, практических занятиях студентов по методикам, описанным выше.

**Коллоквиум** проводится на основе вопросов к экзамену, изученных до момента проведения коллоквиума.

Критерии оценивания:

”отлично” - ответ дан без ошибок, обоснован теоретически и проиллюстрирован примерами;

”хорошо” - ответ дан без ошибок, проиллюстрирован примерами, но обоснования не всегда полны;

”удовлетворительно” - ответ дан без ошибок, проиллюстрирован примерами, но не все обоснования приведены корректно;

”неудовлетворительно” - в ответе есть ошибки, либо студент не видит связи между приводимыми формулами и утверждениями, не понимает их смысла.

Контроль самостоятельной работы студентов осуществляется на лекционных, практических занятиях студентов по методикам, описанным выше.

### **Методика оценивания контрольных работ и ИДЗ:**

”неудовлетворительно” (или 2), если верно решено меньше 60% заданий, но более 29%;

**”удовлетворительно”** (или 3), если верно решено меньше 75% заданий, но более 59%;

**”хорошо”** (или 4), если верно решено меньше 89% заданий, но более 74%;

**”отлично”** (или 5), если верно решено более 90% заданий.

## 7 Описание информационных технологий и материально-технической базы

Тип занятий	Тип помещения	Требования к помещению	Требования к программному обеспечению
Лекция	Лекционная аудитория	Количество посадочных мест – в соответствии с контингентом, рабочее место преподавателя, проектор, компьютер или ноутбук, экран, маркерная или меловая доска.	Свободно распространяемое ПО или ПО, разработанное в РФ, соответствующее по характеристикам Windows XP, Microsoft Office 2007 и выше.
Практические занятия	Аудитория	Количество посадочных мест – в соответствии с контингентом, рабочее место преподавателя, проектор, компьютер или ноутбук, экран, маркерная или меловая доска.	Свободно распространяемое ПО или ПО, разработанное в РФ, соответствующее по характеристикам Windows XP, Microsoft Office 2007 и выше.
Самостоятельная работа	Помещение для самостоятельной работы	Оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.	Свободно распространяемое ПО или ПО, разработанное в РФ, соответствующее по характеристикам Windows XP, Microsoft Office 2007 и выше.

## **8 Адаптация рабочей программы для лиц с ОВЗ**

Адаптированная программа разрабатывается при наличии заявления со стороны обучающегося (родителей, законных представителей) и медицинских показаний (рекомендациями психолого-медико-педагогической комиссии). Для инвалидов адаптированная образовательная программа разрабатывается в соответствии с индивидуальной программой реабилитации.



## ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

<b>№ п/п</b>	<b>Дата</b>	<b>Изменение</b>	<b>Дата и номер протокола заседания УМК</b>	<b>Автор</b>	<b>Начальник ОМОЛА</b>