Приведите уравнение кривой второго порядка $2x^2 + 17y^2 + 8xy + 4x - 10y = -9$ к каноническому виду, найдите координаты центра и фокусов в исходной системе координат.

Решение:

Прежде всего, ортогональным преобразованием приводим к диагональному виду квадратичную форму:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix};\quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 17-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 19\lambda + 18 = (\lambda - 1)(\lambda - 18).$$

$$\lambda_1 = 1;\quad A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix};\quad g_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4, -1)^{\mathrm{T}}.$$

$$\lambda_2 = 18;\quad A - \lambda_2 E = A - 18E = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix};\quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 4)^{\mathrm{T}}.$$

Матрица преобразования $C = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ($\det C = 1$ – сохраняем ориентацию осей координат).

Теперь осуществляем непосредственную замену переменных (поворот координатных осей) $x = \frac{1}{\sqrt{17}}(4x' + y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{17}}(-x' + 4y')$ в исходном уравнении:

$$x'^2 + 18y'^2 + \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(4x' + y') - 10(-x' + 4y')\right) = -9;\quad x'^2 + 18y'^2 + \frac{1}{\sqrt{17}}\left(26x' - 36y'\right) = -9;$$

Оси симметрии кривой параллельны новым осям координат. Затем выделяем полные квадраты:

$$\left(x'^2 + \frac{26}{\sqrt{17}}x'\right) + 18\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{17}}y'\right) = -9;\quad \left(x' + \frac{13}{\sqrt{17}}\right)^2 + 18\left(y' - \frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 = -9 + \frac{169}{17} + \frac{18}{17} = 2.$$

Если теперь произвести сдвиг начала координат $x'' = x' + \frac{13}{\sqrt{17}}$, $y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{17}}$, то получаем каноническое уравнение кривой в новых координатах:

$$x''^2 + 18y''^2 = 2;\quad \frac{x''^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(1/3\right)^2} = 1.$$

Это эллипс с полуосями $a=\sqrt{2}$ и $b=\frac{1}{3}$. (Отметим, что a – большая полуось, благодаря неравенству $0<\lambda_1<\lambda_2$). Фокальное расстояние $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$, поэтому координаты фокусов эллипса в последней системе координат равны $\left(\pm\frac{\sqrt{17}}{3};0\right)$.

Вернёмся теперь к координатной системе $Ox'y'$. Так как $x'=x''-\frac{13}{\sqrt{17}}$, $y'=y''+\frac{1}{\sqrt{17}}$, то в этой системе координаты центра и фокусов эллипса следующие: $O'\left(-\frac{13}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $F_1'\left(-\frac{22}{3\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $F_2'\left(-\frac{56}{3\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

Координаты этих точек в первоначальной системе координат проще всего найти, используя матрицу преобразования C:

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{13}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^{\mathrm{T}}=(-3,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{22}{3\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{56}{3\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{13}{3},\frac{4}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Ответ: Эллипс $\frac{x''^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y''^2}{\left(1/3\right)^2}=1$. $O(-3,1)$, $F_1\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$, $F_2\left(-\frac{13}{3},\frac{4}{3}\right)$.