Приведите уравнение кривой второго порядка $2x^2+17y^2+8xy+4x-10y=-9$ к каноническому виду, найдите координаты центра и фокусов в исходной системе координат.

**Решение:**

Преж

$$A=\begin{pmatrix}2&4\\4&17\end{pmatrix};\quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&4\\4&17-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-19\lambda+18=(\lambda-1)(\lambda-18).$$

$$\lambda_1=1;\quad A-\lambda_1E=A-E=\begin{pmatrix}1&4\\4&16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4\end{pmatrix};\quad g_1=\frac{1}{\sqrt{17}}(4,-1)^{\mathrm{T}}.$$

$$\lambda_2=18;\quad A-\lambda_2E=A-18E=\begin{pmatrix}-16&4\\4&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&-1\end{pmatrix};\quad g_2=\frac{1}{\sqrt{17}}(1,4)^{\mathrm{T}}.$$

Матрица преобразования ( $\det C=1$ – сохраняем ориентацию осей координат).

Теперь осуществляем непосредственную замену переменных (поворот координатных осей) $x=\frac{1}{\sqrt{17}}(4x'+y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{17}}(-x'+4y')$ в исходном уравнении:

$$x'^2+18y'^2+\frac{1}{\sqrt{17}}\big(4(4x'+y')-10(-x'+4y')\big)=-9;\quad x'^2+18y'^2+\frac{1}{\sqrt{17}}\big(26x'-36y'\big)=-9;$$

Оси симметрии кривой параллельны новым осям координат. Затем выделяем полные квадраты:

$$\left(x'^2+\frac{26}{\sqrt{17}}x'\right)+18\left(y'^2-\frac{2}{\sqrt{17}}y'\right)=-9;\quad \left(x'+\frac{13}{\sqrt{17}}\right)^2+18\left(y'-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2=-9+\frac{169}{17}+\frac{18}{17}=2.$$

Если теперь прг начала координат $x''=x'+\frac{13}{\sqrt{17}}$, $y''=y'-\frac{1}{\sqrt{17}}$, то получаем каноническое уравнение кривой в новых координатах:

$$x''^2+18y''^2=2;\quad \frac{x''^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y''^2}{(1/3)^2}=1.$$

Это эллипс с полуосями $a=\sqrt{2}$ и $b=\frac{1}{3}$. (Отметим, что $a$ – большая полуось, благодаря неравенству $0<\lambda_1<\lambda_2$ ). Фокальное расстояние $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$, поэтому координаты фокусов эллипса в последней системе координат равны $\left(\pm\frac{\sqrt{17}}{3};0\right)$.

Вернёмся теперь к координатной системе $Ox'y'$. Так как $x' = x'' - \frac{13}{\sqrt{17}}$, $y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{17}}$, то в этой системе координаты центра и фокусов эллипса следующие: $O'\left(-\frac{13}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $F_1'\left(-\frac{22}{3\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $F_2'\left(-\frac{56}{3\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

Координаты этих точек в первоначальной системе координат проще всего найти, используя матрицу преобразования $C$:

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{13}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)^{\mathrm{T}} = (-3,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{22}{3\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{56}{3\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(-\frac{13}{3}, \frac{4}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

**Ответ:** Эллипс $\frac{x''^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(1/3\right)^2} = 1$. $O(-3,1)$, $F_1\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $F_2\left(-\frac{13}{3}, \frac{4}{3}\right)$.