DCA0204, Módulo 6
Árvores

Daniel Aloise

baseado em slides do prof. Leo Liberti, École Polytechnique, França

DCA, UFRN

Sumário

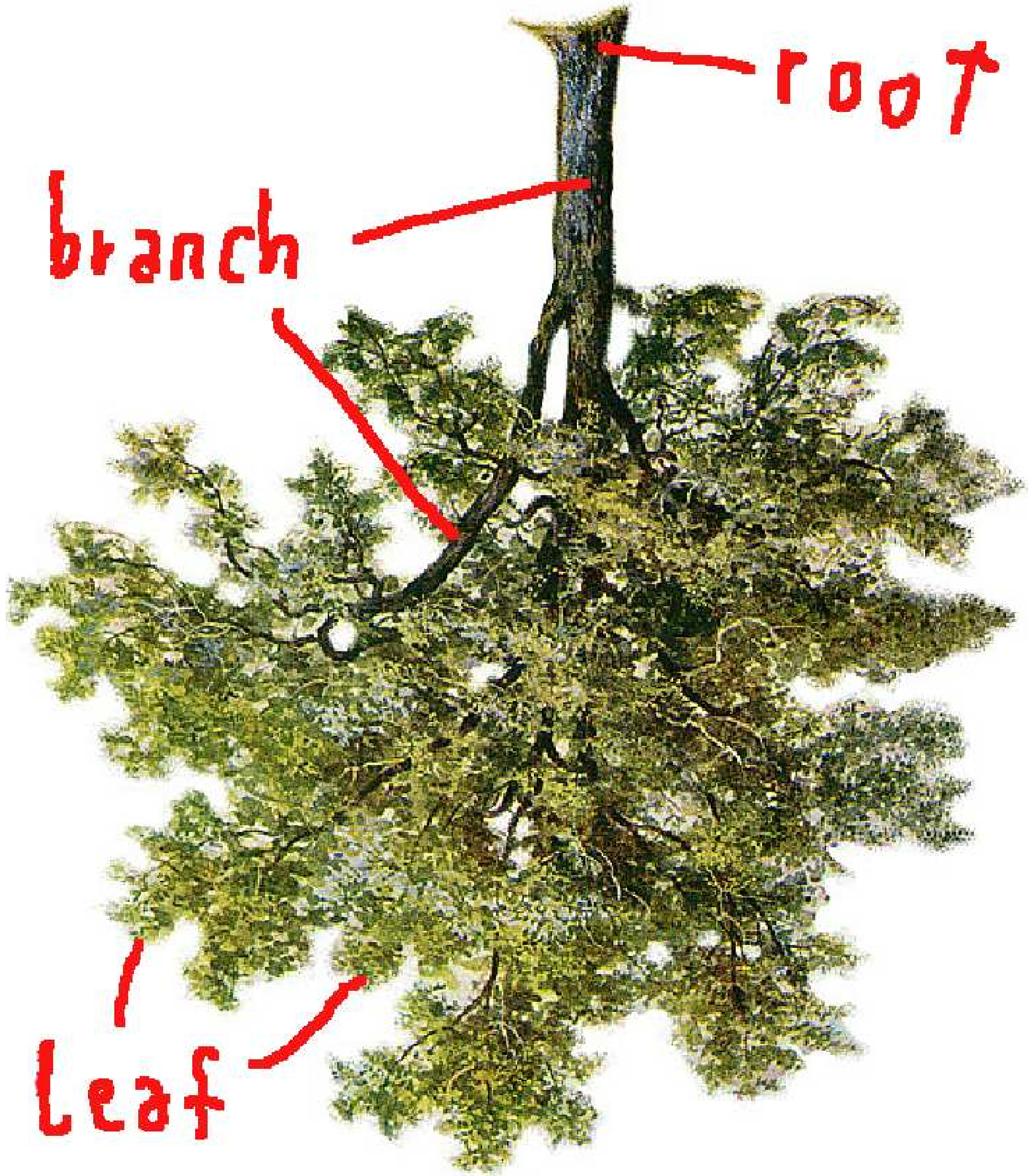
- Introdução
- Definições e propriedades
- Árvores geradoras
- Listando árvores
- Árvores na psicologia e linguagens
- Busca em Profundidade - Depth-First Search (DFS)

Introdução

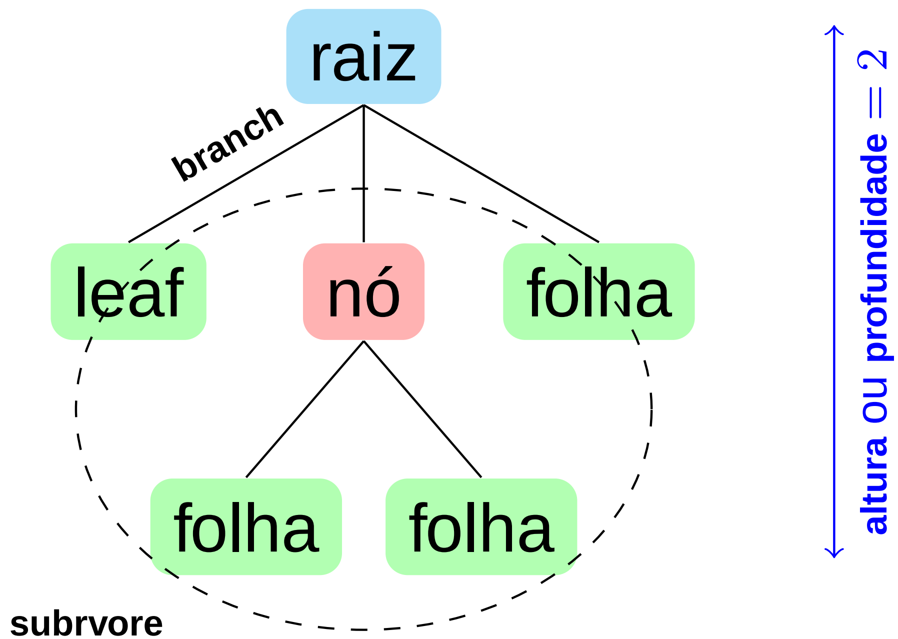
Árvores

Como nós desenhamos elas

Nomenclatura



Representação gráfica



$\boxed{\text{altura/profundidade} = \text{comprimento do caminho mais longo [raiz} \rightarrow \text{folha]}}$

Definição matemática de uma árvore

Árvore: um grafo conexo $G = (V, E)$ sem ciclos

- Possui nó é especificado como **raiz.**
- Todo nó que aparece como parte de uma única aresta é chamado de um **nó pendurado**

$$\color{red}{v_1} \;—\; v_2 \qquad \color{red}{v_3} \;—\; v_4$$

v_1, v_3: nós pendurados

- Um **n pendurado** que não é uma raiz é chamdo de **folha**
- As arestas de uma árvore são chamados **ramos**

Orientações

- **Orientação** de uma árvore $T = (V, E)$ com raiz $r \in V$: dígrafo $U = (V, A)$ s.a.:

$$\forall \{u, v\} \in E \qquad (u, v) \in A \text{ XOR } (v, u) \in A.$$

- **orientação exterior**: uma orientação s.a.:

$$\forall \ell \in V \qquad leaf(\ell) \to \exists \text{ caminho em } U : r \to \ell.$$

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, dash] & \color{red}{r} \arrow[rr, dash, bend left] & v_3 \arrow[r, dash] & v_4 \end{tikzcd} \quad \to \quad \begin{tikzcd} v_1 & \color{red}{r} \arrow[l] \arrow[rr, bend right] & v_3 & v_4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

- **orientação interior** s.a.:

$$\forall \ell \in V \qquad leaf(\ell) \to \exists \text{ caminho em } U : \ell \to r.$$

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, dash] & \color{red}{r} \arrow[rr, dash, bend left] & v_3 \arrow[r, dash] & v_4 \end{tikzcd} \quad \to \quad \begin{tikzcd} v_1 \arrow[r] & \color{red}{r} & v_3 \arrow[r] & v_4 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

Uma árvore tem $|V| - 1$ arestas

Thm.

Uma árvore T em um conjunto V tem $|V| - 1$ arestas

Proof

Seja $m(T)$ o número de arestas em T

Mostre que $m(T) = |V| - 1$ por indução em $|V|$

Se $|V| = 2$, uma relação minimamente conectada requer uma aresta

Hipótese de indução: Suponha $m(T) = |V| - 2$ para todas as árvores T com $|V| - 1$ nós

Seja T qualquer árvore com V nós

Qualquer árvore precisa ter pelo menos um nó folha (por quê?)

Uma vez que ℓ é uma folha, ele é incidente a apenas uma aresta e

Considere a árvore $T' = T \setminus \{e\}$ em $V' = V \setminus \{\ell\}$

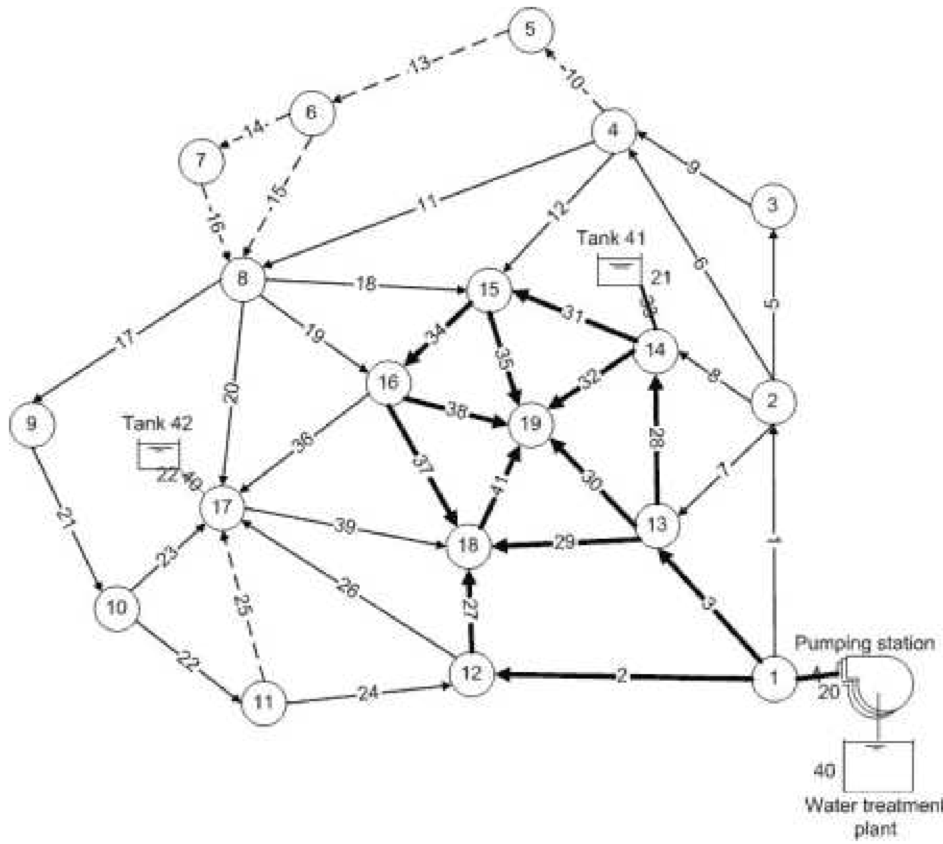
Uma vez que $|V'| = |V| - 1$, $m(T') = |V| - 2$ pela hipótese de indução

Desta forma, T possui exatamente $m(T) = m(T \cup \{e\}) = m'(T) + 1 = |V| - 1$ arestas

Árvores geradoras

Distribuição de eletricidade/água

- Cabos/dutos precisam atingir todos os nós do grafo.
- O principal custo está na instalação dos cabos/dutos.



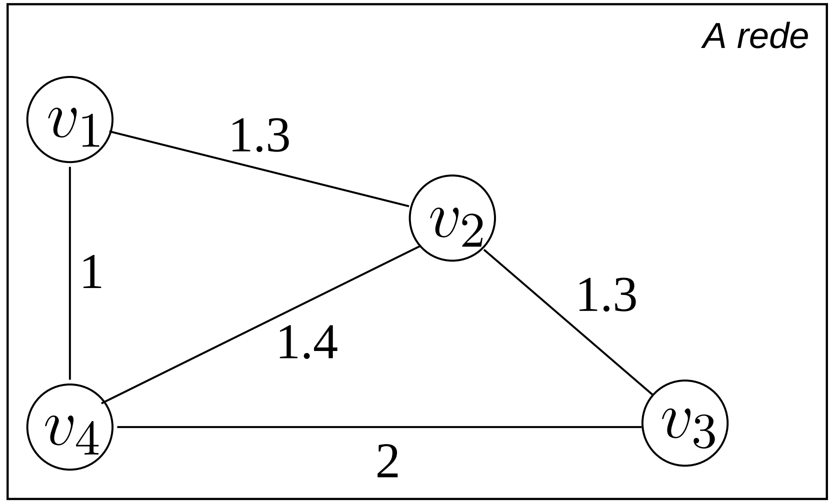
Árvores geradoras

- Custo é otimizado se o material puder ser distribuído para todos os lugares gastando o mínimo possível
- Uma árvore em $U \subseteq V$ é **geradora** se $U = V$
- Se cada aresta e na rede tem custo c_e, o custo de T é

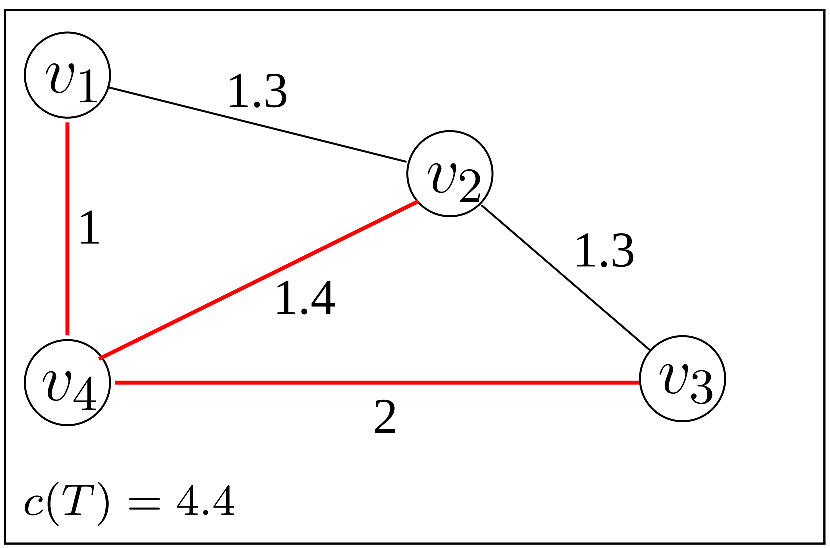
$$c(T) = \sum_{e \in E(T)} c_e$$

Problema da Árvore Geradora Mínima (AGM): Dado um grafo ponderado $G = (V, E)$, encontre a árvore geradora de peso mínimo em G

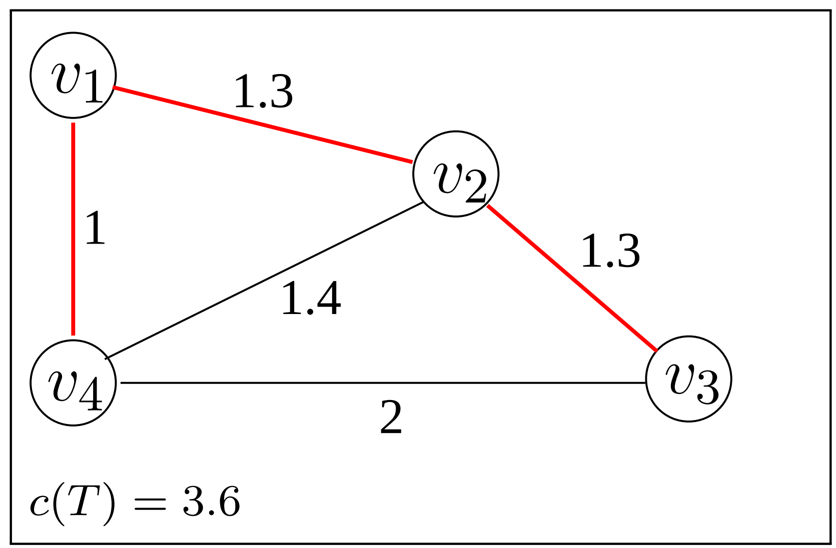
Exemplo



A rede
v_1
v_2
v_3
v_4
1.3
1
1.3
1.4
2



v_1
v_2
v_3
v_4
1.3
1
1.3
1.4
2
$c(T) = 4.4$



v_1
v_2
v_3
v_4
1.3
1
1.3
1.4
2
$c(T) = 3.6$

Algoritmo de Kruskal: um esboço

- *requer estrutura de dados union-find*
- Seja E o conjunto de arestas do grafo

$T = \varnothing$
Ordene as arestas em E em ordem crescente de peso
while $|T| < |V| - 1$ **do**
    Considere a próxima aresta e da sequencia;
    if $T \cup \{e\}$ não tem ciclo **then**
        $T \leftarrow T \cup \{e\}$;
    end if
    $E \leftarrow E \setminus \{e\}$;
end while

- Ao fim, T tem $|V| - 1$ arestas e não tem ciclos.
- $\Rightarrow$ Uma árvore por definição.

Complexidade de pior caso da melhor implementação: $O(m \log n)$

Definições

- Uma *partição* de um conjunto M é uma coleção $M_1, \ldots,$ M_k de subconjuntos de M com as seguintes propriedades:
  - $M_i \cap M_j = \emptyset$ para $i \neq j$
  - $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$.

- No algoritmo de Kruskal, a floresta particiona V.

- Algumas componentes são triviais: nós isolados.

Definições

- O algoritmo de Kruskal realiza duas operações na partição:
  - Testa se dois nós estão no mesmo subconjunto (subárvore).
  - Junta dois subconjuntos em um (através da inserção de uma aresta).

- A estrutura de dados *Union-find* fornece estas duas operações para uma partição de elementos de maneira eficiente.

Union-find

- Inicialmente, cada elemento é um subconjunto.
- Cada subconjunto escolhe um dos seus elementos como *representante* (feito pela ED não pelo usuário).
- A função *find(i)* retorna o representante do subconjunto contendo *i*.
- Logo, dois elementos estão no mesmo subconjunto se os seus representantes são iguais.

Union-find

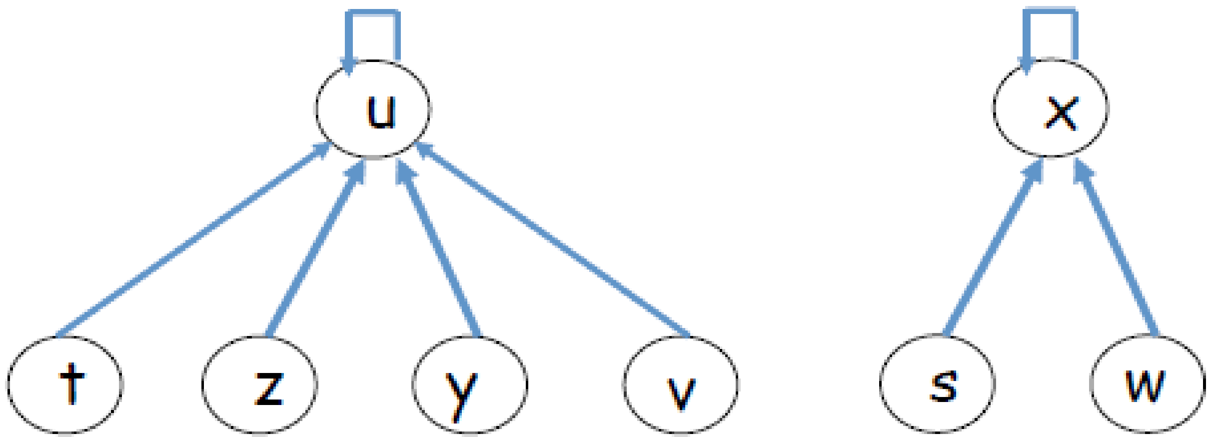
- A operação *link(i,j)* aplicada aos representantes de dois subconjuntos distintos *une* os subconjuntos.

- Solução simples: cada subconjunto é representado por uma *árvore*.
  - Raiz – representante do subconjunto.

- Cada elemento armazena o seu pai nesta árvore (array *parent*).

- Para as raízes, temos *self-loops*.

Union-find



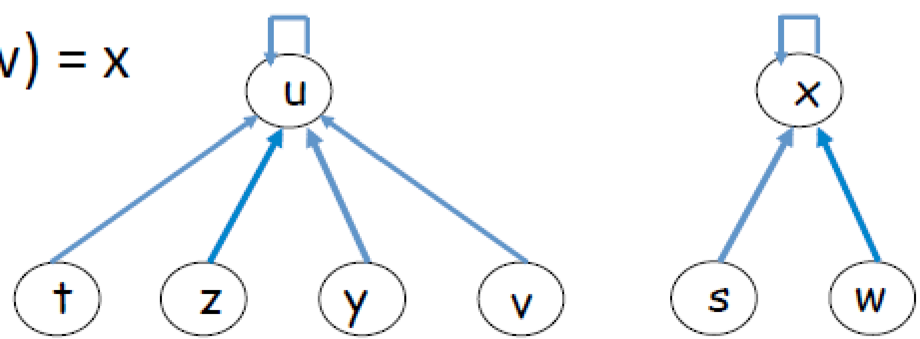
$S_1 = \{t, \underline{\mathbf{u}}, v, y, z\}$ $S_2 = \{s, w, \underline{\mathbf{x}}\}$

Union-find

- A implementação de *find(i)* é trivial.
- Seguimos as referências de *parent* até que encontramos um *self-loop* (localizado no representante de *i*).

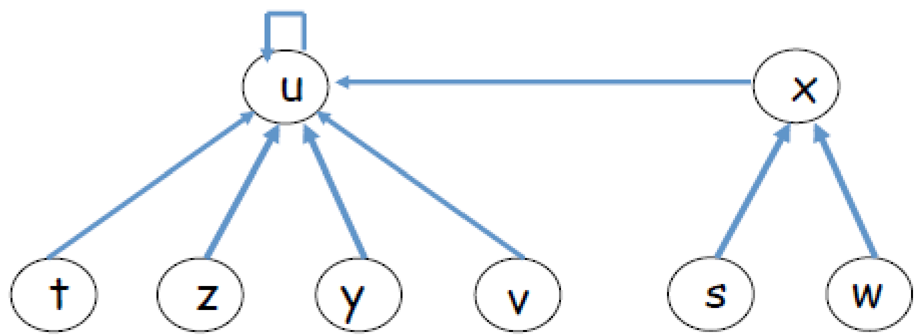
Find(z) = u

Find(w) = x



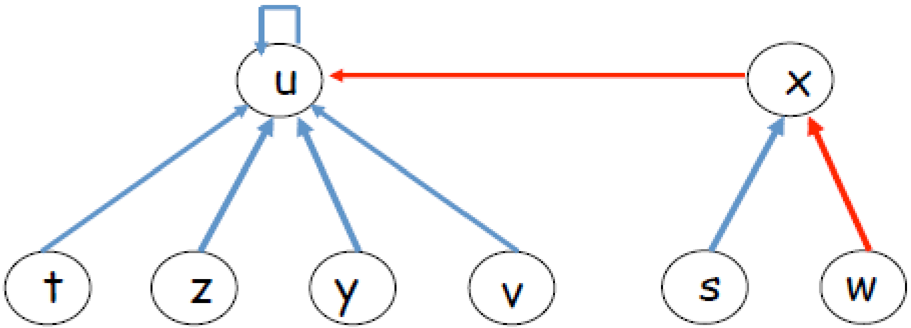
Union-find

- A implementação de *link(i,j)* é também simples.
- Fazemos com que um representante seja pai do outro representante.
- *link(u,x)*



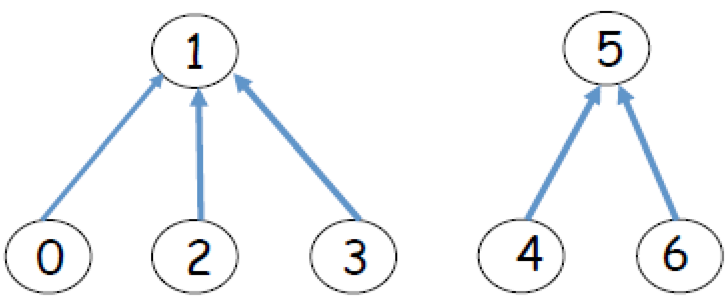
Union-find

- *find(w)*



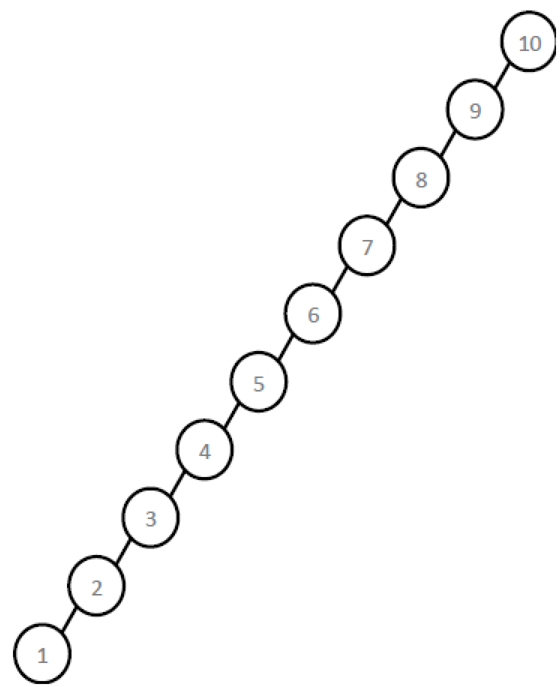
- Exemplo

Elem.	0	1	2	3	4	5	6	7
parent	1	-1	1	1	5	-1	5	-1



Problemas

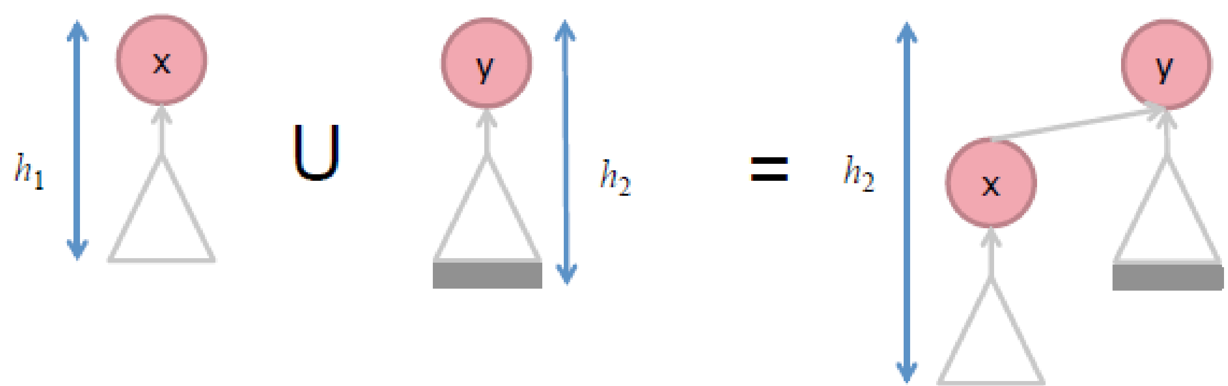
- O algoritmo apresentado é correto mas ineficiente.
- As referências *parent* podem formar cadeias longas que são atravessadas muitas e muitas vezes pelas operações *find*.
- Pior caso: *O(n)*



Batendo no ângulo...

- Duas otimizações podem ser feitas.

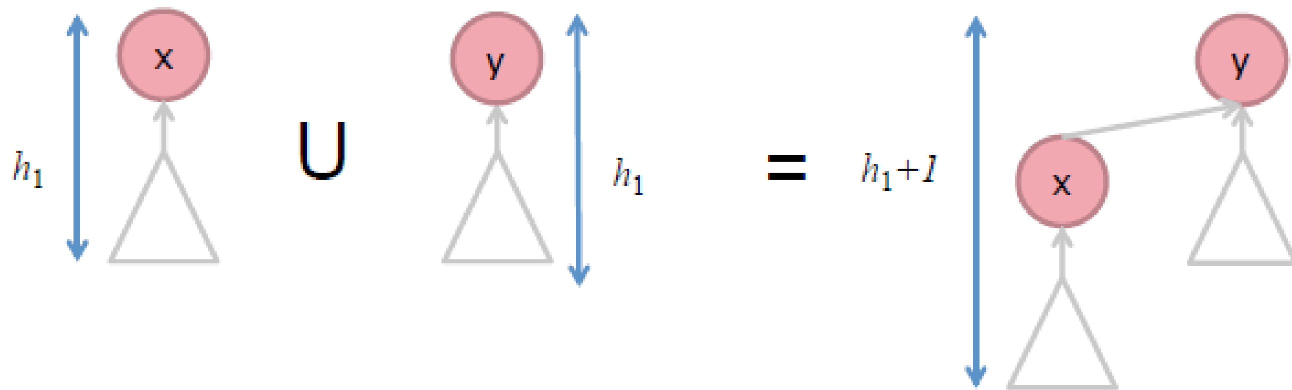
- No algoritmo de *união por altura*, verifica-se a altura de cada conjunto para determinar a união.



- A árvore de menor altura é *pendurada* na de maior altura.
- A altura da árvore de maior altura não cresce!

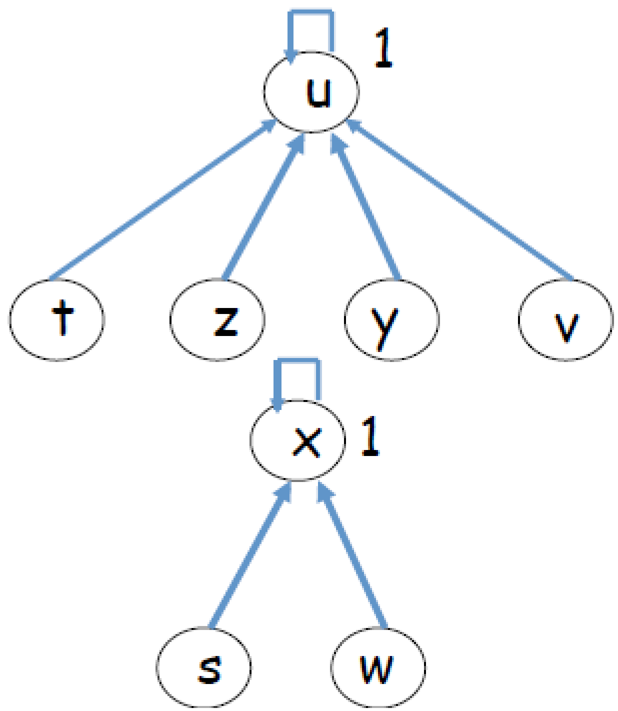
Batendo no ângulo...

- Se as alturas forem iguais, a ordem não importa, e a altura aumentará de um.

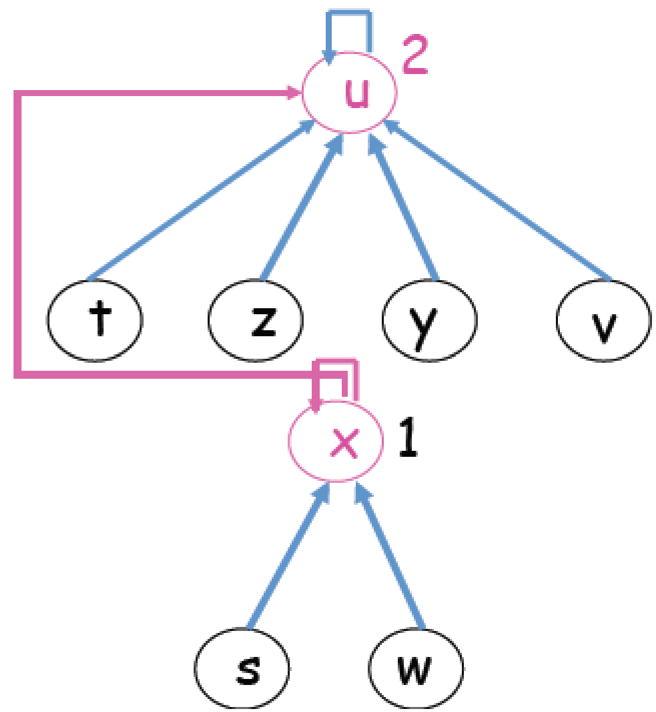


Exemplo

{ {t,u,v,y,z}, {s,w,x} }



link(u,x)



As alturas também podem ser armazenadas em arrays.

Batendo no ângulo...

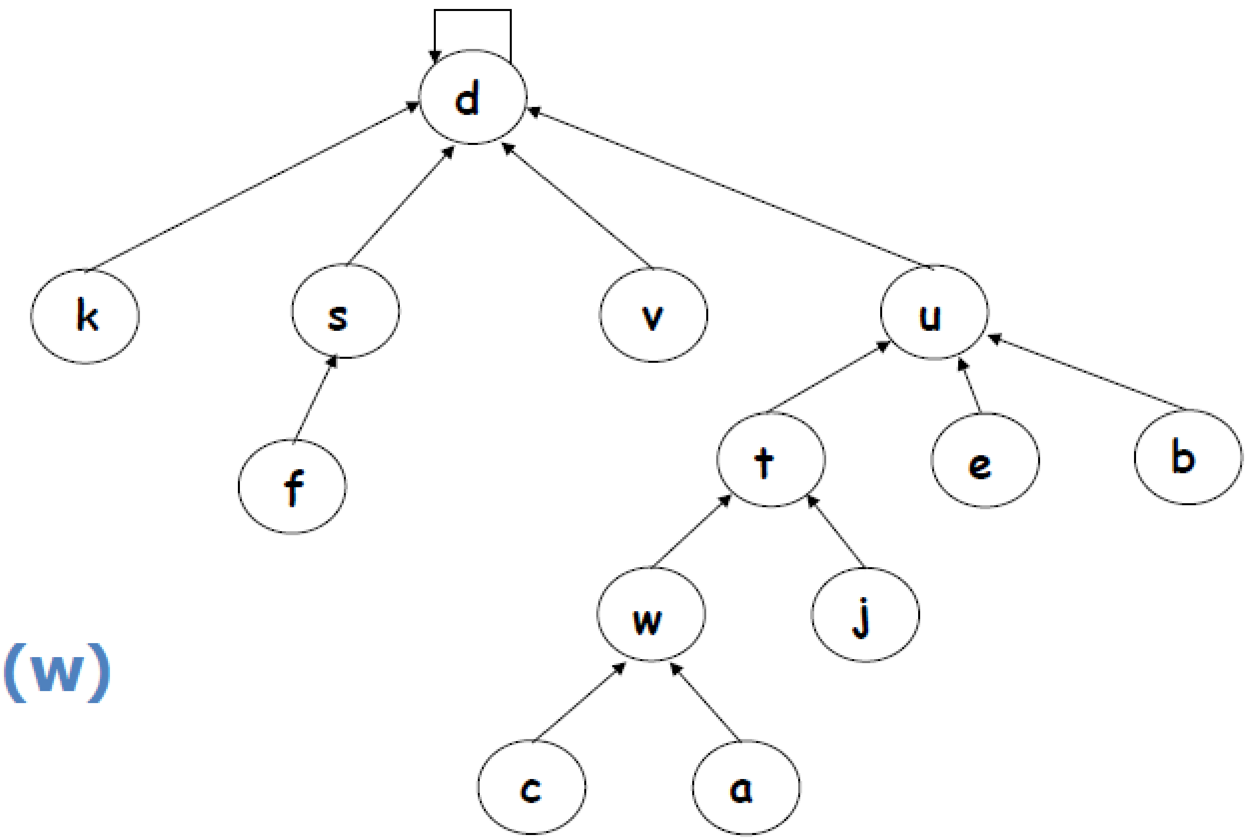
A união por altura garante que a altura = profundidade de qualquer árvore da *union-find* não excede *log n*

Prova: Uma árvore da *union-find com* altura k contem pelo menos 2^k elementos. Isto é certamente verdade para k=0. A altura de uma árvore cresce de k-1 para k quando ela recebe um filho de altura k-1. Logo a árvore tinha pelo menos 2^{k-1} elementos antes da operação de *link* e recebeu pelo menos mais 2^{k-1} elementos, totalizando depois da operação pelo menos 2^k elementos.

$$n \geq |V(T)| \geq 2^k \therefore k \leq \log n$$

Batendo no ângulo...

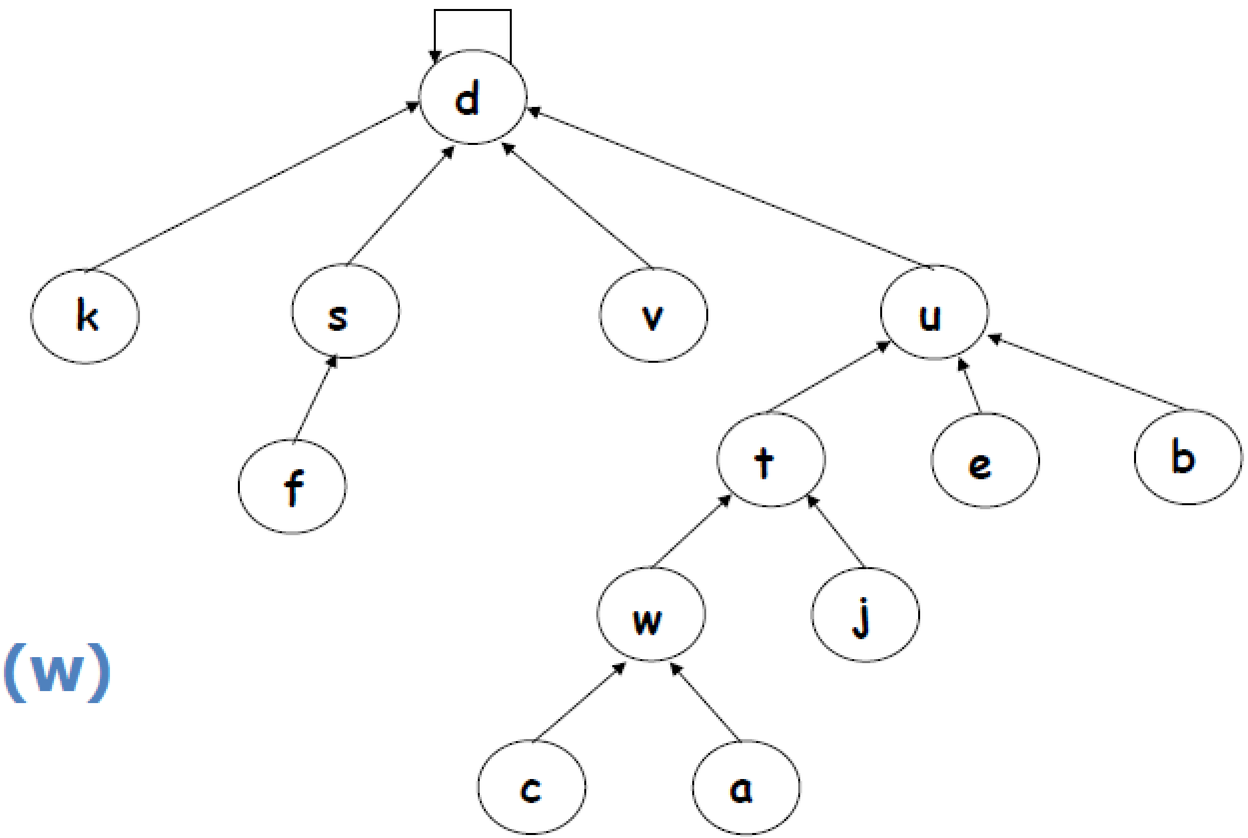
- Outra otimização é a *compressão de caminhos*



Find(w)

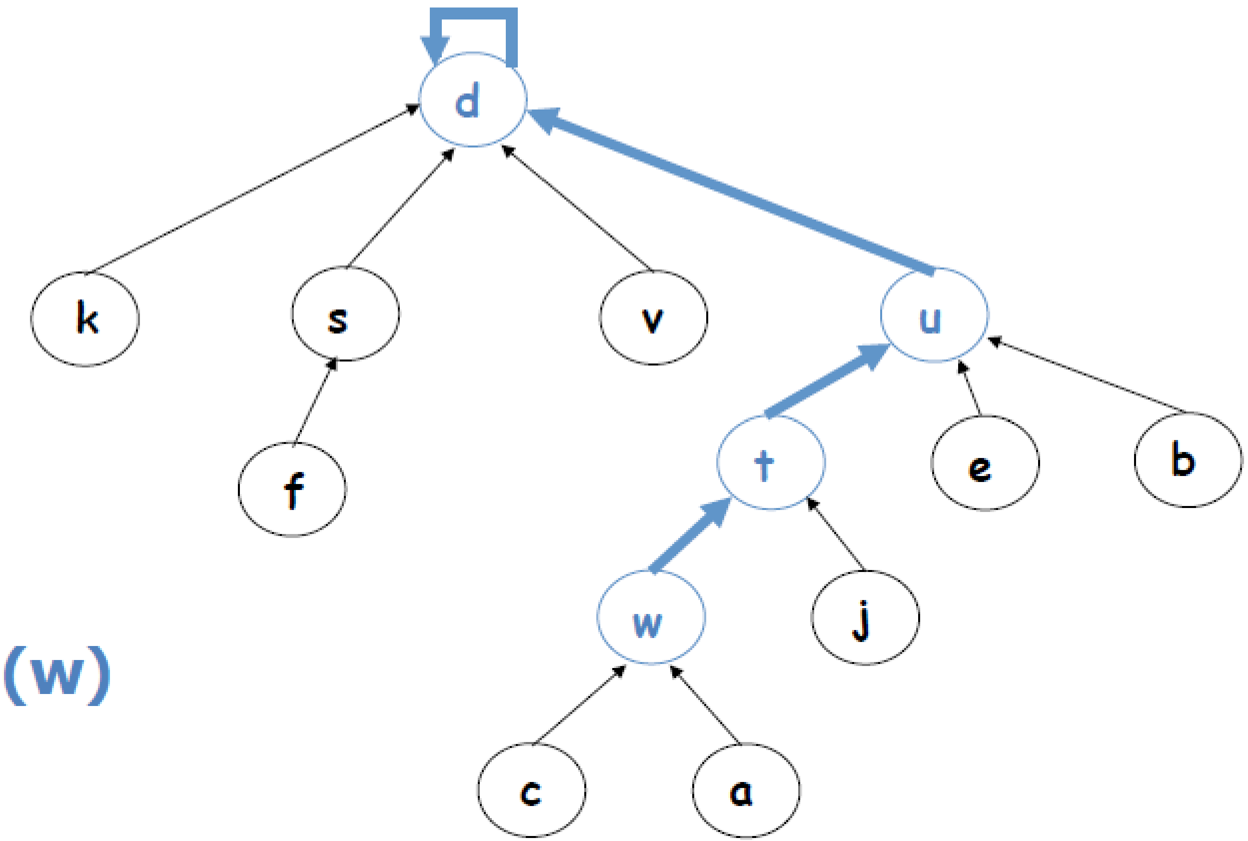
Batendo no ângulo...

- Outra otimização é a *compressão de caminhos*



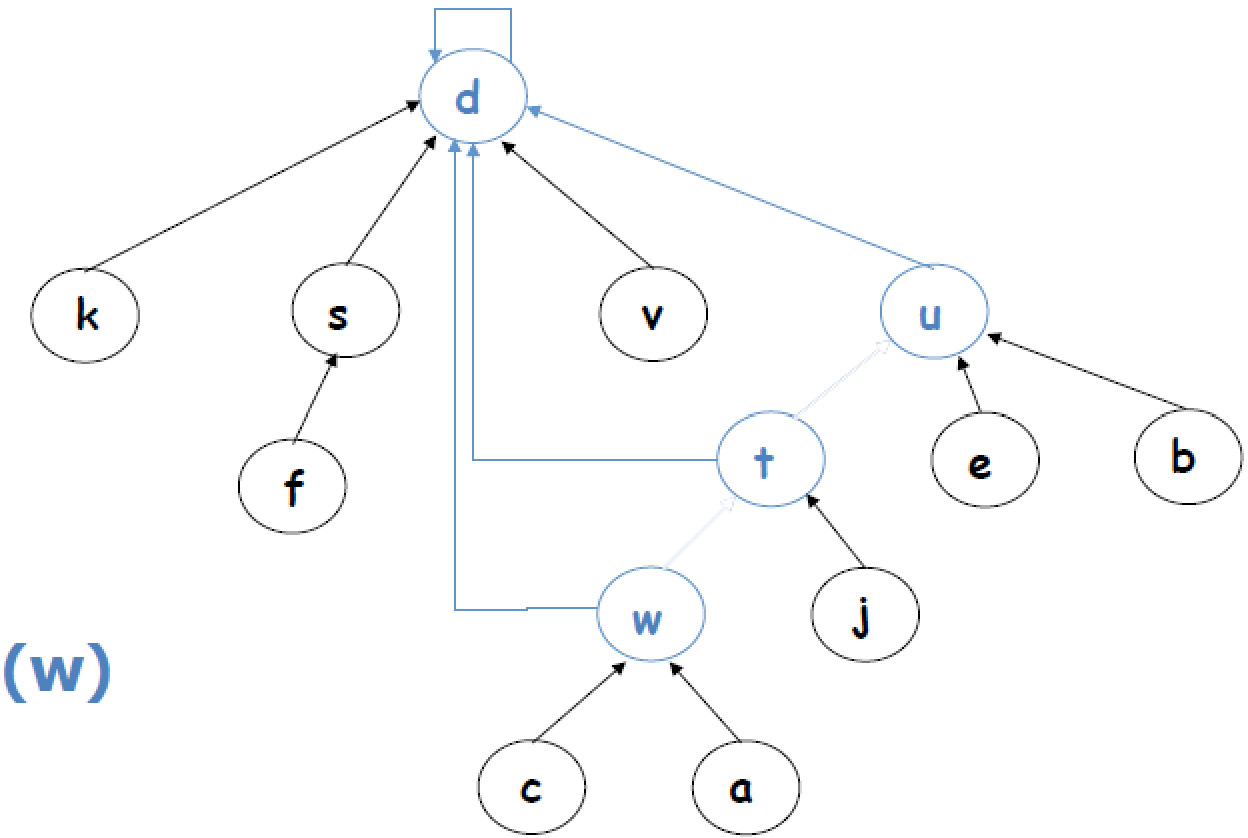
Find(w)

Batendo no ângulo...



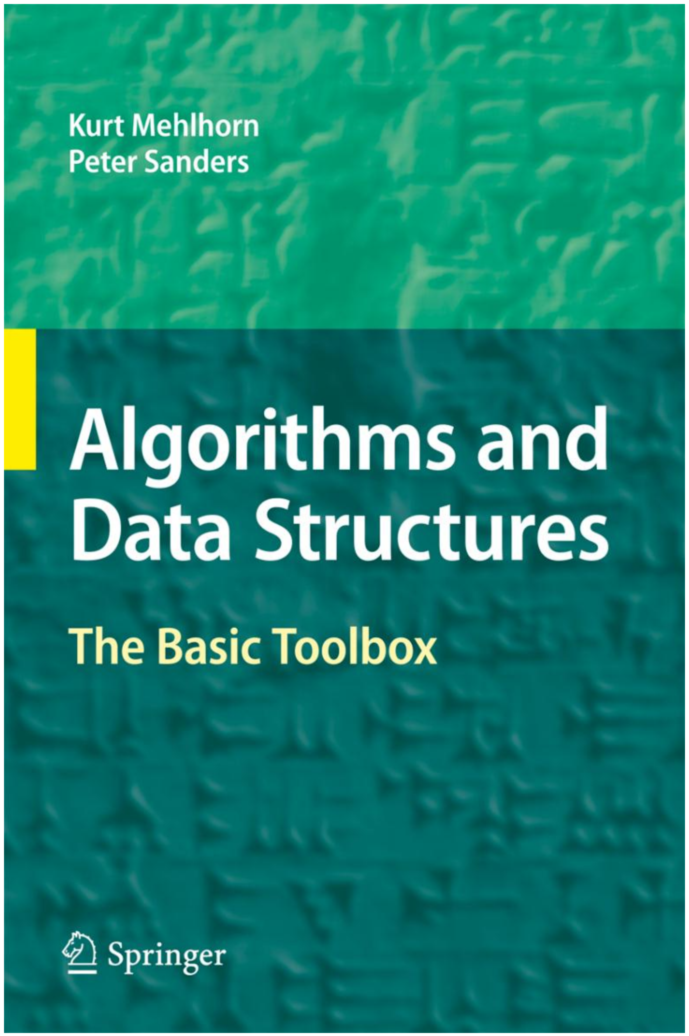
Find(w)

Batendo no ângulo...



Find(w)

Pseudo-código



- Página 223 do livro do Mehlhorn & Sanders

Corretude do algoritmo de Kruskal

Thm.

O algoritmo de Kruskal encontra a AGM em um grafo conexo $G = (V, E)$ ponderado

Proof

- Vamos supor a sequência ordenada e^* de arestas $(e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_{n-1})$ fornecida pelo algoritmo de Kruskal.
- Suponha que a afirm. seja falsa $\Rightarrow$ existe aresta na sequencia e^* que não está presente na AGM (sem perda de generalidade, vamos supor também que a AGM seja única).
- Suponhamos que e_i seja a primeira aresta em e^* que não está presente na AGM.
- A adição de e_i à AGM gera um ciclo (pois a AGM é uma árvore!). Além disso, qualquer aresta neste ciclo possui peso menor do que o peso de e_i (por quê?).
- $\Rightarrow$ Qualquer aresta x neste ciclo é considerada antes do que e_i por Kruskal. Mais do que isso, ela tinha que ter sido selecionada! (por quê??).
- Chegamos a uma contradição.

Psicologia e linguagem natural

Uma observação

- A maioria dos estudantes *(e não apenas os estudantes!)* acham arrays, listas, mapas, filas e pilhas “mais fáceis” do que árvores

Uma observação

- A maioria dos estudantes *(e não apenas os estudantes!)* acham arrays, listas, mapas, filas e pilhas “mais fáceis” do que árvores
- **Tese 1**: a representação gráfica

  As pessoas são acostumadas a ler sequências mais do que a ler árvores

Uma observação

- A maioria dos estudantes *(e não apenas os estudantes!)* acham arrays, listas, mapas, filas e pilhas “mais fáceis” do que árvores
- **Tese 1**: a representação gráfica

  As pessoas são acostumadas a ler sequências mais do que a ler árvores
- **Tese 2**: iteração *vs.* recursão
  - *Sequências são modelos de* **iteração** *e árvores são modelos de* **recursão**
  - *A maioria das pessoas pensa iterativamente (?)*

Uma observação

- A maioria dos estudantes *(e não apenas os estudantes!)* acham arrays, listas, mapas, filas e pilhas “mais fáceis” do que árvores
- **Tese 1**: a representação gráfica

  As pessoas são acostumadas a ler sequências mais do que a ler árvores
- **Tese 2**: iteração *vs.* recursão
  - *Sequências são modelos de* **iteração** *e árvores são modelos de* **recursão**
  - *A maioria das pessoas pensa iterativamente (?)*
- **Tese 3**: árvores requerem decisões
  - *Todo nó tem* ≤ 1 *próximo nó em uma sequência*

    nós de árvores podem ter mais do que um subnó
  - $\Rightarrow$ *Percorrer uma sequência: não envolve decisões*

    $\Rightarrow$ *Explorar uma árvore: qual deve ser o próximo subnó processado?*

Linguagens e gramáticas

- Lembra de *substantivos, adjetivos, verbos transitivos* da escola?
- Analisar sentenças signica identificar seus componentes gramaticais
- Podemos analisar estes componentes recursivamente:

$$
\begin{array}{rcl}
\underline{\textit{sentença}} & \longrightarrow & \textit{sujeitos verbo} \\
\textit{sujeito} & \longrightarrow & \textit{sujeito sujeitos} \\
\textit{sujeito} & \longrightarrow & \textit{subst.} \\
 & || & \textit{artigo subst.} \\
 & || & \textit{adjetivos subst.} \\
 & || & \textit{artigo adjetivos subst.} \\
\textit{adjetivos} & \longrightarrow & \textit{adjetivo adjetivos} \\
\textit{verbo} & \longrightarrow & \ldots
\end{array}
$$

Árvores de análise

O macio, peludo gato ronrona

sentença	$\longrightarrow$	*sujeitos verbo*
sujeitos	$\longrightarrow$	*sujeito sujeitos*
sujeito	$\longrightarrow$	*subst.*
	$\|\|$	*artigo subst.*
	$\|\|$	*adjetivos subst.*
	$\|\|$	*artigo adjetivos subst.*
adjetivos	$\longrightarrow$	*adjetivo adjetivos*
verbo	$\longrightarrow$	...

Árvores de análise

O macio, peludo gato ronrona

<u>*sentença*</u> $\longrightarrow$ *sujeitos verbo*
sujeitos $\longrightarrow$ *sujeito sujeitos*
sujeito $\longrightarrow$ *subst.*
$\|$ *artigo subst.*
$\|$ *adjetivos subst.*
$\|$ *artigo adjetivos subst.*
adjetivos $\longrightarrow$ *adjetivo adjetivos*
verbo $\longrightarrow$ *. . .*

$\boxed{\text{o macio, peludo gato ronrona}}$

Árvores de análise

O macio, peludo gato ron- rona

sentença	$\longrightarrow$	*sujeitos verbo*
sujeitos	$\longrightarrow$	*sujeito sujeitos*
sujeito	$\longrightarrow$	*subst.*
	$\|\|$	*artigo subst.*
	$\|\|$	*adjetivos subst.*
	$\|\|$	*artigo adjetivos subst.*
adjetivos	$\longrightarrow$	*adjetivo adjetivos*
verbo	$\longrightarrow$	...

---

sentença

o macio, peludo gato | ronrona

Árvores de análise

O macio, peludo gato ronrona

sentença	$\longrightarrow$	*sujeitos verbo*
sujeitos	$\longrightarrow$	*sujeito sujeitos*
sujeito	$\longrightarrow$	*subst.*
	$\|\|$	*artigo subst.*
	$\|\|$	*adjetivos subst.*
	$\|\|$	*artigo adjetivos subst.*
adjetivos	$\longrightarrow$	*adjetivo adjetivos*
verbo	$\longrightarrow$	. . .

---

sentena

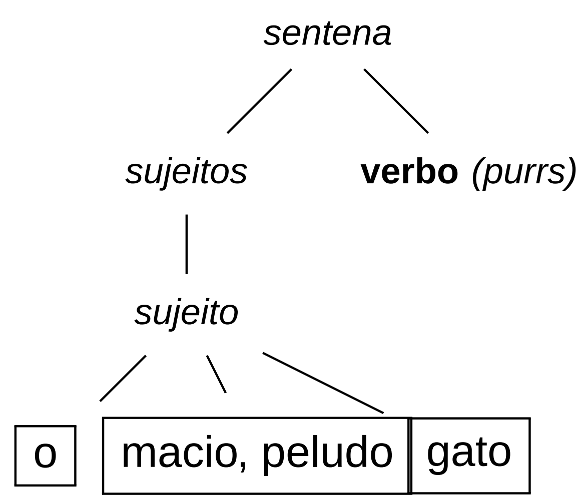
sujeitos **verbo** *(ronrona)*

o macio, peludo gato

Árvores de análise

O macio, peludo gato ron-rona

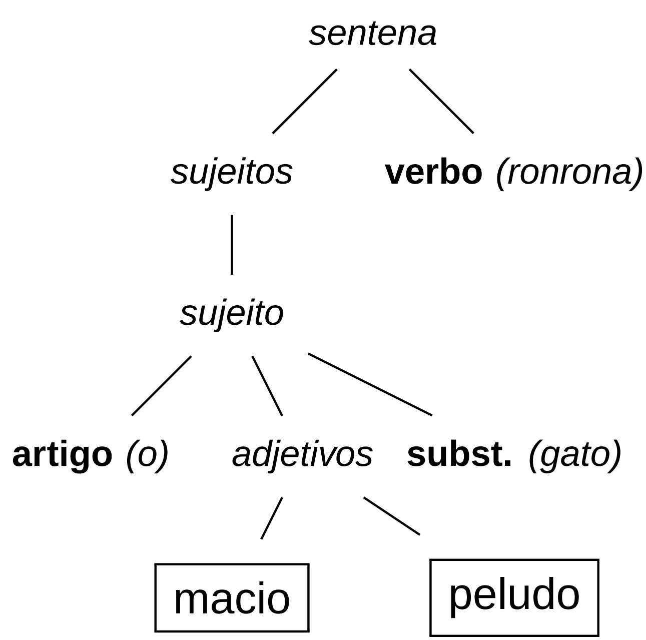
sentença	$\longrightarrow$	*sujeitos verbo*
sujeitos	$\longrightarrow$	*sujeito sujeitos*
sujeito	$\longrightarrow$	*subst.*
	$\|\|$	*artigo subst.*
	$\|\|$	*adjetivos subst.*
	$\|\|$	*artigo adjetivos subst.*
adjetivos	$\longrightarrow$	*adjetivo adjetivos*
verbo	$\longrightarrow$	*. . .*



Árvores de análise

O macio, peludo gato ron-
rona

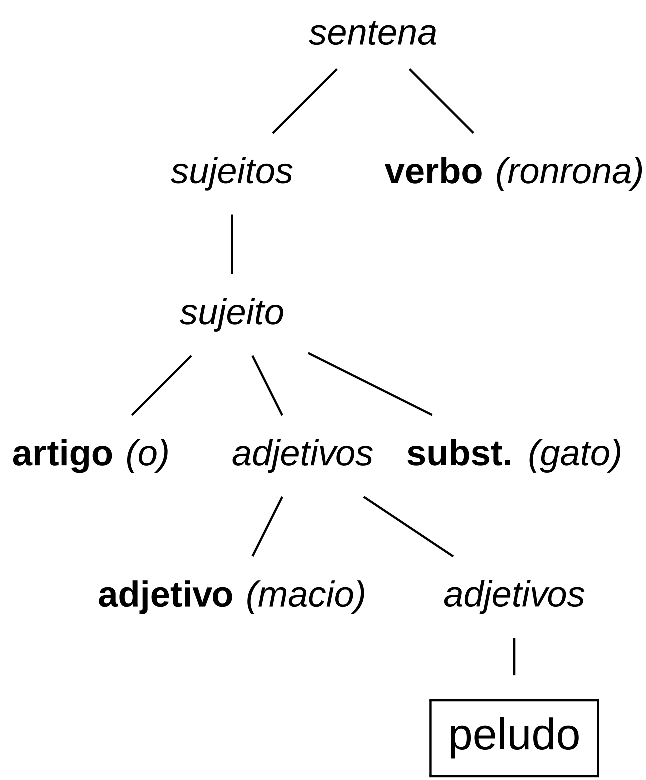
sentença	$\longrightarrow$	*sujeitos verbo*
sujeitos	$\longrightarrow$	*sujeito sujeitos*
sujeito	$\longrightarrow$	*subst.*
	$\|\|$	*artigo subst.*
	$\|\|$	*adjetivos subst.*
	$\|\|$	*artigo adjetivos subst.*
adjetivos	$\longrightarrow$	*adjetivo adjetivos*
verbo	$\longrightarrow$	*. . .*



Árvores de análise

O macio, peludo gato ron-
rona

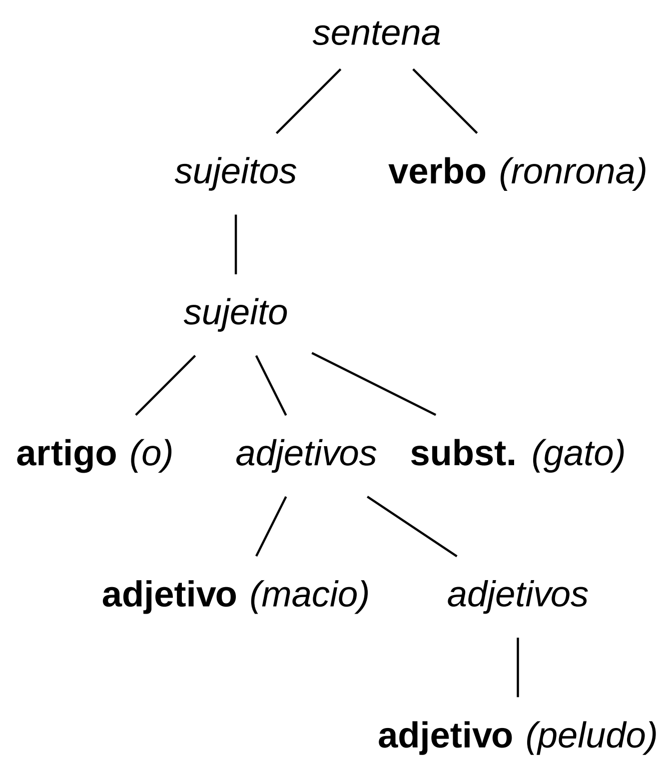
sentença	$\longrightarrow$	*sujeitos verbo*
sujeitos	$\longrightarrow$	*sujeito sujeitos*
sujeito	$\longrightarrow$	*subst.*
	$\|\|$	*artigo subst.*
	$\|\|$	*adjetivos subst.*
	$\|\|$	*artigo adjetivos subst.*
adjetivos	$\longrightarrow$	*adjetivo adjetivos*
verbo	$\longrightarrow$	...



Árvores de análise

O macio, peludo gato ronrona

sentença	$\longrightarrow$	*sujeitos verbo*
sujeitos	$\longrightarrow$	*sujeito sujeitos*
sujeito	$\longrightarrow$	*subst.*
	$\|\|$	*artigo subst.*
	$\|\|$	*adjetivos subst.*
	$\|\|$	*artigo adjetivos subst.*
adjetivos	$\longrightarrow$	*adjetivo adjetivos*
verbo	$\longrightarrow$	*. . .*



Linguagens formais e naturais

- Se existe mais de uma árvore de análise para uma sentença, a gramática é **ambígua**
- Se as diferentes árvores de análise para uma sentença levam a diferentes interpretações, a linguagem em si é ambígua
- Linguagens não-ambíguas são chamadas **formais** *(ex. C/C++, Java,. . .)*
- Linguagens ambíguas são chamadas **naturais** *(ex. Inglês, Português,. . .)*

Exploração de árvores

- Breadth-First Search (BFS — visto no Módulo 2)
  encontra o caminho pra fora de um labirinto no menor número de passos
- Depth-First Search (DFS)
  encontra o caminho pra fora do labirinto
- DFS: chamada recursiva `dfs`(*node* v):

  1: realize (opcional) uma ação em v;
  2: **for** todos os subnós u de v **do**
  3:    `dfs`(u);
  4: **end for**
  5: realize (opcional) uma ação em v;

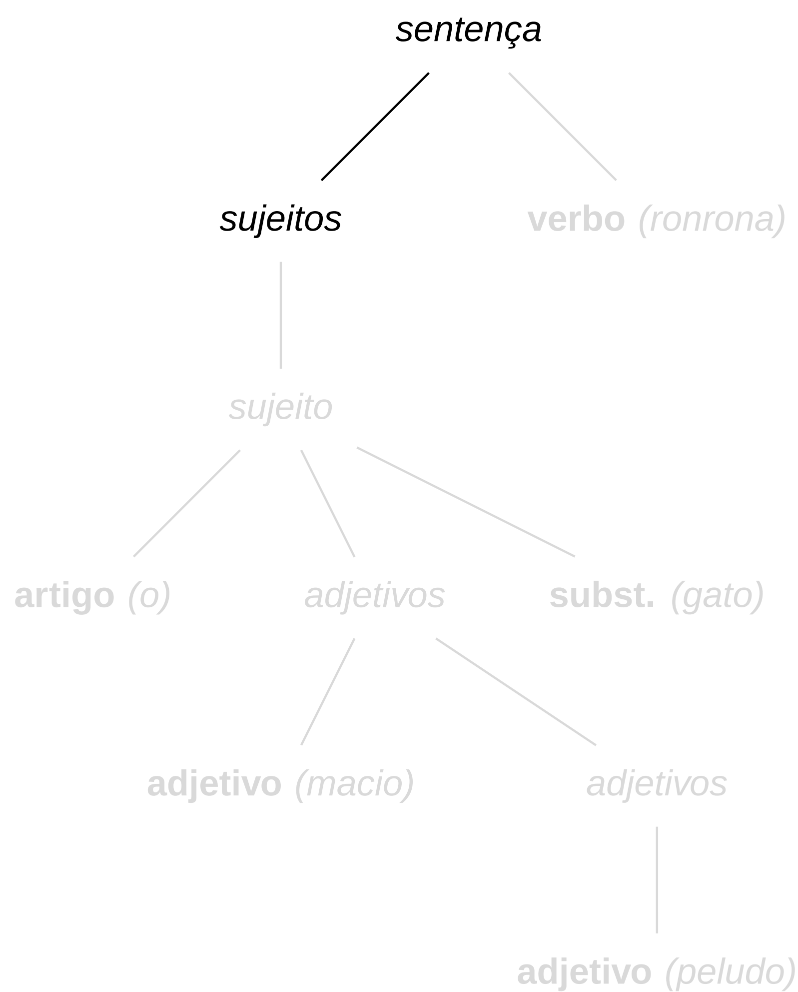
- DFS é `dfs`(*raiz*)

Tese [século XX]: nosso cérebro trata sentenças como labirintos, e usa DFS para encontrar uma saída (i.e., analisa elas)

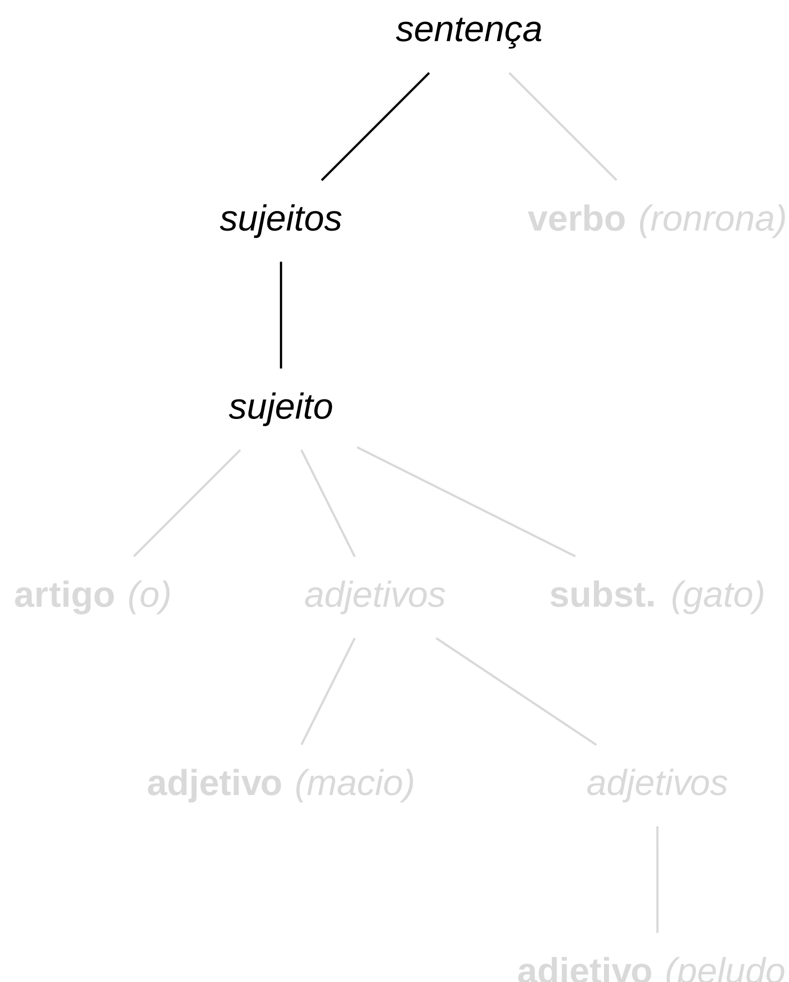
DFS: explorando uma árvore de análise

DFS: explorando uma árvore de análise

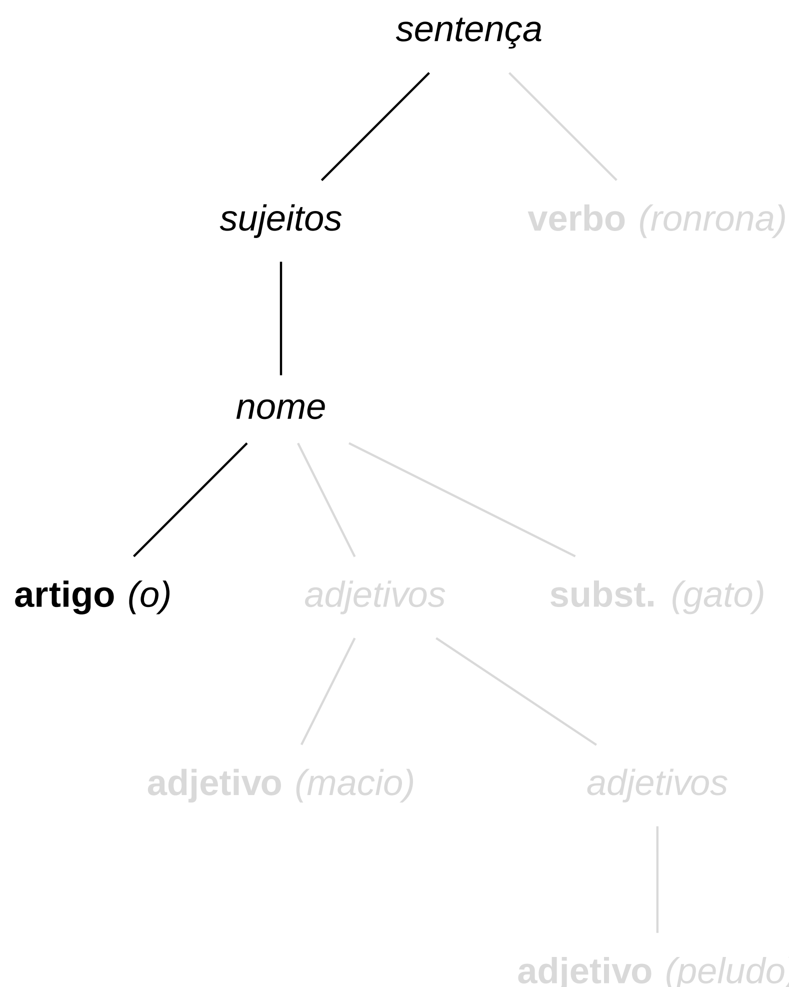
DFS: explorando uma árvore de análise



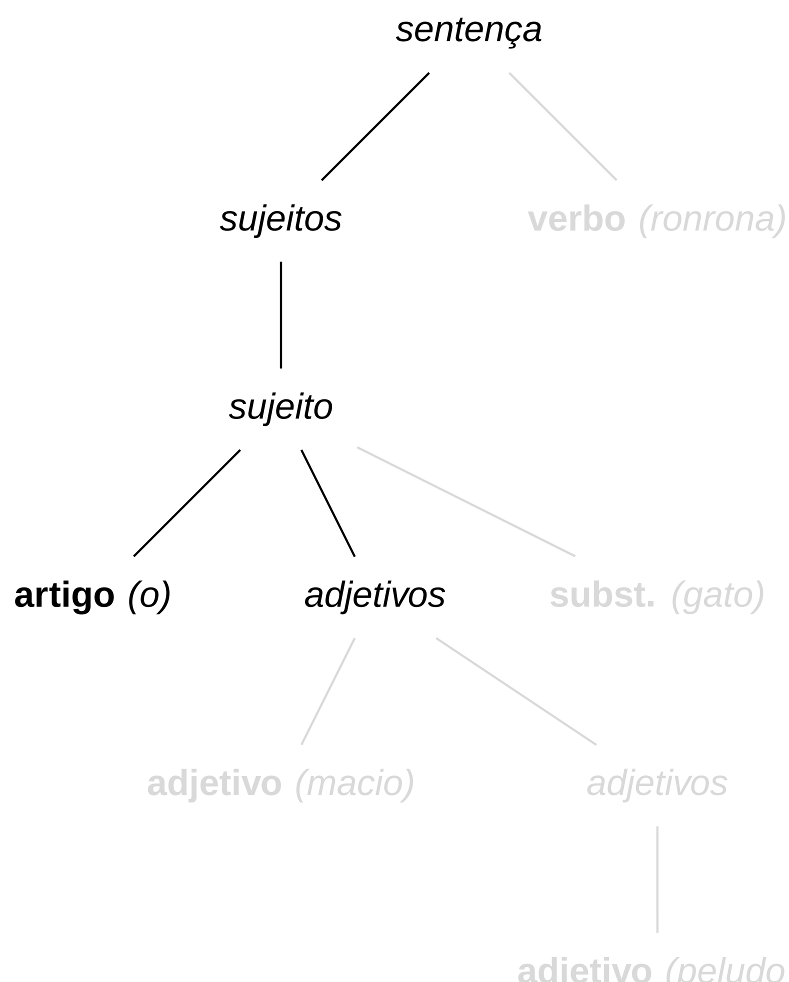
DFS: explorando uma árvore de análise



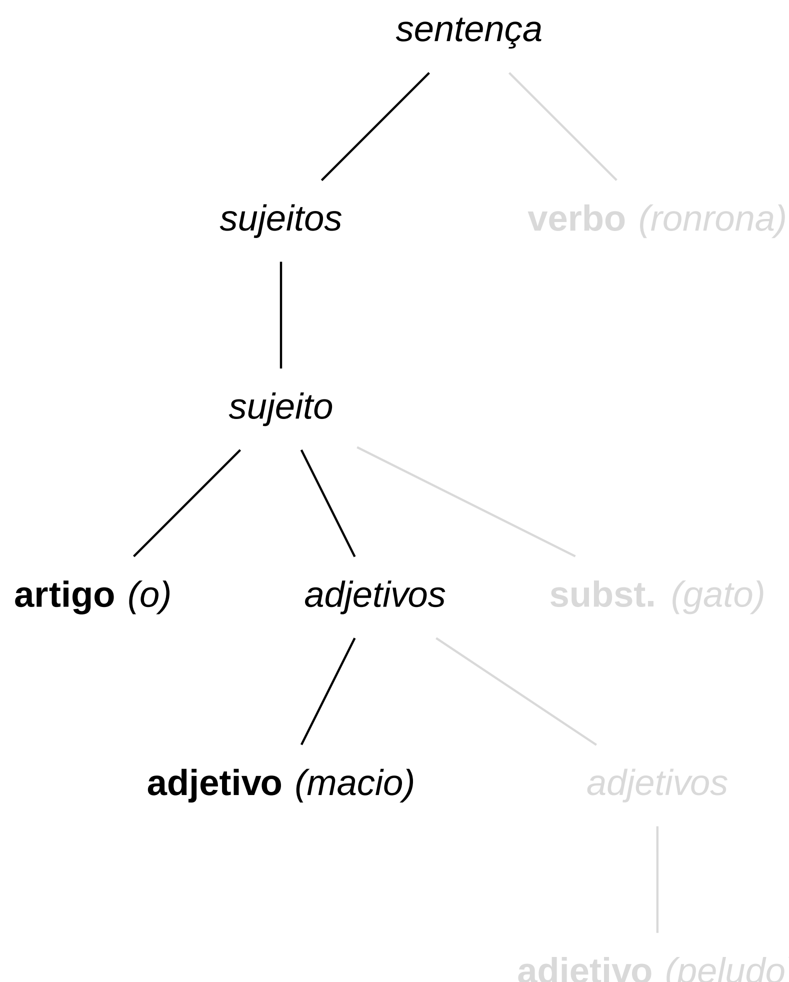
DFS: explorando uma árvore de análise



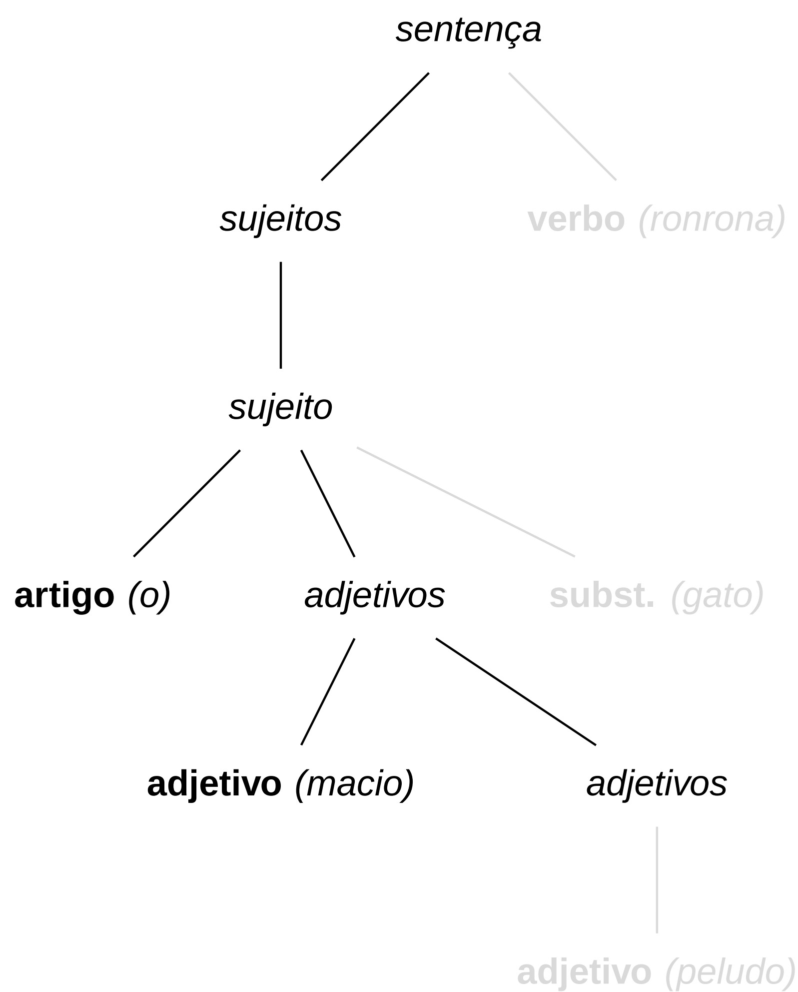
DFS: explorando uma árvore de análise



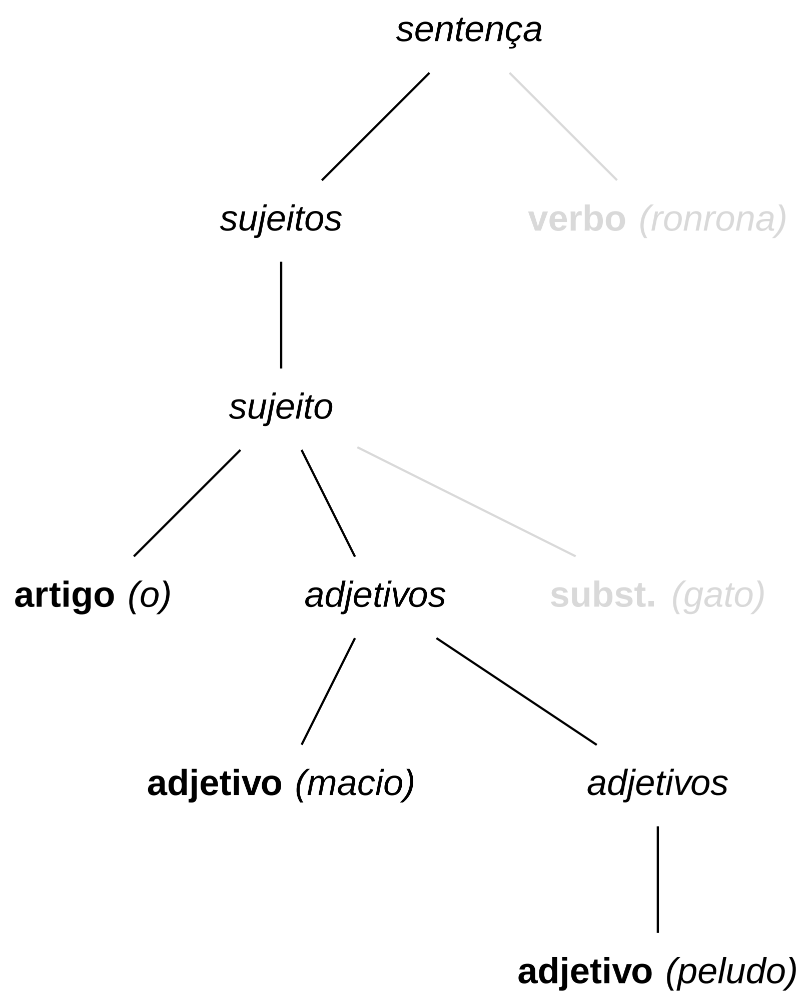
DFS: explorando uma árvore de análise



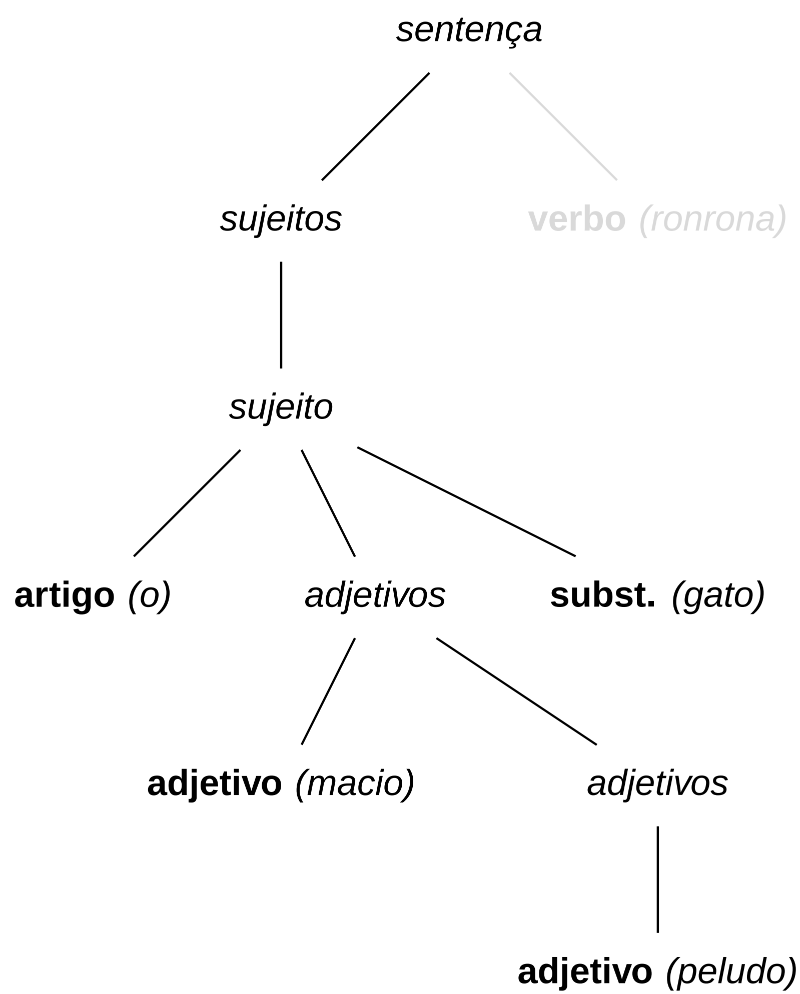
DFS: explorando uma árvore de análise



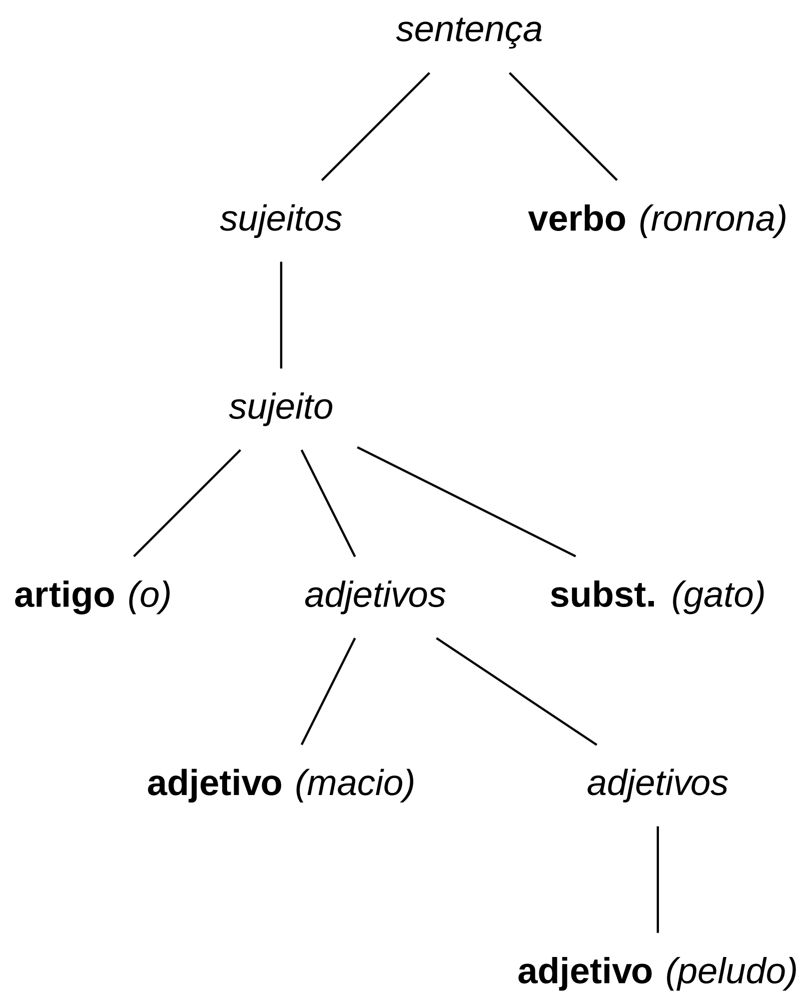
DFS: explorando uma árvore de análise



DFS: explorando uma árvore de análise



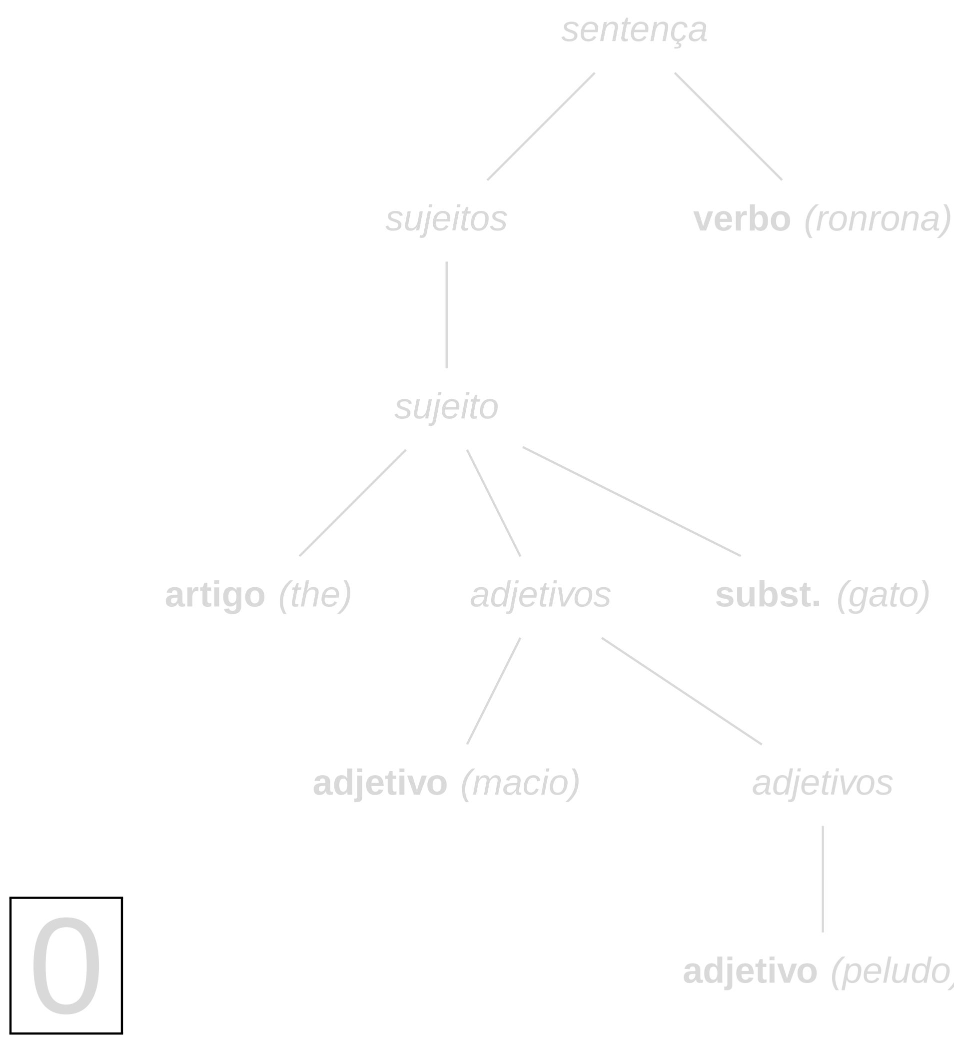
DFS: explorando uma árvore de análise



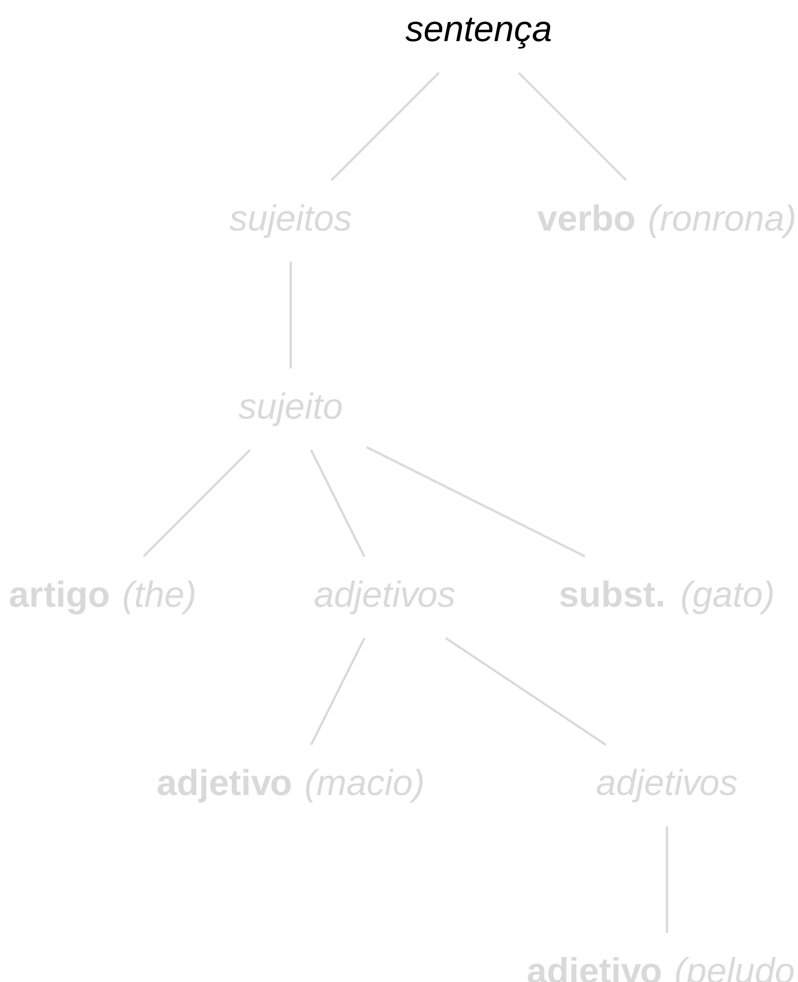
Quanta memória?

- Quanto precisamos “lembrar” durante a DFS?
- Note que o código recursivo não faz uso explícito de memória
- Do módulo 3, lembre que recursão é implementada utilizando **pilha**
- Qual o tamanho máximo da pilha ao se explorar uma árvore com DFS?

DFS em árvores de análise: memória

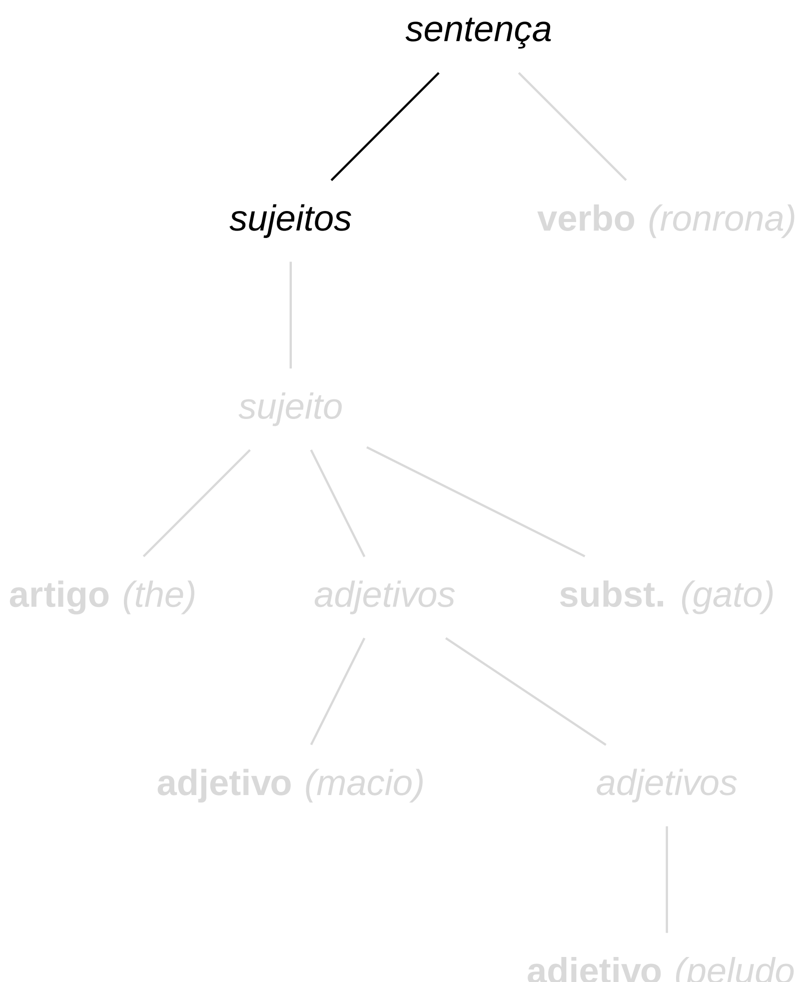


DFS em árvores de análise: memória



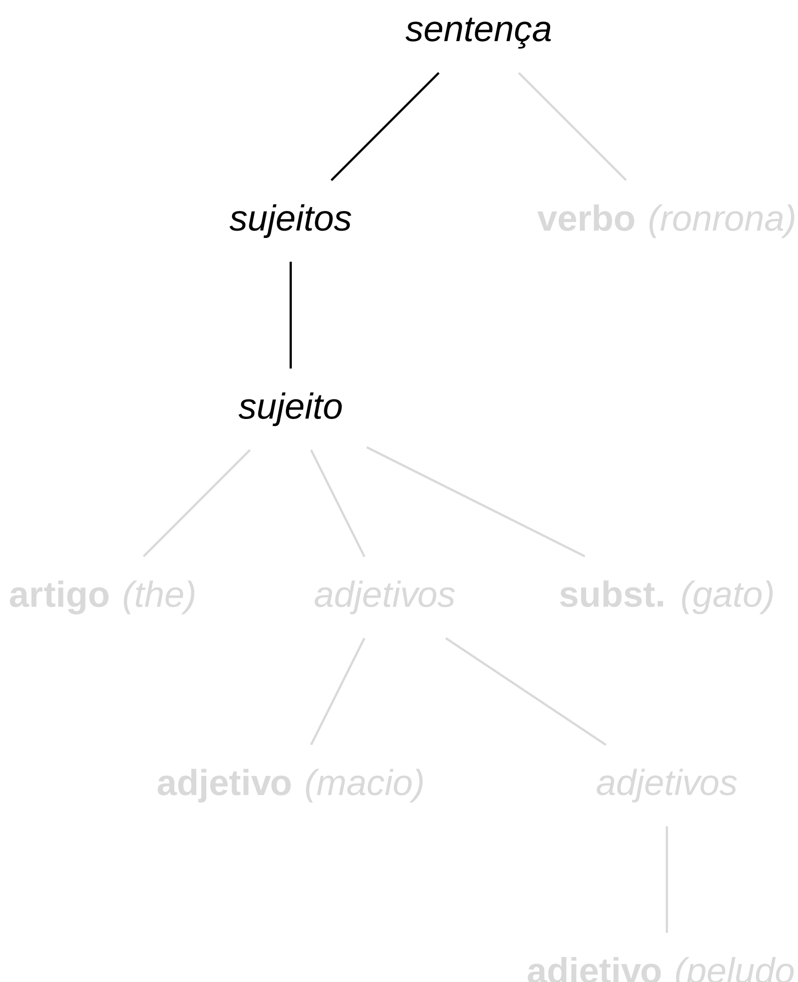
$\boxed{0}$

DFS em árvores de análise: memória



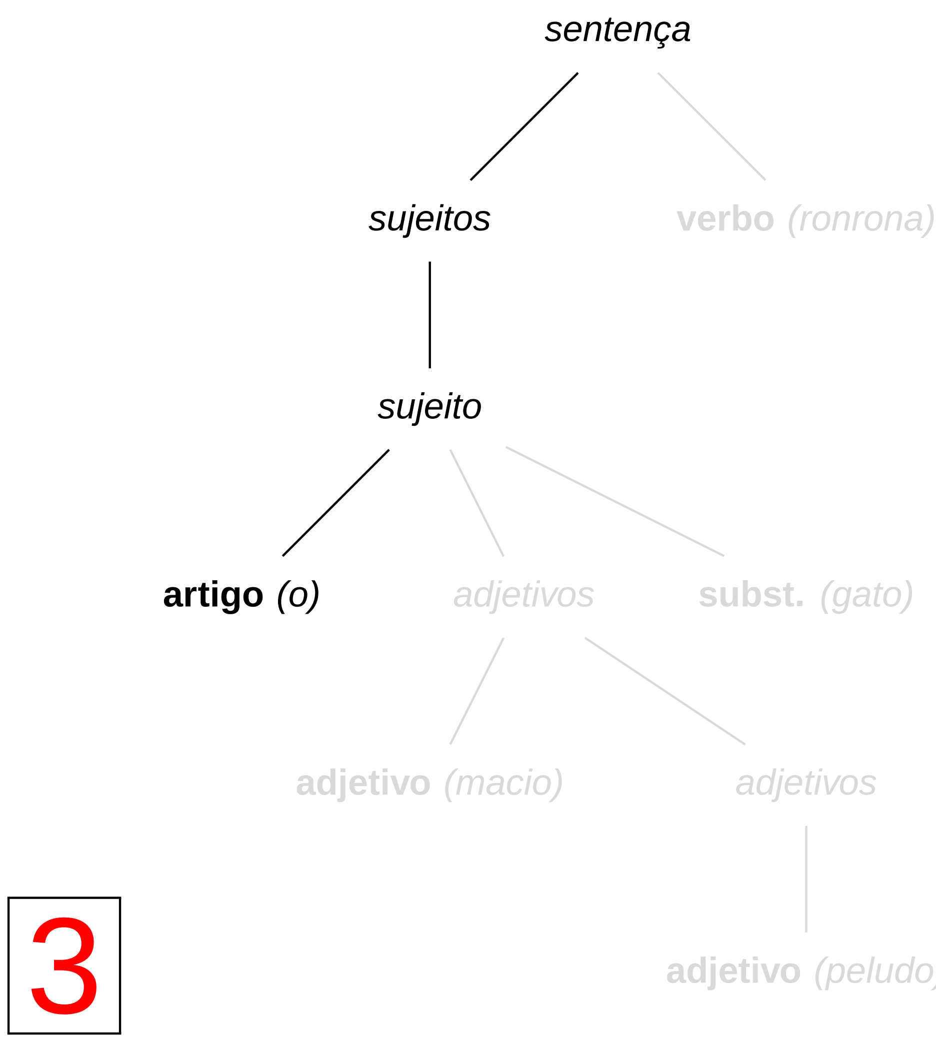
$\boxed{1}$

DFS em árvores de análise: memória

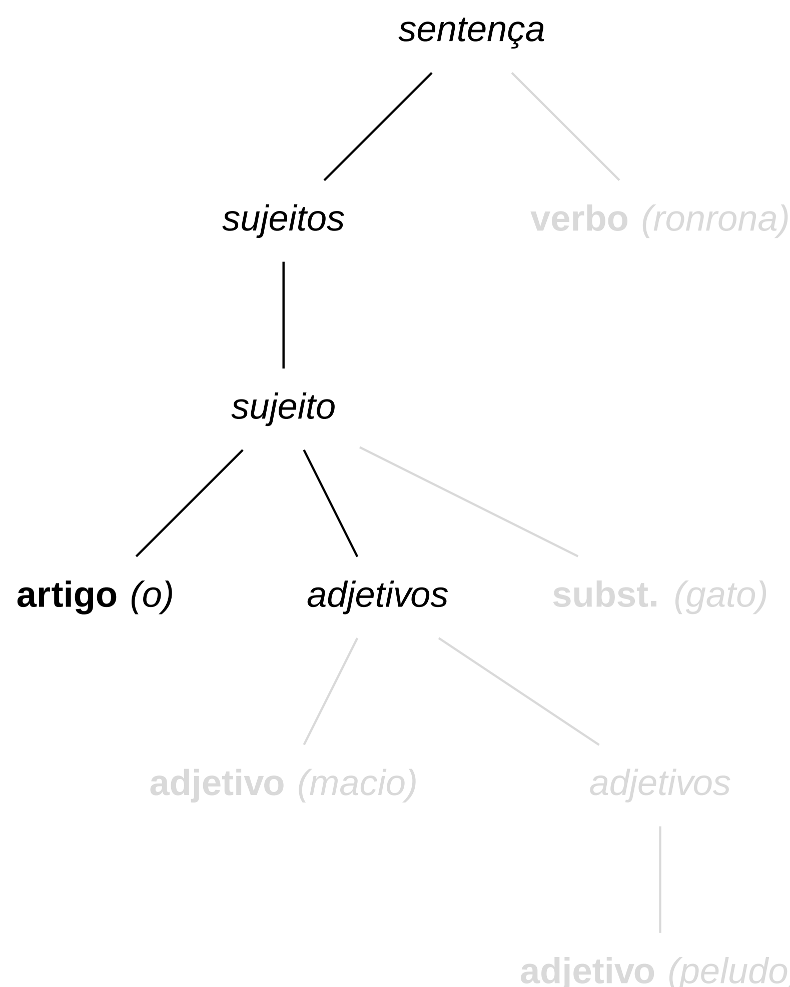


$\boxed{2}$

DFS em árvores de análise: memória

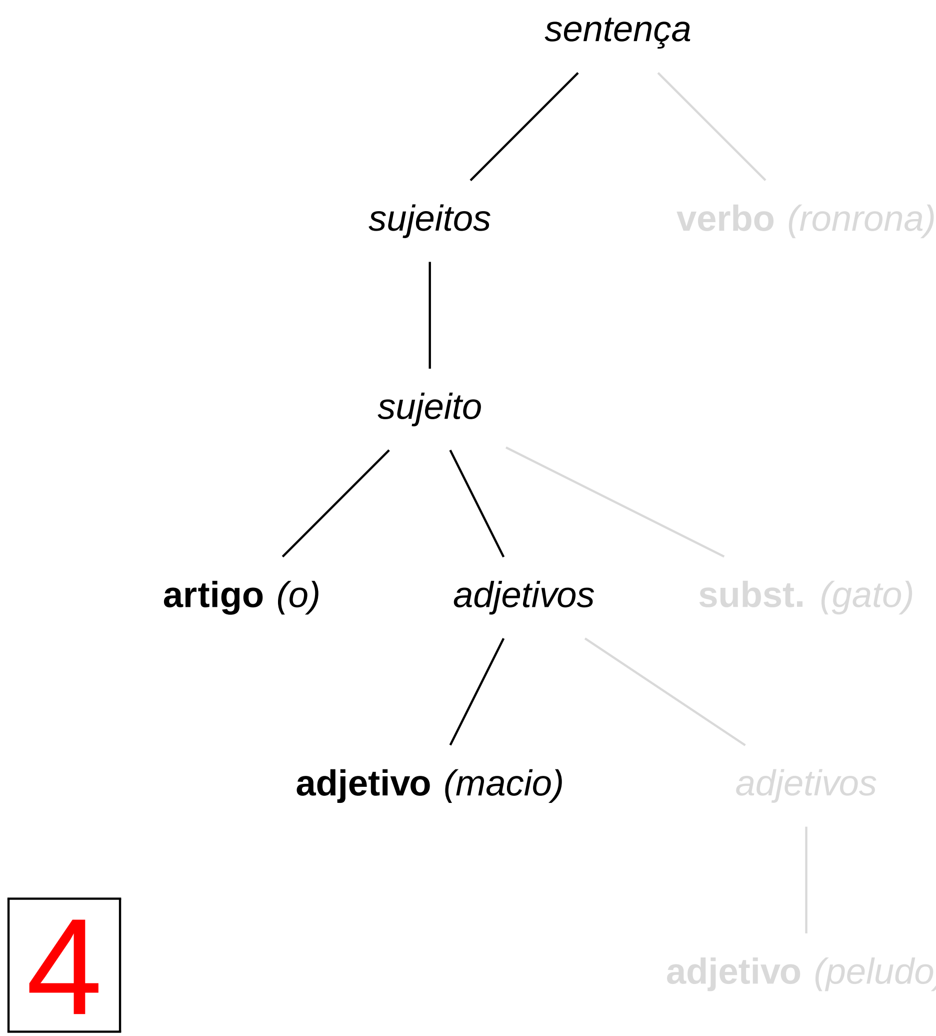


DFS em árvores de análise: memória

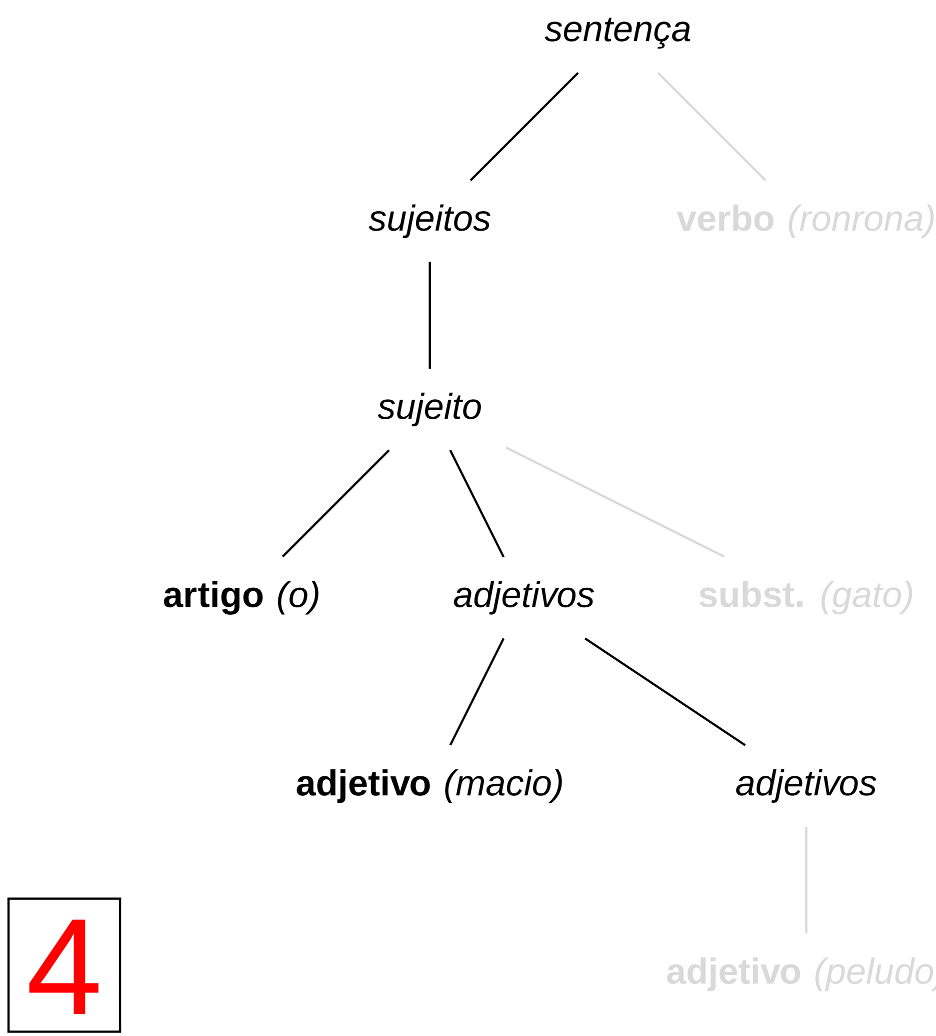


3

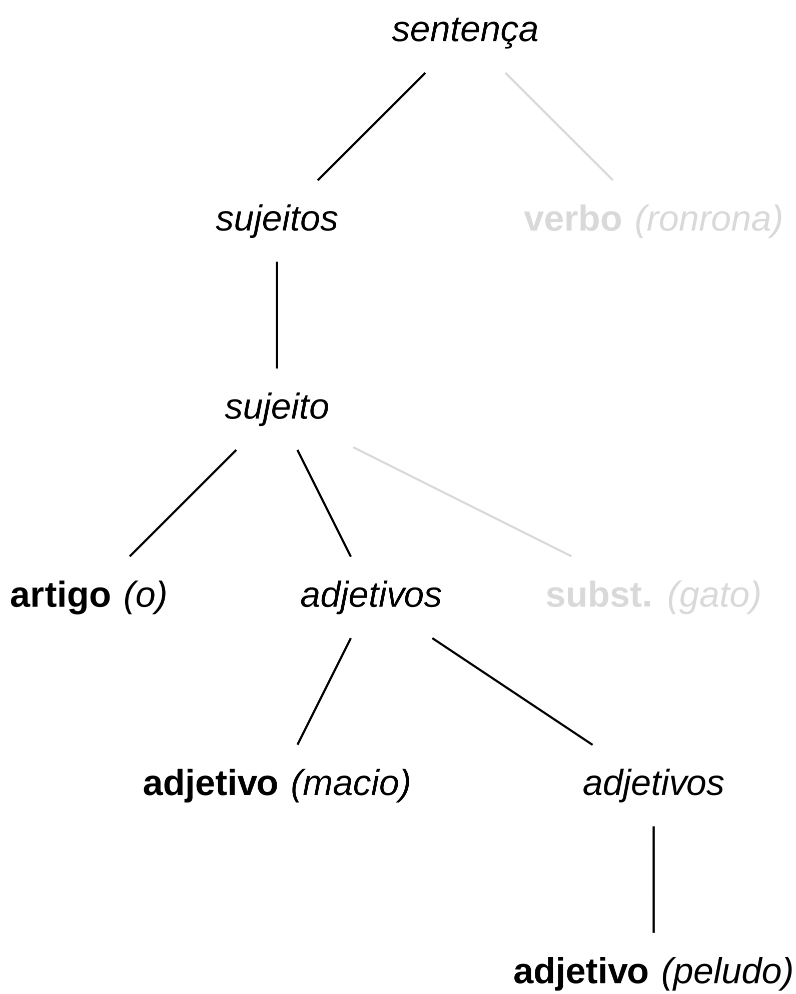
DFS em árvores de análise: memória



DFS em árvores de análise: memória

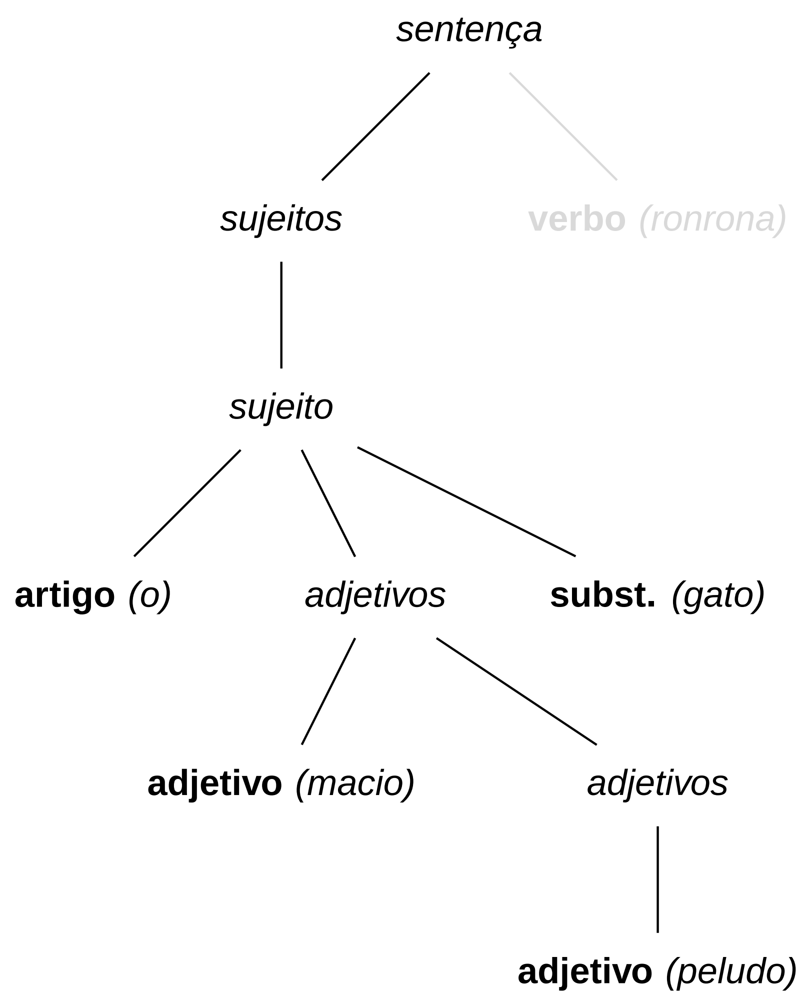


DFS em árvores de análise: memória



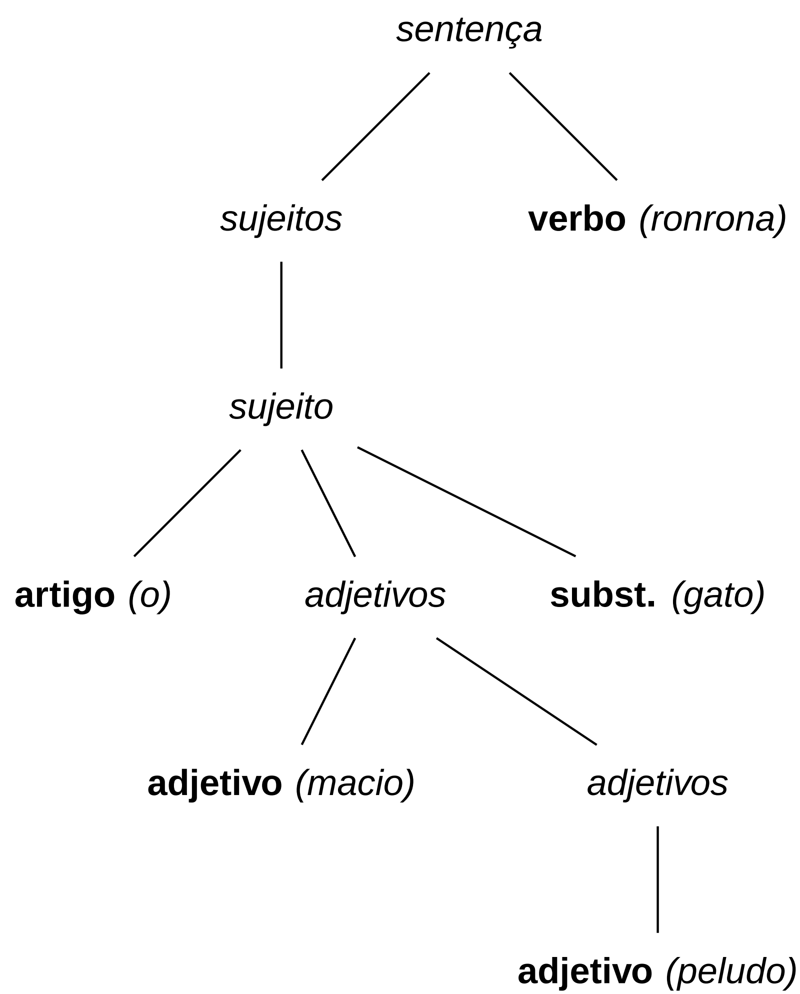
max=5 $\boxed{5}$

DFS em árvores de análise: memória



max=5 $\boxed{3}$

DFS em árvores de análise: memória



max=5 $\boxed{1}$

Memória e profundidade

A quantidade de memória é igual à profundidade da árvore

profundidade = caminho mais longo da raiz até uma folha

Busca em profundidade (DFS)

Exame de um (Dí)grafo

- DFS explora os nós de uma árvore a partir da raiz, e visita cada nó (conectado) apenas uma vez
- Generalização: examina os nós de um dígrafo *(ou os vértices de um grafo)* a partir do nó s

Require: $G = (V, A)$, $s \in V$, $R = \{s\}$, $Q = \{s\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**
    escolha $v \in Q$ `// v examinado`
    $Q \leftarrow Q \setminus \{v\}$
    for $w \in N^+(v) \setminus R$ **do**
        $R \leftarrow R \cup \{w\}$
        $Q \leftarrow Q \cup \{w\}$
    end for
end while

O algoritmo é correto

Thm.

Se existe um caminho orientado P de s a $z \in V$, então o algoritmo examina z

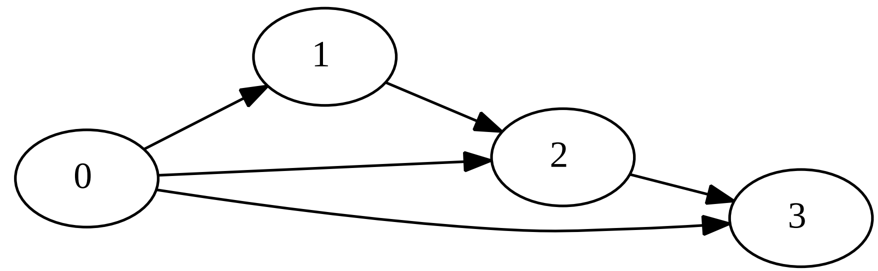
Proof

- Suponha que a afirm. seja falsa, então $\exists (x, y) \in P$ com $x \in R$ e $y \notin R$ (c.c., por indução no tamanho do passeio, $z \in R$ pelo Step 5 e portanto em Q pelo Step 6)
- Pelo Step 6, x foi adicionado a Q
- O algoritmo não para antes de eliminar x de Q no Step 3 em alguma iteração
- Quando isto acontece os nós em $N^+(v)$ são adicionados a R e a Q.
- Portanto $y \notin N^+(x)$, o que implica $(x, y) \notin P$, o que resulta em uma contradição.

Armazenando um grafo

- Visto no Módulo 1: use *array denteado* (*também chamado* **lista de adjacência**)

$$N^+(0) = (1, 2, 3)$$
$$N^+(1) = (2)$$
$$N^+(2) = (3)$$



- Visto no módulo 2: use *lista de arcos*

$$L = ((0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 3))$$

Eficiência diferente para diferentes algoritmos

O algoritmo leva $O(n+m)$

Thm.

Se o dígrafo está codificado com listas de adjacência, o algoritmo leva tempo proporcional a $O(n+m)$ no pior caso

Proof

- **Cada nó é considerado uma única vez:**
  - Sempre que um nó x é eliminado de Q, ele foi previamente inserido pelo Step 6, o que significa que ele também foi adicionado a R no Step 5
  - No Step 4, x nunca é readicionado a Q
- **Cada arco (x, y) é considerado uma única vez:**
  - Quando $x = v$ no Step 2 então $y \in N^+(x)$, então ou $y = w$ no Step 4 ou verifica-se que $y \in R$
  - Em ambos os casos, a relação (x, y) foi considerada uma única vez

A escolha de $v \in Q$

- No Step 2, a escolha de $v \in Q$ determina a ordem na qual os nós são examinados
- Podemos alterar isto usando diferentes estruturas de dados para implementar o conjunto Q
- Duas estruturas de dados são comumente usadas:

1. Pilhas

   DFS : isto corresponde à ordem (LIFO)

2. Filas

   BFS: isto corresponde à ordem (FIFO)

Fim do Módulo 6