

Приведите уравнение кривой второго порядка $2x^2 + 17y^2 + 8xy + 4x - 10y = -9$ к каноническому виду, найдите координаты центра и фокусов в исходной системе координат.

Решение:

Преж

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}; \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 4 & 17 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 19\lambda + 18 = (\lambda - 1)(\lambda - 18)$$

$$\lambda_1 = 1; \quad A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad g_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4, -1)^T$$

$$\lambda_2 = 18; \quad A - \lambda_2 E = A - 18E = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 4)^T$$

Матрица преобразования ($\det C = 1$ – сохраняем ориентацию осей координат).

Теперь осуществленную замену переменных (поворот координатных осей)

$$x = \frac{1}{\sqrt{17}}(4x' + y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{17}}(-x' + 4y') \quad \text{в исходном уравнении:}$$

Оси осей координат. Затем выделяем полные квадраты:

$$\left(x'^2 + \frac{26}{\sqrt{17}}x'\right) + 18\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{17}}y'\right) = -9 \quad ; \quad \left(x' + \frac{13}{\sqrt{17}}\right)^2 + 18\left(y' - \frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 = -9 + \frac{169}{17} + \frac{18}{17} = 2$$

$$x'' = x' + \frac{13}{\sqrt{17}}, \quad y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Если теперь прг начала координат каноническое уравнение кривой в новых координатах:

$$x''^2 + 18y''^2 = 2; \quad \frac{x''^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y''^2}{(1/3)^2} = 1$$

Это эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$ и $b = \frac{1}{3}$. (Отметим, что a – большая полуось,

благодаря неравенству $0 < \lambda_1 < \lambda_2$). Фокальное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}$, поэтому

координаты фокусов эллипса в последней системе координат равны $\left(\pm \frac{\sqrt{17}}{3}; 0\right)$.

Вернёмся теперь к координатной системе $Ox'y'$. Так как $x' = x'' - \frac{13}{\sqrt{17}}$,

$y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{17}}$, то в этой системе координаты центра и фокусов эллипса следующие:

$$O'\left(-\frac{13}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right), F_1'\left(-\frac{22}{3\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right), F_2'\left(-\frac{56}{3\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Координаты этих точек в первоначальной системе координат проще всего найти, используя матрицу преобразования C :

$$\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{13}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}^T = (-3, 1)^T,$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{22}{3\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}^T = \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)^T,$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{56}{3\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}^T = \left(-\frac{13}{3}, \frac{4}{3}\right)^T.$$

Ответ: Эллипс $\frac{x''^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y''^2}{(1/3)^2} = 1$. $O(-3, 1)$, $F_1\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $F_2\left(-\frac{13}{3}, \frac{4}{3}\right)$.