



Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Σχολή Μουσικής και Οπτοακουστικών Τεχνολογιών
Τμήμα Μουσικής Τεχνολογίας και Ακουστικής
Π.Μ.Σ. «Τεχνολογίες Ήχου και Μουσικής»

Διπλωματική Εργασία

Τεχνικές Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης για την Προσομοίωση Κυκλωμάτων Παραμόρφωσης Ήχου

Αλέξανδρος Ηλιάδης
ΜΤΑ56

Επίβλεψη :
Μάξιμος Καλιακάτσος-Παπακώστας
Αναπληρωτής Καθηγητής

Ιούλιος 2025

Copyright © 2025 Αλέξανδρος Ηλιάδης



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons
Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0.

Για να δείτε ένα αντίγραφο αυτής της άδειας επισκεφτείτε τον ιστότοπο:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.el>

Περίληψη

Τεχνικές Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης για την Προσομοίωση Κυκλωμάτων Παραμόρφωσης Ήχου

Η Εικονική Αναλογική Μοντελοποίηση αποτελεί ένα εξειδικευμένο διεπιστημονικό πεδίο που επικεντρώνεται στην ψηφιακή προσομοίωση αναλογικών κυκλωμάτων επεξεργασίας ήχου, στοχεύοντας στη διατήρηση των ηχητικών χαρακτηριστικών τους και παρέχοντας παράλληλα τη δυνατότητα χρήσης σε πραγματικό χρόνο. Η σχετική έρευνα έχει υιοθετήσει και αναπτύξει διάφορες τεχνικές οι οποίες μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες: τις θεωρητικές προσεγγίσεις, οι οποίες μοντελοποιούν ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα στοιχείο προς στοιχείο αξιοποιώντας το σχηματικό του διάγραμμα, και τις εμπειρικές προσεγγίσεις, οι οποίες προσαρμόζουν ένα μαθηματικό μοντέλο σε μετρήσεις και ηχητικά δεδομένα που έχουν συλλεχθεί. Η παρούσα εργασία, δίνοντας έμφαση στα κυκλώματα παραμόρφωσης ήχου και καλύπτοντας όλο το αναγκαίο θεωρητικό υπόβαθρο, συγκεντρώνει και παρουσιάζει αναλυτικά το μεγαλύτερο μέρος όλων αυτών των τεχνικών, εφαρμόζοντας τις κυριότερες από αυτές για την προσομοίωση του κλασικού πεταλιού παραμόρφωσης *BOSS DS-1*. Ειδικότερα, το ηλεκτρονικό κύκλωμα του πεταλιού αναλύεται και διαχωρίζεται σε διακριτά γραμμικά και μη γραμμικά στάδια, τα οποία υλοποιούνται ξεχωριστά εφαρμόζοντας μεθοδολογίες που βασίζονται στα ψηφιακά φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (IIR), στα Μοντέλα Χώρου Καταστάσεων (SSM), στα Χαμιλτονιανά Συστήματα Θυρών (PHS) και στα Κυματικά Ψηφιακά Φίλτρα (WDF). Η αξιολόγηση της προσομοίωσης πραγματοποιείται τόσο οπτικά, αντιπαραθέτοντας τα διαγράμματα της χρονικής και συχνотικής απόκρισης του μοντέλου που υλοποιήθηκε με εκείνα που προέκυψαν από την αντίστοιχη προσομοίωση του κυκλώματος σε λογισμικό τύπου SPICE, όσο και ακουστικά, συγκρίνοντας ηχητικά δείγματα που προέκυψαν από την επεξεργασία σημάτων ηλεκτρικής κιθάρας μέσω αυτών των δύο προσομοιώσεων. Συγκεκριμένα, διεξήχθη μια διαδικτυακή έρευνα με τη μορφή μιας δοκιμής ABX, κατά την οποία οι συμμετέχοντες κλήθηκαν επιπλέον να βαθμολογήσουν την ομοιότητα και να υποδείξουν την ενδεχόμενη προτίμηση τους ανάμεσα σε ορισμένα ηχητικά δείγματα. Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από τη στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας αναδεικνύουν την ύπαρξη λεπτών ηχητικών διαφορών ανάμεσα στα ηχητικά δείγματα, χωρίς ωστόσο να παρατηρείται κάποια σημαντική προτίμηση προς κάποια από τις δύο προσομοιώσεις.

Λέξεις-Κλειδιά: Εικονική Αναλογική Μοντελοποίηση, Ψηφιακή Προσομοίωση, Ηλεκτρονικό Κύκλωμα, Παραμόρφωση Ήχου, Πετάλι Κιθάρας, *BOSS DS-1*

Abstract

Virtual Analog Modeling Techniques for Simulating Audio Distortion Circuits

Virtual Analog Modeling is a specialized interdisciplinary field that focuses on the digital simulation of analog audio processing circuits, aiming to preserve their sonic characteristics while enabling real-time use. Related research has adopted and developed various techniques which can be categorized into two groups: the theoretical approaches, which model an electronic circuit component-by-component utilizing its schematic diagram, and the empirical approaches, which fit a mathematical model to collected measurements and audio data. The present thesis, placing emphasis on audio distortion circuits and covering all the necessary theoretical background, compiles and thoroughly presents the majority of these techniques, applying the most essential ones for the simulation of the classic *BOSS DS-1* distortion pedal. In particular, the electronic circuit of the pedal is analyzed and divided into distinct linear and nonlinear stages, which are implemented separately using methodologies based on Infinite Impulse Response (IIR) digital filters, State-Space Models (SSM), Port-Hamiltonian Systems (PHS) and Wave Digital Filters (WDF). The evaluation of the simulation is carried out both visually, by contrasting the time and frequency response graphs of the implemented model with those obtained from the corresponding simulation of the circuit in SPICE-type software, and aurally, by comparing audio samples obtained from the processing of electric guitar signals through these two simulations. Specifically, an online survey was conducted in the form of an ABX test, during which the participants were also asked to rate the similarity and indicate their potential preference between certain audio samples. The conclusions drawn from the statistical analysis of the survey results highlight the existence of subtle sonic differences between the audio samples, although no significant preference for either of the two simulations is observed.

Keywords: Virtual Analog Modeling, Digital Simulation,
Electronic Circuit, Audio Distortion,
Guitar Pedal, *BOSS DS-1*

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία ολοκληρώνει τις φοιτητικές μου υποχρεώσεις για το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Τεχνολογίες Ήχου και Μουσικής» που πραγματοποιείται από το Τμήμα Μουσικής Τεχνολογίας και Ακουστικής του Ελληνικού Μεσογειακού Πανεπιστημίου. Ένας ακόμα ξεχωριστός κύκλος κλείνει ύστερα από σχεδόν 2 χρόνια μέσα στα οποία απέκτησα πολλές νέες γνώσεις, βίωσα καινούριες εμπειρίες και διεύρυνα τα ενδιαφέροντα μου, τόσο σε ακαδημαϊκό όσο και σε επαγγελματικό, αλλά και σε προσωπικό επίπεδο. Το ταξίδι αυτό φτάνει στο τέλος του με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, η εκπόνηση της οποίας διήρκησε 7 μήνες και αποτέλεσε ένα προσωπικό αποκορύφωμα, κατά το οποίο είχα την ευκαιρία να εφαρμόσω στην πράξη πολλά από όσα έχω μάθει όλα αυτά τα χρόνια μέσα από τις προπτυχιακές και τις μεταπτυχιακές σπουδές μου.

Για αυτή την ευκαιρία θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον καθηγητή μου, κύριο Μάξιμο Καλιακάτσο-Παπακώστα, για την πλήρη εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπο μου όταν ανέλαβε την επίβλεψη αυτής της εργασίας και για την απόλυτη ελευθερία που μου έδωσε στην επιλογή του θέματος και σε κάθε βήμα μέχρι και την ολοκλήρωση της. Παράλληλα, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω και για τη διδασκαλία των μαθημάτων «Προγραμματισμός Εφαρμογών Ήχου» και «Εφαρμοσμένη Μηχανική Μάθηση στον Ήχο και τη Μουσική», τα οποία έδωσαν την έμπνευση και έθεσαν τα θεμέλια για την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Αντίστοιχα, θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλους τους υπόλοιπους καθηγητές με τους οποίους είχα την ευκαιρία να συνεργαστώ στα πλαίσια των μαθημάτων του μεταπτυχιακού προγράμματος, για όλα όσα μου μετέφεραν μέσα από την εμπειρία και την καθοδήγηση τους.

Ιδιαίτερες προσωπικές ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω μέσα από την καρδιά μου στους: Κώστα, Εύα, Μπάμπη, Μελίνα, Σωτήρη και Εύα, τα άτομα που με γέμισαν με όμορφες αναμνήσεις από τις στιγμές που περάσαμε μαζί κατά τη διάρκεια της παραμονής μου στην Κρήτη και νιώθω την ευγνωμοσύνη να αποκαλώ φίλους μου.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω όλους όσους έχουν σταθεί δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια, καθώς και όλους όσους έχουν περάσει από τη ζωή μου και έχουν συμβάλει, ο καθένας με τον τρόπο του, ώστε να φτάσω στο σημείο που βρίσκομαι σήμερα.

Αλέξανδρος Ηλιάδης
Ρέθυμνο, Ιούλιος 2025

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	ii
Πρόλογος	iii
Περιεχόμενα	iv
Λίστα Εικόνων	vi
Λίστα Πινάκων	ix
Λίστα Συντομογραφιών	x
Εισαγωγή	xi
1 Θεωρητικό Υπόβαθρο	1
1.1 Σήματα και Συστήματα	1
1.1.1 Κρουστική Απόκριση	2
1.1.2 Συχνотική Απόκριση	3
1.1.3 Συνάρτηση Μεταφοράς	3
1.1.4 Δειγματοληψία	4
1.2 Ηλεκτρονικά Κυκλώματα	5
1.2.1 Φορτίο, Τάση, Ρεύμα και Ισχύς	5
1.2.2 Νόμοι του Kirchhoff	6
1.2.3 Πηγές Τάσης και Ρεύματος	7
1.2.4 Η Αντίσταση	8
1.2.5 Ο Πυκνωτής	12
1.2.6 Το Πηνίο	13
1.2.7 Η Εμπέδηση	14
1.2.8 Η Διόδος	15
1.2.9 Το Τρανζίστορ	16
1.2.10 Ο Τελεστικός Ενισχυτής	17
1.3 Υπολογιστικές Τεχνικές	19
1.3.1 Γραμμικοποίηση Συναρτήσεων	19
1.3.2 Εύρεση Ριζών	19
1.3.3 Αριθμητική Ολοκλήρωση	20
1.4 Προσομοιώσεις SPICE	22
1.4.1 Ανάλυση Κόμβων	22

1.4.2	Γραμμικοποίηση Στοιχείων	23
1.4.3	Διακριτοποίηση Στοιχείων	23
1.4.4	DC Ανάλυση	24
1.4.5	AC Ανάλυση	24
1.4.6	Χρονική Ανάλυση	24
2	Βιβλιογραφική Επισκόπηση	25
2.1	Εικονική Αναλογική Μοντελοποίηση	25
2.2	Θεωρητικές Προσεγγίσεις	26
2.2.1	Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης	26
2.2.2	Μοντέλα Χώρου Καταστάσεων	27
2.2.3	Χαμιλτονιανά Συστήματα Θυρών	29
2.2.4	Κυματικά Ψηφιακά Φίλτρα	33
2.2.4.1	Αντίσταση	34
2.2.4.2	Πυκνωτής	34
2.2.4.3	Πηνίο	35
2.2.4.4	Ιδανική Πηγή Τάσης	36
2.2.4.5	Μη Ιδανική Πηγή Τάσης	36
2.2.4.6	Ιδανική Πηγή Ρεύματος	37
2.2.4.7	Μη Ιδανική Πηγή Ρεύματος	38
2.2.4.8	Σειριακός Προσαρμογέας	38
2.2.4.9	Παράλληλος Προσαρμογέας	40
2.2.4.10	Επισκόπηση	41
2.3	Εμπειρικές Προσεγγίσεις	42
2.3.1	Σειρές Volterra	42
2.3.2	Μοντέλα Wiener-Hammerstein	43
2.3.3	Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα	44
2.4	Πρακτικά Ζητήματα	46
3	Μεθοδολογία και Υλοποίηση	48
3.1	Το πετάλι BOSS DS-1	48
3.2	Στάδιο Προενίσχυσης	51
3.3	Στάδιο Ενίσχυσης	57
3.4	Στάδιο Ψαλιδισμού	62
3.5	Στάδιο Φιλτραρίσματος	66
4	Αξιολόγηση	70
4.1	Σύγκριση Προσομοιώσεων	70
4.2	Διεξαγωγή Έρευνας	90
5	Συμπεράσματα	94
5.1	Σύνοψη	94
5.2	Συνεισφορά	94
5.3	Μελλοντικές Επεκτάσεις	95
	Βιβλιογραφικές Αναφορές	96
	Παράρτημα: Κώδικας & Εργαλεία	104

Λίστα Εικόνων

Εικόνα 1.1:	Μετασχηματισμός σήματος από σύστημα	1
Εικόνα 1.2:	Διάταξη σύμβασης προσήμου ισχύος	6
Εικόνα 1.3:	Κύκλωμα εφαρμογής του KCL	6
Εικόνα 1.4:	Κύκλωμα εφαρμογής του KVL	7
Εικόνα 1.5:	Σύμβολα πηγών τάσης και ρεύματος	7
Εικόνα 1.6:	Σύμβολα γείωσης	8
Εικόνα 1.7:	Σύμβολο αντίστασης	8
Εικόνα 1.8:	Συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά	9
Εικόνα 1.9:	Συνδεσμολογία αντιστάσεων παράλληλα	9
Εικόνα 1.10:	Σύμβολο και ισοδύναμη αναπαράσταση ποτενσιομέτρου	10
Εικόνα 1.11:	Κύκλωμα διαιρέτη τάσης	11
Εικόνα 1.12:	Κύκλωμα μη ιδανικής πηγής τάσης	11
Εικόνα 1.13:	Σύμβολο πυκνωτή	12
Εικόνα 1.14:	Σύμβολο πηνίου	13
Εικόνα 1.15:	Σύμβολο εμπέδησης	14
Εικόνα 1.16:	Σύμβολο διόδου	15
Εικόνα 1.17:	Σύμβολο τρανζίστορ	16
Εικόνα 1.18:	Σύμβολο τελεστικού ενισχυτή	17
Εικόνα 1.19:	Ισοδύναμη αναπαράσταση τελεστικού ενισχυτή	18
Εικόνα 1.20:	Κύκλωμα ιδανικού τελεστικού ενισχυτή με αρνητική ανάδραση	18
Εικόνα 1.21:	Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο του τραπεζίου	21
Εικόνα 1.22:	Γραμμικοποίηση διόδου	23
Εικόνα 1.23:	Διακριτοποίηση πυκνωτή	24
Εικόνα 2.1:	Διαδικασία μοντελοποίησης κυκλωμάτων ήχου	25
Εικόνα 2.2:	Θύρα στο πεδίο Kirchhoff και στο πεδίο κυμάτων	34
Εικόνα 2.3:	Αναπαράσταση WDF αντίστασης	34
Εικόνα 2.4:	Αναπαράσταση WDF πυκνωτή	35
Εικόνα 2.5:	Αναπαράσταση WDF πηνίου	36
Εικόνα 2.6:	Αναπαράσταση WDF ιδανικής πηγής τάσης	36
Εικόνα 2.7:	Αναπαράσταση WDF μη ιδανικής πηγής τάσης	37
Εικόνα 2.8:	Αναπαράσταση WDF ιδανικής πηγής ρεύματος	37
Εικόνα 2.9:	Αναπαράσταση WDF μη ιδανικής πηγής ρεύματος	38
Εικόνα 2.10:	Αναπαράσταση WDF σειριακού προσαρμογέα δύο θυρών	39
Εικόνα 2.11:	Αναπαράσταση WDF παράλληλου προσαρμογέα δύο θυρών	41
Εικόνα 2.12:	Μοντέλο σειράς Volterra	42
Εικόνα 2.13:	Μοντέλο Wiener	43
Εικόνα 2.14:	Μοντέλο Hammerstein	43

Εικόνα 2.15: Μοντέλο Wiener–Hammerstein	43
Εικόνα 2.16: Οπτικοποίηση τεχνητού νευρώνα	44
Εικόνα 2.17: Διαδικασία υπερδעיγματοληψίας	46
Εικόνα 3.1: Το πετάλι παραμόρφωσης <i>BOSS DS-1</i>	48
Εικόνα 3.2: Υποκύκλωμα τροφοδοσίας του <i>BOSS DS-1</i>	49
Εικόνα 3.3: Κυκλωματικά στάδια του <i>BOSS DS-1</i>	49
Εικόνα 3.4: Στάδιο εισόδου του <i>BOSS DS-1</i>	50
Εικόνα 3.5: Στάδιο εξόδου του <i>BOSS DS-1</i>	50
Εικόνα 3.6: Στάδιο προενίσχυσης του <i>BOSS DS-1</i>	51
Εικόνα 3.7: Κύκλωμα αναφοράς του σταδίου προενίσχυσης	52
Εικόνα 3.8: DC κύκλωμα αναφοράς του σταδίου προενίσχυσης	55
Εικόνα 3.9: Στάδιο ενίσχυσης του <i>BOSS DS-1</i>	57
Εικόνα 3.10: Κύκλωμα αναφοράς του σταδίου ενίσχυσης	58
Εικόνα 3.11: Αναδιατεταγμένο κύκλωμα αναφοράς του σταδίου ενίσχυσης	59
Εικόνα 3.12: Υποκύκλωμα <i>A</i> του σταδίου προενίσχυσης	59
Εικόνα 3.13: Υποκύκλωμα <i>A</i> στο πεδίο Kirchhoff	60
Εικόνα 3.14: Υποκύκλωμα <i>A</i> στο πεδίο κυμάτων	60
Εικόνα 3.15: Δέντρο WDF του υποκυκλώματος <i>A</i>	60
Εικόνα 3.16: Υποκύκλωμα <i>B</i> του σταδίου προενίσχυσης	61
Εικόνα 3.17: Υποκύκλωμα <i>B</i> στο πεδίο Kirchhoff	61
Εικόνα 3.18: Υποκύκλωμα <i>B</i> στο πεδίο κυμάτων	61
Εικόνα 3.19: Δέντρο WDF του υποκυκλώματος <i>B</i>	61
Εικόνα 3.20: Στάδιο ψαλιδισμού του <i>BOSS DS-1</i>	62
Εικόνα 3.21: Κύκλωμα αναφοράς του σταδίου ψαλιδισμού	62
Εικόνα 3.22: Θεωρητικό κύκλωμα αναφοράς του σταδίου ψαλιδισμού	63
Εικόνα 3.23: Στάδιο φιλτραρίσματος του <i>BOSS DS-1</i>	66
Εικόνα 3.24: Κύκλωμα αναφοράς του σταδίου φιλτραρίσματος	67
Εικόνα 3.25: Ισοδύναμο κύκλωμα αναφοράς του σταδίου φιλτραρίσματος	67
Εικόνα 4.1: Χρονική απόκριση του σταδίου προενίσχυσης (I)	71
Εικόνα 4.2: Χρονική απόκριση του σταδίου προενίσχυσης (II)	71
Εικόνα 4.3: Απόκριση πλάτους του σταδίου προενίσχυσης (I)	72
Εικόνα 4.4: Απόκριση πλάτους του σταδίου προενίσχυσης (II)	72
Εικόνα 4.5: Απόκριση φάσης του σταδίου προενίσχυσης (I)	73
Εικόνα 4.6: Απόκριση φάσης του σταδίου προενίσχυσης (II)	73
Εικόνα 4.7: Χρονική απόκριση του σταδίου ενίσχυσης (I)	74
Εικόνα 4.8: Χρονική απόκριση του σταδίου ενίσχυσης (II)	74
Εικόνα 4.9: Απόκριση πλάτους του σταδίου ενίσχυσης (I)	75
Εικόνα 4.10: Απόκριση πλάτους του σταδίου ενίσχυσης (II)	75
Εικόνα 4.11: Απόκριση φάσης του σταδίου ενίσχυσης (I)	76
Εικόνα 4.12: Απόκριση φάσης του σταδίου ενίσχυσης (II)	76
Εικόνα 4.13: Χρονική απόκριση του σταδίου ψαλιδισμού (I)	77
Εικόνα 4.14: Χρονική απόκριση του σταδίου ψαλιδισμού (II)	77
Εικόνα 4.15: Απόκριση πλάτους του σταδίου ψαλιδισμού (I)	78
Εικόνα 4.16: Απόκριση πλάτους του σταδίου ψαλιδισμού (II)	78
Εικόνα 4.17: Απόκριση φάσης του σταδίου ψαλιδισμού (I)	79

Εικόνα 4.18: Απόκριση φάσης του σταδίου ψαλιδισμού (II)	79
Εικόνα 4.19: Χρονική απόκριση του σταδίου φιλτραρίσματος (I)	80
Εικόνα 4.20: Χρονική απόκριση του σταδίου φιλτραρίσματος (II)	80
Εικόνα 4.21: Απόκριση πλάτους του σταδίου φιλτραρίσματος (I)	81
Εικόνα 4.22: Απόκριση πλάτους του σταδίου φιλτραρίσματος (II)	81
Εικόνα 4.23: Απόκριση φάσης του σταδίου φιλτραρίσματος (I)	82
Εικόνα 4.24: Απόκριση φάσης του σταδίου φιλτραρίσματος (II)	82
Εικόνα 4.25: Χρονική απόκριση του <i>BOSS DS-1</i> (I)	83
Εικόνα 4.26: Χρονική απόκριση του <i>BOSS DS-1</i> (II)	83
Εικόνα 4.27: Χρονική απόκριση του <i>BOSS DS-1</i> (III)	84
Εικόνα 4.28: Χρονική απόκριση του <i>BOSS DS-1</i> (IV)	84
Εικόνα 4.29: Απόκριση πλάτους του <i>BOSS DS-1</i> (I)	85
Εικόνα 4.30: Απόκριση πλάτους του <i>BOSS DS-1</i> (II)	85
Εικόνα 4.31: Απόκριση πλάτους του <i>BOSS DS-1</i> (III)	86
Εικόνα 4.32: Απόκριση πλάτους του <i>BOSS DS-1</i> (IV)	86
Εικόνα 4.33: Απόκριση φάσης του <i>BOSS DS-1</i> (I)	87
Εικόνα 4.34: Απόκριση φάσης του <i>BOSS DS-1</i> (II)	87
Εικόνα 4.35: Απόκριση φάσης του <i>BOSS DS-1</i> (III)	88
Εικόνα 4.36: Απόκριση φάσης του <i>BOSS DS-1</i> (IV)	88
Εικόνα 4.37: Αποτελέσματα βαθμολόγησης ομοιότητας των δειγμάτων <i>A</i> και <i>B</i>	91
Εικόνα 4.38: Οπτικοποιημένα αποτελέσματα αναγνώρισης του δείγματος <i>X</i> . .	92
Εικόνα 4.39: Οπτικοποιημένα αποτελέσματα προτίμησης δείγματος	93
Εικόνα Π.1: Λογότυπα εργαλείων λογισμικού	105

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 4.1: Ρυθμίσεις ποτενσιομέτρων των ηχητικών δειγμάτων	90
Πίνακας 4.2: Μέσες βαθμολογίες ομοιότητας των δειγμάτων A και B	91
Πίνακας 4.3: Αναλυτικά αποτελέσματα αναγνώρισης του δείγματος X	92
Πίνακας 4.4: Αναλυτικά αποτελέσματα προτίμησης δείγματος	93
Πίνακας Π.1: Βιβλιοθήκες της <i>Python</i>	104

Λίστα Συντομογραφιών

AC	Alternating Current
ANN	Artificial Neural Network
BCT	Binary Connection Tree
BDF2	2nd Order Backward Differentiation Formula
BJT	Bipolar Junction Transistor
CNN	Convolutional Neural Network
DC	Direct Current
DFT	Discrete Fourier Transform
DGM	Discrete Gradient Method
DSP	Digital Signal Processing
DDSP	Differentiable Digital Signal Processing
ESR	Error-to-Signal Ratio
FIR	Finite Impulse Response
FNN	Feedforward Neural Network
IC	Integrated Circuit
IIR	Infinite Impulse Response
KCL	Kirchhoff's Current Law
KVL	Kirchhoff's Voltage Law
LTI	Linear Time-Invariant
LUT	Lookup Table
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MLP	Multilayer Perceptron
MNA	Modified Nodal Analysis
ODE	Ordinary Differential Equation
PHS	Port-Hamiltonian System
RNN	Recurrent Neural Network
SISO	Single-Input Single-Output
SPICE	Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis
SSM	State-Space Model
VAM	Virtual Analog Modeling
WDF	Wave Digital Filter

Εισαγωγή

Ο 20ός αιώνας αποτελεί αδιαμφισβήτητα μια ιστορική περίοδο στην εξέλιξη της ανθρωπότητας, με τη ραγδαία επιστημονική πρόοδο να αντικατοπτρίζεται, μεταξύ άλλων, και στην άνθηση της μουσικής τεχνολογίας. Η εφεύρεση της λυχνίας κενού, του πρώτου ενεργού ηλεκτρονικού εξαρτήματος, αποτέλεσε ορόσημο για την εμφάνιση των πρώτων μουσικών οργάνων των οποίων η λειτουργία βασίζεται στην ενίσχυση ηλεκτρικών σημάτων, όπως το synthesizer και η ηλεκτρική κιθάρα.

Οι ενισχυτές ηλεκτρικής κιθάρας, αποτελούμενοι από το ηλεκτρονικό κύκλωμα του ενισχυτή και από ένα ή περισσότερα ηχεία, είχαν αρχικά ως σκοπό την καθαρή ενίσχυση του ηλεκτρικού σήματος που παράγουν οι μαγνήτες της κιθάρας λόγω των ταλαντώσεων των μεταλλικών χορδών της, χωρίς την αλλοίωση των ηχητικών χαρακτηριστικών του. Ωστόσο, διαπιστώθηκε πως οι λυχνίες κενού προκαλούν μια αρμονική παραμόρφωση σε ένα ηλεκτρικό σήμα όταν αυτό ξεπερνάει τα όρια γραμμικής λειτουργίας τους, οδηγώντας έτσι σε έναν κορεσμένο ήχο, ο οποίος μπορεί να χαρακτηριστεί ως *ζεστός* και *γεμάτος*. Παράλληλα, ανακαλύφθηκε κατά λάθος ότι ένα παρόμοιο ηχόχρωμα μπορεί να επιτευχθεί και ως αποτέλεσμα χρήσης χαλασμένου εξοπλισμού, ωθώντας έτσι τους μουσικούς να προκαλούν σκόπιμα ζημιές στα ηχεία των ενισχυτών τους προκειμένου να παραμορφώσουν τον ήχο τους.

Η μουσική τεχνολογία πέρασε σε μια νέα εποχή όταν εφευρέθηκαν τα ηλεκτρονικά εξαρτήματα ημιαγωγών στερεάς κατάστασης, διευρύνοντας εξαιρετικά τις δυνατότητες των κυκλωμάτων επεξεργασίας ήχου και καθιστώντας τα πιο αξιόπιστα και προσβάσιμα, χάρη στην προηγμένη τεχνολογία, το μικρό μέγεθος και το χαμηλό κόστος τους. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, πέρα από νέα μοντέλα ενισχυτών, να κατασκευαστούν και τα πρώτα *πετάθια* κιθάρας, δηλαδή μικρά κουτιά αποτελούμενα από ηλεκτρονικά κυκλώματα σχεδιασμένα ώστε να επεξεργάζονται τα ηλεκτρικά σήματα της κιθάρας, προσδίδοντας ένα ξεχωριστό μουσικό εφέ στον ήχο τους. Έτσι, με τα χρόνια προέκυψαν αρκετές διαφορετικές κατηγορίες και τύποι πεταλιών κιθάρας, όπως: παραμόρφωσης (π.χ. *overdrive*, *distortion*, *fuzz*), διαμόρφωσης (π.χ. *chorus*, *phaser*, *flanger*), χρονοκαθυστέρησης (π.χ. *delay*, *echo*, *reverb*) κ.ά.

Η ριζικότερη αλλαγή ήρθε με τη σταδιακή μετάβαση της μουσικής βιομηχανίας από τα αναλογικά στα ψηφιακά μέσα, αντικαθιστώντας τον εύθραυστο, ογκώδη και ακριβό αναλογικό εξοπλισμό με ψηφιακές υλοποιήσεις αντίστοιχης λειτουργίας. Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις, τα αισθητικά αποτελέσματα ενός καθαρά ψηφιακού μηχανισμού είναι πιθανό να κριθούν εμφανώς διαφορετικά, αν όχι υποδεέστερα, από αυτά που μπορεί να προσφέρει ένα τυπικό αναλογικό ηλεκτρονικό κύκλωμα.

Αυτό είναι κάτι που γίνεται ιδιαίτερα αντιληπτό όταν το ζητούμενο είναι η παραμόρφωση του σήματος μιας ηλεκτρικής κιθάρας, δεδομένης άλλωστε και της πληθώρας ενισχυτών και πεταλιών που έχουν μείνει στην ιστορία λόγω των μοναδικών ηχητικών χαρακτηριστικών τους. Έτσι, από την ανάγκη για πιστή μεταφορά της αναλογικής ποιότητας στον ψηφιακό κόσμο αναδύθηκε το διεπιστημονικό πεδίο της *Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης* (*Virtual Analog Modeling* | **VAM**), δηλαδή της ψηφιακής προσομοίωσης κυκλωμάτων επεξεργασίας ήχου με στόχο τη διατήρηση των ηχητικών χαρακτηριστικών τους, σε συνδυασμό με χαμηλό υπολογιστικό κόστος και αποτύπωμα μνήμης για χρήση σε πραγματικό χρόνο.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται ακριβώς σε αυτό το αντικείμενο και έχει ως σκοπό την εκπόνηση μιας συγκεντρωτικής και εμπεριστατωμένης μελέτης, καλύπτοντας σε θεωρητικό επίπεδο το σύνολο των προσεγγίσεων που εντοπίζονται στη σχετική βιβλιογραφία και εφαρμόζοντας στην πράξη κάποιες από τις προτεινόμενες τεχνικές. Η διάρθρωση των κεφαλαίων που ακολουθούν έχει διαμορφωθεί ως εξής:

- Στο Κεφάλαιο 1 καλύπτεται το αναγκαίο θεωρητικό υπόβαθρο για την πλήρη κατανόηση της παρούσας μελέτης. Αυτό περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία σημάτων και συστημάτων, καθώς επίσης και μια αναλυτική παρουσίαση των βασικών στοιχείων των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.
- Στο Κεφάλαιο 2 παρατίθεται η βιβλιογραφική επισκόπηση γύρω από το ερευνητικό πεδίο της Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης, δίνοντας έμφαση στα κυκλώματα παραμόρφωσης ήχου και αναλύοντας λεπτομερώς τις κυριότερες τεχνικές που πρόκειται να εφαρμοστούν στη συνέχεια της εργασίας.
- Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η μεθοδολογία υλοποίησης μιας προσομοίωσης του δημοφιλούς πεταλιού παραμόρφωσης *BOSS DS-1*⁰. Πιο συγκεκριμένα, το κύκλωμα του πεταλιού αναλύεται και διαχωρίζεται σε διακριτά στάδια που υλοποιούνται απομονωμένα μέσω διαφορετικών τεχνικών μοντελοποίησης.
- Στο Κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται η αξιολόγηση της προσομοίωσης που υλοποιήθηκε, αφενός συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε σχέση με τα αναμενόμενα και αφετέρου αναλύοντας στατιστικά τις υποκειμενικές απαντήσεις που δόθηκαν κατά τη διεξαγωγή μιας σχετικής έρευνας.
- Στο Κεφάλαιο 5 καταγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εκπόνηση και τα αποτελέσματα της εργασίας, προτείνοντας κάποιες μελλοντικές επεκτάσεις με στόχο τη βελτίωση της ακρίβειας και της απόδοσης της υλοποιημένης προσομοίωσης.

Τέλος, στην ενότητα Βιβλιογραφικές Αναφορές συγκεντρώνονται όλες οι παραπομπές σε πηγές που αξιοποιήθηκαν κατά τη συγγραφή του παρόντος κειμένου, ενώ στο Παράρτημα παρατίθεται ο κώδικας που αναπτύχθηκε και παρουσιάζονται συνοπτικά τα εργαλεία λογισμικού που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εκπόνηση της εργασίας.

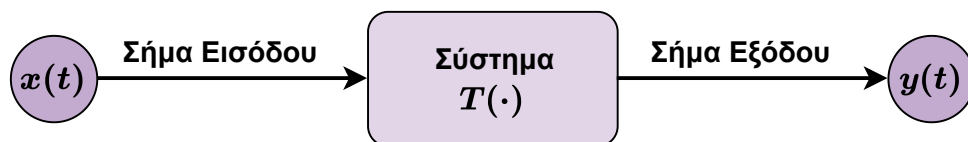
⁰*BOSS DS-1*: <https://www.boss.info/products/ds-1>

Κεφάλαιο 1

Θεωρητικό Υπόβαθρο

1.1 Σήματα και Συστήματα

Η *Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων* αποτελεί ένα θεμελιώδες μαθηματικό εργαλείο με θεωρητικές και πρακτικές εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία [1]–[3]. Ως *σήμα* ορίζεται κάθε συνάρτηση που φέρει πληροφορία για τη μεταβολή κάποιου μεγέθους, συνήθως ως προς τον χρόνο ή/και ως προς τον χώρο. Από την άλλη μεριά, ως *σύστημα* ορίζεται μια οντότητα η οποία τροποποιεί ένα σήμα, μετατρέποντας το σε ένα άλλο. Το σήμα εισόδου μπορεί να χαρακτηριστεί ως το αίτιο και το σήμα εξόδου ως το αποτέλεσμα της διέγερσης ενός συστήματος, ενώ στη γενική περίπτωση ο αριθμός των εισόδων και των εξόδων σε ένα σύστημα μπορεί να είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Η διαδικασία μετασχηματισμού ενός μονοδιάστατου χρονικά μεταβαλλόμενου σήματος από ένα σύστημα *Μονής Εισόδου-Μονής Εξόδου* (*Single-Input Single-Output* | **SISO**) απεικονίζεται στην Εικόνα 1.1:



Εικόνα 1.1: Μετασχηματισμός σήματος από σύστημα

Ως ένα πραγματικό παράδειγμα, το σήμα που λαμβάνεται από την υποδοχή εξόδου της ηλεκτρικής κιθάρας περιγράφει τη χρονική μεταβολή της διαφοράς δυναμικού που αναπτύσσεται στα άκρα των μαγνητών της, λόγω ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων που εμφανίζονται κατά την ταλάντωση των χορδών της, ενώ το ηλεκτρονικό κύκλωμα ενός πεταλιού ή ενισχυτή αποτελεί το σύστημα το οποίο επεξεργάζεται αυτό το σήμα.

Η σχέση ανάμεσα στα σήματα εισόδου $x(t)$ και εξόδου $y(t)$, όπως απεικονίζονται στην Εικόνα 1.1, μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά μέσω του τελεστή $T(\cdot)$ που περιγράφει τη λειτουργία ενός συστήματος, σύμφωνα με την Εξίσωση 1.1:

$$y(t) = T[x(t)] \quad (1.1)$$

Δύο από τις πιο σημαντικές ιδιότητες που μπορούν να χαρακτηρίσουν ένα σύστημα αυτής της μορφής αποτελούν η *γραμμικότητα* και η *χρονική αμεταβλητότητα*.

Αφενός, ένα σύστημα λέγεται *γραμμικό* όταν ακολουθεί την *αρχή της επαλληλίας*, η οποία διατυπώνεται από την Εξίσωση 1.2. Αφετέρου, ένα σύστημα αποκαλείται *χρονικά αμετάβλητο* όταν μια χρονική μετατόπιση στην είσοδο του συνεπάγεται μια αντίστοιχη χρονική μετατόπιση στην έξοδο, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.3. Ένα σύστημα που ικανοποιεί ταυτόχρονα αυτές τις δύο συνθήκες ονομάζεται *Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο (Linear Time-Invariant | LTI)*.

$$T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha T[x_1(t)] + \beta T[x_2(t)] \quad (1.2)$$

$$y(t - t_0) = T[x(t - t_0)] \quad (1.3)$$

Επιπρόσθετα, ένα σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί από τις ιδιότητες της *στατικότητας* και της *αιτιατότητας*. Έτσι, ένα σύστημα λέγεται *στατικό* (χωρίς μνήμη) αν για κάθε χρονική στιγμή t η τιμή του σήματος εξόδου $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την τιμή του σήματος εισόδου $x(t)$ την ίδια χρονική στιγμή, σε διαφορετική περίπτωση λέγεται *δυναμικό* (με μνήμη). Αντίστοιχα, ένα σύστημα ονομάζεται *αιτιατό* αν για κάθε χρονική στιγμή t η τιμή της εξόδου εξαρτάται μόνο από την παρούσα και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου και όχι από τις μελλοντικές. Η αιτιατότητα ενός συστήματος συνεπάγεται ότι για ένα αιτιατό σήμα εισόδου ($x(t) = 0$ για $t < 0$) το αντίστοιχο σήμα εξόδου θα είναι επίσης αιτιατό ($y(t) = 0$ για $t < 0$). Στη συνέχεια αυτής της μελέτης όλα τα συστήματα θα θεωρούνται πραγματικά και αιτιατά και με μηδενικές αρχικές συνθήκες, εκτός αν δίνεται διαφορετική υπόδειξη.

1.1.1 Κρουστική Απόκριση

Τα συστήματα LTI αποτελούν μια πολύ σημαντική κατηγορία συστημάτων, καθώς διακρίνονται από τη μοναδική ιδιότητα τους να μπορούν να περιγραφούν πλήρως από την *κρουστική απόκριση* τους. Αυτό σημαίνει πως άμα η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός συστήματος είναι γνωστή, τότε για κάθε είσοδο $x(t)$ η έξοδος $y(t)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω της συνέλιξης που διατυπώνεται από την Εξίσωση 1.4:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (1.4)$$

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ αποτελεί μια συνάρτηση η οποία μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά και ταυτίζεται με την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο του εφαρμοστεί η *κρουστική συνάρτηση* $\delta(t)$, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.5:

$$h(t) = T[\delta(t)] \quad (1.5)$$

Η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ ή αλλιώς *συνάρτηση δέλτα* αποτελεί μια γενικευμένη συνάρτηση η οποία μπορεί να περιγραφεί συμβατικά από τις Εξισώσεις 1.6 και 1.7:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.7)$$

1.1.2 Συχνотική Απόκριση

Η *συχνотική απόκριση* ενός συστήματος αποτελεί μια βασική αναπαράσταση που περιγράφει πως το σύστημα ανταποκρίνεται σε ημιτονοειδή σήματα εισόδου διαφορετικής συχνότητας. Πιο συγκεκριμένα, η συχνотική απόκριση αποτελεί μια μιγαδική συνάρτηση στο πεδίο της συχνότητας, το μέτρο της οποίας αντιστοιχεί στην κλιμάκωση πλάτους, ενώ η γωνία στη μετατόπιση φάσης του σήματος εισόδου. Για ένα σύστημα LTI, η συχνотική απόκριση $H(\omega)$ μπορεί να υπολογιστεί απευθείας μέσω της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ εφαρμόζοντας τον *μετασχηματισμό Fourier*, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.8:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.8)$$

Εναλλακτικά, λαμβάνοντας υπόψιν την Εξίσωση 1.4 και το *θεώρημα της συνέλιξης*, το οποίο ορίζει ότι η συνέλιξη δύο συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας, η συχνотική απόκριση $H(\omega)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον λόγο του μετασχηματισμού Fourier της εξόδου $Y(\omega)$ ως προς το μετασχηματισμό Fourier της εισόδου $X(\omega)$, σύμφωνα με την Εξίσωση 1.9:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (1.9)$$

1.1.3 Συνάρτηση Μεταφοράς

Μια πιο γενικευμένη και ακόμα πιο σημαντική αναπαράσταση ενός συστήματος από τη συχνотική απόκριση αποτελεί η *συνάρτηση μεταφοράς*. Πρόκειται επίσης για μια μιγαδική συνάρτηση, η οποία όμως περιγράφει πλήρως όλες τις δυναμικές του συστήματος, συμπεριλαμβάνοντας τη *μεταβατική απόκριση*, τη *μόνιμη απόκριση* και την *ευστάθεια*. Για ένα σύστημα LTI, η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ μπορεί να υπολογιστεί απευθείας μέσω της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ εφαρμόζοντας τον *μετασχηματισμό Laplace*, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.10:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad \text{όπου} \quad s = \sigma + j\omega \quad (1.10)$$

Παρόμοια με τη συχνотική απόκριση και την Εξίσωση 1.9, η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος μπορεί να υπολογιστεί από τον λόγο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου $Y(s)$ ως προς το μετασχηματισμό Laplace της εισόδου $X(s)$, σύμφωνα με την Εξίσωση 1.11:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (1.11)$$

Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς πως θέτοντας $\sigma = 0$ και διατυπώνοντας ρητά ότι $H(j\omega) \triangleq H(\omega)$ η Εξίσωση 1.10 ανάγεται στην Εξίσωση 1.8, γεγονός που αποδεικνύει ότι η συνάρτηση μεταφοράς περιέχει όλη την πληροφορία της συχνотικής απόκρισης, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.12:

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} \quad (1.12)$$

1.1.4 Δειγματοληψία

Μέχρι στιγμής, η θεωρία που έχει καλυφθεί αφορά σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου, τα οποία ανήκουν στον αναλογικό κόσμο. Η μετάβαση στον ψηφιακό κόσμο, δηλαδή σε σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου, ξεκινάει από μια διαδικασία που ονομάζεται *δειγματοληψία* και αποτελεί μια θεμελιώδη έννοια στο αντικείμενο της *Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος (Digital Signal Processing | DSP)* [4], [5]. Αυτή η διαδικασία αφορά τη λήψη δειγμάτων ενός συνεχούς σήματος $x(t)$ με *περίοδο δειγματοληψίας* T_s ή αντίστροφα με *συχνότητα δειγματοληψίας* f_s για τη δημιουργία ενός διακριτού σήματος $x[n]$, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.13:

$$x[n] = x(nT_s), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.13)$$

Ένα από τα σημαντικότερα σημεία στη μελέτη των διακριτών σημάτων και συστημάτων αποτελεί το *θεώρημα δειγματοληψίας*. Το θεώρημα αυτό ορίζει ότι ένα συνεχές σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί και να ανακατασκευαστεί ακριβώς από τα δείγματα του αντίστοιχου διακριτού σήματος $x[n]$, αν και μόνο αν η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι τουλάχιστον διπλάσια από τη μέγιστη συχνότητα f_{max} που περιέχεται στο συνεχές σήμα, δηλαδή αν $f_s \geq 2f_{max}$, όπου η οριακή συχνότητα $f_s/2$ είναι γνωστή ως *συχνότητα Nyquist*. Πρακτικά, αυτό σημαίνει πως αν ένα διακριτό σύστημα εισάγει υψηλότερες συχνότητες σε ένα δειγματοληπτημένο σήμα, όπως συμβαίνει συνήθως στην περίπτωση των μη γραμμικών συστημάτων, υπάρχει μεγάλη περίπτωση να παρουσιαστεί το φαινόμενο της *αναδίπλωσης*, κατά το οποίο όλες οι συχνότητες που ξεπερνούν τη συχνότητα Nyquist καθρεπτίζονται γύρω από αυτή, αλλοιώνοντας έτσι το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος.

Τα διακριτά σήματα και συστήματα ακολουθούν κατά αντίστοιχο τρόπο σε μεγάλο βαθμό όλη τη θεωρία που έχει παρουσιαστεί μέχρι στιγμής και καλύπτει τα συνεχή σήματα και συστήματα, παρουσιάζοντας όμως κάποιες σημαντικές διαφορές. Αρχικά, αντί για το μετασχηματισμό Laplace, εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Z , όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.14:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad \text{όπου} \quad z = e^{sT_s} \quad (1.14)$$

Επιπλέον, αντί για το μετασχηματισμό Fourier, στην πράξη χρησιμοποιείται ο *Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform | DFT)*, ο οποίος ορίζεται για πεπερασμένα σήματα μήκους N , σύμφωνα με την Εξίσωση 1.15:

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.15)$$

Παραπάνω, η ακολουθία $H[k]$ είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα των συχνοτήτων, με τον δείκτη k να αντιστοιχίζεται στη συχνότητα $f_k \leq f_s/2$, βάσει της Εξίσωσης 1.16:

$$f_k = \frac{k}{N} f_s, \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \quad (1.16)$$

Τέλος, η συνάρτηση δέλτα ορίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση 1.17:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

1.2 Ηλεκτρονικά Κυκλώματα

Τα ηλεκτρονικά κυκλώματα συνιστούν φυσικές διατάξεις οι οποίες αποτελούνται από ένα σύνολο πηγών ισχύος, παθητικών και ενεργών ηλεκτρονικών στοιχείων, με κύριο στόχο τη διαχείριση, επεξεργασία και μετάδοση ενέργειας και πληροφορίας [6]–[10].

1.2.1 Φορτίο, Τάση, Ρεύμα και Ισχύς

Οι τρεις πιο θεμελιώδεις έννοιες που απαντώνται στη θεωρία του ηλεκτρισμού είναι το *φορτίο*, η *τάση* και το *ρεύμα*. Το ηλεκτρικό φορτίο αποτελεί μια χαρακτηριστική ιδιότητα ορισμένων υποατομικών σωματιδίων, όπως τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια, η οποία καθορίζει τον τρόπο που αυτά αλληλεπιδρούν με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το ηλεκτρικό φορτίο συμβολίζεται με q ή Q και μονάδα μέτρησης του αποτελεί το *coulomb* (C), όπου 1C αντιστοιχεί στο φορτίο περίπου 6.242×10^{18} ηλεκτρονίων. Ως ηλεκτρική τάση ορίζεται η διαφορά του ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα σε δύο σημεία ενός ηλεκτρικού πεδίου, η οποία ισοδυναμεί με το έργο w που απαιτείται για τη μετακίνηση μιας μονάδας ηλεκτρικού φορτίου από το ένα σημείο στο άλλο. Η ηλεκτρική τάση συμβολίζεται με v ή V , μονάδα μέτρησης της αποτελεί το *volt* (V) και εκφράζεται από την Εξίσωση 1.18:

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (1.18)$$

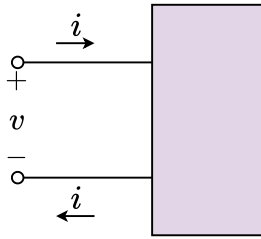
Ως ηλεκτρικό ρεύμα ορίζεται η ροή ηλεκτρικού φορτίου ανά μονάδα χρόνου μέσα σε έναν αγωγό, η οποία οφείλεται στην προσανατολισμένη κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων του ως αποτέλεσμα της εφαρμογής ηλεκτρικής τάσης στα άκρα του. Το ηλεκτρικό ρεύμα συμβολίζεται με i ή I , έχει ως μονάδα μέτρησης το *ampere* (A) και περιγράφεται από την Εξίσωση 1.19:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.19)$$

Μια πιο ευρεία και γενική έννοια η οποία βρίσκει σημαντική εφαρμογή στα ηλεκτρονικά κυκλώματα είναι αυτή της *ισχύος*. Ως ηλεκτρική ισχύς ορίζεται ο ρυθμός με τον οποίο ένα κυκλωματικό στοιχείο απορροφάει ή προσφέρει ενέργεια και είναι ανάλογη τόσο της τάσης στα άκρα του όσο και του ρεύματος που το διαρρέει. Η ηλεκτρική ισχύς συμβολίζεται με p ή P , μονάδα μέτρησης της είναι το *watt* (W) και διατυπώνεται από την Εξίσωση 1.20:

$$p = vi \quad (1.20)$$

Στην Εικόνα 1.2 απεικονίζεται μια αόριστη διάταξη με δύο ακροδέκτες, η οποία ονομάζεται *θύρα*, όπου η πολικότητα της τάσης έχει σημειωθεί αυθαίρετα ενώ η φορά του ρεύματος έτσι ώστε να εισέρχεται από τον θετικό ακροδέκτη. Η σύμβαση που ακολουθείται ορίζει πως αν η ισχύς που διαχειρίζεται μια τέτοια διάταξη είναι θετική, τότε αυτή απορροφάει ενέργεια, ενώ αν είναι αρνητική, τότε προσφέρει ενέργεια. Γενικότερα, αν κατά την ανάλυση ενός κυκλώματος προκύψει κάποια τιμή τάσης ή ρεύματος με αρνητικό πρόσημο, τότε ουσιαστικά ο πραγματικός προσανατολισμός αυτού του μεγέθους είναι αντίστροφος από αυτόν που είχε θεωρηθεί αρχικά.



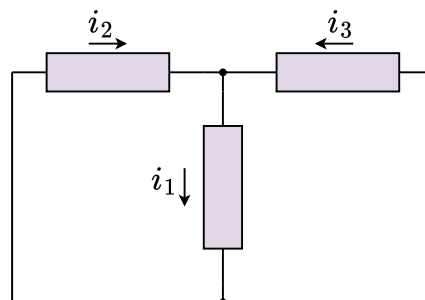
Εικόνα 1.2: Διάταξη σύμβασης προσήμου ισχύος

1.2.2 Νόμοι του Kirchhoff

Η διάταξη ενός ηλεκτρικού δικτύου υλοποιείται από κυκλωματικά στοιχεία τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σε σημεία που ονομάζονται *κόμβοι* και σχηματίζουν κλειστές διαδρομές για τη ροή του ρεύματος που ονομάζονται *βρόχοι*. Δύο θεμελιώδεις κανόνες της κυκλωματικής θεωρίας που εφαρμόζονται στους κόμβους και τους βρόχους ενός δικτύου είναι ο *Νόμος Ρευμάτων του Kirchhoff* (Kirchhoff's Current Law | **KCL**) και ο *Νόμος Τάσεων του Kirchhoff* (Kirchhoff's Voltage Law | **KVL**). Πιο συγκεκριμένα, ο KCL ορίζει ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται σε έναν κόμβο είναι ίσο με το μηδέν, όπως διατυπώνει η Εξίσωση 1.21:

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (1.21)$$

Εναλλακτικά, το άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται σε έναν κόμβο είναι ίσο με το άθροισμα των ρευμάτων που εξέρχονται από αυτόν. Για παράδειγμα, από την εφαρμογή του KCL στο κύκλωμα της Εικόνας 1.3 προκύπτει ότι $i_1 = i_2 + i_3$.

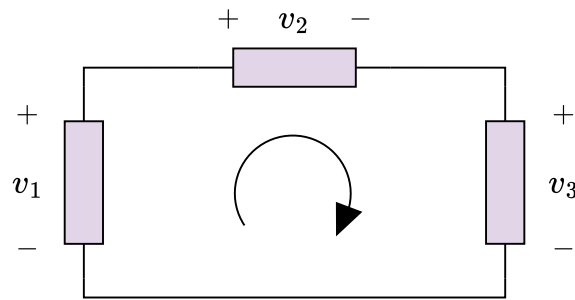


Εικόνα 1.3: Κύκλωμα εφαρμογής του KCL

Από την άλλη μεριά, ο KVL ορίζει ότι το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων κατά μήκος ενός βρόχου είναι ίσο με το μηδέν, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.22:

$$\sum_{n=1}^N v_n = 0 \quad (1.22)$$

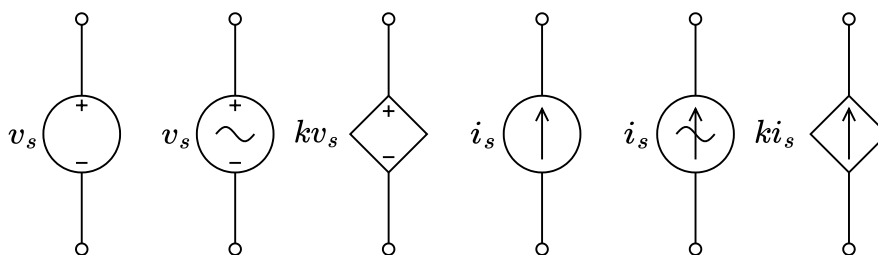
Εναλλακτικά, το άθροισμα των αυξήσεων τάσης κατά μήκος ενός βρόχου είναι ίσο με το άθροισμα των πτώσεων τάσης κατά μήκος αυτού. Για παράδειγμα, από την εφαρμογή του KVL στο κύκλωμα της Εικόνας 1.4 προκύπτει ότι $v_1 = v_2 + v_3$.



Εικόνα 1.4: Κύκλωμα εφαρμογής του KVL

1.2.3 Πηγές Τάσης και Ρεύματος

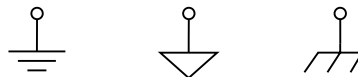
Οι πηγές ισχύος που μπορούν να τροφοδοτήσουν ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα διακρίνονται σε *πηγές τάσης* και σε *πηγές ρεύματος*. Πρακτικά, οι πηγές τάσης και ρεύματος μοντελοποιούν εξωτερικές διαδικασίες και διατάξεις οι οποίες μετατρέπουν κάποια μορφή ενέργειας σε ηλεκτρική ενέργεια, όπως μια μπαταρία ή μια γεννήτρια. Ακόμα, μπορούν να μοντελοποιήσουν κυκλώματα τα οποία είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να παρέχουν κάποια συγκεκριμένη τάση ή ρεύμα στην έξοδο τους, όπως ένα τροφοδοτικό. Ανάλογα με το αν η τάση ή το ρεύμα εξόδου μιας πηγής μεταβάλλεται με το χρόνο ή όχι, η πηγή αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως πηγή *Εναλλασσόμενου Ρεύματος* (*Alternating Current* | **AC**) ή *Συνεχούς Ρεύματος* (*Direct Current* | **DC**). Ένας άλλος διαχωρισμός που γίνεται αφορά αν μια τέτοια πηγή είναι *ανεξάρτητη* ή *εξαρτημένη*. Μια ανεξάρτητη πηγή δεν επηρεάζεται από τάσεις ή ρεύματα που παρουσιάζονται στο υπόλοιπο κύκλωμα, ενώ αντιθέτως, η τιμή μιας εξαρτημένης πηγής ελέγχεται άμεσα από άλλες τάσεις ή ρεύματα, συνήθως μέσω μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Οι εξαρτημένες πηγές αποτελούν θεωρητικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση ορισμένων πολύπλοκων στοιχείων, διευκολύνοντας έτσι τη διαδικασία της κυκλωματικής ανάλυσης. Στην Εικόνα 1.5 απεικονίζονται ορισμένα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για τις ανεξάρτητες και τις εξαρτημένες AC/DC πηγές τάσης και ρεύματος.



Εικόνα 1.5: Σύμβολα πηγών τάσης και ρεύματος

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι πηγές που έχουν παρουσιαστεί μέχρι στιγμής θεωρούνται *ιδανικές*. Μια ιδανική πηγή τάσης ή ρεύματος μπορεί να αναπτύξει αντίστοιχα όσο ρεύμα ή τάση χρειάζεται για να τροφοδοτήσει ένα κύκλωμα χωρίς να επηρεάζεται η τιμή της εξόδου της. Ωστόσο, πρακτικά υπάρχουν περιορισμοί και φαινόμενα που υποβαθμίζουν την έξοδο της πηγής και θα μελετηθούν στη συνέχεια.

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να γίνει μια ειδική αναφορά στην έννοια της *γείωσης*. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ηλεκτρική τάση ορίζεται ως η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο σημεία, δηλαδή $v_{AB} = v_A - v_B$. Επομένως, είναι ιδιαίτερα σημαντικό κατά την ανάλυση ενός ηλεκτρονικού κυκλώματος να υπάρχει ένα σημείο αναφοράς ως προς το οποίο να υπολογίζεται το δυναμικό σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του κυκλώματος. Έτσι, για παράδειγμα, σε ένα κύκλωμα που τροφοδοτείται από μια μπαταρία 9V, ο αρνητικός πόλος της μπαταρίας μπορεί να οριστεί ως αυτό το σημείο αναφοράς, το οποίο αποκαλείται γείωση και αντιστοιχεί σε σταθερό δυναμικό 0V. Στην Εικόνα 1.6 απεικονίζονται ορισμένα καθιερωμένα σύμβολα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν τη γείωση.



Εικόνα 1.6: Σύμβολα γείωσης

1.2.4 Η Αντίσταση

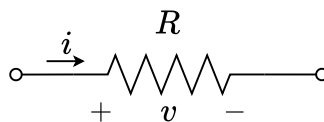
Η *αντίσταση* αποτελεί ένα από τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα εξαρτήματα στα ηλεκτρονικά κυκλώματα. Πρόκειται για ένα παθητικό στοιχείο, το οποίο περιορίζει τη ροή του ρεύματος και ελέγχει την τάση που εμφανίζεται στα διάφορα σημεία ενός κυκλώματος. Το μέγεθος της αντίστασης συμβολίζεται με R και έχει μονάδα μέτρησης το *ohm* (Ω), ενώ η σχέση ανάμεσα στο ρεύμα που τη διαρρέει και την τάση στα άκρα της περιγράφεται από την Εξίσωση 1.23:

$$v = iR \quad \text{ή} \quad i = \frac{v}{R} \quad (1.23)$$

Η παραπάνω γραμμική σχέση είναι γνωστή ως ο *νόμος του Ohm*. Έτσι, η λεγόμενη *ωμική* αντίσταση αποτελεί ένα στοιχείο το οποίο απορροφάει ισχύ μετατρέποντας τη σε θερμική ενέργεια, σύμφωνα με την Εξίσωση 1.24:

$$p = i^2 R \quad \text{ή} \quad p = \frac{v^2}{R} \quad (1.24)$$

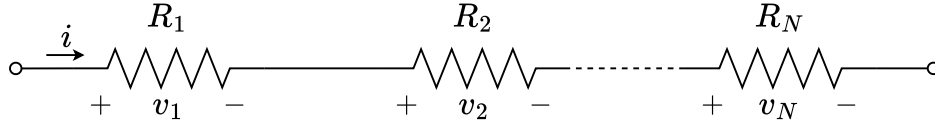
Ένα από τα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση μιας αντίστασης απεικονίζεται στην Εικόνα 1.7, όπου η πολικότητα της τάσης και η φορά του ρεύματος έχουν σημειωθεί σύμφωνα με τη σύμβαση προσήμου ισχύος.



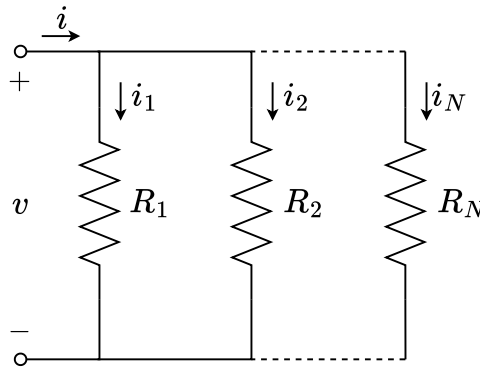
Εικόνα 1.7: Σύμβολο αντίστασης

Σε θεωρητικό επίπεδο, μια μηδενική αντίσταση ($R = 0$) παρουσιάζει μηδενική πτώση τάσης στα άκρα της και αντιστοιχεί σε ένα *βραχυκύκλωμα*, ενώ μια άπειρη αντίσταση ($R = \infty$) διαρρέεται από μηδενικό ρεύμα και αντιστοιχεί σε ένα *ανοιχτόκύκλωμα*.

Οι δύο συνηθέστεροι τρόποι με τους οποίους μπορούν να συνδεθούν δύο ή περισσότερες αντιστάσεις μεταξύ τους είναι οι συνδεσμολογίες σε *σειρά* και *παράλληλα*, οι οποίες απεικονίζονται αντίστοιχα στις Εικόνες 1.8 και 1.9:



Εικόνα 1.8: Συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά



Εικόνα 1.9: Συνδεσμολογία αντιστάσεων παράλληλα

Από τη μία μεριά, μια συνδεσμολογία N αντιστάσεων σε σειρά, όπως αυτή της Εικόνας 1.7, αντιστοιχεί σε μια συνολική ισοδύναμη αντίσταση R , η τιμή της οποίας υπολογίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση 1.25:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \quad (1.25)$$

Από την άλλη μεριά, μια συνδεσμολογία N αντιστάσεων παράλληλα, όπως αυτή της Εικόνας 1.8, αντιστοιχεί σε μια συνολική ισοδύναμη αντίσταση R , η τιμή της οποίας υπολογίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση 1.26:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \quad (1.26)$$

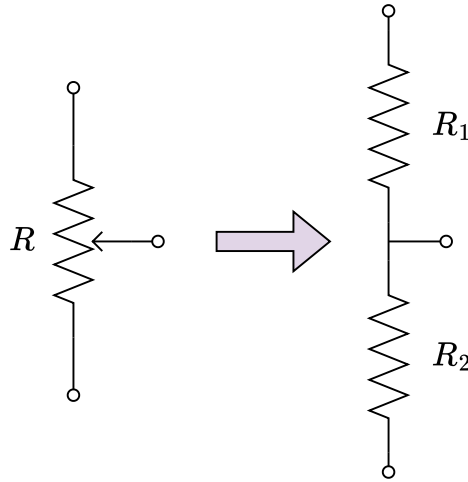
Αρκετές φορές, λόγω της συχνής παρουσίας κλασμάτων στις μαθηματικές σχέσεις στις οποίες συμμετέχουν όροι αντιστάσεων, είναι χρήσιμο στην ανάλυση ενός κυκλώματος μια αντίσταση να αναπαρίσταται από το αντίστροφο μέγεθος της, το οποίο ονομάζεται *αγωγιμότητα*. Το μέγεθος της αγωγιμότητας συμβολίζεται με G , έχει μονάδα μέτρησης το *siemens* (S) και δίνεται από την Εξίσωση 1.27:

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.27)$$

Έτσι, για παράδειγμα, η Εξίσωση 1.26 μπορεί να εκφραστεί πιο απλά μέσω της Εξίσωσης 1.28:

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_N \quad (1.28)$$

Ένα άλλο εξάρτημα το οποίο σχετίζεται άμεσα με την ωμική αντίσταση είναι το *ποτενσιόμετρο*, το οποίο αποτελείται από τρεις ακροδέκτες και πρόκειται για ένα είδος μεταβλητής αντίστασης. Συγκεκριμένα, το ποτενσιόμετρο διαθέτει έναν δρομέα, η θέση του οποίου αλλάζει χειροκίνητα και καθορίζει το ποσοστό της ονομαστικής αντίστασης R που κατανέμεται σε δύο επί μέρους εσωτερικές αντιστάσεις R_1 και R_2 . Η Εικόνα 1.10 παρουσιάζει ένα από τα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση ενός ποτενσιομέτρου, καθώς και μια ισοδύναμη αναπαράσταση.



Εικόνα 1.10: Σύμβολο και ισοδύναμη αναπαράσταση ποτενσιομέτρου

Σε ένα ποτενσιόμετρο που έχει κατασκευαστεί ώστε η μεταβολή της αντίστασης να είναι γραμμική, οι τιμές των δύο επί μέρους αντιστάσεων μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσει της θέσης του δρομέα $x \in [0, 1]$, μέσω των Εξισώσεων 1.29 και 1.30:

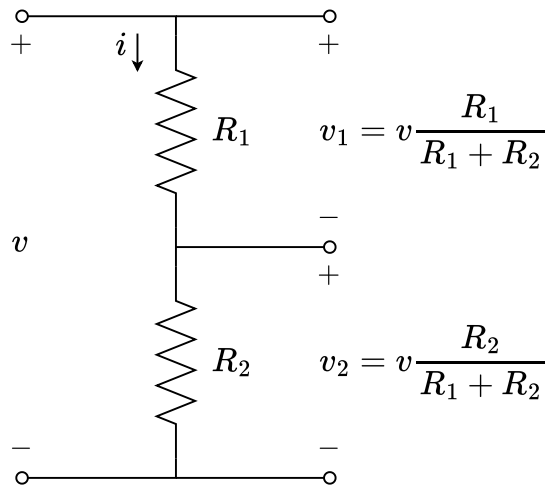
$$R_1 = (1 - x) R \quad (1.29)$$

$$R_2 = x R \quad (1.30)$$

Τα ποτενσιόμετρα αποτελούν πρακτικά μια ρυθμιζόμενη υλοποίηση μιας διάταξης που αποκαλείται *διαιρέτης τάσης*. Το κύκλωμα ενός διαιρέτη τάσης αποτελείται από δύο ή περισσότερες αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά, πάνω στις οποίες κατανέμεται κατά τρόπο ανάλογο προς τις τιμές τους η συνολική τάση που εφαρμόζεται στα άκρα της συνδεσμολογίας. Με τον τρόπο αυτό δίνεται η δυνατότητα ορισμού συγκεκριμένης τάσης σε διάφορα σημεία ενός κυκλώματος. Στη γενική περίπτωση ενός διαιρέτη τάσης αποτελούμενου από N αντιστάσεις, η πτώση τάσης v_n πάνω στην αντίσταση R_n συναρτήσει της τάσης v που εφαρμόζεται στα άκρα της διάταξης υπολογίζεται μέσω της Εξίσωσης 1.31:

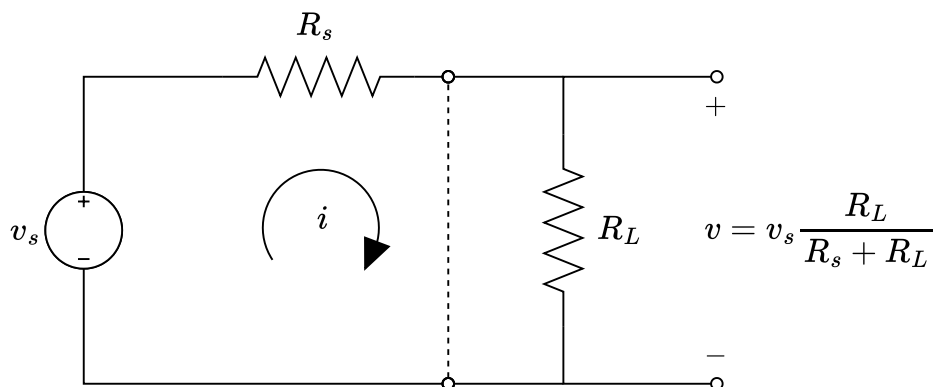
$$v_n = v \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} \quad (1.31)$$

Στην Εικόνα 1.11 απεικονίζεται το παράδειγμα ενός διαιρέτη τάσης που αποτελείται από δύο ωμικές αντιστάσεις R_1 και R_2 , όμοια με τη διάταξη ενός ποτενσιομέτρου, όπου σε κάθε αντίσταση έχουν σημειωθεί οι αντίστοιχες πτώσεις τάσης που προκύπτουν από την εφαρμογή της Εξίσωσης 1.31.



Εικόνα 1.11: Κύκλωμα διαιρέτη τάσης

Αφού μελετήθηκε το στοιχείο της αντίστασης και παρουσιάστηκε το κύκλωμα του διαιρέτη τάσης, οφείλει να γίνει μια αναφορά στις *μη ιδανικές* πηγές τάσης και ρεύματος. Πρακτικά, κάθε πηγή τάσης/ρεύματος βρίσκεται σε σειρά/παράλληλα με μια αντίσταση, η οποία περιορίζει την έξοδο της. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.12, όταν σε μια πηγή τάσης v_s με αντίσταση R_s συνδεθεί παράλληλα μια αντίσταση R_L , τότε δημιουργείται ένας διαιρέτης τάσης με αποτέλεσμα η πτώση τάσης v πάνω σε αυτή την αντίσταση να είναι μικρότερη από την τάση της πηγής. Αυτό σημαίνει πως το σήμα της πηγής υποβαθμίζεται, οπότε για να περιοριστεί αυτό το φαινόμενο θα πρέπει η αντίσταση R_s να είναι σχετικά μικρή και η αντίσταση R_L να είναι σχετικά μεγάλη. Αυτή η παρατήρηση είναι σημαντική, καθώς όταν δύο κυκλώματα A και B συνδεθούν παράλληλα μεταξύ τους, τότε το κύκλωμα B βλέπει το κύκλωμα A σαν μια μη ιδανική πηγή τάσης, ενώ το κύκλωμα A βλέπει το κύκλωμα B σαν μια αντίσταση, ακριβώς όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 1.12. Σε αυτή την περίπτωση, η αντίσταση R_s αντιστοιχεί στην ισοδύναμη *αντίσταση εξόδου* του κυκλώματος A , ενώ η αντίσταση R_L αντιστοιχεί στην ισοδύναμη *αντίσταση εισόδου* του κυκλώματος B . Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνεται πως συχνά είναι σημαντικό ένα κύκλωμα να σχεδιάζεται έτσι ώστε να έχει υψηλή αντίσταση εισόδου και χαμηλή αντίσταση εξόδου.



Εικόνα 1.12: Κύκλωμα μη ιδανικής πηγής τάσης

1.2.5 Ο Πυκνωτής

Ο *πυκνωτής* αποτελεί άλλο ένα βασικό εξάρτημα με αρκετές εφαρμογές στα ηλεκτρονικά κυκλώματα. Πρόκειται για ένα παθητικό στοιχείο, το οποίο συσσωρεύει ηλεκτρικό φορτίο σε δύο παράλληλες αγωγίμες πλάκες, δημιουργώντας ένα ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα τους. Η σχέση ανάμεσα στο ρεύμα που διαρρέει έναν πυκνωτή και την τάση στα άκρα του περιγράφεται από την Εξίσωση 1.32:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (1.32)$$

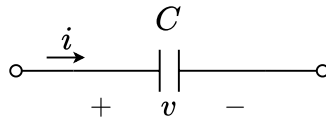
Στην παραπάνω διαφορική σχέση, το μέγεθος C ονομάζεται *χωρητικότητα*, έχει μονάδα μέτρησης το *farad* (F) και συνδέει το φορτίο q που είναι αποθηκευμένο σε έναν πυκνωτή με την τάση που υπάρχει στα άκρα του μέσω της Εξίσωσης 1.33:

$$q = Cv \quad (1.33)$$

Κατά συνέπεια, με εφαρμογή των παραπάνω σχέσεων και ύστερα από ολοκλήρωση της Εξίσωσης 1.20, προκύπτει ότι η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη με τη μορφή ηλεκτρικού πεδίου σε έναν πυκνωτή υπολογίζεται από την Εξίσωση 1.34:

$$w_C = \frac{1}{2}Cv^2 \quad \text{ή} \quad w_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad (1.34)$$

Ένα από τα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός πυκνωτή απεικονίζεται στην Εικόνα 1.13 όπου η πολικότητα της τάσης και η φορά του ρεύματος έχουν σημειωθεί σύμφωνα με τη σύμβαση προσήμου ισχύος.



Εικόνα 1.13: Σύμβολο πυκνωτή

Η διαφορική σχέση της Εξίσωσης 1.32 υποδηλώνει ότι η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή δε μπορεί να αλλάξει ακαριαία, καθώς κάτι τέτοιο θα απαιτούσε άπειρο ρεύμα. Θεωρώντας ένα κύκλωμα στο οποίο εφαρμόζεται μια DC τάση V στα άκρα ενός πυκνωτή με μηδενικές αρχικές συνθήκες, ο πυκνωτής αρχικά επιτρέπει τη διέλευση του ρεύματος μέχρι να φορτιστεί πλήρως. Στη συνέχεια συμπεριφέρεται σαν ένα ανοιχτοκύκλωμα με τάση V στα άκρα του. Όταν εφαρμόζεται μια AC τάση, ο πυκνωτής φορτίζεται και εκφορτίζεται συνεχώς, παρουσιάζοντας χαρακτηριστικά αντίστασης που εξαρτώνται από τη συχνότητα, καθιστώντας τον έτσι ένα ιδανικό στοιχείο για χρήση σε αναλογικά φίλτρα. Αυτή η μορφή αντίστασης ονομάζεται *χωρητική αντίδραση*, συμβολίζεται με X_C , έχει μονάδα μέτρησης το ohm και περιγράφεται από την Εξίσωση 1.35:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (1.35)$$

1.2.6 Το Πηνίο

Το *πηνίο* αποτελεί ένα ακόμα συνηθισμένο εξάρτημα και θεωρείται συμπληρωματικό του πυκνωτή. Πρόκειται για ένα παθητικό στοιχείο, το οποίο αναπτύσσει μαγνητική ροή γύρω από ένα πλήθος σπειρών, λόγω του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται όταν διαρρέεται από ρεύμα. Η σχέση ανάμεσα στο ρεύμα που διαρρέει ένα πηνίο και την τάση στα άκρα του περιγράφεται από την Εξίσωση 1.36:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (1.36)$$

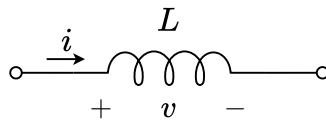
Στην παραπάνω διαφορική σχέση, το μέγεθος L ονομάζεται *αυτεπαγωγή*, έχει μονάδα μέτρησης το *henry* (H) και συνδέει τη συνολική μαγνητική ροή ψ γύρω από ένα πηνίο με το ρεύμα που το διαρρέει μέσω της Εξίσωσης 1.37:

$$\psi = Li \quad (1.37)$$

Κατά συνέπεια, με εφαρμογή των παραπάνω σχέσεων και ύστερα από ολοκλήρωση της Εξίσωσης 1.20, προκύπτει ότι η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη με τη μορφή μαγνητικού πεδίου σε ένα πηνίο υπολογίζεται από την Εξίσωση 1.38:

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 \quad \text{ή} \quad w_L = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L} \quad (1.38)$$

Ένα από τα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός πηνίου απεικονίζεται στην Εικόνα 1.14, όπου η πολικότητα της τάσης και η φορά του ρεύματος έχουν σημειωθεί σύμφωνα με τη σύμβαση προσήμου ισχύος.



Εικόνα 1.14: Σύμβολο πηνίου

Η διαφορική σχέση της Εξίσωσης 1.36 υποδηλώνει ότι το ρεύμα στα άκρα ενός πηνίου δε μπορεί να αλλάξει ακαριαία, καθώς κάτι τέτοιο θα απαιτούσε άπειρη τάση. Θεωρώντας ένα κύκλωμα στο οποίο εφαρμόζεται μια DC τάση στα άκρα ενός πηνίου με μηδενικές αρχικές συνθήκες, το πηνίο αρχικά αντιτίθεται στη μεταβολή του ρεύματος μέχρι να ενεργοποιηθεί πλήρως. Στη συνέχεια συμπεριφέρεται σαν ένα βραχυκύκλωμα με μηδενική τάση στα άκρα του. Όταν εφαρμόζεται μια AC τάση, το πηνίο αντιτίθεται διαρκώς στη μεταβολή του ρεύματος, παρουσιάζοντας χαρακτηριστικά αντίστασης που εξαρτώνται από τη συχνότητα, καθιστώντας το έτσι ιδανικό στοιχείο για χρήση σε αναλογικά φίλτρα, παρόμοια με τον πυκνωτή. Αυτή η μορφή αντίστασης ονομάζεται *επαγωγική αντίδραση*, συμβολίζεται με X_L , έχει μονάδα μέτρησης το ohm και περιγράφεται από την Εξίσωση 1.39:

$$X_L = \omega L \quad (1.39)$$

1.2.7 Η Εμπέδηση

Η *εμπέδηση* ή *σύνθετη αντίσταση* δεν αποτελεί κάποιο φυσικό εξάρτημα, αλλά αναφέρεται σε μια έννοια που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση κυκλωματικών στοιχείων στο πεδίο της συχνότητας. Ουσιαστικά, πρόκειται για μια μιγαδική ποσότητα η οποία συνδυάζει τα μεγέθη της αντίστασης και της αντίδρασης, διευκολύνοντας την ανάλυση κυκλωμάτων που περιέχουν AC πηγές τάσης ή ρεύματος. Η εμπέδηση συμβολίζεται με Z , έχει μονάδα μέτρησης το Ω και ορίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση 1.40:

$$Z = R + jX \quad (1.40)$$

Πρακτικά, η έννοια της εμπέδησης χρησιμοποιείται για την αντικατάσταση των στοιχείων που χαρακτηρίζονται από σχέσεις διαφορικών εξισώσεων στο πεδίο του χρόνου, με ισοδύναμες μιγαδικές αντιστάσεις στο πεδίο της συχνότητας. Αυτές οι σύνθετες αντιστάσεις αποτελούν μια επέκταση των απλών ωμικών αντιστάσεων, ακολουθώντας κατά αντίστοιχο τρόπο τους ίδιους κανόνες συνδεσμολογίας και σχέσεις όπως τον νόμο του Ohm, σύμφωνα με την Εξίσωση 1.41:

$$V = IZ \quad \text{ή} \quad I = \frac{V}{Z} \quad (1.41)$$

Η εμπέδηση μιας ωμικής αντίστασης διαθέτει μόνο πραγματικό μέρος το οποίο αντιστοιχεί στην τιμή της αντίστασης R , επομένως δίνεται από την Εξίσωση 1.42:

$$Z_R = R \quad (1.42)$$

Η εμπέδηση ενός πυκνωτή διαθέτει μόνο φανταστικό μέρος το οποίο αντιστοιχεί στη χωρητική αντίδραση X_C του πυκνωτή, επομένως δίνεται από την Εξίσωση 1.43:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (1.43)$$

Η εμπέδηση ενός πηνίου διαθέτει μόνο φανταστικό μέρος το οποίο αντιστοιχεί στην επαγωγική αντίδραση X_L του πηνίου, επομένως δίνεται από την Εξίσωση 1.44:

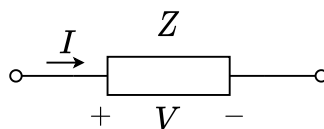
$$Z_L = j\omega L \quad (1.44)$$

Ακόμα, οι Εξισώσεις 1.43 και 1.44 μπορούν να γενικευτούν στο πεδίο του μετασχηματισμού Laplace, σύμφωνα με τις Εξισώσεις 1.45 και 1.46:

$$Z_C = \frac{1}{sC} \quad (1.45)$$

$$Z_L = sL \quad (1.46)$$

Ένα από τα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση μιας εμπέδησης απεικονίζεται στην Εικόνα 1.15, όπου η πολικότητα της τάσης και η φορά του ρεύματος έχουν σημειωθεί σύμφωνα με τη σύμβαση προσήμου ισχύος.



Εικόνα 1.15: Σύμβολο εμπέδησης

1.2.8 Η Διόδος

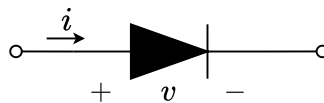
Η *διόδος* αποτελεί ένα ιδιαίτερο εξάρτημα που συναντάται συχνά στα ηλεκτρονικά κυκλώματα. Πρόκειται για ένα ενεργό στοιχείο δύο ακροδεκτών, το οποίο επιτρέπει τη ροή του ρεύματος μόνο προς μία κατεύθυνση, περιορίζοντας ταυτόχρονα την τάση που εφαρμόζεται στα άκρα της. Η ροή του ρεύματος ορίζεται να έχει κατεύθυνση από τον θετικό ακροδέκτη, ο οποίος ονομάζεται *άνοδος*, προς τον αρνητικό ακροδέκτη, ο οποίος ονομάζεται *κάθοδος*. Η εφαρμογή θετικής τάσης ανάμεσα στα άκρα της διόδου αναφέρεται ως *ορθή πόλωση*, ενώ η εφαρμογή αρνητικής τάσης αναφέρεται ως *ανάστροφη πόλωση* και έχει ως αποτέλεσμα τη διαρροή μιας πολύ μικρής ποσότητας ρεύματος. Υπάρχουν αρκετές προσεγγίσεις οι οποίες περιγράφουν τη σχέση ανάμεσα στο ρεύμα που διαρρέει μια διόδο και την τάση στα άκρα της, η σημαντικότερη από τις οποίες διατυπώνεται μέσω της Εξίσωσης 1.47:

$$i = I_S \left(e^{\frac{v}{nV_T}} - 1 \right) \quad (1.47)$$

Στην παραπάνω μη γραμμική σχέση, η οποία ονομάζεται εξίσωση *Shockley* [11]:

- το μέγεθος I_S αποκαλείται *ρεύμα κορεσμού*, εξαρτάται από τη θερμοκρασία και την κατασκευή της διόδου, ενώ η τιμή του κυμαίνεται από 10^{-15} έως 10^{-6} A.
- το μέγεθος n αποκαλείται *συντελεστής ιδανικότητας* και εξαρτάται από την κατασκευή της διόδου, λαμβάνοντας συνήθως τιμές από 1 έως 2.
- το μέγεθος V_T αποκαλείται *θερμική τάση* και εξαρτάται από τη θερμοκρασία, αντιστοιχώντας σε περίπου 25.85mV στους 27°C.

Ένα από τα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση μιας διόδου απεικονίζεται στην Εικόνα 1.16, όπου η πολικότητα της τάσης και η φορά του ρεύματος έχουν σημειωθεί σύμφωνα με τη φορά ορθής πόλωσης της διόδου.



Εικόνα 1.16: Σύμβολο διόδου

Η εκθετική σχέση της Εξίσωσης 1.37 υποδηλώνει ότι η διόδος χρειάζεται μια μικρή θετική τάση στα άκρα της προκειμένου να αρχίσει να άγει κάποια σημαντική ποσότητα ρεύματος, ενώ όσο αυξάνεται αυτή η τάση, το ρεύμα που τη διαρρέει θα αυξάνεται όλο και περισσότερο. Ωστόσο, κάτι τέτοιο αποτελεί κίνδυνο για μια διόδο, καθώς η ισχύς που απορροφάει μετατρέπεται σε θερμότητα, η οποία μπορεί να την καταστρέψει. Στην πράξη, οι διόδοι χρησιμοποιούνται συνήθως σε κυκλώματα μαζί με αντιστάσεις οι οποίες περιορίζουν τη ροή του ρεύματος, με αποτέλεσμα να περιορίζεται και η τάση που εφαρμόζεται τελικά στα άκρα τους. Έτσι, οι διόδοι αποτελούν ιδανικά στοιχεία για ηλεκτρονικά κυκλώματα ψαλιδισμού σήματος, τα οποία χρησιμοποιούνται σε ενισχυτές και πετάλια παραμόρφωσης ήχου.

1.2.9 Το Τρανζίστορ

Το *τρανζίστορ* αποτελεί ιστορικά ένα από τα σημαντικότερα ηλεκτρονικά εξαρτήματα, με τον πιο συνηθισμένο τύπο που συναντάται στα αναλογικά κυκλώματα να είναι το *ηρη Διπολικό Τρανζίστορ Επαφής* (*Bipolar Junction Transistor* | **BJT**). Πρόκειται για ένα ενεργό στοιχείο τριών ακροδεκτών, οι οποίοι ονομάζονται *βάση* (B), *συλλέκτης* (C) και *εκπομπός* (E), ενώ η λειτουργία του απαιτεί τροφοδοσία από μια πηγή τάσης και διακρίνεται σε τρεις ξεχωριστές καταστάσεις. Συγκεκριμένα, διακρίνονται η *περιοχή αποκοπής*, στην οποία το τρανζίστορ δεν άγει ρεύμα, η *ενεργός περιοχή*, στην οποία το τρανζίστορ συμπεριφέρεται προσεγγιστικά ως γραμμικός ενισχυτής, και η *περιοχή κορεσμού*, στην οποία το τρανζίστορ λειτουργεί ισχυρά μη γραμμικά, προκαλώντας παραμόρφωση του σήματος εισόδου. Υπάρχουν αρκετές προσεγγίσεις οι οποίες περιγράφουν αναλυτικά τη λειτουργία ενός τρανζίστορ σε κάθε περιοχή, με μία από τις σημαντικότερες να διατυπώνεται μέσω των Εξισώσεων 1.48–1.50:

$$i_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left(e^{\frac{v_{BE}}{nV_T}} - 1 \right) + \frac{I_S}{\beta_R} \left(e^{\frac{v_{BC}}{nV_T}} - 1 \right) \quad (1.48)$$

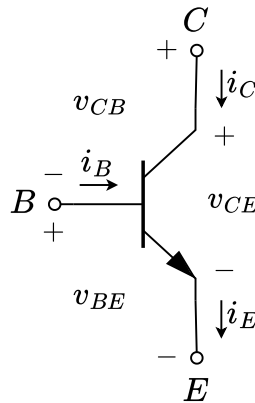
$$i_C = I_S \left(e^{\frac{v_{BE}}{nV_T}} - 1 \right) - \frac{I_S}{\alpha_R} \left(e^{\frac{v_{BC}}{nV_T}} - 1 \right) \quad (1.49)$$

$$i_E = \frac{I_S}{\alpha_F} \left(e^{\frac{v_{BE}}{nV_T}} - 1 \right) - I_S \left(e^{\frac{v_{BC}}{nV_T}} - 1 \right) \quad (1.50)$$

Στις παραπάνω μη γραμμικές σχέσεις, οι οποίες λέγονται εξισώσεις *Ebers-Moll* [12], οι συντελεστές α_F , α_R , β_F και β_R εξαρτώνται από την κατασκευή του τρανζίστορ και τη θερμοκρασία, ενώ συνδέονται μεταξύ τους μέσω της Εξίσωσης 1.51:

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{1 + \beta_i} \quad \text{ή} \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}, \quad i \in \{f, r\} \quad (1.51)$$

Ένα από τα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός *ηρη* τρανζίστορ απεικονίζεται στην Εικόνα 1.17, όπου οι πολικότητες των τάσεων και οι φορές των ρευμάτων έχουν σημειωθεί σύμφωνα με τις συνθήκες λειτουργίας στην ενεργό περιοχή του τρανζίστορ.



Εικόνα 1.17: Σύμβολο τρανζίστορ

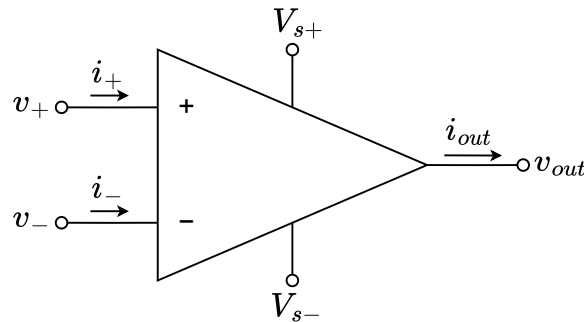
1.2.10 Ο Τελεστικός Ενισχυτής

Ο *τελεστικός ενισχυτής* αποτελεί ένα πολυχρηστικό ηλεκτρονικό εξάρτημα το οποίο υλοποιείται από πολλά μικροσκοπικά τρανζίστορ και διατίθεται σε μορφή *Ολοκληρωμένου Κυκλώματος (Integrated Circuit | IC)*. Πρόκειται για ένα ενεργό στοιχείο πέντε ακροδεκτών, τρεις από τους οποίους προορίζονται για την είσοδο και την έξοδο ηλεκτρικών σημάτων, ενώ οι άλλοι δύο χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή τάσης τροφοδοσίας. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν δύο είσοδοι, οι οποίες αποκαλούνται *μη αναστρέφουσα (+)* και *αναστρέφουσα (-)*, και μία έξοδος, η οποία ενισχύει γραμμικά τη διαφορά των σημάτων εισόδου με ένα υψηλό κέρδος A , ενώ το σήμα εξόδου ψαλιδίζεται αν το πλάτος του ξεπεράσει τα όρια της τάσης τροφοδοσίας. Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται αναλυτικά από τις Εξισώσεις 1.52 και 1.53:

$$v_{in} = v_+ - v_- \quad (1.52)$$

$$v_{out} = \begin{cases} V_{s+}, & Av_{in} > V_{s+} \\ Av_{in}, & V_{s-} \leq Av_{in} \leq V_{s+} \\ V_{s-}, & Av_{in} < V_{s-} \end{cases} \quad (1.53)$$

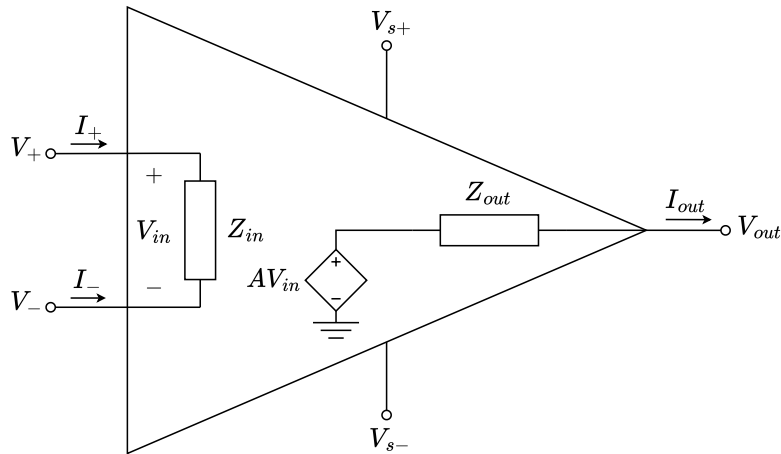
Ένα από τα καθιερωμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός τελεστικού ενισχυτή απεικονίζεται στην Εικόνα 1.18, ενώ στην Εικόνα 1.19 παρουσιάζεται μια ισοδύναμη αναπαράσταση που μοντελοποιεί τη γενικότερη εσωτερική λειτουργία του τελεστικού ενισχυτή.



Εικόνα 1.18: Σύμβολο τελεστικού ενισχυτή

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.19, ο τελεστικός ενισχυτής μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια εξαρτημένη πηγή τάσης, η οποία πρακτικά απομονώνει την είσοδο από την έξοδο, διατηρώντας την ακεραιότητα του διαφορικού σήματος από φαινόμενα αλληλεπίδρασης με το εξωτερικό κύκλωμα. Αυτό συμβαίνει λόγω της υψηλής *εμπέδησης εισόδου*, η οποία ιδανικά είναι άπειρη ($Z_{in} = \infty$), και της χαμηλής *εμπέδησης εξόδου*, η οποία ιδανικά είναι μηδενική ($Z_{out} = 0$). Ακόμα, για έναν ιδανικό τελεστικό ενισχυτή θεωρείται ότι το *κέρδος ανοιχτού βρόχου* είναι άπειρο ($A = \infty$) και ότι το σήμα εξόδου δεν ψαλιδίζεται λόγω των ορίων της τάσης τροφοδοσίας. Παράλληλα, λόγω της άπειρης εμπέδησης εισόδου, τα ρεύματα εισόδου ενός ιδανικού τελεστικού ενισχυτή θα ικανοποιούν την Εξίσωση 1.54:

$$i_+ = i_- = 0 \quad (1.54)$$



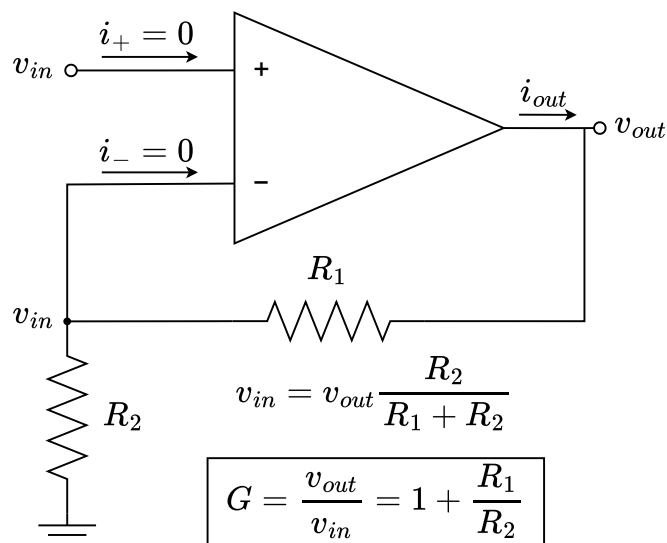
Εικόνα 1.19: Ισοδύναμη αναπαράσταση τελεστικού ενισχυτή

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η έξοδος ενός τελεστικού ενισχυτή συνδέεται με κάποια από τις εισόδους του, δημιουργώντας έτσι έναν βρόχο *αρνητικής ανάδρασης*. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζεται ένα *εικονικό βραχυκύκλωμα* ανάμεσα στους δύο ακροδέκτες εισόδου, το οποίο ιδανικά διατυπώνεται από την Εξίσωση 1.55:

$$v_+ = v_- \quad (1.55)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την παραπάνω σχέση και το άπειρο κέρδος ανοιχτού βρόχου ενός ιδανικού τελεστικού ενισχυτή, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι Εξισώσεις 1.52 και 1.53 παύουν να έχουν πρακτική αξία για κυκλώματα όπως αυτό της Εικόνας 1.20. Σε τέτοιες περιπτώσεις η έξοδος του τελεστικού ενισχυτή σχετίζεται με την είσοδο του μέσω του *κέρδους κλειστού βρόχου* G , το οποίο υπολογίζεται μέσω κυκλωματικής ανάλυσης και εφαρμογής του ορισμού της Εξίσωσης 1.56:

$$G = \frac{v_{out}}{v_{in}} \quad (1.56)$$



Εικόνα 1.20: Κύκλωμα ιδανικού τελεστικού ενισχυτή με αρνητική ανάδραση

1.3 Υπολογιστικές Τεχνικές

Η προσομοίωση ενός ηλεκτρονικού κυκλώματος μέσω ενός υπολογιστή συνιστά ένα σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα που αποτελείται από μη γραμμικές συναρτήσεις και διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες συχνά καθιστούν αδύνατη την εύρεση μιας αναλυτικής λύσης. Πρακτικά, ένα τέτοιο πρόβλημα αντιμετωπίζεται αναζητώντας μια αριθμητική λύση, η οποία προκύπτει εφαρμόζοντας ένα σύνολο προσεγγιστικών και αλγοριθμικών τεχνικών που ανήκουν στο πεδίο της *Αριθμητικής Ανάλυσης* [13].

1.3.1 Γραμμικοποίηση Συναρτήσεων

Σε πολλές περιπτώσεις, είναι χρήσιμο μια μη γραμμική συνάρτηση να αντικαθίσταται από μια γραμμική προσέγγιση της. Αυτή η *γραμμικοποίηση* μπορεί να επιτευχθεί γύρω από κάποιο σημείο με εφαρμογή της *σειράς Taylor* [14], [15]. Γενικά, αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι απείρως παραγωγίσιμη γύρω από ένα σημείο x_0 και είναι αναλυτική σε αυτό, τότε η $f(x)$ θα ισούται με τη σειρά Taylor της γύρω από το x_0 για κάθε x σε μια γειτονιά ακτίνας $R > 0$, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.57:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R \quad (1.57)$$

Η γραμμική προσέγγιση της $f(x)$ γύρω από το x_0 προκύπτει αναπτύσσοντας το άθροισμα της παραπάνω σχέσης και κρατώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους, όπως διατυπώνεται από την Εξίσωση 1.58:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (1.58)$$

Η σειρά Taylor μπορεί να αξιοποιηθεί και για τη γραμμικοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Για παράδειγμα, η γραμμική προσέγγιση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις παραγωγισιμότητας και αναλυτικότητας γύρω από ένα σημείο (x_0, y_0) , θα δίνεται από την Εξίσωση 1.59:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (1.59)$$

1.3.2 Εύρεση Ριζών

Η παρουσία μη γραμμικών συναρτήσεων σε ένα μαθηματικό πρόβλημα συχνά οδηγεί στην εμφάνιση *πεπλεγμένων* και *υπερβατικών* εξισώσεων, οι οποίες δε μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Σε αυτές τις περιπτώσεις η λύση υπολογίζεται αλγοριθμικά χρησιμοποιώντας κάποια επαναληπτική μέθοδο *εύρεσης ριζών*, όπως είναι η μέθοδος *Newton-Raphson* [16], η οποία βασίζεται στη γραμμικοποίηση συναρτήσεων μέσω της σειράς Taylor. Συγκεκριμένα, αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη γύρω από ένα σημείο x_0 για το οποίο ισχύει $f(x_0) = 0$, τότε, ξεκινώντας από κάποιο σημείο x_k αρκετά κοντά στο x_0 για το οποίο ισχύει $f'(x_k) \neq 0$, η μέθοδος *Newton-Raphson* θα προσεγγίζει επαναληπτικά τη ρίζα x_0 μέσω της Εξίσωσης 1.60:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.60)$$

Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται είτε μετά από έναν προκαθορισμένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων είτε όταν ικανοποιηθεί κάποια από τις συνθήκες $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ ή $|f(x_k)| < \varepsilon$, όπου $\delta, \varepsilon > 0$ αποτελούν σχετικά μικρές τιμές κατωφλίων που ορίζονται για να υποδείξουν τη σύγκλιση στη ρίζα x_0 . Αναγκαία προϋπόθεση για την εφαρμογή της Εξίσωσης 1.60 είναι για κάθε x_k κοντά στο x_0 η συνάρτηση $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη και να ισχύει $f'(x_k) \neq 0$. Ωστόσο, αυτή η προϋπόθεση δεν είναι ικανή για να εξασφαλίσει τη σύγκλιση της μεθόδου στη ρίζα x_0 , με αποτέλεσμα σε αρκετές περιπτώσεις ο αλγόριθμος να αποτυγχάνει. Έτσι, για τη βελτίωση της ευρωστίας του αλγορίθμου, η μέθοδος Newton-Raphson συχνά τροποποιείται εισάγοντας έναν παράγοντα *απόσβεσης* λ_k , όπως περιγράφεται από τις Εξισώσεις 1.61 και 1.62:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.61)$$

$$\lambda_k = 2^{-m} \quad (1.62)$$

Ο τροποποιημένος αλγόριθμος εκτελείται ορίζοντας τον παράγοντα λ_k για $m = 0$ στην αρχή κάθε επανάληψης k και ελέγχοντας τη συνθήκη $|f(x_{k+1})| \leq |f(x_k)|$. Στην περίπτωση που η συνθήκη πράγματι ικανοποιείται, ο αλγόριθμος προχωράει κανονικά στην επόμενη επανάληψη, ενώ στην αντίθετη περίπτωση ακολουθείται μια εμφολευμένη επαναληπτική διαδικασία, κατά την οποία εφαρμόζεται η ανάθεση $m \leftarrow m + 1$ μέχρις ότου ικανοποιηθεί η συνθήκη.

Η μέθοδος *Newton-Raphson* επεκτείνεται στη γενική περίπτωση για την εύρεση ριζών διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Έτσι, για μια συνάρτηση $\mathbf{f}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ που είναι παραγωγίσιμη με Ιακωβιανό πίνακα για τον οποίο ισχύει $\det(\mathbf{J}_f(x_k)) \neq 0$ για κάθε σημείο x_k κοντά στη ρίζα x_0 , η μέθοδος *Newton-Raphson* μπορεί να εφαρμοστεί σύμφωνα με κάποια από τις Εξισώσεις 1.63 και 1.64:

$$x_{k+1} = x_k - \mathbf{J}_f^{-1}(x_k) \mathbf{f}(x_k) \quad (1.63)$$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \mathbf{J}_f^{-1}(x_k) \mathbf{f}(x_k) \quad (1.64)$$

Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται πάλι είτε μετά από έναν προκαθορισμένο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων είτε όταν ικανοποιηθεί κάποια από τις συνθήκες $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty < \delta$ ή $\|\mathbf{f}(x_k)\|_\infty < \varepsilon$, ενώ για τον καθορισμό του παράγοντα λ_k ελέγχεται επαναληπτικά η συνθήκη $\|\mathbf{f}(x_{k+1})\| \leq \|\mathbf{f}(x_k)\|$.

1.3.3 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις, ένα σύστημα συνεχούς χρόνου περιγράφεται από *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις* (*Ordinary Differential Equations* | **ODEs**) 1ης τάξης, οι οποίες έχουν τη μορφή της Εξίσωσης 1.65:

$$\dot{x}(t) \triangleq \frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.65)$$

Η επίλυση εξισώσεων τέτοιου τύπου μέσω ενός υπολογιστή ακολουθεί τη διαδικασία διακριτοποίησης του συστήματος, η οποία πραγματοποιείται μέσω δειγματοληψίας με περίοδο T_s , και την εφαρμογή κάποιας μεθόδου *αριθμητικής ολοκλήρωσης* [17].

Η πιο απλή και βασική μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης αποκαλείται *μέθοδος Euler προς τα εμπρός* και πρόκειται για μια *ρητή* μέθοδο, καθώς η λύση της διαφορικής εξίσωσης την τωρινή χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την προηγούμενη τιμή της παραγώγου, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.66:

$$x[n] \approx x[n-1] + T_s \dot{x}[n-1] \quad (1.66)$$

Αντίστοιχα, ορίζεται η *μέθοδος Euler προς τα πίσω*, η οποία αποτελεί μια *άρρητη* μέθοδο, καθώς η λύση της διαφορικής εξίσωσης την τωρινή χρονική στιγμή εξαρτάται από την τωρινή τιμή της παραγώγου, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 1.67:

$$x[n] \approx x[n-1] + T_s \dot{x}[n] \quad (1.67)$$

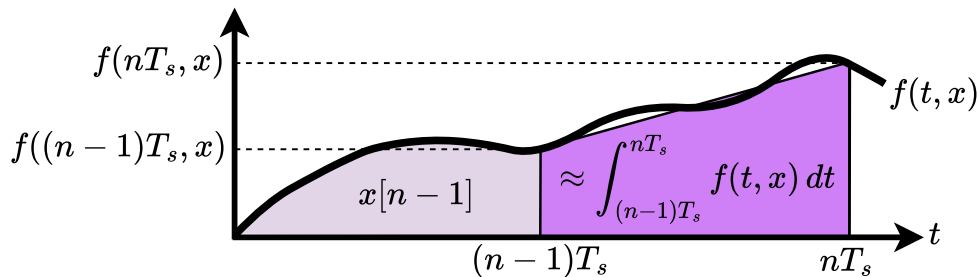
Μια άλλη άρρητη και ιδιαίτερα διαδεδομένη μέθοδος, η οποία μπορεί να θεωρηθεί πως βρίσκεται εννοιολογικά ανάμεσα στις δύο μεθόδους του Euler, είναι η *μέθοδος του τραpezίου*, η οποία διατυπώνεται από την Εξίσωση 1.68:

$$x[n] \approx x[n-1] + \frac{T_s}{2} (\dot{x}[n] + \dot{x}[n-1]) \quad (1.68)$$

Οι μέθοδοι που περιγράφηκαν παραπάνω χαρακτηρίζονται από την κοινή ιδιότητα να εξαρτώνται μόνο από την τωρινή και την προηγούμενη χρονική στιγμή και για αυτό ονομάζονται *μονοθηματικές*. Κατά αντίστοιχο τρόπο ορίζονται και οι *πολυθηματικές* μέθοδοι, όπως είναι ο *Τύπος Οπισθοδρομικού Διαφορισμού 2ης Τάξης (2nd Order Backward Differentiation Formula | BDF2)* που διατυπώνεται από την Εξίσωση 1.69:

$$x[n] \approx \frac{4}{3}x[n-1] - \frac{1}{3}x[n-2] + \frac{2}{3}T_s \dot{x}[n] \quad (1.69)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τις μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης δεν αποτελούν αυστηρές ισότητες, πράγμα που θεωρητικά θα απαιτούσε $T_s \rightarrow 0$, αλλά προσεγγίσεις που εισάγουν κάποιο μικρό σφάλμα σε κάθε χρονικό βήμα. Από τη μία μεριά, οι ρητές μέθοδοι υλοποιούνται εύκολα και είναι υπολογιστικά αποδοτικές, όμως συχνά χρειάζονται αρκετά μικρή περίοδο δειγματοληψίας ώστε να μην οδηγήσουν σε ανακρίβειες και αστάθεια λόγω συσσώρευσης σφαλμάτων. Από την άλλη μεριά, οι άρρητες μέθοδοι χαρακτηρίζονται από καλή ακρίβεια και ευστάθεια, αλλά είναι πιο πολύπλοκες και υπολογιστικά ακριβές, καθώς συχνά οδηγούν σε πεπλεγμένες και υπερβατικές εξισώσεις που απαιτούν τη χρήση κάποιας μεθόδου εύρεσης ριζών. Η έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης για την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης που ορίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση 1.65 μπορεί να οπτικοποιηθεί μέσω της Εικόνας 1.21, όπου απεικονίζεται η προσέγγιση του αντίστοιχου ολοκληρώματος με τη μέθοδο του τραpezίου σε κάποιο χρονικό βήμα n .



Εικόνα 1.21: Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο του τραpezίου

1.4 Προσομοιώσεις SPICE

Στα περισσότερα πεδία εφαρμογής των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, η καθιερωμένη προσέγγιση προσομοίωσης τους περιλαμβάνει τη χρήση κάποιου λογισμικού που βασίζεται στο *Πρόγραμμα Προσομοίωσης με Έμφαση στα Ολοκληρωμένα Κυκλώματα* (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis* | **SPICE**) [18]–[20]. Συγκεκριμένα, το SPICE αποτελεί ένα εργαλείο προσομοίωσης κυκλωμάτων γενικού σκοπού που λειτουργεί στη γραμμή εντολών ενός υπολογιστή, εισάγοντας την περιγραφή του σχηματικού διαγράμματος ενός κυκλώματος σε μορφή κειμένου και εξάγοντας τα αποτελέσματα της προσομοίωσης με τον ίδιο τρόπο. Ουσιαστικά, πρόκειται για ένα αυτοτελές πρόγραμμα που ενσωματώνεται σε άλλα προγράμματα λογισμικού, τα οποία προσφέρουν ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον προσομοίωσης κυκλωμάτων μέσω μιας γραφικής διεπαφής, διευκολύνοντας έτσι τόσο τη σχεδίαση των σχηματικών διαγραμμάτων όσο και την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων.

1.4.1 Ανάλυση Κόμβων

Η λειτουργία του SPICE βασίζεται σε μια μέθοδο κυκλωματικής ανάλυσης που ονομάζεται *ανάλυση κόμβων*. Στην πιο απλή της μορφή, η μέθοδος ανάλυσης κόμβων εφαρμόζεται σε ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται συνολικά από N κόμβους, εξαιρώντας τον κόμβο αναφοράς της γείωσης, και περιλαμβάνει μόνο αντιστάσεις και πηγές ρεύματος. Αναπαριστώντας κάθε αντίσταση R με την αντίστοιχη αγωγιμότητα G , αξιοποιώντας τον νόμο του Ohm και εφαρμόζοντας τον KCL σε κάθε κόμβο του κυκλώματος, προκύπτει το σύστημα εξισώσεων που περιγράφει το κύκλωμα σε μορφή πινάκων, σύμφωνα με την Εξίσωση 1.70:

$$\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (1.70)$$

Στην παραπάνω σχέση, ο λεγόμενος *πίνακας αγωγιμότητας* $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ είναι τετραγωνικός και περιγράφει την εφαρμογή του KCL σε κάθε κόμβο του κυκλώματος. Από την άλλη μεριά, το διάνυσμα ρευμάτων $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^N$ περιγράφει τη συνεισφορά των πηγών ρεύματος i_s σε κάθε κόμβο n , ενώ το διάνυσμα τάσεων $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^N$ συγκεντρώνει όλες τις άγνωστες τάσεις v_n του κυκλώματος, οι οποίες υπολογίζονται λύνοντας το σύστημα της Εξίσωσης 1.70 με εφαρμογή κάποιας τεχνικής γραμμικής άλγεβρας, όπως είναι για παράδειγμα η *αποσύνθεση LU* [21].

Για πρακτική χρήση στην πλειοψηφία των πραγματικών ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, η μέθοδος ανάλυσης κόμβων χρειάζεται να επεκταθεί για τη συμπερίληψη των πηγών τάσεων. Αυτό επιτυγχάνεται ενσωματώνοντας στο διάνυσμα \mathbf{V} τα άγνωστα ρεύματα i_{v_s} που διαρρέουν τις πηγές τάσεις και εισάγοντας βοηθητικές εξισώσεις της μορφής $v_s = v_i - v_j$ στο σύστημα, προσαρτώντας έτσι στο διάνυσμα \mathbf{I} τις γνωστές τάσεις v_s στα άκρα των πηγών. Αυτή η επεκταμένη μέθοδος αποκαλείται *Τροποποιημένη Ανάλυση Κόμβων* (*Modified Nodal Analysis* | **MNA**) [22] και αποτελεί τη βάση κάθε λογισμικού τύπου SPICE που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων. Παράλληλα, η μέθοδος MNA χαρακτηρίζεται από την ευκολία υλοποίησης της χάρη σε απλούς αλγόριθμους που αυτοματοποιούν την κατασκευή της Εξίσωσης 1.70 για οποιοδήποτε κύκλωμα, ενώ ταυτόχρονα αποτελεί θεμέλιο για ορισμένες πιο προηγμένες τεχνικές προσομοίωσης κυκλωμάτων.

1.4.2 Γραμμικοποίηση Στοιχείων

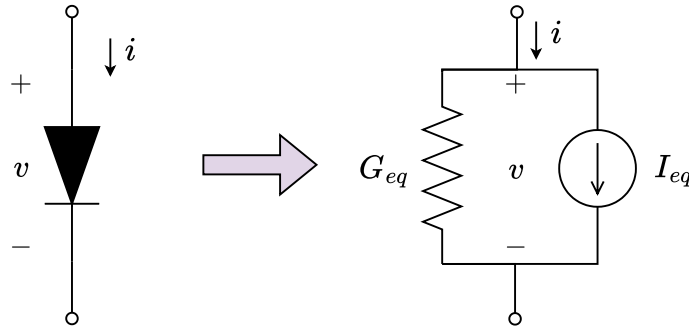
Το γεγονός ότι η μέθοδος MNA βασίζεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων καθιστά απαραίτητη τη γραμμικοποίηση των στοιχείων που περιγράφονται από μη γραμμικές εξισώσεις, όπως είναι οι δίοδοι και τα τρανζίστορ, ώστε να μπορούν να ενσωματωθούν στην προσομοίωση ενός κυκλώματος. Αυτή η γραμμικοποίηση επιτυγχάνεται με χρήση της σειράς Taylor γύρω από το σημείο λειτουργίας που αντιστοιχεί στην τάση που εφαρμόζεται στα άκρα του στοιχείου. Για παράδειγμα, μια δίοδος με τάση v_0 στα άκρα της γραμμικοποιείται με εφαρμογή της Εξίσωσης 1.58 στην Εξίσωση 1.47, θεωρώντας $i \triangleq i(v)$. Μετά από μερικές πράξεις, η διαδικασία αυτή καταλήγει στις Εξισώσεις 1.71–1.73:

$$i = G_{eq}v + I_{eq} \quad (1.71)$$

$$G_{eq} = \left. \frac{di}{dv} \right|_{v_0} = \frac{I_S}{nV_T} e^{\frac{v_0}{nV_T}} \quad (1.72)$$

$$I_{eq} = i(v_0) - G_{eq}v_0 \quad (1.73)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει το συμπέρασμα ότι μια γραμμικοποιημένη δίοδος γύρω από κάποιο σημείο λειτουργίας v_0 μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω μιας αγωγιμότητας G_{eq} και μιας πηγής ρεύματος I_{eq} , όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.22:



Εικόνα 1.22: Γραμμικοποίηση διόδου

1.4.3 Διακριτοποίηση Στοιχείων

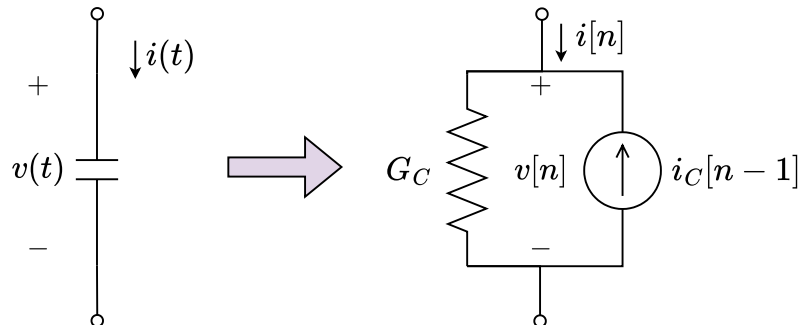
Ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα που περιέχει πυκνωτές και πηνία χρειάζεται αρχικά να διακριτοποιηθεί προκειμένου να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις που χαρακτηρίζουν αυτά τα στοιχεία. Το SPICE εφαρμόζει αυτή τη διακριτοποίηση *τοπικά* σε κάθε στοιχείο, χρησιμοποιώντας συνήθως τη μέθοδο του τραpezίου. Για παράδειγμα, ένας πυκνωτής διακριτοποιείται με εφαρμογή της Εξίσωσης 1.68 στην Εξίσωση 1.32, θεωρώντας $\dot{v}(t) \triangleq dv/dt = i/C$ και $i \triangleq i(t, v)$. Μετά από μερικές πράξεις, η διαδικασία αυτή καταλήγει στις Εξισώσεις 1.74–1.76:

$$i[n] = G_C v[n] - i_C[n-1] \quad (1.74)$$

$$G_C = \frac{2C}{T_s} \quad (1.75)$$

$$i_C[n] = G_C v[n] + i[n] \quad (1.76)$$

Ερμηνεύοντας τις παραπάνω σχέσεις, ένας διακριτοποιημένος πυκνωτής μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω μιας αγωγιμότητας G_C που εξαρτάται από την περίοδο δειγματοληψίας T_s και μιας πηγής ρεύματος i_C , όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.23:



Εικόνα 1.23: Διακριτοποίηση πυκνωτή

1.4.4 DC Ανάλυση

Ο πιο θεμελιώδης τύπος προσομοίωσης που πραγματοποιεί το SPICE αποκαλείται *DC ανάλυση* και αφορά την εύρεση του DC σημείου λειτουργίας του κυκλώματος, δηλαδή του συνόλου των τάσεων και των ρευμάτων που έχουν αναπτυχθεί στη μόνιμη κατάσταση του συστήματος λόγω της παρουσίας DC πηγών τάσης και ρεύματος. Η DC ανάλυση πραγματοποιείται αγνοώντας τυχόν αρχικές συνθήκες, αντικαθιστώντας έτσι τους πυκνωτές με ανοιχτοκυκλώματα και τα πηνία με βραχυκυκλώματα, και εφαρμόζοντας τη μέθοδο MNA. Δεδομένου ότι τα σημεία λειτουργίας των μη γραμμικών στοιχείων είναι άγνωστα, ο αλγόριθμος της ανάλυσης ξεκινάει από μια αρχική υπόθεση και γραμμικοποιεί αυτά τα στοιχεία επαναληπτικά μέχρι να συγκλίνει σε μια λύση, εφαρμόζοντας πρακτικά τη μέθοδο Newton-Raphson.

1.4.5 AC Ανάλυση

Η DC ανάλυση αποτελεί το πρώτο βήμα που εφαρμόζεται σε έναν άλλο βασικό τύπο προσομοίωσης που ονομάζεται *AC ανάλυση* και αφορά τον υπολογισμό της συχνотικής απόκρισης ενός κυκλώματος. Πιο συγκεκριμένα, η AC ανάλυση πραγματοποιείται γραμμικοποιώντας αρχικά τα μη γραμμικά στοιχεία γύρω από τα DC σημεία λειτουργίας τους και αναπαριστώντας τους πυκνωτές και τα πηνία μέσω των αντίστοιχων εμπεδήσεων τους. Κατόπιν, ο υπολογισμός της απόκρισης σε οποιαδήποτε συχνότητα πραγματοποιείται αντικαθιστώντας την επιθυμητή τιμή στη μεταβλητή της γωνιακής συχνότητας ω και λύνοντας το σύστημα της μεθόδου MNA.

1.4.6 Χρονική Ανάλυση

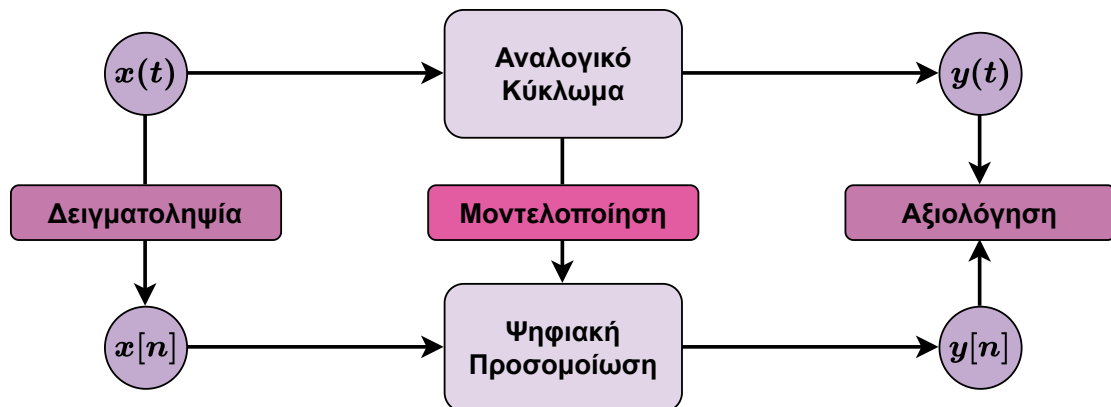
Έναν ακόμα από τους σημαντικότερους τύπους προσομοίωσης αποτελεί η *χρονική ανάλυση*, η οποία προσομοιώνει τη χρονική απόκριση του συστήματος σε κάποιο σήμα εισόδου. Η ανάλυση αυτή πραγματοποιείται διακριτοποιώντας τους πυκνωτές και τα πηνία του κυκλώματος με προσαρμοζόμενο χρονικό βήμα και εφαρμόζοντας σε κάθε διακριτή στιγμή τη μέθοδο MNA, παρόμοια με την DC ανάλυση.

Κεφάλαιο 2

Βιβλιογραφική Επισκόπηση

2.1 Εικονική Αναλογική Μοντελοποίηση

Το αντικείμενο της Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης μελετάει τις τεχνικές μοντελοποίησης ενός αναλογικού κυκλώματος επεξεργασίας ήχου για την υλοποίηση μιας αντίστοιχης ψηφιακής προσομοίωσης [23]–[27]. Αυτή η διαδικασία στοχεύει στην πιστή αναπαραγωγή των ηχητικών χαρακτηριστικών του κυκλώματος για την επεξεργασία σημάτων ήχου που έχουν προκύψει μέσω δειγματοληψίας σε πραγματικό χρόνο, ενώ αξιολογείται κατά κύριο λόγο συγκρίνοντας την ομοιότητα ανάμεσα στα σήματα εξόδου του αναλογικού και του ψηφιακού συστήματος. Μια σχηματική αναπαράσταση αυτής της διαδικασίας απεικονίζεται στην Εικόνα 2.1:



Εικόνα 2.1: Διαδικασία μοντελοποίησης κυκλωμάτων ήχου

Οι τεχνικές Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης μπορούν να χωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες, ανάλογα με την προσέγγισή τους. Από τη μία μεριά υπάρχουν οι θεωρητικές προσεγγίσεις, οι οποίες μοντελοποιούν ένα κύκλωμα στοιχείο προς στοιχείο αξιοποιώντας το σχηματικό του διάγραμμα και είναι γνωστές ως τεχνικές *λευκού κουτιού*. Από την άλλη μεριά διακρίνονται οι εμπειρικές προσεγγίσεις, οι οποίες προσαρμόζουν κάποιο μαθηματικό μοντέλο σε ένα σύνολο συλλεγμένων δεδομένων. Οι προσεγγίσεις αυτές μπορούν να αναφέρονται είτε ως τεχνικές *μαύρου κουτιού*, αν βασίζονται αποκλειστικά στη συλλογή δεδομένων, είτε ως τεχνικές *γκρι κουτιού*, αν συνδυάζουν θεωρητικά και εμπειρικά μοντέλα προσομοίωσης.

2.2 Θεωρητικές Προσεγγίσεις

2.2.1 Φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης

Τα φίλτρα Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (*Infinite Impulse Response* | **IIR**) αποτελούν την πιο απλή και βασική τεχνική προσομοίωσης κυκλωμάτων που μπορούν να χαρακτηριστούν ως συστήματα LTI, δηλαδή που δεν περιέχουν μη γραμμικά στοιχεία, όπως είναι οι δίοδοι και τα τρανζίστορ [28]–[30]. Θεωρώντας πως το σήμα εισόδου $x(t)$ του συστήματος μοντελοποιείται με μια πηγή τάσης $v_{in}(t)$ και το σήμα εξόδου $y(t)$ αντιστοιχίζεται σε κάποια τάση $v_{out}(t)$, η διαδικασία υλοποίησης ενός ψηφιακού φίλτρου IIR ξεκινάει αναπαριστώντας τα στοιχεία του κυκλώματος μέσω των εμπεδήσεων τους και υπολογίζοντας τη συνεχή συνάρτηση μεταφοράς, η οποία έχει τη μορφή ρητής συνάρτησης για $M \leq N$, σύμφωνα με την Εξίσωση 2.1:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k} \quad (2.1)$$

Στη συνέχεια, η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ διακριτοποιείται με την εφαρμογή κάποιας μεθόδου που αντιστοιχίζει προσεγγιστικά τα σημεία του πεδίου του μετασχηματισμού Laplace σε σημεία του πεδίου του μετασχηματισμού Z. Μια τέτοια μέθοδο αποτελεί ο *διγραμμικός μετασχηματισμός*, ο οποίος είναι μαθηματικά ισοδύναμος με την αριθμητική ολοκλήρωση μέσω της μεθόδου του τραπεζίου και διατυπώνεται από την Εξίσωση 2.2:

$$s \approx \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{ή} \quad s \approx \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.2)$$

Επομένως, με αντικατάσταση της Εξίσωσης 2.2 στην Εξίσωση 2.1, προκύπτει η διακριτή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 2.3:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \approx H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\sum_{k=0}^N B_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N A_k z^{-k}} \quad (2.3)$$

Έπειτα, με αντιστροφή του μετασχηματισμού Z στην Εξίσωση 2.3, μέσω της ιδιότητας *χρονικής ολίσθησης* $x[n - k] \xrightarrow{Z} z^{-k} X(z)$, προκύπτει η λεγόμενη *εξίσωση διαφορών* του συστήματος, η οποία διατυπώνεται από την Εξίσωση 2.4:

$$\sum_{k=0}^N A_k y[n - k] = \sum_{k=0}^N B_k x[n - k] \quad (2.4)$$

Τέλος, λύνοντας την Εξίσωση 2.4 ως προς την έξοδο του συστήματος την τωρινή χρονική στιγμή και ύστερα από κανονικοποίηση των συντελεστών B_k και A_k διαιρώντας με τον συντελεστή A_0 , προκύπτει η Εξίσωση 2.5:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n - k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n - k] \quad (2.5)$$

Η παραπάνω αναδρομική σχέση περιγράφει την υλοποίηση του ζητούμενου ψηφιακού φίλτρου IIR μέσω των συντελεστών a_k και b_k , οι τιμές των οποίων εξαρτώνται από τα κυκλωματικά στοιχεία και την περίοδο δειγματοληψίας T_s , καθορίζοντας τη συμβολή της τωρινής εισόδου και ενός πλήθους προηγούμενων τιμών εισόδου και εξόδου στη διαμόρφωση της τωρινής εξόδου του συστήματος. Σημαντικότερο πλεονέκτημα των φίλτρων IIR αποτελεί η υπολογιστική απόδοση τους, καθώς απαιτούν ελάχιστες πράξεις για τον υπολογισμό της εξόδου του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή, ο αριθμός των οποίων εξαρτάται πρακτικά γραμμικά από το πλήθος των πυκνωτών και των πηνίων του κυκλώματος. Από την άλλη μεριά, τα φίλτρα IIR διαθέτουν το βασικό μειονέκτημα ότι η χρήση τους περιορίζεται αυστηρά μόνο στα γραμμικά κυκλώματα, ωστόσο έχουν υπάρξει προσεγγίσεις για την εφαρμογή τους και σε κυκλώματα με μη γραμμικά στοιχεία [31].

2.2.2 Μοντέλα Χώρου Καταστάσεων

Τα *Μοντέλα Χώρου Καταστάσεων* (State-Space Models | **SSMs**) αποτελούν μια καθιερωμένη τεχνική προσομοίωσης ηλεκτρονικών κυκλωμάτων που προέρχεται από τη *Θεωρία Ελέγχου*, με εφαρμογές στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου [32]–[34]. Γενικά, ο *χώρος καταστάσεων* αναφέρεται σε μια μαθηματική αναπαράσταση που μοντελοποιεί ένα δυναμικό σύστημα *Πολλαπλής Εισόδου-Πολλαπλής Εξόδου* (Multiple-Input Multiple-Output | **MIMO**), βάσει ορισμένων μεταβλητών που περιγράφουν την εσωτερική του κατάσταση σε κάθε χρονική στιγμή. Στην περίπτωση ενός ηλεκτρονικού κυκλώματος, ως *μεταβλητές κατάστασης* ορίζονται οι τάσεις στα άκρα των πυκνωτών και τα ρεύματα που διαρρέουν τα πηνία του. Έτσι, το SSM ενός συστήματος LTI συνεχούς χρόνου θα περιγράφεται από το διάνυσμα καταστάσεων \mathbf{x} , το διάνυσμα εισόδου \mathbf{u} , το διάνυσμα εξόδου \mathbf{y} και τους πίνακες \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} και \mathbf{D} , σύμφωνα με τις Εξισώσεις 2.6 και 2.7:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.7)$$

Μια αναπαράσταση χώρου καταστάσεων δύναται να μοντελοποιήσει και μη γραμμικά συστήματα, όπου σε εφαρμογές Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης η σημαντικότερη τεχνική που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση κυκλωμάτων με μη γραμμικά στοιχεία είναι η *μέθοδος Kirchhoff* ή *K-method* [35]–[38], η οποία ορίζει το αντίστοιχο SSM σύμφωνα με τις Εξισώσεις 2.8–2.11:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{i}(t) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{i}(t) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{L}\mathbf{x}(t) + \mathbf{M}\mathbf{u}(t) + \mathbf{N}\mathbf{i}(t) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t)) \quad (2.11)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το διάνυσμα τάσεων \mathbf{v} συγκεντρώνει τις τάσεις στα άκρα όλων των μη γραμμικών στοιχείων του κυκλώματος, ενώ το διάνυσμα ρευμάτων \mathbf{i} αποτελείται από τα αντίστοιχα μη γραμμικά ρεύματα. Για παράδειγμα, βάσει των Εξισώσεων 1.48–1.50, στην περίπτωση ενός τρανζίστορ θα ισχύει $\mathbf{v} = [v_{BE} \ v_{BC}]^T$ και επιλέγεται $\mathbf{i} = [i_B(v_{BE}, v_{BC}) \ i_C(v_{BE}, v_{BC})]^T$, καθώς το εναπομείναν ρεύμα i_E δε χρειάζεται να συμπεριληφθεί, εφόσον υπολογίζεται μέσω του KCL ως $i_E = i_B + i_C$.

Η K-method υλοποιείται διακριτοποιώντας αρχικά την Εξίσωση 2.8 με εφαρμογή της μεθόδου του τραπεζίου, όπου αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.11 και υιοθετώντας τον συμβολισμό $x_n \triangleq x[n]$ για συντομία προκύπτει η Εξίσωση 2.12:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{H}(c\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{HB}(\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}) + \mathbf{HC}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_n) + \mathbf{f}(\mathbf{v}_{n-1})) \quad (2.12)$$

Στην παραπάνω σχέση, με \mathbf{I} συμβολίζεται ο *ταυτοτικός πίνακας*, ενώ ο πίνακας \mathbf{H} και η μεταβλητή c υπολογίζονται αντίστοιχα μέσω των Εξισώσεων 2.13 και 2.14:

$$\mathbf{H} = (c\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (2.13)$$

$$c = \frac{2}{T_s} \quad (2.14)$$

Στη συνέχεια, η Εξίσωση 2.9 διακριτοποιείται μέσω δειγματοληψίας, ενώ έπειτα από αντικατάσταση της Εξίσωσης 2.12 σε αυτή, προκύπτει η Εξίσωση 2.15:

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n + \mathbf{K}\mathbf{f}(\mathbf{v}_n) \quad (2.15)$$

Στην παραπάνω σχέση, το διάνυσμα \mathbf{p}_n και ο πίνακας \mathbf{K} υπολογίζονται αντίστοιχα από τις Εξισώσεις 2.16 και 2.17:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{DH}((c\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}) + \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{v}_{n-1})) + \mathbf{E}\mathbf{u}_n \quad (2.16)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{DHC} + \mathbf{F} \quad (2.17)$$

Η Εξίσωση 2.15 είναι πεπλεγμένη και υπερβατική ως προς το διάνυσμα \mathbf{v}_n , λόγω της μη γραμμικής συνάρτησης \mathbf{f} , και επομένως δε μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Για τον λόγο αυτό, ορίζεται η βοηθητική συνάρτηση \mathbf{g} σύμφωνα με την Εξίσωση 2.18:

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{p}_n + \mathbf{K}\mathbf{f}(\mathbf{v}_n) - \mathbf{v}_n \quad (2.18)$$

Έτσι, η Εξίσωση 2.15 μπορεί να λυθεί αριθμητικά, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton-Raphson με σημείο εκκίνησης το διάνυσμα \mathbf{v}_{n-1} για την εύρεση της ρίζας της συνάρτησης \mathbf{g} , ο Ιακωβιανός πίνακας της οποίας δίνεται από την Εξίσωση 2.19:

$$\mathbf{J}_g(\mathbf{v}_n) = \mathbf{KJ}_f(\mathbf{v}_n) - \mathbf{I} \quad (2.19)$$

Τέλος, η Εξίσωση 2.10 διακριτοποιείται επίσης μέσω δειγματοληψίας, οδηγώντας στην Εξίσωση 2.20:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{L}\mathbf{x}_n + \mathbf{M}\mathbf{u}_n + \mathbf{N}\mathbf{f}(\mathbf{v}_n) \quad (2.20)$$

Συνοπτικά, ο αλγόριθμος της K-method εφαρμόζεται σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή n για είσοδο \mathbf{u}_n , ακολουθώντας τα εξής τέσσερα βήματα:

1. Υπολογισμός του διανύσματος \mathbf{p}_n μέσω της Εξίσωσης 2.16
2. Επίλυση της εξίσωσης $\mathbf{g}(\mathbf{v}_n) = 0$ μέσω της μεθόδου Newton-Raphson
3. Ενημέρωση της κατάστασης \mathbf{x}_n μέσω της Εξίσωσης 2.12
4. Υπολογισμός της εξόδου \mathbf{y}_n μέσω της Εξίσωσης 2.20

Γενικά, τα SSM είναι ιδανικά για τη μοντελοποίηση κυκλωμάτων με μικρό αριθμό πυκνωτών και πηνίων, καθώς κάθε επιπλέον μεταβλητή κατάσταση αυξάνει πρακτικά τετραγωνικά το υπολογιστικό κόστος της προσομοίωσης. Η K-method, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, αποτελεί μια βάση πάνω στην οποία έχουν αναπτυχθεί πιο προηγμένες και αποδοτικές τεχνικές μοντελοποίησης μέσω του χώρου καταστάσεων, με το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα να αποτελεί η *διακριτή μέθοδος Kirchhoff* ή *DK-method*, η οποία διακριτοποιεί κάθε στοιχείο τοπικά παρόμοια με τις Εξισώσεις 1.74–1.76, οδηγώντας έτσι απευθείας σε μια διακριτοποιημένη αναπαράσταση χώρου καταστάσεων [39]–[41]. Ένα σημαντικό προτέρημα αυτής της οικογένειας τεχνικών είναι η δυνατότητα αυτοματοποίησης τους για άμεση εφαρμογή σε οποιοδήποτε κύκλωμα [42], [43]. Ωστόσο, ορισμένα κυκλώματα είναι αδύνατο να μοντελοποιηθούν μέσω αυτών των τεχνικών χωρίς τροποποιήσεις στη συνδεσμολογία τους, όπως είναι για παράδειγμα τα κυκλώματα στα οποία υπάρχει κάποιος κόμβος όπου συνδέονται μόνο μη γραμμικά στοιχεία, καθιστώντας έτσι αναγκαία την εφαρμογή κάποιας πιο γενικευμένης μεθόδου [44].

2.2.3 Χαμιλτονιανά Συστήματα Θυρών

Τα *Χαμιλτονιανά Συστήματα Θυρών* (*Port-Hamiltonian Systems* ή **PHS**) αποτελούν μια ειδική μορφή της αναπαράστασης χώρου καταστάσεων, η οποία μοντελοποιεί φυσικά συστήματα με βάση την *αρχή διατήρησης της ενέργειας*, εγγυώντας έτσι την ευστάθεια της προσομοίωσης [45]–[47]. Πιο συγκεκριμένα, τα PHS μοντελοποιούν ένα ηλεκτρονικό κύκλωμα διακρίνοντας τα εσωτερικά στοιχεία του σε αυτά που αποθηκεύουν ενέργεια $E \geq 0$ και αυτά που καταναλώνουν ισχύ $D \geq 0$, ενώ ορίζονται επιπλέον οι λεγόμενες εξωτερικές *θύρες* που μεταφέρουν ισχύ $S \in \mathbb{R}$ προς και από το σύστημα, ικανοποιώντας έτσι την Εξίσωση 2.21:

$$\frac{dE}{dt} = S - D \quad (2.21)$$

Η ενέργεια E_s που είναι αποθηκευμένη σε ένα στοιχείο $s \in \{1, \dots, n_S\}$ εκφράζεται μέσω μιας *συνάρτησης αποθήκευσης* h_s ως $E_s \equiv h_s(x_s)$, όπου x_s είναι η αντίστοιχη μεταβλητή κατάστασης. Εδώ πέρα, ως μεταβλητές κατάστασης ορίζονται το φορτίο q για έναν πυκνωτή και η μαγνητική ροή ψ για ένα πηνίο, ενώ οι αντίστοιχες συναρτήσεις αποθήκευσης δίνονται από τις Εξισώσεις 1.34 και 1.38. Σε κάθε περίπτωση, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας διατυπώνεται μέσω της Εξίσωσης 2.22:

$$\frac{dE_s}{dt} = \frac{dh_s}{dx_s} \cdot \frac{dx_s}{dt} = v_s \cdot i_s \quad (2.22)$$

Η ισχύς D_d που καταναλώνεται από ένα στοιχείο $d \in \{1, \dots, n_D\}$ εκφράζεται μέσω μιας *μεταβλητή διάχυσης* w_d , εισάγοντας παράλληλα μια *συνάρτησης διάχυσης* $z_d(w_d)$. Για παράδειγμα, για μια αντίσταση ορίζεται $w = i$ και $z(w) = Ri = v$, ενώ αντίθετα για μια αγωγιμότητα ορίζεται $w = v$ και $z(w) = Gv = i$, για λόγους που θα εξηγηθούν στη συνέχεια. Γενικότερα, η μεταβλητή διάχυσης w_d και η συνάρτηση διάχυσης $z_d(w_d)$ ορίζονται για οποιοδήποτε στοιχείο που καταναλώνει ισχύ έτσι ώστε να ικανοποιείται η Εξίσωση 2.23:

$$D_d = z_d(w_d) \cdot w_d = v_d \cdot i_d \quad (2.23)$$

Η ισχύς S_p που μεταφέρεται προς ή από το σύστημα μέσω μιας θύρας $p \in \{1, \dots, n_P\}$ εκφράζεται μέσω μιας μεταβλητής εισόδου u_p και μιας μεταβλητής εξόδου y_p . Γενικά, οι θύρες αναφέρονται στις πηγές τάσεις και ρεύματος, στο σημείο από το οποίο λαμβάνεται η επιθυμητή τάση εξόδου του κυκλώματος που μοντελοποιείται ως μια πηγή μηδενικού ρεύματος ($i_{out} = 0$) και στο σημείο αναφοράς της γείωσης που μοντελοποιείται ως μια πηγή μηδενικής τάσης ($v_{gnd} = 0$). Έτσι, λαμβάνοντας υπόψιν τη σύμβαση προσήμου ισχύος, η ισχύς S_p διατυπώνεται μέσω της Εξίσωσης 2.24:

$$S_p = y_p \cdot u_p = -v_p \cdot i_p \quad (2.24)$$

Σε αυτό το σημείο, ορίζεται επιπλέον η συνάρτηση $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_S} \rightarrow \mathbb{R}$ ως προς το διάνυσμα καταστάσεων \mathbf{x} , η οποία αντιστοιχεί στη συνολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο σύστημα ($E \equiv \mathcal{H}(\mathbf{x})$) και ορίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.25:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{n_S} h_s(x_s) \quad (2.25)$$

Έτσι, με βάση τις μεταβλητές και τις συναρτήσεις που ορίστηκαν παραπάνω για τα κυκλωματικά στοιχεία και τις εξωτερικές θύρες, η αναπαράσταση PHS του χώρου καταστάσεων ενός κυκλώματος ορίζεται μέσω αντίστοιχων διανυσματικών μεγεθών διαστάσεων n_s , n_D και n_P , σύμφωνα με την Εξίσωση 2.26:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & -\mathbf{G}_x \\ \mathbf{K}^T & \mathbf{J}_w & -\mathbf{G}_w \\ \mathbf{G}_x^T & \mathbf{G}_w^T & \mathbf{J}_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (2.26)$$

Η παραπάνω σχέση έχει τη μορφή $\mathbf{a} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{b}$, όπου τα διανύσματα $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_B}$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_B}$ αντιστοιχούν στις τάσεις v_b και τα ρεύματα i_b των $n_B = n_S + n_D + n_P$ κλάδων του συστήματος, που ορίζονται σύμφωνα με τη σύμβαση προσήμου ισχύος. Πιο συγκεκριμένα, η αναπαράσταση PHS κατηγοριοποιεί τα κυκλωματικά στοιχεία σε αυτά που ελέγχονται από ρεύμα, για τα οποία ισχύει $a_b = i_b$ και $b_b = v_b$, και σε αυτά που ελέγχονται από τάση, για τα οποία ισχύει $a_b = v_b$ και $b_b = i_b$. Έτσι, ορίζεται συμβατικά πως οι πηγές τάσεις, οι πυκνωτές και οι αντιστάσεις ελέγχονται από ρεύμα, ενώ οι πηγές ρεύματος, τα πηνία, οι αγωγιμότητες, οι δίοδοι και τα τρανζίστορ ελέγχονται από τάση. Από την άλλη μεριά, ο πίνακας $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B}$ είναι τετραγωνικός και αποτελείται αποκλειστικά από τιμές 0 και ± 1 , περιγράφοντας την εφαρμογή του KCL και του KVL στο κύκλωμα. Στην πράξη, ο πίνακας \mathbf{J} υπολογίζεται μέσω ενός πίνακα $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{(n_N+1) \times n_B}$, όπου n_N είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων του κυκλώματος αγνοώντας τη γείωση, ο οποίος ορίζεται βάσει της Εξίσωσης 2.27:

$$\Gamma_{n,b} = \begin{cases} +1, & \text{αν το ρεύμα του κλάδου } b \text{ εισέρχεται από τον κόμβο } n \\ -1, & \text{αν το ρεύμα του κλάδου } b \text{ εξέρχεται από τον κόμβο } n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.27)$$

Παράλληλα, ο πίνακας $\mathbf{\Gamma}$ έχει τη μορφή που περιγράφεται από την Εξίσωση 2.28:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \mid \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Στην παραπάνω σχέση, ο πίνακας $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{1 \times n_B}$ αντιστοιχεί στη γραμμή του πίνακα Γ που αφορά τον κόμβο της γείωσης, ενώ οι πίνακες $\gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_1}$ και $\gamma_2 \in \mathbb{R}^{n_N \times n_2}$ προκύπτουν αναδιατάσσοντας και διαχωρίζοντας τους n_B κλάδους του συστήματος, οι οποίοι αντιστοιχούν στις στήλες του πίνακα Γ , στα n_1 στοιχεία που ελέγχονται από τάση και τα n_2 στοιχεία που ελέγχονται από ρεύμα. Προκειμένου ένα κύκλωμα να μπορεί να αναπαρασταθεί από την Εξίσωση 2.26, πρέπει ο πίνακας γ_2 να είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος, άρα είναι απαραίτητο ο αριθμός των ελεγχόμενων από ρεύμα στοιχείων να είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των κόμβων του κυκλώματος ($n_2 = n_N$). Στην πράξη, αυτό επιτυγχάνεται μέσω μιας αλγοριθμικής διαδικασίας που κρίνει ποιες από τις αντιστάσεις του κυκλώματος πρέπει να αναπαρασταθούν τυπικά ως αγωγιμότητες, εφόσον αυτό είναι απαραίτητο. Έτσι, στη συνέχεια ορίζεται ο πίνακας $\tilde{\mathbf{J}}$ σύμφωνα με την Εξίσωση 2.29:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \gamma^T \\ -\gamma & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad \gamma = \gamma_2^{-1} \gamma_1 \quad (2.29)$$

Τελικά, ο πίνακας \mathbf{J} προκύπτει αντιστρέφοντας την αναδιάταξη που είχε εφαρμοστεί στους n_B κλάδους του συστήματος μέσω ενός *μεταθετικού πίνακα* \mathbf{P} , ο οποίος αναδιατάσσει τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα $\tilde{\mathbf{J}}$ βάσει της Εξίσωσης 2.30:

$$\mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{P}^T \quad (2.30)$$

Η αναπαράσταση PHS υλοποιείται διακριτοποιώντας αρχικά την Εξίσωση 2.26 μέσω μιας τεχνικής αριθμητικής ολοκλήρωσης που αποκαλείται *Μέθοδος Διακριτής Κλίσης* (*Discrete Gradient Method* | **DGM**), οδηγώντας έτσι στην Εξίσωση 2.31:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{w}[n] \\ \mathbf{y}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{B}_x & \mathbf{C}_x \\ \mathbf{A}_w & \mathbf{B}_w & \mathbf{C}_w \\ \mathbf{A}_y & \mathbf{B}_y & \mathbf{C}_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}[n]) \\ \mathbf{u}[n] \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Παραπάνω, οι υποπίνακες \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i και \mathbf{C}_i για $i \in \{x, w, y\}$ υπολογίζονται μέσω των υποπινάκων $\mathbf{J}_x \in \mathbb{R}^{n_S \times n_S}$, $\mathbf{J}_w \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$, $\mathbf{J}_y \in \mathbb{R}^{n_P \times n_P}$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_S \times n_D}$, $\mathbf{G}_x \in \mathbb{R}^{n_S \times n_P}$ και $\mathbf{G}_w \in \mathbb{R}^{n_D \times n_P}$ του πίνακα \mathbf{J} , σύμφωνα με τις Εξισώσεις 2.32–2.40:

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{D} \cdot \mathbf{J}_x \cdot \mathbf{Q} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{B}_x = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{K} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{C}_x = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}_x \quad (2.34)$$

$$\mathbf{A}_w = \frac{1}{2} \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{2I} + \mathbf{A}_x) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{B}_w = \mathbf{J}_w + \frac{1}{2} \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_x \quad (2.36)$$

$$\mathbf{C}_w = -\mathbf{G}_w + \frac{1}{2} \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_x \quad (2.37)$$

$$\mathbf{A}_y = -\left(\frac{1}{2} \mathbf{G}_x^T \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{2I} + \mathbf{A}_x) \right) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B}_y = -\left(\mathbf{G}_w^T + \frac{1}{2} \mathbf{G}_x^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_x \right) \quad (2.39)$$

$$\mathbf{C}_y = -\left(\mathbf{J}_y + \frac{1}{2} \mathbf{G}_x^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_x \right) \quad (2.40)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, με \mathbf{I} συμβολίζεται ο ταυτοτικός πίνακας, ενώ ο πίνακας \mathbf{D} περιέχει την πληροφορία της περιόδου δειγματοληψίας T_s , όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 2.41:

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\mathbf{I}}{T_s} - \frac{\mathbf{J}_x \cdot \mathbf{Q}}{2} \right)^{-1} \quad (2.41)$$

Από την άλλη μεριά, ο πίνακας $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_S \times n_S}$ αποτελεί έναν διαγώνιο πίνακα που περιέχει ανεστραμμένες τις τιμές χωρητικότητας C των πυκνωτών και αυτεπαγωγής L των πηνίων του κυκλώματος, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 2.42:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{n_S})^{-1} \quad \text{όπου} \quad d_s \in \{C_s, L_s\}, \quad s = 1, 2, \dots, n_S \quad (2.42)$$

Στη συνέχεια, πραγματοποιώντας την πράξη πολλαπλασιασμού πινάκων της Εξίσωσης 2.31, προκύπτουν οι Εξισώσεις 2.43–2.45:

$$\delta \mathbf{x}[n] = \mathbf{A}_x \mathbf{x}[n] + \mathbf{B}_x \mathbf{z}(\mathbf{w}[n]) + \mathbf{C}_x \mathbf{u}[n] \quad (2.43)$$

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{A}_w \mathbf{x}[n] + \mathbf{B}_w \mathbf{z}(\mathbf{w}[n]) + \mathbf{C}_w \mathbf{u}[n] \quad (2.44)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{A}_y \mathbf{x}[n] + \mathbf{B}_y \mathbf{z}(\mathbf{w}[n]) + \mathbf{C}_y \mathbf{u}[n] \quad (2.45)$$

Από την επίλυση της Εξίσωσης 2.43 προκύπτει το διάνυσμα $\delta \mathbf{x}[n]$, το οποίο αξιοποιείται για την ενημέρωση του διανύσματος κατάστασης $\mathbf{x}[n]$, σύμφωνα με την Εξίσωση 2.46:

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{x}[n] + \delta \mathbf{x}[n] \quad (2.46)$$

Εφόσον υπάρχουν μη γραμμικά στοιχεία στο κύκλωμα, η Εξίσωση 2.44 είναι πεπλεγμένη και υπερβατική ως προς το διάνυσμα $\mathbf{w}[n]$ και άρα δε μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Για τον λόγο αυτό, ορίζονται το διάνυσμα $\mathbf{p}[n]$ και η βοηθητική συνάρτηση \mathbf{f} σύμφωνα με τις Εξισώσεις 2.47 και 2.48:

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{A}_w \mathbf{x}[n] + \mathbf{C}_w \mathbf{u}[n] \quad (2.47)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}[n]) = \mathbf{p}_n + \mathbf{B}_w \mathbf{z}(\mathbf{w}[n]) - \mathbf{w}[n] \quad (2.48)$$

Έτσι, η Εξίσωση 2.44 λύνεται αριθμητικά, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton–Raphson με σημείο εκκίνησης το διάνυσμα $\mathbf{w}[n-1]$ για την εύρεση της ρίζας της συνάρτησης \mathbf{f} , ο Ιακωβιανός πίνακας της οποίας δίνεται από την Εξίσωση 2.49:

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{w}[n]) = \mathbf{B}_w \mathbf{J}_z(\mathbf{w}[n]) - \mathbf{I} \quad (2.49)$$

Συνοπτικά, ο αλγόριθμος προσομοίωσης ενός κυκλώματος μέσω της αναπαράστασης PHS εφαρμόζεται σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή n για είσοδο $\mathbf{u}[n]$, ακολουθώντας τα εξής τέσσερα βήματα:

1. Υπολογισμός του διανύσματος $\mathbf{p}[n]$ μέσω της Εξίσωσης 2.47
2. Επίλυση της εξίσωσης $\mathbf{f}(\mathbf{w}[n]) = 0$ μέσω της μεθόδου Newton–Raphson
3. Υπολογισμός της εξόδου $\mathbf{y}[n]$ μέσω της Εξίσωσης 2.45
4. Ενημέρωση της κατάστασης $\mathbf{x}[n]$ μέσω των Εξισώσεων 2.43 και 2.46

Αξίζει να σημειωθεί πως η διαστατικότητα των Εξισώσεων 2.26 και 2.31 δύναται να μειωθεί, βελτιώνοντας έτσι την αποδοτικότητα ενός μοντέλου PHS. Αυτό επιτυγχάνεται διαχωρίζοντας κατάλληλα τα γραμμικά από τα μη γραμμικά στοιχεία που καταναλώνουν ισχύ, αλλά και παραλείποντας τα στοιχεία των διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} καθώς και τις γραμμές και στήλες του πίνακα \mathbf{J} που αντιστοιχούν στη θύρα της γείωσης. Γενικά, η αναπαράσταση PHS είναι συγκρίσιμη με άλλες τεχνικές του χώρου καταστάσεων, διαθέτοντας τόσο τη δυνατότητα αυτοματοποίησης όσο και την αδυναμία μοντελοποίησης οποιουδήποτε κυκλώματος, όπως γίνεται εμφανές από την ανάγκη αντιστρεψιμότητας του πίνακα γ_2 . Ωστόσο, πρόκειται για μια τεχνική που ξεκίνησε να χρησιμοποιείται σχετικά πρόσφατα στο πεδίο της Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης, συνεπώς η εφαρμογή της δεν έχει μελετηθεί εκτενώς, ενώ η συμπερίληψη τελεστικών ενισχυτών βρίσκεται ακόμη σε πρώιμο στάδιο [48].

2.2.4 Κυματικά Ψηφιακά Φίλτρα

Τα *Κυματικά Ψηφιακά Φίλτρα* (*Wave Digital Filters* | **WDFs**) αποτελούν μια ιδιαίτερη και ευρέως διαδεδομένη τεχνική μοντελοποίησης φυσικών συστημάτων που βασίζεται στη *Θεωρία Σκέδασης*, με κύριες εφαρμογές στα γραμμικά κυκλώματα [49], [50]. Ειδικότερα, τα WDF εισάγουν τις λεγόμενες *κυματικές μεταβλητές* a και b , οι οποίες αναφέρονται αντίστοιχα ως *προσπίπτον* και *ανακλώμενο κύμα*. Οι μεταβλητές αυτές περιγράφουν κάθε στοιχείο ενός κυκλώματος και συνδέονται με την αντίστοιχη τάση στα άκρα του v και το ρεύμα που το διαρρέει i μέσω των Εξισώσεων 2.50 και 2.51:

$$a = v + R_p i \quad (2.50)$$

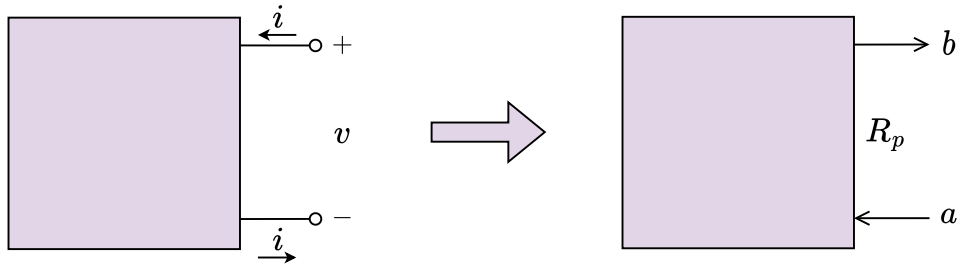
$$b = v - R_p i \quad (2.51)$$

Αντίστροφα, οι λεγόμενες *μεταβλητές Kirchhoff* υπολογίζονται μέσω των κυματικών μεταβλητών για $R_p \neq 0$ σύμφωνα με τις Εξισώσεις 2.52 και 2.53:

$$v = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \quad (2.52)$$

$$i = \frac{1}{2R_p}a - \frac{1}{2R_p}b \quad (2.53)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το μέγεθος R_p αποτελεί μια ελεύθερη παράμετρο η οποία αποκαλείται *αντίσταση θύρας* και δεν πρέπει να συγχέεται με την ωμική αντίσταση. Ουσιαστικά, τα WDF μοντελοποιούν ένα κύκλωμα αναπαριστώντας τα στοιχεία του ως θύρες που μεταφέρονται από το *πεδίο Kirchhoff* στο *πεδίο κυμάτων*, όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 2.2. Αυτές οι θύρες συνδέονται μεταξύ τους σχηματίζοντας *Διαδικά Δέντρα Σύνδεσης* (*Binary Connection Trees* | **BCTs**), αν και στη γενικότερη περίπτωση ένα δέντρο WDF μπορεί και να μην είναι δυαδικό. Για την υλοποίηση ενός WDF είναι απαραίτητο σε κάθε θύρα που *κοιτάζει* προς την κορυφή του δέντρου το ανακλώμενο κύμα b να είναι ανεξάρτητο από το προσπίπτον κύμα a στην ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή να μην υπάρχει κάποια σχέση της μορφής $b[n] = f(a[n])$. Έτσι, η παράμετρος R_p επιλέγεται για κάθε στοιχείο έτσι ώστε να ικανοποιείται αυτή η προϋπόθεση, μια διαδικασία που ονομάζεται *προσαρμογή*. Ωστόσο, ορισμένα κυκλωματικά στοιχεία είναι αδύνατο να προσαρμοστούν έτσι, συνεπώς κατά τη σχεδίαση ενός WDF είναι αναγκαία η τοποθέτηση τους στη ρίζα του δέντρου.



Εικόνα 2.2: Θύρα στο πεδίο Kirchhoff και στο πεδίο κυμάτων

2.2.4.1 Αντίσταση

Μια αντίσταση μοντελοποιείται ως στοιχείο WDF αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις 2.52 και 2.53 στο νόμο του Ohm, οδηγώντας ύστερα από πράξεις στην Εξίσωση 2.54:

$$b = \frac{R - R_p}{R + R_p} a \quad (2.54)$$

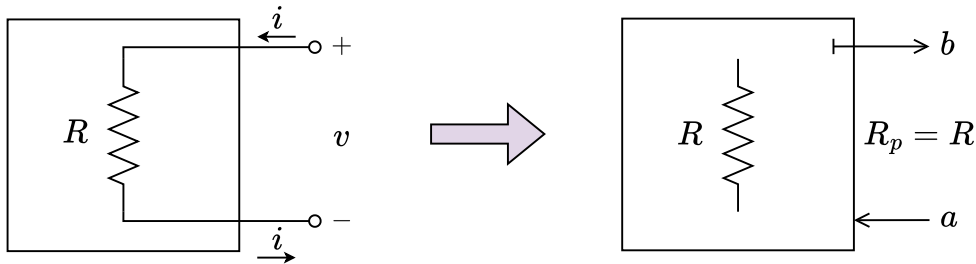
Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής $b[n] = f(a[n])$, επομένως η προσαρμογή μιας αντίστασης πραγματοποιείται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.55:

$$R_p = R \quad (2.55)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.55 στην Εξίσωση 2.54 προκύπτει η περιγραφή μιας προσαρμοσμένης αντίστασης στο πεδίο κυμάτων μέσω της Εξίσωσης 2.56:

$$b = 0 \quad (2.56)$$

Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι μια προσαρμοσμένη αντίσταση απορροφάει οποιοδήποτε προσπίπτον κύμα a χωρίς να παράγει κάποιο ανακλώμενο κύμα b . Στην Εικόνα 2.3 απεικονίζεται η αναπαράσταση WDF μιας προσαρμοσμένης αντίστασης, όπου γενικά ο συμβολισμός \mapsto υποδηλώνει πως μια θύρα είναι προσαρμοσμένη.



Εικόνα 2.3: Αναπαράσταση WDF αντίστασης

2.2.4.2 Πυκνωτής

Ένας πυκνωτής μοντελοποιείται ως στοιχείο WDF αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις 2.52 και 2.53 στην αναπαράσταση εμπέδησης που ορίζεται από τις Εξισώσεις 1.41 και 1.45, οδηγώντας ύστερα από την εφαρμογή του διγραμμικού μετασχηματισμού και της ιδιότητας χρονικής ολίσθησης του μετασχηματισμού Z στην Εξίσωση 2.57:

$$b[n] = a[n-1] + \frac{T_s - 2R_p C}{T_s + 2R_p C} (a[n] - b[n-1]) \quad (2.57)$$

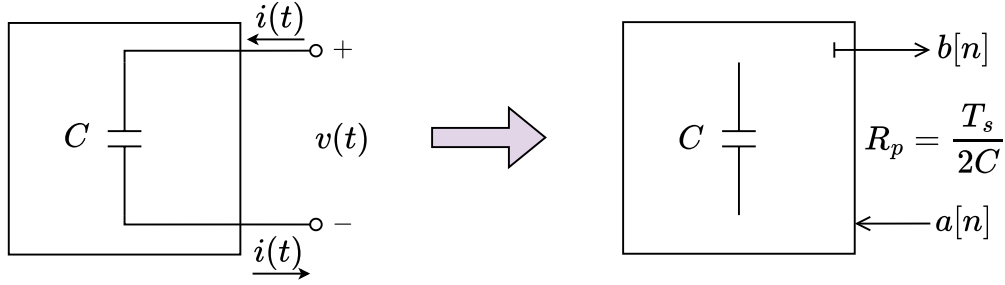
Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής $b[n] = f(a[n])$, επομένως η προσαρμογή ενός πυκνωτή πραγματοποιείται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.58:

$$R_p = \frac{T_s}{2C} \quad (2.58)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.58 στην Εξίσωση 2.57 προκύπτει η περιγραφή ενός προσαρμοσμένου πυκνωτή στο πεδίο κυμάτων μέσω της Εξίσωσης 2.59:

$$b[n] = a[n - 1] \quad (2.59)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ένας πυκνωτής μπορεί να διακριτοποιηθεί με οποιαδήποτε κατάλληλη μέθοδο, οδηγώντας έτσι σε διαφορετικές σχέσεις από τις παραπάνω. Η αναπαράσταση WDF ενός προσαρμοσμένου πυκνωτή απεικονίζεται στην Εικόνα 2.4:



Εικόνα 2.4: Αναπαράσταση WDF πυκνωτή

2.2.4.3 Πηνίο

Ένα πηνίο μοντελοποιείται ως στοιχείο WDF αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις 2.52 και 2.53 στην αναπαράσταση εμπέδησης που ορίζεται από τις Εξισώσεις 1.41 και 1.46, οδηγώντας ύστερα από την εφαρμογή του διγραμμικού μετασχηματισμού και της ιδιότητας χρονικής ολίσθησης του μετασχηματισμού Z στην Εξίσωση 2.60:

$$b[n] = -a[n - 1] + \frac{2L - R_p T_s}{2L + R_p T_s} (a[n] + b[n - 1]) \quad (2.60)$$

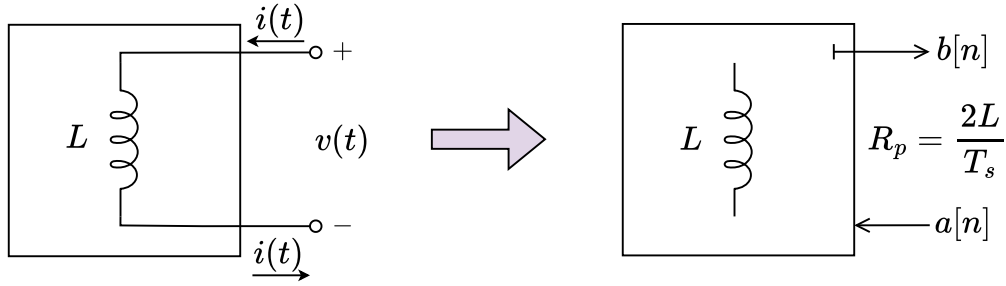
Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής $b[n] = f(a[n])$, επομένως η προσαρμογή ενός πηνίου πραγματοποιείται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.61:

$$R_p = \frac{2L}{T_s} \quad (2.61)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.61 στην Εξίσωση 2.60 προκύπτει η περιγραφή ενός προσαρμοσμένου πηνίου στο πεδίο κυμάτων μέσω της Εξίσωσης 2.62:

$$b[n] = -a[n - 1] \quad (2.62)$$

Παρόμοια με τον πυκνωτή, ένα πηνίο μπορεί να διακριτοποιηθεί με οποιαδήποτε κατάλληλη μέθοδο, οδηγώντας έτσι σε διαφορετικές σχέσεις από τις παραπάνω. Η αναπαράσταση WDF ενός προσαρμοσμένου πηνίου απεικονίζεται στην Εικόνα 2.5:



Εικόνα 2.5: Αναπαράσταση WDF πηνίου

2.2.4.4 Ιδανική Πηγή Τάσης

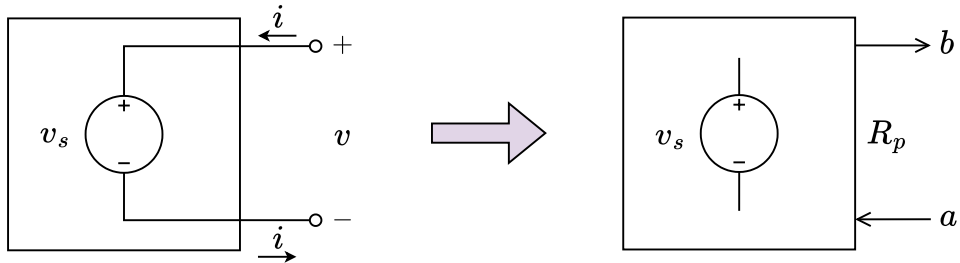
Μια ιδανική πηγή τάσης v_s που αναπαρίσταται ως θύρα περιγράφεται από την Εξίσωση 2.63:

$$v = v_s \quad (2.63)$$

Η μοντελοποίηση μιας τέτοιας θύρας ως στοιχείο WDF γίνεται αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.52 στην Εξίσωση 2.63, οδηγώντας ύστερα από πράξεις στην Εξίσωση 2.64:

$$b = 2v_s - a \quad (2.64)$$

Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής $b[n] = f(a[n])$, ωστόσο μια ιδανική πηγή τάσης δε μπορεί να προσαρμοστεί μέσω της αντίστασης θύρας R_p , επομένως μπορεί να τοποθετηθεί μόνο στη ρίζα ενός δέντρου WDF. Η αναπαράσταση WDF μιας ιδανικής πηγής τάσης απεικονίζεται στην Εικόνα 2.6:



Εικόνα 2.6: Αναπαράσταση WDF ιδανικής πηγής τάσης

2.2.4.5 Μη Ιδανική Πηγή Τάσης

Η προσαρμογή μιας ιδανικής πηγής τάσης επιτυγχάνεται συνδυάζοντας τη με μια αντίσταση σε σειρά, είτε εφόσον αυτή ήδη υπάρχει είτε τροποποιώντας ελαφρώς το κύκλωμα εισάγοντας μια μικρή αντίσταση σε σειρά με την πηγή. Έτσι, προκύπτει μια μη ιδανική πηγή τάσης v_s με αντίσταση R_s που αναπαρίσταται ως θύρα και περιγράφεται βάσει του KVL από την Εξίσωση 2.65:

$$v - v_s = iR_s \quad (2.65)$$

Η μοντελοποίηση μιας τέτοιας θύρας ως στοιχείο WDF γίνεται αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις 2.52 και 2.53 στην Εξίσωση 2.65, οδηγώντας έτσι στην Εξίσωση 2.66:

$$b = \frac{2R_p}{R_s + R_p}v_s + \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p}a \quad (2.66)$$

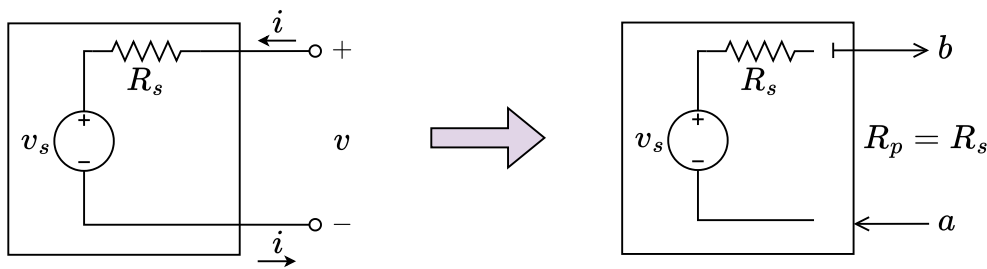
Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής $b[n] = f(a[n])$, επομένως η προσαρμογή μιας μη ιδανικής πηγής τάσης πραγματοποιείται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.67:

$$R_p = R_s \quad (2.67)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.67 στην Εξίσωση 2.66 προκύπτει η περιγραφή μιας προσαρμοσμένης μη ιδανικής πηγής τάσης στο πεδίο κυμάτων σύμφωνα με την Εξίσωση 2.68:

$$b = v_s \quad (2.68)$$

Η αναπαράσταση WDF μιας προσαρμοσμένης μη ιδανικής πηγής τάσης απεικονίζεται στην Εικόνα 2.7:



Εικόνα 2.7: Αναπαράσταση WDF μη ιδανικής πηγής τάσης

2.2.4.6 Ιδανική Πηγή Ρεύματος

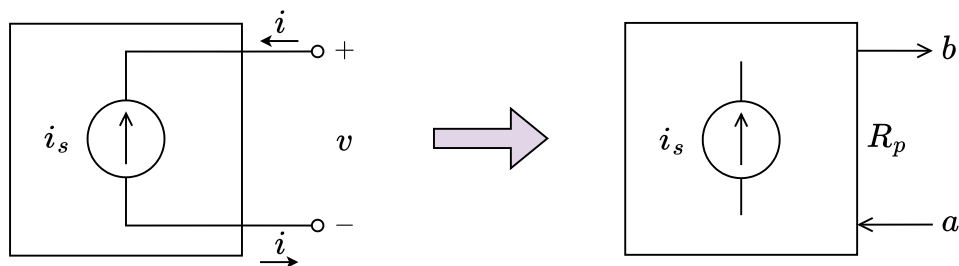
Μια ιδανική πηγή ρεύματος i_s που αναπαρίσταται ως θύρα περιγράφεται από την Εξίσωση 2.69:

$$i = -i_s \quad (2.69)$$

Η μοντελοποίηση μιας τέτοιας θύρας ως στοιχείο WDF γίνεται αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.53 στην Εξίσωση 2.69, οδηγώντας ύστερα από πράξεις στην Εξίσωση 2.70:

$$b = 2R_p i_s - a \quad (2.70)$$

Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής $b[n] = f(a[n])$, ωστόσο μια ιδανική πηγή ρεύματος δε μπορεί να προσαρμοστεί μέσω της αντίστασης θύρας R_p , επομένως μπορεί να τοποθετηθεί μόνο στη ρίζα ενός δέντρου WDF. Η αναπαράσταση WDF μιας ιδανικής πηγής ρεύματος απεικονίζεται στην Εικόνα 2.8:



Εικόνα 2.8: Αναπαράσταση WDF ιδανικής πηγής ρεύματος

2.2.4.7 Μη Ιδανική Πηγή Ρεύματος

Η προσαρμογή μιας ιδανικής πηγής ρεύματος επιτυγχάνεται συνδυάζοντας τη με μια παράλληλη αντίσταση, είτε εφόσον αυτή ήδη υπάρχει είτε τροποποιώντας ελαφρώς το κύκλωμα εισάγοντας μια μεγάλη αντίσταση παράλληλα με την πηγή. Έτσι, προκύπτει μια μη ιδανική πηγή ρεύματος i_s με αντίσταση R_s που αναπαρίσταται ως θύρα και περιγράφεται βάσει του KCL από την Εξίσωση 2.71:

$$i + i_s = \frac{v}{R_s} \quad (2.71)$$

Η μοντελοποίηση μιας τέτοιας θύρας ως στοιχείο WDF γίνεται αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις 2.52 και 2.53 στην Εξίσωση 2.71, οδηγώντας έτσι στην Εξίσωση 2.72:

$$b = \frac{2R_s R_p}{R_s + R_p} i_s + \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p} a \quad (2.72)$$

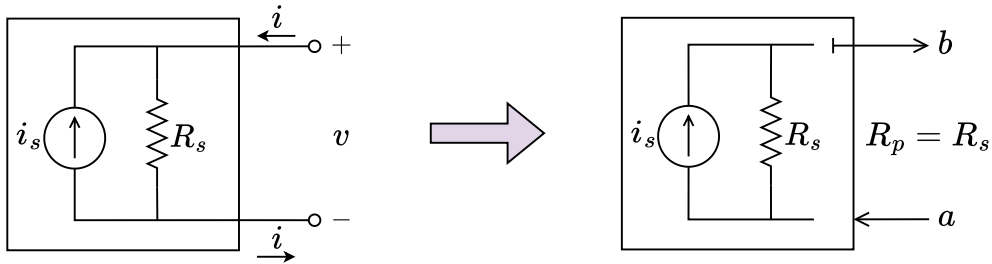
Η παραπάνω σχέση είναι της μορφής $b[n] = f(a[n])$, επομένως η προσαρμογή μιας μη ιδανικής πηγής ρεύματος πραγματοποιείται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.73:

$$R_p = R_s \quad (2.73)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση 2.73 στην Εξίσωση 2.72 προκύπτει η περιγραφή μιας προσαρμοσμένης μη ιδανικής πηγής ρεύματος στο πεδίο κυμάτων σύμφωνα με την Εξίσωση 2.74:

$$b = R_s i_s \quad (2.74)$$

Η αναπαράσταση WDF μιας προσαρμοσμένης μη ιδανικής πηγής ρεύματος απεικονίζεται στην Εικόνα 2.9:



Εικόνα 2.9: Αναπαράσταση WDF μη ιδανικής πηγής ρεύματος

2.2.4.8 Σειριακός Προσαρμογέας

Τα κυκλωματικά στοιχεία που βρίσκονται σε σειρά μεταξύ τους συνδέονται σε ένα δέντρο WDF μέσω ενός θεωρητικού στοιχείου που αποκαλείται *σειριακός προσαρμογέας* και συνδέει σε σειρά δύο ή περισσότερες θύρες. Στη γενική περίπτωση των N θυρών σε σειρά, η σχέση ανάμεσα στις τάσεις στα άκρα τους περιγράφεται από την Εξίσωση 2.75:

$$\sum_{k=1}^N v_k = 0 \quad (2.75)$$

Αντίστοιχα, η σχέση ανάμεσα στα ρεύματα που τις διαρρέουν διατυπώνεται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.76:

$$i_1 = i_2 = \dots = i_N \quad (2.76)$$

Η μοντελοποίηση ενός σειριακού προσαρμογέα N θυρών ως στοιχείο WDF γίνεται συνδυάζοντας τις Εξισώσεις 2.50 και 2.53 με τις Εξισώσεις 2.75 και 2.76, καταλήγοντας ύστερα από πράξεις στην Εξίσωση 2.77:

$$b_i = a_i - \gamma_i \sum_{k=1}^N a_k, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.77)$$

Στην παραπάνω σχέση, ο συντελεστής γ_i εκφράζεται μέσω της Εξίσωσης 2.78:

$$\gamma_i = \frac{2R_i}{\sum_{k=1}^N R_k}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.78)$$

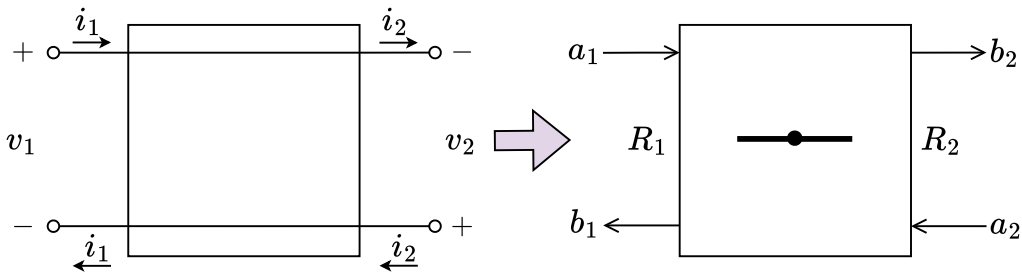
Όπως φαίνεται παραπάνω, κάθε θύρα i ενός σειριακού προσαρμογέα χαρακτηρίζεται από μια αντίσταση R_i , η οποία αντιστοιχεί στην αντίσταση θύρας R_p του στοιχείου που έχει συνδεθεί σε αυτή τη θύρα. Για να είναι δυνατή η τοποθέτηση ενός σειριακού προσαρμογέα σε κάποιον ενδιάμεσο κόμβο ενός δέντρου WDF είναι απαραίτητο η θύρα που *κοιτάζει* προς τη ρίζα του δέντρου να είναι προσαρμοσμένη. Έτσι, με γνώμονα η Εξίσωση 2.77 να μην έχει τη μορφή $b_i[n] = f(a_i[n])$, η προσαρμογή μιας θύρας i πραγματοποιείται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.79:

$$R_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N R_k \quad (2.79)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Εξισώσεις 2.77 και 2.78 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση ενός σειριακού προσαρμογέα μέσω ενός *πίνακα σκέδασης S*, όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 2.80:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \gamma_1 & -\gamma_1 & \cdots & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & 1 - \gamma_2 & \cdots & -\gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_N & -\gamma_N & \cdots & 1 - \gamma_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} \quad (2.80)$$

Η αναπαράσταση WDF ενός σειριακού προσαρμογέα δύο θυρών απεικονίζεται στην Εικόνα 2.10:



Εικόνα 2.10: Αναπαράσταση WDF σειριακού προσαρμογέα δύο θυρών

2.2.4.9 Παράλληλος Προσαρμογέας

Τα κυκλωματικά στοιχεία που βρίσκονται παράλληλα μεταξύ τους συνδέονται σε ένα δέντρο WDF μέσω ενός θεωρητικού στοιχείου που αποκαλείται *παράλληλος προσαρμογέας* και συνδέει παράλληλα δύο ή περισσότερες θύρες. Στη γενική περίπτωση των N παράλληλων θυρών, η σχέση ανάμεσα στις τάσεις στα άκρα τους περιγράφεται από την Εξίσωση 2.81:

$$v_1 = v_2 = \dots = v_N \quad (2.81)$$

Αντίστοιχα, η σχέση ανάμεσα στα ρεύματα που τις διαρρέουν διατυπώνεται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.82:

$$\sum_{k=1}^N i_k = 0 \quad (2.82)$$

Η μοντελοποίηση ενός παράλληλου προσαρμογέα N θυρών ως στοιχείο WDF γίνεται συνδυάζοντας τις Εξισώσεις 2.50 και 2.52 με τις Εξισώσεις 2.81 και 2.82, καταλήγοντας ύστερα από πράξεις στην Εξίσωση 2.83:

$$b_i = \sum_{k=1}^N \gamma_k a_k - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.83)$$

Στην παραπάνω σχέση, ο συντελεστής $\gamma_k \equiv \gamma_i$ εκφράζεται μέσω της Εξίσωσης 2.84:

$$\gamma_i = \frac{2G_i}{\sum_{k=1}^N G_k}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.84)$$

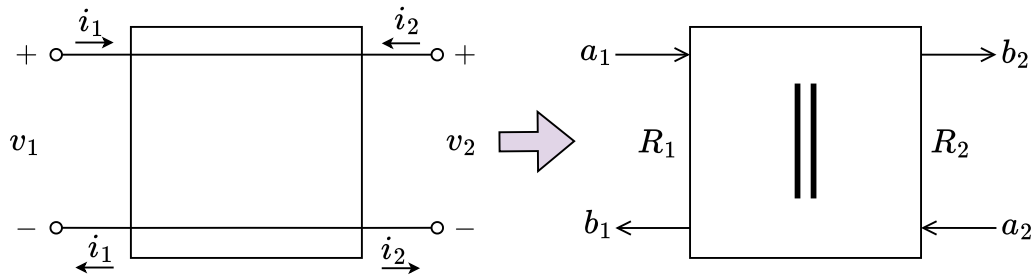
Για λόγους διευκόλυνσης, κάθε θύρα i ενός παράλληλου προσαρμογέα εκφράζεται από μια αγωγιμότητα G_i , η οποία αντιστοιχεί στην αγωγιμότητα θύρας $G_p = 1/R_p$ του στοιχείου που έχει συνδεθεί σε αυτή τη θύρα. Για να είναι δυνατή η τοποθέτηση ενός παράλληλου προσαρμογέα σε κάποιον ενδιάμεσο κόμβο ενός δέντρου WDF είναι απαραίτητο η θύρα που *κοιτάζει* προς τη ρίζα του δέντρου να είναι προσαρμοσμένη. Έτσι, με γνώμονα η Εξίσωση 2.83 να μην έχει τη μορφή $b_i[n] = f(a_i[n])$, η προσαρμογή μιας θύρας i πραγματοποιείται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.85:

$$G_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N G_k \quad (2.85)$$

Παρόμοια με τον σειριακό προσαρμογέα, οι Εξισώσεις 2.83 και 2.84 μπορούν να αξιοποιηθούν για την αναπαράσταση ενός παράλληλου προσαρμογέα μέσω ενός πίνακα σκέδασης \mathbf{S} , όπως περιγράφεται από την Εξίσωση 2.86:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 - 1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_N \\ \gamma_1 & \gamma_2 - 1 & \cdots & \gamma_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_N - 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} \quad (2.86)$$

Η αναπαράσταση WDF ενός παράλληλου προσαρμογέα δύο θυρών απεικονίζεται στην Εικόνα 2.11:



Εικόνα 2.11: Αναπαράσταση WDF παράλληλου προσαρμογέα δύο θυρών

2.2.4.10 Επισκόπηση

Η υλοποίηση ενός WDF περιλαμβάνει ένα σύνολο σχεδιαστικών επιλογών, όπως είναι η ανάθεση της ρίζας του δέντρου, ο συνδυασμός ιδανικών πηγών με αντιστάσεις κ.ά. Έχοντας σχεδιάσει ένα δέντρο WDF, ο αλγόριθμος προσομοίωσης του αντίστοιχου κυκλώματος σε κάθε χρονική στιγμή n συνοψίζεται στα εξής πέντε βήματα :

1. Συλλογή των ανακλώμενων κυμάτων $\mathbf{b}[n]$ από τα φύλλα του δέντρου
2. Διάδοση των προσπιπόντων κυμάτων $\mathbf{a}[n]$ προς τη ρίζα του δέντρου
3. Συλλογή των ανακλώμενων κυμάτων $\mathbf{b}[n]$ από τη ρίζα δέντρου
4. Διάδοση των προσπιπόντων κυμάτων $\mathbf{a}[n]$ προς τα φύλλα του δέντρου
5. Υπολογισμός της επιθυμητής εξόδου μέσω των Εξισώσεων 2.52 και 2.53

Γενικά, τα WDF είναι ιδανικά για τη μοντελοποίηση κυκλωμάτων με μεγάλο αριθμό πυκνωτών και πηγών, καθώς κάθε επιπλέον στοιχείο αυξάνει πρακτικά γραμμικά το υπολογιστικό κόστος της προσομοίωσης. Ωστόσο, από τη μία μεριά, τα WDF στην κλασική τους μορφή περιορίζονται σημαντικά στα κυκλώματα σειριακής και παράλληλης συνδεσμολογίας *μονόθυρων* στοιχείων, τα οποία αποτελούνται από το πολύ ένα μη προσαρμόσιμο στοιχείο. Από την άλλη μεριά, τα WDF αδυνατούν να μοντελοποιήσουν τα περισσότερα μη γραμμικά κυκλώματα, καθώς τα μη γραμμικά στοιχεία δεν είναι προσαρμόσιμα. Έτσι, για παράδειγμα, ένα απλό κύκλωμα με μία διόδο μπορεί να μοντελοποιηθεί, τοποθετώντας υποχρεωτικά τη διόδο στη ρίζα του δέντρου WDF, αλλά τα κυκλώματα που περιέχουν έστω και ένα τρανζίστορ δε μπορούν να μοντελοποιηθούν, καθώς το τρανζίστορ αποτελεί ένα *δίθυρο* στοιχείο. Οι παραπάνω περιορισμοί αντιμετωπίζονται με την εισαγωγή του λεγόμενου *προσαρμογέα τύπου \mathcal{R}* , ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο MNA και χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση πολύπλοκων γραμμικών και μη γραμμικών κυκλωμάτων, συμπεριλαμβάνοντας συνδεσμολογίες με τελεστικούς ενισχυτές [51]–[56]. Ακόμα, η διαδικασία αναπαράστασης ενός κυκλώματος μέσω ενός δέντρου WDF μπορεί να αυτοματοποιηθεί, αν και αυτό αποτελεί ένα αρκετά πιο πολύπλοκο εγχείρημα σε σύγκριση με την αυτοματοποίηση των τεχνικών που παρουσιάστηκαν νωρίτερα.

2.3 Εμπειρικές Προσεγγίσεις

2.3.1 Σειρές Volterra

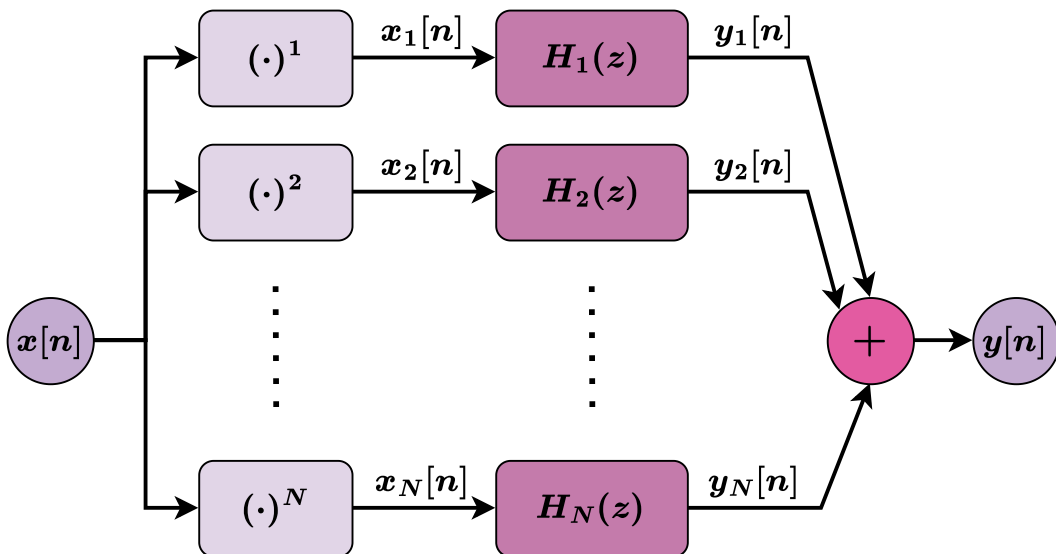
Οι *σειρές Volterra* αποτελούν επέκταση της κρουστικής απόκρισης για συστήματα που δε μπορούν να χαρακτηριστούν ως LTI, τα οποία αντιστοιχούν σε κυκλώματα που περιέχουν μη γραμμικά στοιχεία [57]–[64]. Γενικά, αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ ενός LTI διακριτού συστήματος είναι γνωστή και έχει μήκος M δείγματα, τότε η έξοδος του $y[n]$ για οποιαδήποτε είσοδο $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω ενός φίλτρου *Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης* (*Finite Impulse Response* | **FIR**), το οποίο υλοποιεί την πράξη της συνέλιξης και περιγράφεται από την Εξίσωση 2.87:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n-k] \quad (2.87)$$

Όταν ένα μη γραμμικό σύστημα διεγείρεται από ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου με *θεμελιώδη* συχνότητα f_0 , το αποτέλεσμα είναι στο σήμα εξόδου να εμφανίζονται ακέραια πολλαπλάσια της f_0 που ονομάζονται *αρμονικές* συχνότητες. Οι σειρές Volterra λαμβάνουν υπόψιν αυτό το φαινόμενο θεωρώντας κρουστικές αποκρίσεις h_i υψηλότερης τάξης, οι οποίες υπολογίζονται πειραματικά για πεπερασμένο αριθμό N αρμονικών μέσω μιας μεθόδου που αποκαλείται *Εκθετική Σάρωση Ημιτόνου* (*Exponential Sine Sweep* | **ESS**). Μια απλοποιημένη μορφή των σειρών Volterra που χαρακτηρίζεται ως *μη γραμμική συνέλιξη* διατυπώνεται από την Εξίσωση 2.88:

$$y[n] = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{M-1} h_i[k] x^i[n-k] \quad (2.88)$$

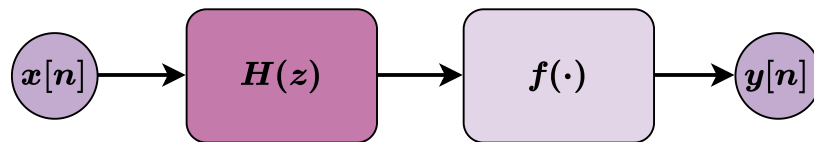
Η παραπάνω σχέση μπορεί να οπτικοποιηθεί μέσω του μοντέλου της Εικόνας 2.12, όπου με $H_i(z)$ συμβολίζεται η συνάρτηση μεταφοράς που αντιστοιχεί στην κρουστική απόκριση $h_i[n]$, υποδηλώνοντας πως πρόκειται ουσιαστικά για μια διαδικασία συχνοτικού φιλτραρίσματος, η οποία ωστόσο πραγματοποιείται στο πεδίο του χρόνου.



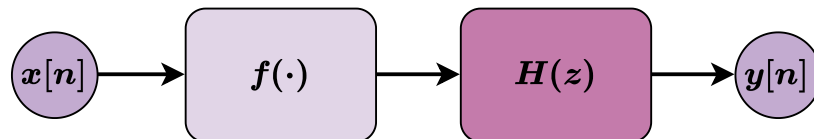
Εικόνα 2.12: Μοντέλο σειράς Volterra

2.3.2 Μοντέλα Wiener–Hammerstein

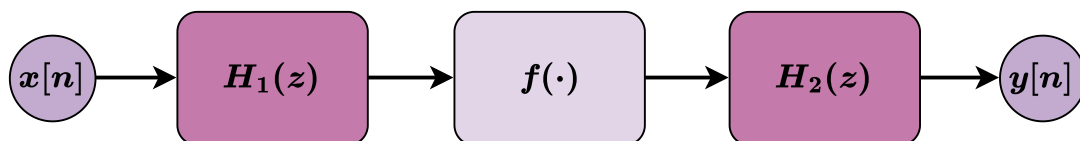
Τα μοντέλα Wiener–Hammerstein αποτελούν μια ειδική μορφή των σειρών Volterra, η οποία βασίζεται στην εφαρμογή κάποιου FIR ή IIR φίλτρου που αντιστοιχεί σε ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και μιας στατικής μη γραμμικότητας που ορίζεται μέσω μιας μη γραμμικής συνάρτησης f [65]–[70]. Ειδικότερα, διακρίνεται αρχικά το μοντέλο Wiener, στο οποίο η μη γραμμικότητα ακολουθεί το φιλτράρισμα, όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 2.13, ενώ αντίθετα στο μοντέλο Hammerstein η μη γραμμικότητα προηγείται του φιλτραρίσματος, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.14. Συνδυάζοντας αυτά τα δύο μοντέλα προκύπτει το μοντέλο Wiener–Hammerstein, το οποίο αποτελείται από δύο ξεχωριστά φίλτρα, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.15. Τα μοντέλα που περιγράφηκαν παραπάνω χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων προσαρμόζοντας τις τιμές των παραμέτρων τους μέσω κάποιας μεθόδου βελτιστοποίησης, όπως είναι ο αλγόριθμος *Levenberg–Marquardt*. Στόχος αυτής της διαδικασίας είναι η ελαχιστοποίηση κάποιας *συνάρτησης κόστους*, η οποία επιτυγχάνεται όταν η έξοδος του μοντέλου προσεγγίζει το σήμα αναφοράς που προκύπτει από τη μέτρηση της εξόδου του κυκλώματος για κοινό σήμα εισόδου.



Εικόνα 2.13: Μοντέλο Wiener



Εικόνα 2.14: Μοντέλο Hammerstein



Εικόνα 2.15: Μοντέλο Wiener–Hammerstein

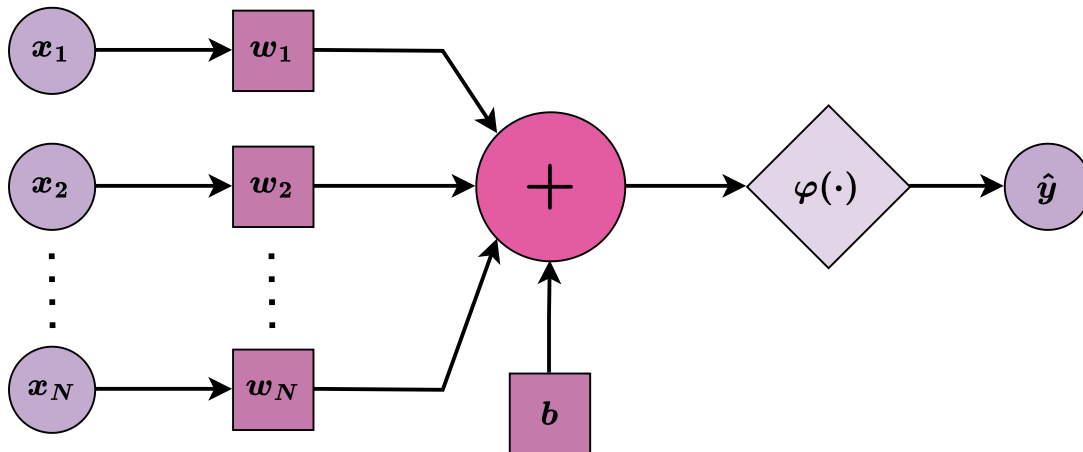
Τα μοντέλα Wiener–Hammerstein, καθώς και οι σειρές Volterra γενικότερα, αποτελούν μεθόδους *αναγνώρισης συστήματος* οι οποίες είναι ιδανικές για την προσομοίωση κυκλωμάτων που χαρακτηρίζονται από ασθενείς μη γραμμικότητες. Ωστόσο, το μεγαλύτερο μειονέκτημα αυτών των τεχνικών είναι ότι μοντελοποιούν αποκλειστικά μη παραμετρικά συστήματα, στην προκειμένη περίπτωση δηλαδή κυκλώματα στα οποία τα ποτενσιόμετρα που ρυθμίζουν διάφορα χαρακτηριστικά του ήχου παραμένουν σε σταθερή θέση. Έτσι, για την προσομοίωση ενός κυκλώματος με διαφορετικές ρυθμίσεις απαιτείται η προσαρμογή επιπλέον μοντέλων, ενώ η ελεύθερη χρήση του πλήρους εύρους ενός ποτενσιόμετρου είναι πρακτικά αδύνατη.

2.3.3 Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα

Τα *Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα* (*Artificial Neural Networks* | **ANNs**) αποτελούν μια συνεχώς εξελισσόμενη μέθοδο μηχανικής μάθησης με καινοτόμες εφαρμογές στην πλειονότητα των επιστημονικών πεδίων, η οποία πρόσφατα έχει επεκτείνει την παρουσία της και στο αντικείμενο της Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης [71]–[73]. Ένα νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από κόμβους, οι οποίοι ονομάζονται *νευρώνες* και οργανώνονται σε *επίπεδα*, μεταβιβάζοντας πληροφορία από την είσοδο προς την έξοδο του δικτύου. Ειδικότερα, κάθε νευρώνας δέχεται ένα πλήθος N εισόδων x_i , οι οποίες σταθμίζονται με αντίστοιχα *βάρη* w_i και αθροίζονται μεταξύ τους, προσθέτοντας επιπλέον έναν *συντελεστή πόλωσης* b . Στη συνέχεια, η τιμή αυτού του αθροίσματος περνάει μέσα από μια μη γραμμική *συνάρτηση ενεργοποίησης* $\varphi(\cdot)$ (π.χ. σιγμοειδής, υπερβολική εφαπτομένη, κ.ά.), καταλήγοντας στην τελική έξοδο \hat{y} , η οποία συνήθως αναφέρεται ως *πρόβλεψη* του δικτύου. Μαθηματικά, η διαδικασία αυτή διατυπώνεται σύμφωνα με την Εξίσωση 2.89:

$$\hat{y} = \varphi \left(\sum_{i=1}^N w_i x_i + b \right) \quad (2.89)$$

Αντίστοιχα, ένας τεχνητός νευρώνας μπορεί να οπτικοποιηθεί μέσω της Εικόνας 2.16:



Εικόνα 2.16: Οπτικοποίηση τεχνητού νευρώνα

Μία από τις πιο απλές αρχιτεκτονικές νευρωνικών δικτύων που χρησιμοποιούνται στην πράξη για την επίλυση διάφορων προβλημάτων είναι το λεγόμενο *Πολλαπλό Αντίληπτο* (*Multilayer Perceptron* | **MLP**), το οποίο χαρακτηρίζεται ως *Νευρωνικό Δίκτυο Πρόσθιας Τροφοδότησης* (*Feedforward Neural Network* | **FNN**), καθώς η πληροφορία κατευθύνεται αποκλειστικά από την είσοδο προς την έξοδο του δικτύου. Σε εφαρμογές ήχου, η χρήση των MLP είναι σχετικά περιορισμένη, καθώς συνήθως προτιμάται η χρήση των *Συνελκτικών Νευρωνικών Δικτύων* (*Convolutional Neural Networks* | **CNNs**) [74], μιας άλλης αρχιτεκτονικής FNN η οποία βασίζεται στην πράξη της συνέλιξης, λειτουργώντας παρόμοια με τα FIR φίλτρα. Ειδικότερα, πολλές προσεγγίσεις προσομοίωσης κυκλωμάτων ήχου βασίζονται στην υιοθέτηση της αρχιτεκτονικής του νευρωνικού δικτύου *WaveNet* [75]–[77], το οποίο χρησιμοποιεί συνελκτικά επίπεδα για την παραγωγή κυματομορφών ήχου υψηλής ποιότητας.

Από την άλλη μεριά, είναι καθιερωμένη η χρήση των *Αναδρομικών Νευρωνικών Δικτύων* (*Recurrent Neural Networks* | **RNNs**) [78], στα οποία η πληροφορία της εξόδου επιστρέφει στην είσοδο μέσω κλάδων ανάδρασης, λειτουργώντας αντίστοιχα με τα IIR φίλτρα, ενώ δύο από τις σημαντικότερες παραλλαγές των RNN αποτελούν οι *Αναδρομικές Μονάδες Πυλών* (*Gated Recurrent Units* | **GRUs**) και τα λεγόμενα δίκτυα *Μακράς Βραχυπρόθεσμης Μνήμης* (*Long Short-Term Memory* | **LSTM**) [79].

Κατά γενικό κανόνα, τα νευρωνικά δίκτυα σε εφαρμογές Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης χρειάζονται τουλάχιστον 3 λεπτά ηχητικών δεδομένων για να μπορέσουν να προσομοιώσουν ικανοποιητικά ένα κύκλωμα ήχου. Η διαδικασία εκπαίδευσης ενός νευρωνικού δικτύου αξιοποιεί κυρίως δεδομένα από ηχογραφήσεις σημάτων εισόδου και εξόδου ενός κυκλώματος, ανανεώνοντας επαναληπτικά τα βάρη και τους συντελεστές πόλωσης των νευρώνων του δικτύου με στόχο την ελαχιστοποίηση κάποιας συνάρτησης κόστους. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται βάσει της διαφοράς ανάμεσα στην πρόβλεψη του δικτύου \hat{y} και την επιθυμητή έξοδο y , με μια από τις πιο συνηθισμένες επιλογές να αποτελεί ο *Λόγος Σφάλματος προς Σήμα* (*Error-to-Signal Ratio* | **ESR**), ο οποίος διατυπώνεται από την Εξίσωση 2.90:

$$\mathcal{E}_{ESR} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (y_p[n] - \hat{y}_p[n])^2}{\sum_{n=0}^{N-1} y_p[n]^2} \quad (2.90)$$

Στην παραπάνω σχέση, ο δείκτης p υποδηλώνει την επεξεργασία της κάθε εξόδου με ένα φίλτρο *προ-έμφασης*, η οποία πραγματοποιείται με στόχο τη βελτίωση της απόδοσης του δικτύου στις υψηλές συχνότητες [80]. Ακόμα, συχνά εισάγεται ένας επιπλέον όρος DC σφάλματος, ο οποίος περιγράφει τη συστηματική απόκλιση της προβλεπόμενης εξόδου από την επιθυμητή, σύμφωνα με την Εξίσωση 2.91:

$$\mathcal{E}_{DC} = \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - \hat{y}[n]) \right)^2}{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n]^2} \quad (2.91)$$

Έτσι, η τελική συνάρτηση κόστους υπολογίζεται βάσει της Εξίσωσης 2.92:

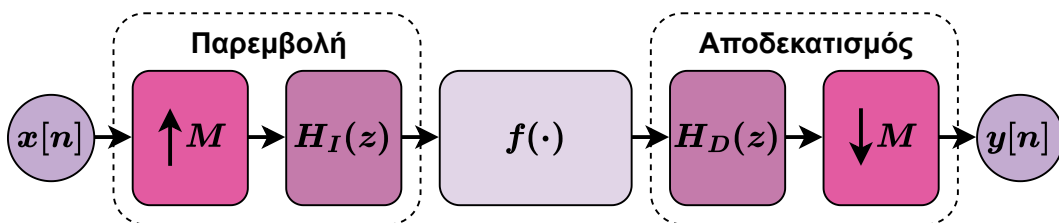
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ESR} + \mathcal{E}_{DC} \quad (2.92)$$

Πέρα από την απευθείας παραγωγή κυματομορφών ήχου, τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να ενσωματωθούν σε συνδυαστικά μοντέλα προσομοίωσης κυκλωμάτων, με ενδεικτικές εφαρμογές στην προσέγγιση μη γραμμικών συναρτήσεων και την επίλυση διαφορικών εξισώσεων [81], [82]. Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει και στην έννοια της *Διαφορίσιμης Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος* (*Differentiable Digital Signal Processing* | **DDSP**), η οποία αποτελεί μια προσέγγιση εκμάθησης ερμηνεύσιμων παραμέτρων (π.χ. συντελεστών φίλτρων) με τη χρήση νευρωνικών δικτύων [83]–[87]. Ακόμα, τα νευρωνικά δίκτυα διαθέτουν το σημαντικό πλεονέκτημα ότι, εισάγοντας τις θέσεις των ποτενσιομέτρων ως επιπλέον εισόδους, μπορούν να προσομοιώσουν το πλήρες εύρος ρυθμίσεων ενός κυκλώματος, με τίμημα την απαίτηση σημαντικά μεγαλύτερου συνόλου δεδομένων για την εκπαίδευσή τους [88], [89]. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί πως για την αποφυγή απρόβλεπτων αποτελεσμάτων τα νευρωνικά δίκτυα οφείλουν γενικά να διαχειρίζονται σήματα με συχνότητα δειγματοληψίας η οποία ταυτίζεται με αυτή που χρησιμοποιήθηκε κατά την εκπαίδευσή τους, ωστόσο έχουν υπάρξει προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση αυτού του περιορισμού [90].

2.4 Πρακτικά Ζητήματα

Αναπόφευκτα, κάθε ψηφιακή προσομοίωση ενός κυκλώματος ήχου θα παρουσιάζει διαφορές από το αντίστοιχο αναλογικό σύστημα, ακόμα και αν αυτές δε γίνονται πάντα αντιληπτές. Από τη μία μεριά, οι θεωρητικές προσεγγίσεις εισάγουν σφάλματα λόγω των προσεγγιστικών μεθόδων διακριτοποίησης, των διάφορων μαθηματικών απλοποιήσεων και των αποκλίσεων ανάμεσα στις ονομαστικές και τις πραγματικές τιμές των κυκλωματικών στοιχείων. Από την άλλη μεριά, είναι πρακτικά αδύνατο για τα μαθηματικά μοντέλα των εμπειρικών προσεγγίσεων να περιγράψουν με απόλυτη ακρίβεια ένα πραγματικό σύστημα. Ανεξαρτήτως προσέγγισης, τα εκ φύσεως μη γραμμικά κυκλώματα παραμόρφωσης ήχου εισάγουν στα σήματα εισόδου υψηλότερες συχνότητες, οι οποίες μπορούν να κάνουν αντιληπτό το φαινόμενο της αναδίπλωσης συχνότητας, αν ξεπεράσουν τη συχνότητα Nyquist. Ακόμα, ένα άλλο χαρακτηριστικό φαινόμενο, το οποίο εμφανίζεται λόγω της εφαρμογής κάποιας μεθόδου διακριτοποίησης όπως ο διγραμμικός μετασχηματισμός, είναι η λεγόμενη *στρέβλωση συχνότητας*, η οποία οφείλεται στη μη γραμμική αντιστοίχιση του άπειρου εύρους των αναλογικών συχνοτήτων στο περιορισμένο εύρος των ψηφιακών συχνοτήτων που επιβάλλεται από το θεώρημα δειγματοληψίας [91].

Τα φαινόμενα που περιγράφηκαν παραπάνω μπορούν να αντιμετωπιστούν μέσω μιας διαδικασίας που ονομάζεται *υπερδειγματοληψία* και αποτελείται από τα στάδια της *παρεμβολής* και του *αποδεκατισμού* [92]–[94]. Κατά το στάδιο της παρεμβολής, η υπερδειγματοληψία με συντελεστή M πραγματοποιείται εισάγοντας $M - 1$ μηδενικά ανάμεσα σε κάθε δείγμα ενός σήματος $x[n]$ που έχει δειγματοληπτηθεί με συχνότητα f_s και εφαρμόζοντας ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H_I(z)$ για την αποκοπή των πλασματικών συχνοτήτων $f > f_s/2$ που εισάγονται από αυτή τη διαδικασία. Ακολουθώντας, το νέο σήμα με συχνότητα δειγματοληψίας Mf_s εισέρχεται στο μη γραμμικό σύστημα που μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω μιας συνάρτησης $f(\cdot)$. Κατά το στάδιο του αποδεκατισμού, το σήμα περνάει από ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H_D(z)$, αποκόπτοντας τις συχνότητες $f > f_s/2$ που εισάγονται λόγω της μη γραμμικότητας του συστήματος, και στη συνέχεια υποδειγματοληπτείται διατηρώντας ένα ανά M δείγματα, καταλήγοντας έτσι στο τελικό σήμα εξόδου $y[n]$. Η διαδικασία της υπερδειγματοληψίας απεικονίζεται στην Εικόνα 2.17:



Εικόνα 2.17: Διαδικασία υπερδειγματοληψίας

Όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής M , τόσο περισσότερο περιορίζονται τα φαινόμενα αναδίπλωσης και στρέβλωσης της συχνότητας, ενώ ταυτόχρονα τα σφάλματα λόγω διακριτοποίησης ελαχιστοποιούνται. Ωστόσο, η υπερδειγματοληψία έχει ως τίμημα τη σημαντική αύξηση του υπολογιστικού κόστους της προσομοίωσης.

Γενικά, η Εικονική Αναλογική Μοντελοποίηση χαρακτηρίζεται από έναν συμβιβασμό ανάμεσα στην ακρίβεια και τις υπολογιστικές απαιτήσεις μιας προσομοίωσης. Αν το ζητούμενο ήταν μόνο η ακρίβεια, τότε τα λογισμικά τύπου SPICE θα ήταν ιδανικά και παραπάνω από αρκετά για την προσομοίωση οποιουδήποτε κυκλώματος ήχου, ωστόσο στην πράξη δε μπορούν να ανταπεξέλθουν σε συνθήκες πραγματικού χρόνου. Από την άλλη μεριά, επαναληπτικές διαδικασίες όπως είναι η μέθοδος Newton-Raphson καταναλώνουν σημαντικό υπολογιστικό χρόνο, ο οποίος όμως μπορεί να ελαττωθεί εξαιρετικά υπολογίζοντας εκ των προτέρων τις λύσεις των πεπλεγμένων και υπερβατικών εξισώσεων για ένα εύρος τιμών εισόδου και αποθηκεύοντας τις σε *Πίνακες Αναζήτησης (Lookup Tables | LUTs)* [95]. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή έχει κάποιο αντίκτυπο στην ακρίβεια, λόγω της εφαρμογής μεθόδων παρεμβολής ανάμεσα στις προϋπολογισμένες λύσεις, αλλά κυρίως στο αποτύπωμα μνήμης μιας προσομοίωσης, ενώ σε περιπτώσεις παρουσίας πολλαπλών μη γραμμικών στοιχείων μαζί με ποτενσιόμετρα καθίσταται μη πρακτική, λόγω της υψηλής διαστατικότητας που προκύπτει. Παρόμοια, ένα μεγάλο νευρωνικό δίκτυο με πολλά επίπεδα και νευρώνες μπορεί να προσομοιώνει καλύτερα ένα κύκλωμα σε σχέση με ένα μικρότερο δίκτυο, αλλά οι αντίστοιχες απαιτήσεις του σε χρόνο και μνήμη να είναι απαγορευτικές. Έτσι, ανεξάρτητα από την προσέγγιση, καθίσταται σαφές ότι η διαδικασία υλοποίησης μιας προσομοίωσης ενός κυκλώματος ήχου συνοδεύεται από επιλογές οι οποίες καθορίζονται από τις συνθήκες και τους περιορισμούς της εκάστοτε εφαρμογής.

Κεφάλαιο 3

Μεθοδολογία και Υλοποίηση

3.1 Το πετάλι BOSS DS-1

Για την υλοποίηση μιας ψηφιακής προσομοίωσης ενός κυκλώματος επεξεργασίας ήχου, στο πλαίσιο της πρακτικής εφαρμογής ορισμένων από τις τεχνικές Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης που παρουσιάστηκαν νωρίτερα, επιλέχθηκε το κλασικό πετάλι παραμόρφωσης *BOSS DS-1* [96], το οποίο απεικονίζεται στην Εικόνα 3.1. Το *BOSS DS-1* αποτελεί ιδανικό παράδειγμα για την ανάπτυξη μιας ενδεικτικής συνδυαστικής μεθοδολογίας προσομοίωσης, καθώς το κύκλωμα του περιλαμβάνει σχεδόν όλα τα βασικά γραμμικά και μη γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία, αναδεικνύοντας έτσι την ευκαιρία για μια αναλυτική και ολοκληρωμένη παρουσίαση των κυριότερων θεωρητικών προσεγγίσεων μοντελοποίησης στην πράξη.

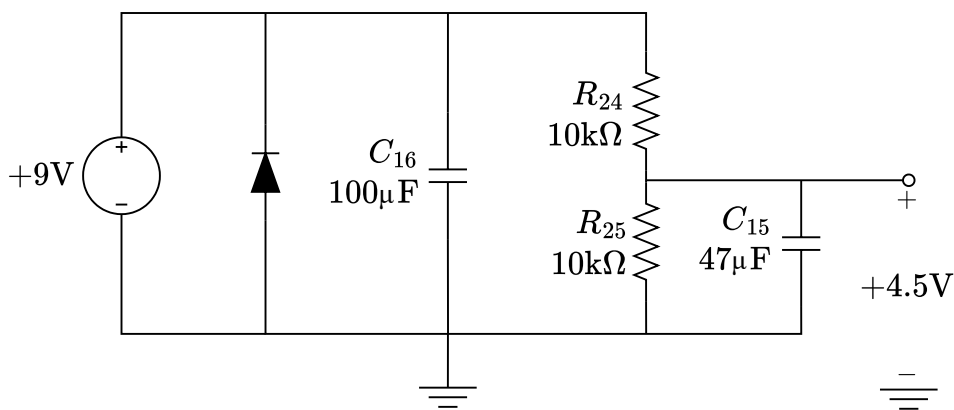


Εικόνα 3.1: Το πετάλι παραμόρφωσης *BOSS DS-1*

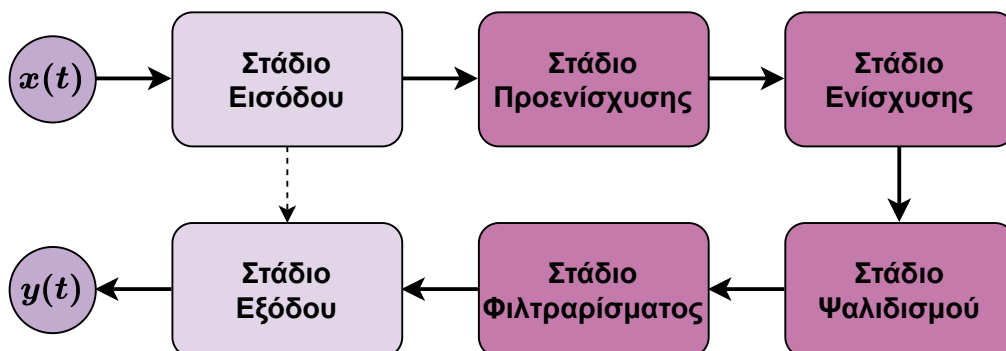
Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1, το πετάλι *BOSS DS-1* αποτελείται από τρία ποτενσιόμετρα, τα οποία είναι γραμμικά και χρησιμοποιούνται ως εξής:

- *DIST*: ρυθμίζει το ποσό παραμόρφωσης του ήχου
- *TONE*: μεταβάλλει το συχνотικό περιεχόμενο του ήχου
- *LEVEL*: καθορίζει το επίπεδο έντασης του ήχου

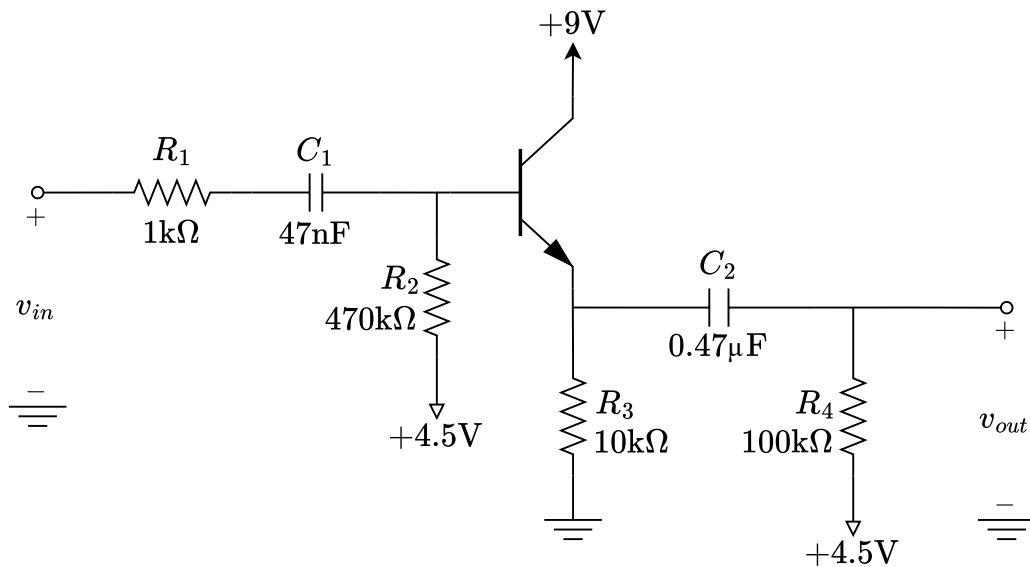
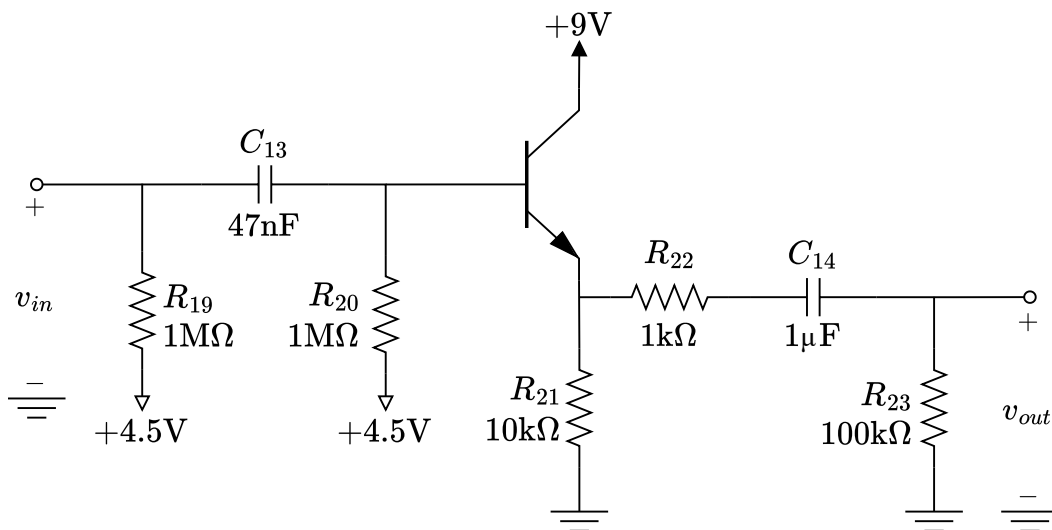
Το κύκλωμα του *BOSS DS-1* απαιτεί τροφοδοσία τάσης $+9V$, η οποία μπορεί να ληφθεί είτε από μια μπαταρία είτε από ένα εξωτερικό τροφοδοτικό και είναι αναγκαία για τη λειτουργία των τρανζίστορ και των τελεστικών ενισχυτών του κυκλώματος. Έτσι, καθώς τα στοιχεία αυτά λειτουργούν στο εύρος $0-9V$, είναι απαραίτητο σε διάφορα σημεία του κυκλώματος τα ηλεκτρικά σήματα, τα οποία γενικά μεταβάλλονται γύρω από τα $0V$, να μετατοπίζονται κατά μια σταθερή τιμή, προκειμένου να εξασφαλίζεται επαρκές περιθώριο μεταβολής και να αποφεύγεται η ανεπιθύμητη παραμόρφωση λόγω αποκοπής τους. Η διαδικασία αυτή αποκαλείται *DC πόλωση* και επιτυγχάνεται μέσω ενός διαιρέτη τάσης, ο οποίος δημιουργεί ένα σημείο αναφοράς σταθερής τάσης $+4.5V$ που αναφέρεται ως *εικονική γείωση*. Το πλήρες υποκύκλωμα τροφοδοσίας του *BOSS DS-1* απεικονίζεται στην Εικόνα 3.2, όπου οι πυκνωτές χρησιμοποιούνται πρακτικά για τη σταθεροποίηση της τάσης εισόδου από πιθανές διακυμάνσεις, ενώ η δίοδος παρέχει προστασία στο κύκλωμα σε περίπτωση σύνδεσης της πηγής τάσης με αντίστροφη πολικότητα. Στο πλαίσιο της Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης, ένα τέτοιο υποκύκλωμα δε χρειάζεται να λαμβάνεται υπόψιν στις προσομοιώσεις, πέρα από τη συμπερίληψη των $+9V$ και $+4.5V$ ως δύο ιδανικές πηγές τάσης, ωστόσο παρουσιάζεται για λόγους πληρότητας.

Εικόνα 3.2: Υποκύκλωμα τροφοδοσίας του *BOSS DS-1*

Το βασικό μέρος του κυκλώματος του *BOSS DS-1*, το οποίο διαχειρίζεται τα ηλεκτρικά σήματα μιας κιθάρας, μπορεί να διαχωριστεί εννοιολογικά σε επί μέρους κυκλωματικά στάδια συγκεκριμένης λειτουργίας, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.3:

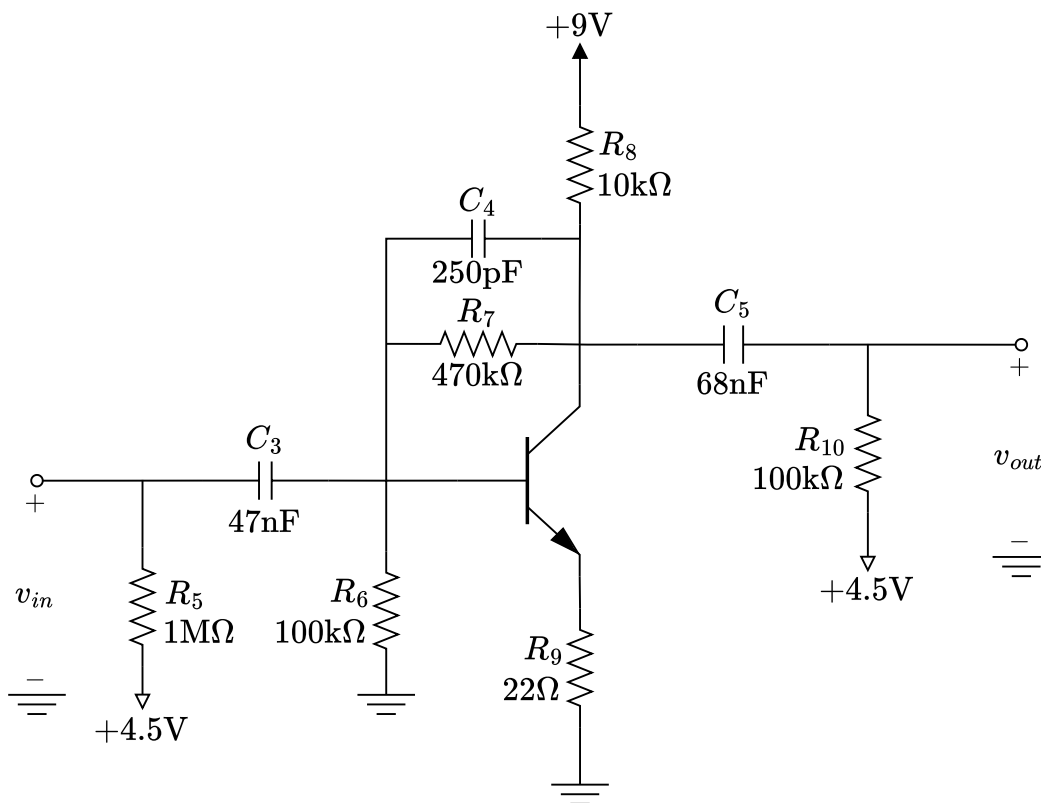
Εικόνα 3.3: Κυκλωματικά στάδια του *BOSS DS-1*

Ο διαχωρισμός αυτός διευκολύνει τη μοντελοποίηση του συνολικού κυκλώματος, υλοποιώντας μια ανεξάρτητη προσομοίωση για κάθε ξεχωριστό στάδιο. Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση αγνοεί εντελώς τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα στάδια του κυκλώματος, εισάγοντας έτσι μικρά σφάλματα τα οποία περιορίζονται όταν τα στάδια χαρακτηρίζονται από υψηλή εμπέδηση εισόδου και χαμηλή εμπέδηση εξόδου. Στις Εικόνες 3.4 και 3.5 απεικονίζονται τα στάδια εισόδου και εξόδου του *BOSS DS-1*, τα οποία αποτελούνται από ένα τρανζίστορ σε συνδεσμολογία *κοινού συλλέκτη*, παρουσιάζοντας υψηλή εμπέδηση εισόδου και χαμηλή εμπέδηση εξόδου, ενώ όταν το πετάλι είναι απενεργοποιημένο συνδέονται απευθείας μεταξύ τους μέσω μιας παράκαμψης. Έτσι, απομονώνουν διαρκώς το πετάλι από φαινόμενα αλληλεπίδρασης με εξωτερικά κυκλώματα, ενώ ταυτόχρονα η επίδραση τους στον ήχο είναι αμελητέα και επομένως μπορούν να παραληφθούν από την προσομοίωση.

Εικόνα 3.4: Στάδιο εισόδου του *BOSS DS-1*Εικόνα 3.5: Στάδιο εξόδου του *BOSS DS-1*

3.2 Στάδιο Προενίσχυσης

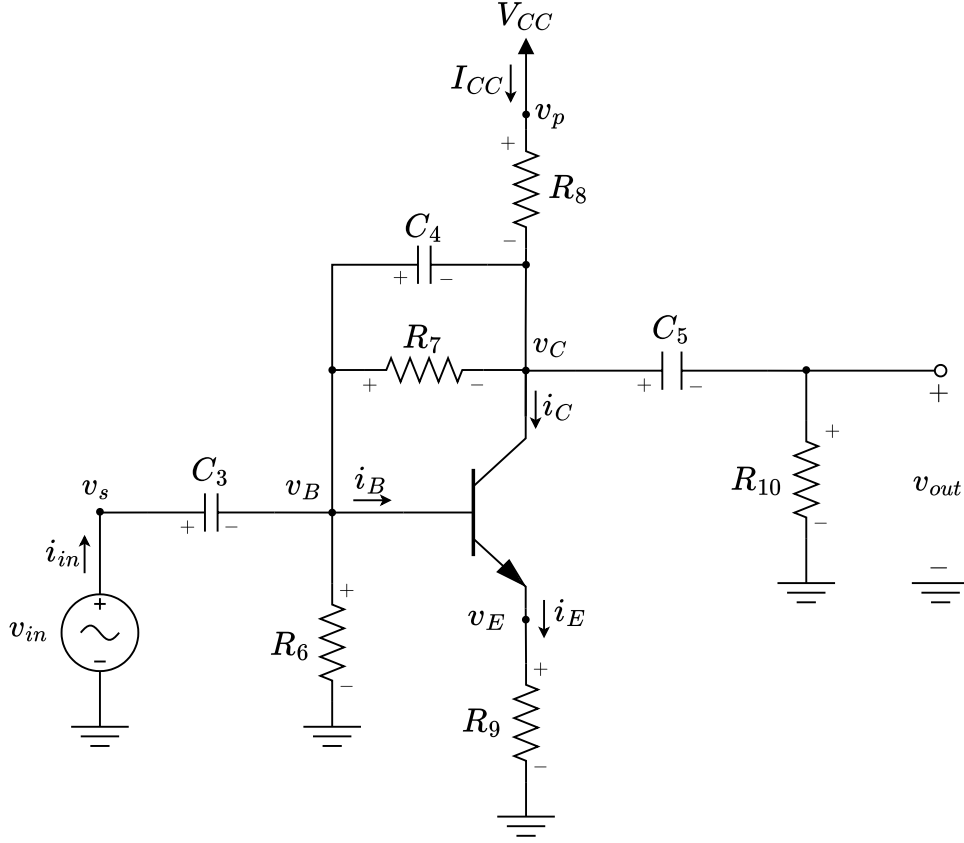
Στην Εικόνα 3.6 απεικονίζεται το στάδιο προενίσχυσης του *BOSS DS-1*, το οποίο αποτελείται από ένα τρανζίστορ σε συνδεσμολογία *κοινού εκπομπού* και υλοποιεί έναν μη γραμμικό ενισχυτή πριν από το βασικό στάδιο ενίσχυσης του πεταλιού. Πιο συγκεκριμένα, αυτός ο ενισχυτής παρουσιάζει υψηλό κέρδος τάσης, κυρίως λόγω της χαμηλής τιμής της αντίστασης R_9 , ωθώντας το τρανζίστορ στη μη γραμμική περιοχή λειτουργίας του ακόμα και για τυπικά πλάτη του σήματος εισόδου στο εύρος 100–200mV, με αποτέλεσμα την εμφάνιση ασύμμετρης παραμόρφωσης στην έξοδο.



Εικόνα 3.6: Στάδιο προενίσχυσης του *BOSS DS-1*

Προκειμένου να απλοποιηθεί η διαδικασία της μοντελοποίησης, το κύκλωμα της Εικόνας 3.6 μπορεί να τροποποιηθεί ελαφρώς, χωρίς αυτό να έχει αντίκτυπο στην ακρίβεια της προσομοίωσης. Από τη μία μεριά, η αντίσταση R_5 δεν έχει κάποια επίδραση στα ηχητικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος, καθώς ο ρόλος της είναι να αποτρέπει την παραγωγή ενός στιγμιαίου ήχου τύπου *κλικ* όταν ενεργοποιείται το πετάλι μέσω του διακόπτη του, επομένως μπορεί να παραληφθεί. Από την άλλη μεριά, η έξοδος της ψηφιακής προσομοίωσης δε χρειάζεται να είναι μετατοπισμένη κατά +4.5V, συνεπώς η αντίσταση R_{10} μπορεί να συνδεθεί απευθείας στη γείωση. Έτσι, το κύκλωμα αναφοράς που προκύπτει για την προσομοίωση του σταδίου προενίσχυσης παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.7, όπου η τάση εισόδου v_{in} έχει μοντελοποιηθεί μέσω μιας ιδανικής πηγής τάσης, ενώ οι τιμές των κυκλωματικών στοιχείων έχουν παραληφθεί για λόγους ευαναγνωσιμότητας.

Ακόμα, στην Εικόνα 3.7 η πηγή τάσης $+9V$ έχει συμβολιστεί με τη μεταβλητή V_{CC} , ενώ έχουν σημειωθεί οι τάσεις, τα ρεύματα και οι πολικότητες σε διάφορα σημεία του κυκλώματος, ως προεργασία για την κυκλωματική ανάλυση που θα ακολουθήσει.



Εικόνα 3.7: Κύκλωμα αναφοράς του σταδίου προενίσχυσης

Καθώς το κύκλωμα του σταδίου προενίσχυσης είναι μη γραμμικό, η μοντελοποίηση του μπορεί να επιτευχθεί μέσω ενός SSM που ορίζεται από τις Εξισώσεις 2.8–2.11. Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση, τα διανύσματα \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$, \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{i} , και \mathbf{y} ορίζονται σύμφωνα με τις Εξισώσεις 3.1–3.6:

$$\mathbf{x} = [v_{C3} \ v_{C4} \ v_{C5}]^T \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{v}_{C3} \ \dot{v}_{C4} \ \dot{v}_{C5}]^T \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = [v_{in} \ V_{CC}]^T \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v} = [v_{BE} \ v_{BC}]^T \quad (3.4)$$

$$\mathbf{i} = [i_B \ i_C]^T \quad (3.5)$$

$$\mathbf{y} = [v_{out}]^T \quad (3.6)$$

Τα ρεύματα i_B και i_C του τρανζίστορ υπολογίζονται μέσω των εξισώσεων Ebers-Moll για τιμές παραμέτρων $I_S = 6.734\text{fA}$, $n = 1$, $V_T = 25.85\text{mV}$, $\beta_f = 200$ και $\beta_r = 0.1$. Οι ζητούμενοι πίνακες **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **L**, **M** και **N** του χώρου καταστάσεων προκύπτουν αναλύοντας το κύκλωμα αναφοράς της Εικόνας 3.7 και εφαρμόζοντας μια ειδική παραλλαγή της μεθόδου MNA, η οποία βασίζεται στην Εξίσωση 1.70.

Συγκεκριμένα, η διαφοροποίηση που πραγματοποιείται σε αυτή την περίπτωση είναι ότι το διάνυσμα τάσεων \mathbf{V} επεκτείνεται επιπλέον με τα στοιχεία του διανύσματος $\dot{\mathbf{x}}$, ενώ τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x} ενσωματώνονται στο διάνυσμα ρευμάτων \mathbf{I} , όπως διατυπώνεται από τις Εξισώσεις 3.7 και 3.8:

$$\mathbf{V} = [v_{out} \ v_s \ v_p \ v_C \ v_B \ v_E \ I_{CC} \ i_{in} \ \dot{v}_{C_3} \ \dot{v}_{C_4} \ \dot{v}_{C_5}]^T \quad (3.7)$$

$$\mathbf{I} = [0 \ 0 \ 0 \ i_C \ i_B \ i_E \ V_{CC} \ v_{in} \ v_{C_3} \ v_{C_4} \ v_{C_5}]^T \quad (3.8)$$

Ακόμα, ο πίνακας αγωγιμότητας \mathbf{G} που συμπληρώνει την Εξίσωση 1.70 προκύπτει μέσω του συστήματος εξισώσεων που περιγράφουν το κύκλωμα της Εικόνας 3.7. Αρχικά, αναπαριστώντας τις αντιστάσεις ως αγωγιμότητες και εφαρμόζοντας τον KCL σε κάθε κόμβο του κυκλώματος προκύπτουν οι Εξισώσεις 3.9–3.14:

$$i_{in} = C_3 \dot{v}_{C_3} \quad (3.9)$$

$$I_{CC} = G_8(v_p - v_C) \quad (3.10)$$

$$C_5 \dot{v}_{C_5} = G_{10} v_{out} \quad (3.11)$$

$$C_4 \dot{v}_{C_4} + G_7(v_B - v_C) + G_8(v_p - v_C) = C_5 \dot{v}_{C_5} + i_C \quad (3.12)$$

$$C_3 \dot{v}_{C_3} = C_4 \dot{v}_{C_4} + G_6 v_B + G_7(v_B - v_C) + i_B \quad (3.13)$$

$$i_E = G_9 v_E \quad (3.14)$$

Επιπλέον, για τη συγκεκριμένη εφαρμογή της μεθόδου MNA είναι απαραίτητο να οριστούν οι βοηθητικές Εξισώσεις 3.15–3.19:

$$v_s = v_{in} \quad (3.15)$$

$$v_p = V_{CC} \quad (3.16)$$

$$v_{C_3} = v_s - v_B \quad (3.17)$$

$$v_{C_4} = v_B - v_C \quad (3.18)$$

$$v_{C_5} = v_C - v_{out} \quad (3.19)$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψιν τις Εξισώσεις 3.7 και 3.8, το σύστημα που περιγράφεται από τις Εξισώσεις 3.9–3.19 μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή πινάκων της Εξίσωσης 1.70. Επιλύοντας συμβολικά αυτό το σύστημα ως προς το διάνυσμα \mathbf{V} προκύπτουν οι αναπαραστάσεις των στοιχείων του διανύσματος \mathbf{V} ως συναρτήσεις των στοιχείων του διανύσματος \mathbf{I} . Έπειτα, αξιοποιούνται οι Εξισώσεις 3.20–3.22:

$$i_E = i_B + i_C \quad (3.20)$$

$$v_{BE} = v_B - v_E \quad (3.21)$$

$$v_{BC} = v_B - v_C \quad (3.22)$$

Αντικαθιστώντας κατάλληλα τις παραπάνω σχέσεις, τα διανύσματα $\dot{\mathbf{x}}$, \mathbf{v} και \mathbf{y} μπορούν να αναπαρασταθούν τελικά ως γραμμικές συναρτήσεις των διανυσμάτων \mathbf{x} , \mathbf{u} και \mathbf{i} μέσω των ζητούμενων πινάκων που ορίζονται από τις Εξισώσεις 3.23–3.31:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{G_6 + G_8 + G_{10}}{C_3} & -\frac{G_8 + G_{10}}{C_3} & -\frac{G_{10}}{C_3} \\ -\frac{G_8 + G_{10}}{C_4} & -\frac{G_7 + G_8 + G_{10}}{C_4} & -\frac{G_{10}}{C_4} \\ -\frac{G_{10}}{C_5} & -\frac{G_{10}}{C_5} & -\frac{G_{10}}{C_5} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{G_6 + G_8 + G_{10}}{C_3} & -\frac{G_8}{C_3} \\ \frac{G_8 + G_{10}}{C_4} & -\frac{G_8}{C_4} \\ \frac{G_{10}}{C_5} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3} \\ 0 & \frac{1}{C_4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

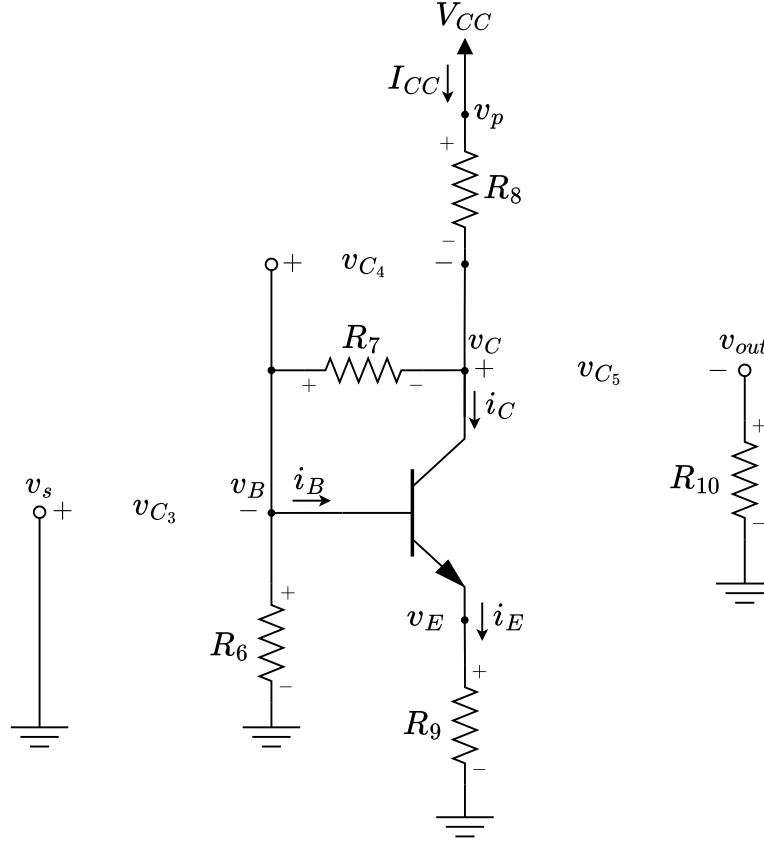
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{G_9} & -\frac{1}{G_9} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Στη συνέχεια, η προσομοίωση του σταδίου προενίσχυσης υλοποιείται με εφαρμογή της K-method. Ωστόσο, καθώς το συγκεκριμένο κύκλωμα τροφοδοτείται από μια DC πηγή τάσης, είναι σημαντικό να προηγηθεί μια DC ανάλυση για την εύρεση του DC σημείου λειτουργίας [97]. Ειδικότερα, καθώς το κύκλωμα έχει μοντελοποιηθεί μέσω του χώρου καταστάσεων, η DC ανάλυση σκοπεύει στην εύρεση των αρχικών συνθηκών του συστήματος για το διάνυσμα καταστάσεων x και για το διάνυσμα τάσεων v , το οποίο χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης για τη μέθοδο Newton-Raphson. Έτσι, πρώτο βήμα στη διαδικασία της DC ανάλυσης αποτελεί η αντικατάσταση της AC πηγής τάσης v_{in} με ένα βραχυκύκλωμα και των πυκνωτών με ανοιχτοκυκλώματα, καταλήγοντας στο DC κύκλωμα αναφοράς της Εικόνας 3.8:



Εικόνα 3.8: DC κύκλωμα αναφοράς του σταδίου προενίσχυσης

Σε αυτό το κύκλωμα οι μεταβλητές κατάστασης παραμένουν σταθερές ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$), ενώ ο αντίστοιχος χώρος καταστάσεων μπορεί να αναπαρασταθεί, παραλείποντας το δευτερεύουσας σημασίας διάνυσμα εξόδου \mathbf{y} , μέσω των Εξισώσεων 3.32 και 3.33:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{i}(v) \quad (3.32)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{i}(v) \quad (3.33)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, με $\bar{\mathbf{u}}$ συμβολίζεται το DC διάνυσμα εισόδου, το οποίο ορίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση 3.34:

$$\bar{\mathbf{u}} = [V_{CC}]^T \quad (3.34)$$

Οι ζητούμενοι πίνακες $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ και $\bar{\mathbf{D}}$ του χώρου καταστάσεων προκύπτουν ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία που περιγράφηκε για το κύκλωμα της Εικόνας 3.7. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση, το διάνυσμα τάσεων \mathbf{V} επεκτείνεται με τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x} , ενώ το διάνυσμα ρευμάτων \mathbf{I} συμπληρώνεται με μηδενικά, όπως διατυπώνεται από τις Εξισώσεις 3.35 και 3.36:

$$\mathbf{V} = [v_{out} \ v_s \ v_p \ v_C \ v_B \ v_E \ I_{CC} \ v_{C3} \ v_{C4} \ v_{C5}]^T \quad (3.35)$$

$$\mathbf{I} = [0 \ 0 \ 0 \ i_C \ i_B \ i_E \ V_{CC} \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.36)$$

Ακόμα, το σύστημα εξισώσεων του DC κυκλώματος είναι αντίστοιχο με το σύστημα των Εξισώσεων 3.10–3.19 θέτοντας $v_{in} = 0$ και $\dot{v}_{C3} = \dot{v}_{C4} = \dot{v}_{C5} = 0$, ενώ υιοθετώντας αναπαραστάσεις αντιστάσεων προκύπτουν συγκεντρωτικά οι Εξισώσεις 3.37–3.46:

$$I_{CC} = (v_p - v_C)/R_8 \quad (3.37)$$

$$0 = v_{out}/R_{10} \quad (3.38)$$

$$(v_B - v_C)/R_7 + (v_p - v_C)/R_8 = i_C \quad (3.39)$$

$$0 = v_B/R_6 + (v_B - v_C)/R_7 + i_B \quad (3.40)$$

$$i_E = v_E/R_9 \quad (3.41)$$

$$v_s = 0 \quad (3.42)$$

$$v_p = V_{CC} \quad (3.43)$$

$$v_{C3} = v_s - v_B \quad (3.44)$$

$$v_{C4} = v_B - v_C \quad (3.45)$$

$$v_{C5} = v_C - v_{out} \quad (3.46)$$

Τελικά, οι ζητούμενοι πίνακες υπολογίζονται μέσω των Εξισώσεων 3.47–3.50:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_6}{R_6 + R_7 + R_8} \\ -\frac{R_7}{R_6 + R_7 + R_8} \\ \frac{R_6 + R_7}{R_6 + R_7 + R_8} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{R_6(R_7 + R_8)}{R_6 + R_7 + R_8} & \frac{R_6 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} \\ -\frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7 + R_8} & \frac{R_7 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} \\ -\frac{R_6 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} & -\frac{R_8(R_6 + R_7)}{R_6 + R_7 + R_8} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

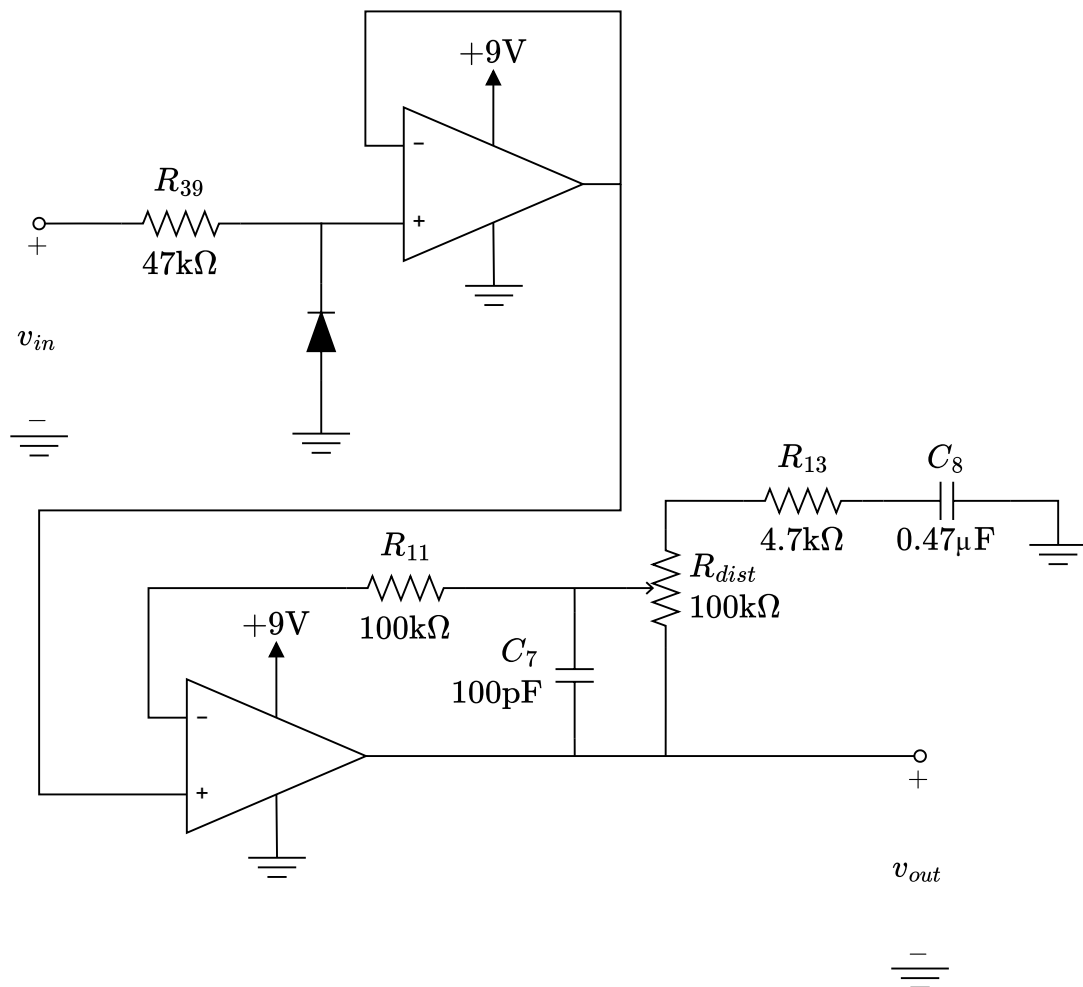
$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{R_6}{R_6 + R_7 + R_8} \\ -\frac{R_7}{R_6 + R_7 + R_8} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_6 R_7 + R_6 R_8 + R_9(R_6 + R_7 + R_8)}{R_6 + R_7 + R_8} & -\frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7 + R_8} \\ -\frac{R_6 R_8 + R_9(R_6 + R_7 + R_8)}{R_6 + R_7 + R_8} & \frac{R_7 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} \end{bmatrix}^T \quad (3.50)$$

Έτσι, η DC ανάλυση ολοκληρώνεται λύνοντας με τη μέθοδο Newton-Raphson την πεπλεγμένη και υπερβατική Εξίσωση 3.33 ως προς το διάνυσμα τάσεων \mathbf{v} και αντικαθιστώντας το αντίστοιχο ρεύμα $\mathbf{i}(\mathbf{v})$ για τον υπολογισμό του διανύσματος καταστάσεων \mathbf{x} μέσω της Εξίσωσης 3.32.

3.3 Στάδιο Ενίσχυσης

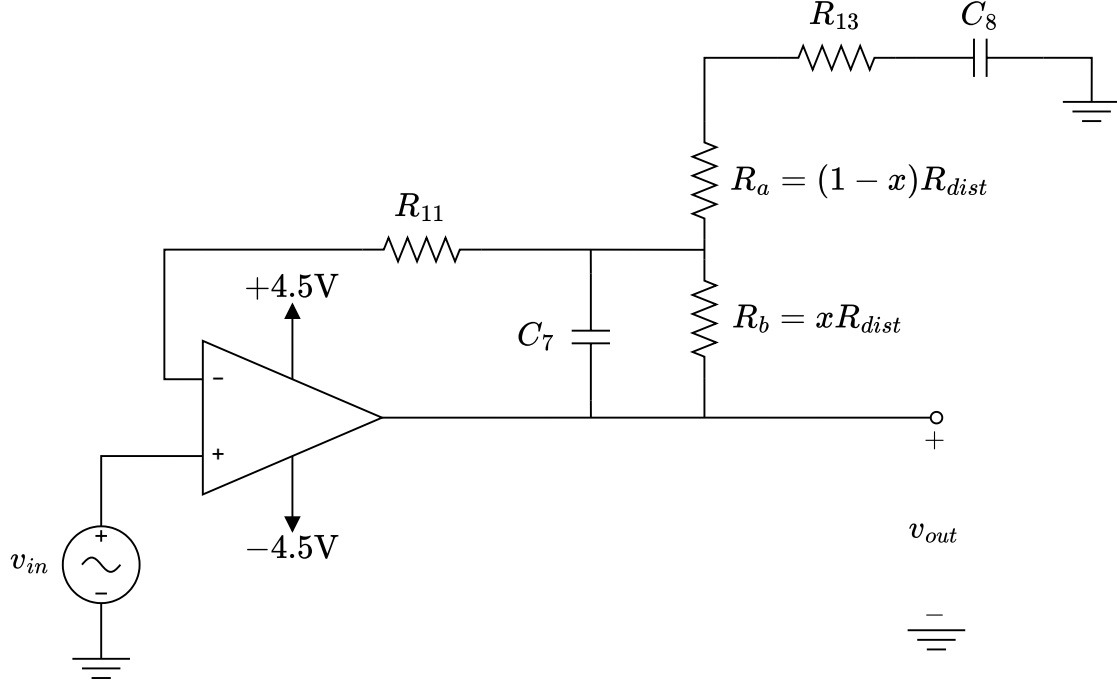
Στην Εικόνα 3.9 απεικονίζεται το στάδιο ενίσχυσης του *BOSS DS-1*, το οποίο αποτελείται από δύο τελεστικούς ενισχυτές συνδεδεμένους σε σειρά, υλοποιώντας έναν γραμμικό ενισχυτή, το κέρδος του οποίου ρυθμίζεται από το ποτενσιόμετρο R_{dist} . Πιο συγκεκριμένα, το στάδιο αυτό λαμβάνει το μεταβαλλόμενο γύρω από τα +4.5V σήμα εξόδου του σταδίου προενίσχυσης και το ενισχύει γραμμικά μέσα στα όρια του εύρους 0–9V, ενώ λόγω της υψηλής εμπέδησης εισόδου και της χαμηλής εμπέδησης εξόδου των τελεστικών ενισχυτών επιτυγχάνεται εξαιρετική απομόνωση τόσο από το προηγούμενο όσο και από το επόμενο στάδιο του κυκλώματος.



Εικόνα 3.9: Στάδιο ενίσχυσης του *BOSS DS-1*

Στο κύκλωμα της Εικόνας 3.9, ο ρόλος της διόδου και της αντίστασης R_{39} είναι η προστασία του εσωτερικού κυκλώματος του πρώτου τελεστικού ενισχυτή, ο οποίος βρίσκεται σε συνδεσμολογία *ακόλουθου τάσης*. Αυτό σημαίνει ότι η έξοδος ακολουθεί την είσοδο του παρουσιάζοντας μοναδιαίο κέρδος τάσης, δηλαδή αποτέλεσμα δεν είναι η ενίσχυση αλλά η απομόνωση μεταξύ εισόδου και εξόδου. Συνεπώς, αυτά τα στοιχεία μπορούν να παραληφθούν στο πλαίσιο της ψηφιακής προσομοίωσης, καθώς δεν επηρεάζουν ιδιαίτερα τα ηχητικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος.

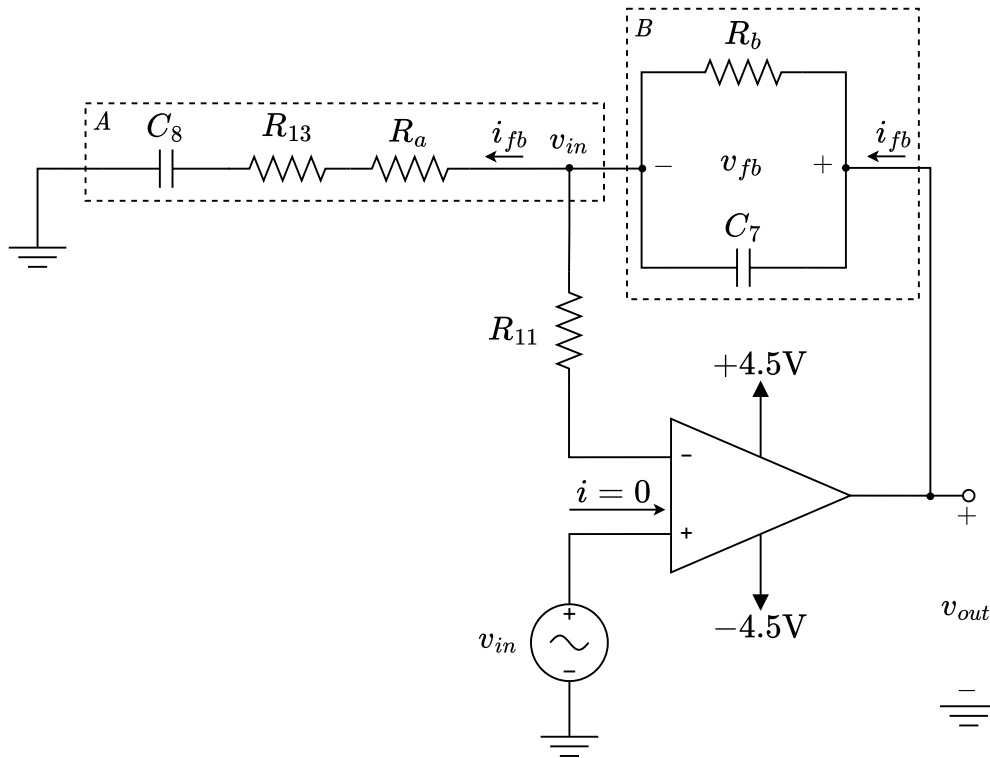
Έτσι, το κύκλωμα αναφοράς που προκύπτει για την προσομοίωση του σταδίου ενίσχυσης παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.10, όπου το ποτενσιόμετρο R_{dist} έχει αναπαρασταθεί ρητά από δύο μεταβλητές αντιστάσεις R_a και R_b συναρτήσεως της θέσης του δρομέα $x \in (0, 1)$, ενώ ο τελεστικός ενισχυτής τροφοδοτείται συμβατικά από $\pm 4.5V$, καθώς το σήμα εισόδου αναμένεται να μεταβάλλεται γύρω από τα $0V$.



Εικόνα 3.10: Κύκλωμα αναφοράς του σταδίου ενίσχυσης

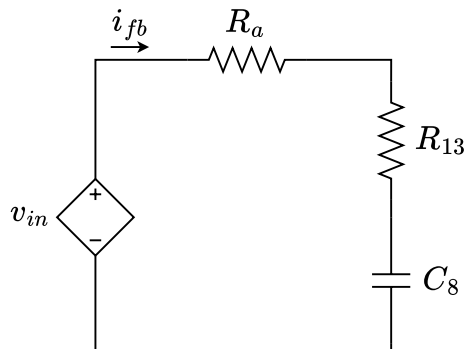
Το κύκλωμα της Εικόνας 3.10 είναι γραμμικό, ενώ ταυτόχρονα αποτελεί μια ειδική περίπτωση συνδεσμολογίας τελεστικού ενισχυτή με αρνητική ανάδραση που επιτρέπει τη μοντελοποίηση του μέσω της αναπαράστασης WDF, χωρίς την ανάγκη υιοθέτησης μεθοδολογιών που χρησιμοποιούν τον προσαρμογέα τύπου \mathcal{R} [98]. Η συνδεσμολογία αυτή μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή αναδιατάσσοντας το κύκλωμα και παρουσιάζοντας το στη μορφή που απεικονίζεται στην Εικόνα 3.11. Θεωρώντας πως ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός, το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_{11} θα είναι μηδενικό και επομένως η πτώση τάσης πάνω σε αυτή θα είναι επίσης μηδενική. Ως αποτέλεσμα η τάση εισόδου v_{in} , η οποία λόγω της αρνητικής ανάδρασης εμφανίζεται εικονικά στον αρνητικό ακροδέκτη του τελεστικού ενισχυτή, θα εμφανίζεται και στο άλλο άκρη της αντίστασης R_{11} . Ακόμα, σύμφωνα με τον KCL, το ρεύμα i_{fb} που διαρρέει τον κλάδο ανάδρασης θα εισέρχεται ολόκληρο στον κλάδο που καταλήγει στη γείωση. Συνεπώς, η τάση εισόδου v_{in} θα εμφανίζεται στο δίκτυο του κλάδου ανάδρασης καθορίζοντας το ρεύμα i_{fb} ανεξάρτητα από την τάση εξόδου v_{out} , καθιστώντας έτσι εφικτό τον ορισμό δύο ξεχωριστών υποκυκλωμάτων A και B που διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i_{fb} , ενώ η τάση ανάδρασης v_{fb} που έχει σημειωθεί στην Εικόνα 3.11 θα ικανοποιεί την Εξίσωση 3.51:

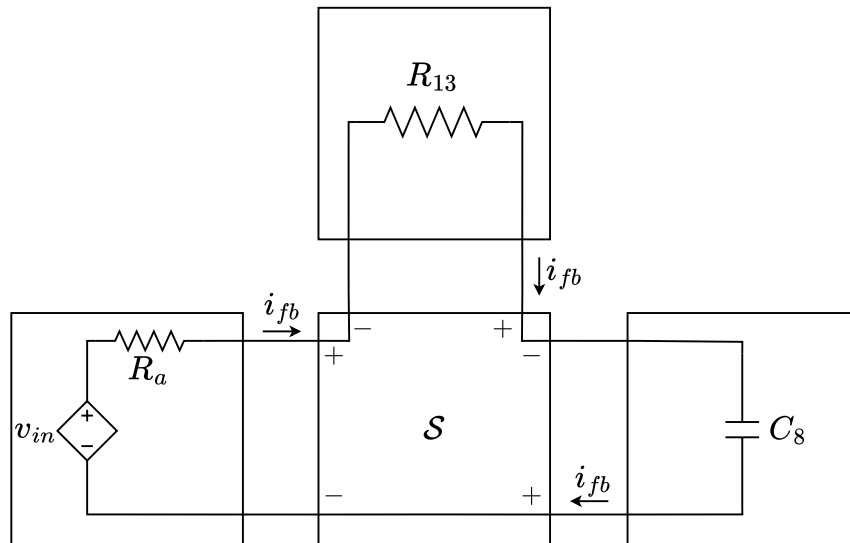
$$v_{fb} = v_{out} - v_{in} \quad (3.51)$$



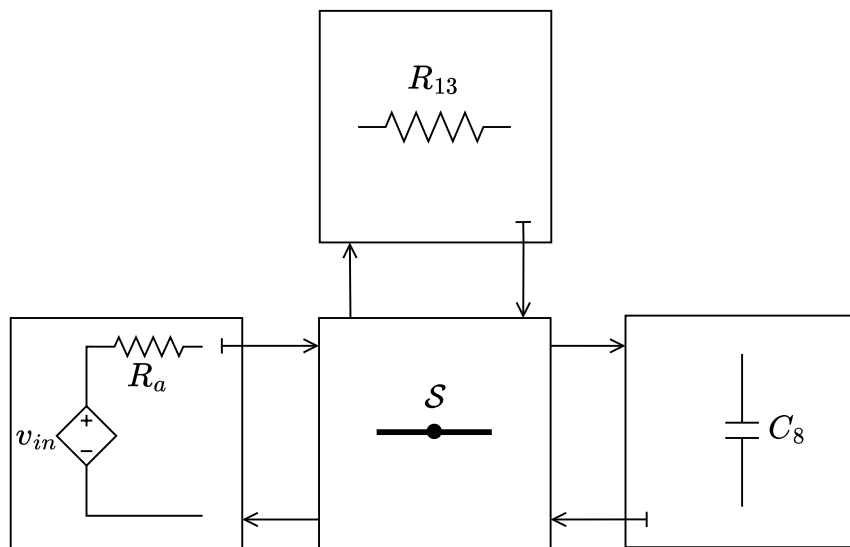
Εικόνα 3.11: Αναδιατεταγμένο κύκλωμα αναφοράς του σταδίου ενίσχυσης

Το υποκύκλωμα A αντιστοιχεί στον κλάδο του δικτύου ανάδρασης που καταλήγει στη γείωση και μπορεί να θεωρηθεί ότι τροφοδοτείται από μια εξαρτημένη πηγή τάσης v_{in} , όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.12. Συνδυάζοντας την πηγή τάσης v_{in} με την αντίσταση R_a σε σειρά, οι ισοδύναμες αναπαραστάσεις στο πεδίο Kirchhoff και στο πεδίο κυμάτων μέσω ενός σειριακού προσαρμογέα τριών θυρών \mathcal{S} , καθώς και το αντίστοιχο δέντρο WDF που προκύπτει, παρουσιάζονται στις Εικόνες 3.13–3.15. Το υποκύκλωμα B αντιστοιχεί στον κύριο κλάδο του δικτύου ανάδρασης και μπορεί να θεωρηθεί ότι τροφοδοτείται από μια εξαρτημένη πηγή ρεύματος i_{fb} , όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.16. Συνδυάζοντας την πηγή ρεύματος i_{fb} με την παράλληλη αντίσταση R_b , οι ισοδύναμες αναπαραστάσεις στο πεδίο Kirchhoff και στο πεδίο κυμάτων μέσω ενός παράλληλου προσαρμογέα δύο θυρών \mathcal{P} , καθώς και το αντίστοιχο δέντρο WDF που προκύπτει, παρουσιάζονται στις Εικόνες 3.17–3.19.

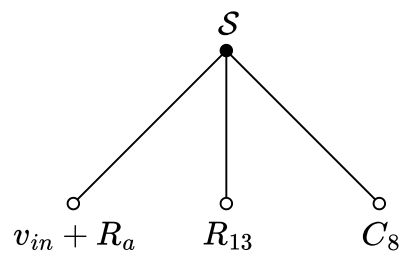
Εικόνα 3.12: Υποκύκλωμα A του σταδίου προενίσχυσης



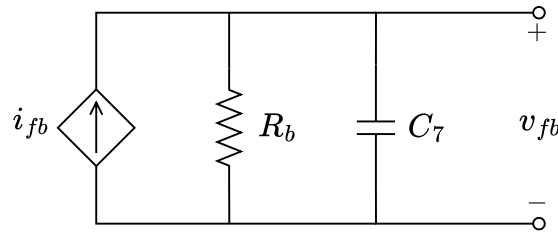
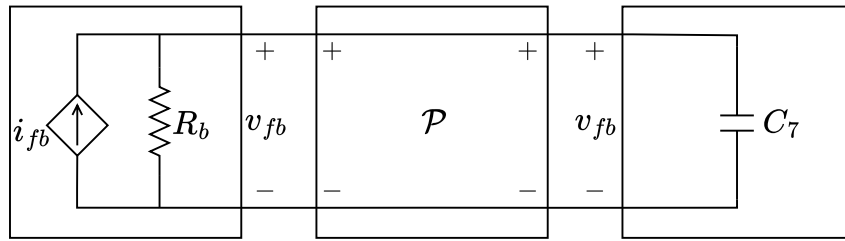
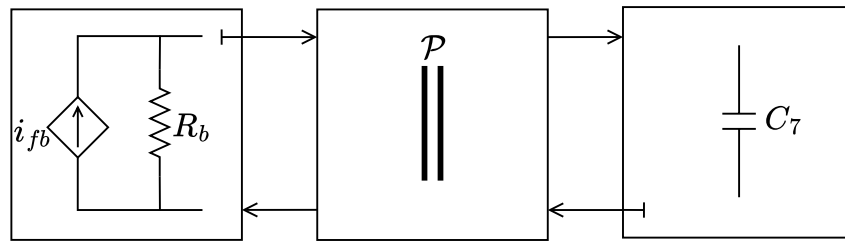
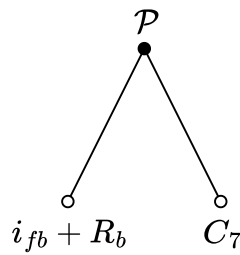
Εικόνα 3.13: Υποκύκλωμα A στο πεδίο Kirchhoff



Εικόνα 3.14: Υποκύκλωμα A στο πεδίο κυμάτων



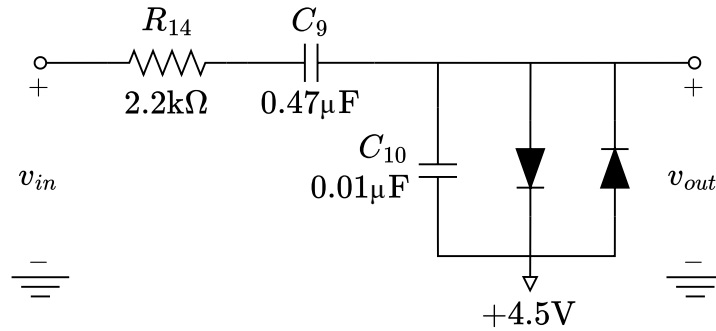
Εικόνα 3.15: Δέντρο WDF του υποκυκλώματος A

Εικόνα 3.16: Υποκύκλωμα B του σταδίου προενίσχυσηςΕικόνα 3.17: Υποκύκλωμα B στο πεδίο KirchhoffΕικόνα 3.18: Υποκύκλωμα B στο πεδίο κυμάτωνΕικόνα 3.19: Δέντρο WDF του υποκυκλώματος B

Η προσομοίωση του σταδίου ενίσχυσης απαιτεί αρχικά τον υπολογισμό του ρεύματος i_{fb} μέσω του υποκυκλώματος A , θεωρώντας $i_{fb} = -i$, όπου i το ρεύμα κάποιου από τα στοιχεία του αντίστοιχου δέντρου WDF που λαμβάνεται μέσω της Εξίσωσης 2.53. Στη συνέχεια, υπολογίζεται η τάση v_{fb} μέσω του υποκυκλώματος B , θεωρώντας $v_{fb} = v$, όπου v η τάση κάποιου από τα στοιχεία του αντίστοιχου δέντρου WDF που λαμβάνεται μέσω της Εξίσωσης 2.52. Τελικά, η τάση εξόδου v_{out} υπολογίζεται μέσω της Εξίσωσης 3.51, ενώ εφαρμόζεται μια διαδικασία τεχνητού ψαλιδισμού στα $\pm 4.5V$ για την προσομοίωση της πραγματικής λειτουργίας του τελεστικού ενισχυτή.

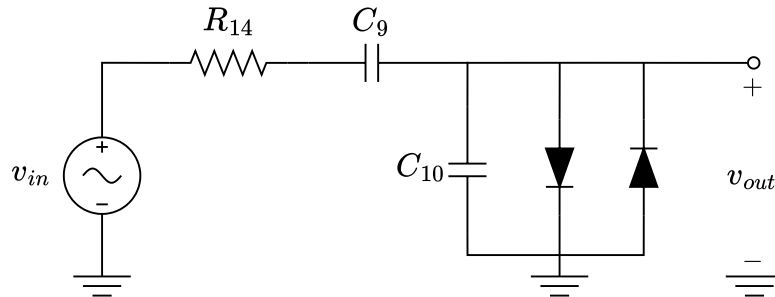
3.4 Στάδιο Ψαλιδισμού

Στην Εικόνα 3.20 απεικονίζεται το στάδιο ψαλιδισμού του *BOSS DS-1*, το οποίο αποτελείται από δύο διόδους συνδεδεμένες αντιπαράλληλα, υλοποιώντας έναν *ψαλιδιστή* που περιορίζει την τάση εξόδου του κυκλώματος [99]. Πιο συγκεκριμένα, το στάδιο αυτό λαμβάνει το ενδεχομένως ήδη παραμορφωμένο σήμα εξόδου του σταδίου ενίσχυσης και λόγω της μη γραμμικής συμπεριφοράς των διόδων προσδίδει ακόμα περισσότερη παραμόρφωση σε αυτό. Αυτή η παραμόρφωση εξαρτάται αφενός από το πλάτος του σήματος εισόδου και αφετέρου από τα χαρακτηριστικά των διόδων.



Εικόνα 3.20: Στάδιο ψαλιδισμού του *BOSS DS-1*

Στο πλαίσιο της ψηφιακής προσομοίωσης, το κύκλωμα της Εικόνας 3.20 πρακτικά μοντελοποιείται σχεδόν αυτούσιο, με μοναδική διαφορά την απευθείας σύνδεση των διόδων στη γείωση, καθώς το σήμα εισόδου αναμένεται να μεταβάλλεται γύρω από τα 0V. Έτσι, προκύπτει το κύκλωμα αναφοράς που απεικονίζεται στην Εικόνα 3.21:



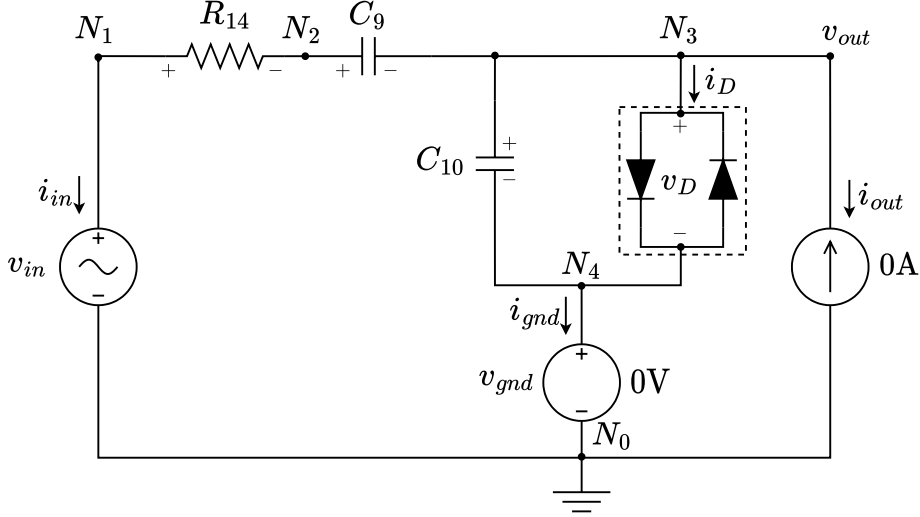
Εικόνα 3.21: Κύκλωμα αναφοράς του σταδίου ψαλιδισμού

Θεωρώντας πως οι δύο διόδους του κυκλώματος αναφοράς είναι πανομοιότυπες, καθίσταται δυνατός ο συνδυασμός τους σε ένα ενιαίο θεωρητικό μη γραμμικό στοιχείο που λειτουργεί αντισυμμετρικά, όπου η σχέση ανάμεσα στο ρεύμα i_D που το διαρρέει και την τάση v_D στα άκρα του περιγράφεται από την Εξίσωση 3.52:

$$i_D = 2I_S \sinh\left(\frac{v_D}{nV_T}\right) \quad (3.52)$$

Ο συνδυασμός αυτός διευκολύνει τη μοντελοποίηση του κυκλώματος, μειώνοντας τη διαστατικότητα των μη γραμμικών στοιχείων, ενώ για τον υπολογισμό του ρεύματος i_D χρησιμοποιούνται οι τιμές παραμέτρων $I_S = 2.52\text{nA}$, $n = 1.752$, $V_T = 25.85\text{mV}$.

Το κύκλωμα του σταδίου ψαλιδισμού είναι μη γραμμικό λόγω των διόδων, επομένως η μοντελοποίηση του μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της αναπαράστασης PHS. Μοντελοποιώντας τη θύρα εξόδου ως μια πηγή μηδενικού ρεύματος και τη θύρα της γείωσης ως μια πηγή μηδενικής τάσης, σύμφωνα με τη μεθοδολογία των PHS, προκύπτει το θεωρητικό κύκλωμα αναφοράς της Εικόνας 3.22, όπου οι δύο διόδοι έχουν αναπαρασταθεί ως ένα ενιαίο στοιχείο που ικανοποιεί την Εξίσωση 3.52.



Εικόνα 3.22: Θεωρητικό κύκλωμα αναφοράς του σταδίου ψαλιδισμού

Το κύκλωμα της Εικόνας 3.22 αποτελείται από $n_S = 2$ στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας, $n_D = 2$ στοιχεία κατανάλωσης ισχύος και $n_P = 3$ εξωτερικές θύρες, καθώς επίσης και από $n_N = 4$ κόμβους, αγνοώντας τον κόμβο αναφοράς της γείωσης N_0 . Επομένως, οι $n_B = 7$ κλάδοι του συστήματος διατάσσονται σύμφωνα με τη σειρά των στοιχείων της Εξίσωσης 2.26 στην πλειάδα \mathbf{B} που ορίζεται από την Εξίσωση 3.53:

$$\mathbf{B} = (C_9, C_{10}, R_{14}, D, IN, OUT, GND) \quad (3.53)$$

Στη συνέχεια, για τον υπολογισμό του πίνακα $\mathbf{\Gamma}$ που ορίζεται από τις Εξισώσεις 2.27 και 2.28, οι κλάδοι του συστήματος πρέπει να αναδιαταχθούν τοποθετώντας στην πλειάδα $\tilde{\mathbf{B}}$ πρώτα τα στοιχεία που ελέγχονται από τάση και ύστερα τα στοιχεία που ελέγχονται από ρεύμα, όπως διατυπώνεται από την Εξίσωση 3.54:

$$\tilde{\mathbf{B}} = (D, OUT, R_{14}, C_9, C_{10}, IN, GND) \quad (3.54)$$

Επομένως, λόγω της απαίτησης ο πίνακας γ_2 να είναι τετραγωνικός, προκύπτει άμεσα το συμπέρασμα πως η μοναδική αντίσταση του κυκλώματος R_{14} πρέπει να αναπαρασταθεί ως μια αγωγιμότητα G_{14} που ελέγχεται από τάση, καταλήγοντας έτσι στον πίνακα $\mathbf{\Gamma}$, ο οποίος περιγράφεται από την Εξίσωση 3.55:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} D & OUT & G_{14} & C_9 & C_{10} & IN & GND \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \quad (3.55)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν άμεσα οι πίνακες γ_1 και γ_2 , οι οποίοι διατυπώνονται από τις Εξισώσεις 3.56 και 3.57:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Κατόπιν, με εφαρμογή της Εξίσωσης 2.29 υπολογίζεται ο πίνακας $\tilde{\mathbf{J}}$, ο οποίος διατυπώνεται από την Εξίσωση 3.58:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Έπειτα, η αναδιάταξη των κλάδων του συστήματος που εφαρμόστηκε νωρίτερα πρέπει να αντιστραφεί, σύμφωνα με τη μετάθεση σ που ορίζεται από την Εξίσωση 3.59:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Η μετάθεση σ αντιστοιχεί τα στοιχεία της πλειάδας $\tilde{\mathbf{B}}$ σε αυτά της πλειάδας \mathbf{B} (π.χ. $B_1 = \tilde{B}_{\sigma(1)} = \tilde{B}_4$), ενώ ο αντίστοιχος μεταθετικός πίνακας \mathbf{P} ορίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση 3.60:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } j = \sigma(i) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_B \quad (3.60)$$

Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση, ο πίνακας \mathbf{P} διατυπώνεται από την Εξίσωση 3.61:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Συνεπώς, με εφαρμογή της Εξίσωσης 2.30 υπολογίζεται ο πίνακας \mathbf{J} , ο οποίος διατυπώνεται από την Εξίσωση 3.62:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Τελικά, η Εξίσωση 2.26, η οποία περιγράφει πλήρως την αναπαράσταση PHS του κυκλώματος αναφοράς, διατυπώνεται αναλυτικά μέσω της Εξίσωσης 3.63:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_{C_9} \\ i_{C_{10}} \\ v_{G_{14}} \\ v_D \\ i_{in} \\ v_{out} \\ i_{gnd} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_{C_9} \\ v_{C_{10}} \\ i_{G_{14}} \\ i_D \\ v_{in} \\ i_{out} \\ v_{gnd} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (3.63)$$

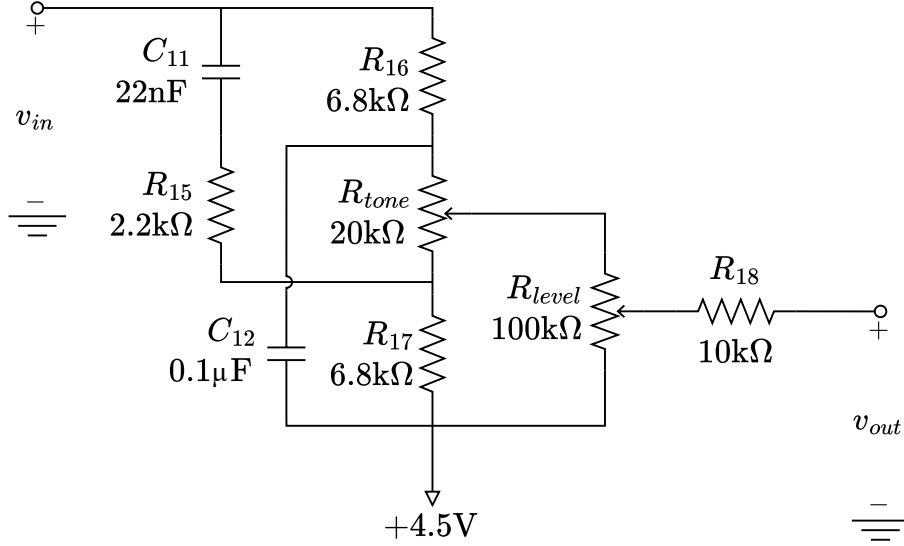
Ακόμα, η διαστατικότητα της παραπάνω σχέσης μπορεί να μειωθεί αγνοώντας τη θύρα της γείωσης και θεωρώντας $n_P = 2$, καταλήγοντας έτσι στην Εξίσωση 3.64:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_{C_9} \\ i_{C_{10}} \\ v_{G_{14}} \\ v_D \\ i_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}'} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_{C_9} \\ v_{C_{10}} \\ i_{G_{14}} \\ i_D \\ v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}'} \quad (3.64)$$

Από τον πίνακα \mathbf{J}' προκύπτουν άμεσα οι υποπίνακες \mathbf{J}_x , \mathbf{J}_w , \mathbf{J}_y , \mathbf{K} , \mathbf{G}_x και \mathbf{G}_w , οι οποίοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των υποπινάκων \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i και \mathbf{C}_i για $i \in \{x, w, y\}$ μέσω των Εξισώσεων 2.32–2.40. Στη συνέχεια, η προσομοίωση του σταδίου ψαλιδισμού υλοποιείται σύμφωνα με τον αλγόριθμο που έχει περιγραφεί. Σε αυτό το σημείο, για την αποφυγή σύγχυσης λόγω του αρνητικού προσήμου που υπαγορεύει η Εξίσωση 2.24 στην αναπαράσταση PHS, πρέπει να επισημανθεί ότι η γνωστή τάση εισόδου v_{in} εισάγεται στο διάνυσμα \mathbf{u} μέσω της μεταβλητής εισόδου u_{in} σύμφωνα με τη σχέση $u_{in} = v_{in}$, ενώ η ζητούμενη τάση εξόδου v_{out} εξάγεται από το διάνυσμα \mathbf{y} μέσω της μεταβλητής εξόδου y_{out} σύμφωνα με τη σχέση $v_{out} = -y_{out}$.

3.5 Στάδιο Φιλτραρίσματος

Στην Εικόνα 3.23 απεικονίζεται το στάδιο φιλτραρίσματος του *BOSS DS-1*, το οποίο αποτελείται αποκλειστικά από αντιστάσεις και πυκνωτές, υλοποιώντας ένα γραμμικό φίλτρο, η συχνотική απόκριση του οποίου μεταβάλλεται από το ποτενσιόμετρο R_{tone} . Από την άλλη μεριά, το ποτενσιόμετρο R_{level} καθορίζει το πλάτος του σήματος εξόδου.

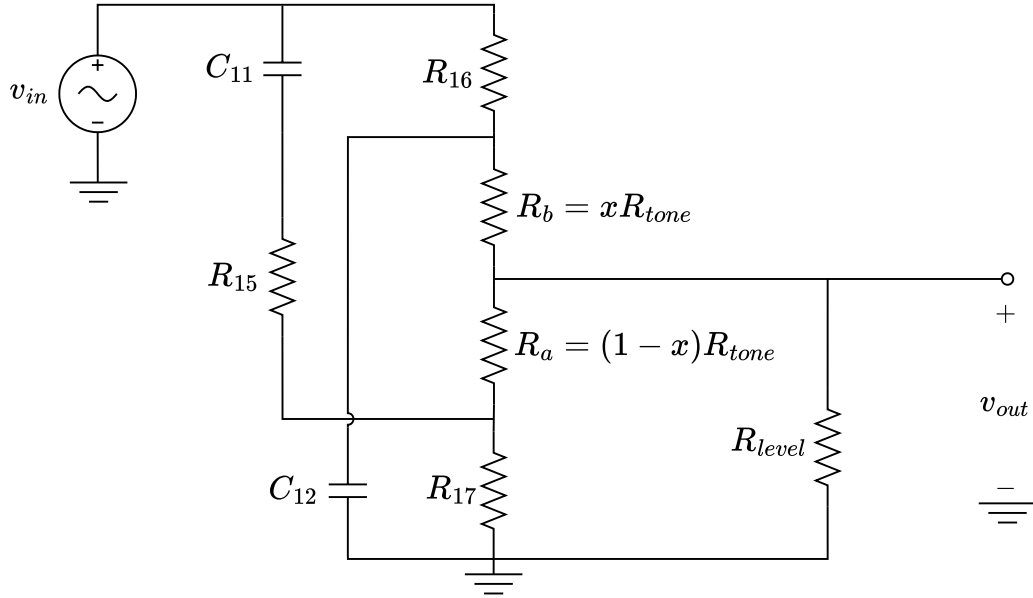


Εικόνα 3.23: Στάδιο φιλτραρίσματος του *BOSS DS-1*

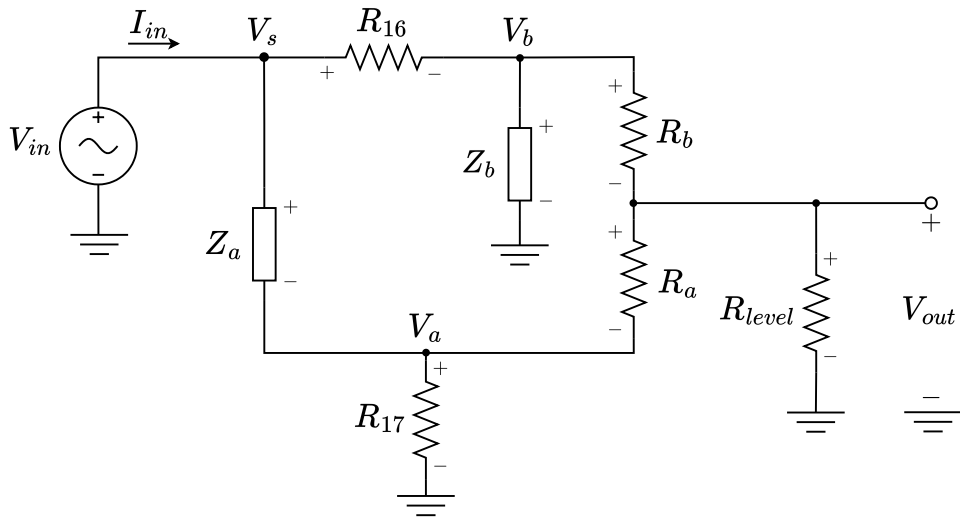
Η αντίσταση R_{18} που συνδέει το στάδιο φιλτραρίσματος με το στάδιο εξόδου του πεταλιού δε διαρρέεται από ρεύμα στο απομονωμένο κύκλωμα της Εικόνας 3.23, επομένως μπορεί να παραληφθεί στο πλαίσιο της ψηφιακής προσομοίωσης. Ακόμα, τα σήματα του κυκλώματος δε χρειάζεται να μεταβάλλονται γύρω από τα $+4.5V$, συνεπώς η αντίστοιχη πηγή τάσης μπορεί να αντικατασταθεί από τη γείωση, ενώ το ποτενσιόμετρο R_{tone} μπορεί να αναπαρασταθεί από δύο μεταβλητές αντιστάσεις R_a και R_b συναρτήσεως της θέσης του δρομέα $x \in (0, 1)$. Όσον αφορά το ποτενσιόμετρο R_{level} , θα ήταν αναμενόμενο να αναπαρασταθεί και αυτό από δύο μεταβλητές αντιστάσεις, λαμβάνοντας την τάση εξόδου v_{out} από τον κόμβο όπου αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Ωστόσο, καθώς το ποτενσιόμετρο αυτό αποτελεί έναν απλό διαιρέτη τάσης που δεν επηρεάζεται από άλλα κυκλωματικά στοιχεία, μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια απλή αντίσταση R_{level} με τάση v_{out} στα άκρα της, προσομοιώνοντας τη διαίρεση τάσης ψηφιακά μέσω ενός πολλαπλασιαστικού συντελεστή $\alpha \in [0, 1]$. Έτσι, το κύκλωμα αναφοράς που προκύπτει τελικά για το στάδιο φιλτραρίσματος απεικονίζεται στην Εικόνα 3.24. Καθώς το κύκλωμα αυτό είναι γραμμικό, μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω ενός φίλτρου IIR αναλύοντας το ισοδύναμο κύκλωμα στο πεδίο της συχνότητας που απεικονίζεται στην Εικόνα 3.25, όπου οι εμπεδήσεις Z_a και Z_b έχουν οριστεί μέσω των Εξισώσεων 3.65 και 3.66:

$$Z_a = R_{15} + \frac{1}{sC_{11}} \quad (3.65)$$

$$Z_b = \frac{1}{sC_{12}} \quad (3.66)$$



Εικόνα 3.24: Κύκλωμα αναφοράς του σταδίου φιλτραρίσματος



Εικόνα 3.25: Ισοδύναμο κύκλωμα αναφοράς του σταδίου φιλτραρίσματος

Οι ζητούμενοι συντελεστές του ψηφιακού φίλτρου IIR προκύπτουν αναλύοντας αρχικά το κύκλωμα αναφοράς της Εικόνας 3.25 και εφαρμόζοντας τη μέθοδο MNA. Σε αυτή την περίπτωση, τα διανύσματα τάσεων \mathbf{V} και ρευμάτων \mathbf{I} της Εξίσωσης 1.70 διατυπώνονται από τις Εξισώσεις 3.67 και 3.68:

$$\mathbf{V} = [V_{out} \ V_s \ V_a \ V_b \ I_{in}]^T \quad (3.67)$$

$$\mathbf{I} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ V_{in}]^T \quad (3.68)$$

Ο αντίστοιχος πίνακας αγωγιμότητας \mathbf{G} προκύπτει εφαρμόζοντας αρχικά τον KCL σε κάθε κόμβο του κυκλώματος αναφοράς, οδηγώντας έτσι στις Εξισώσεις 3.69–3.72:

$$\frac{V_b - V_{out}}{R_b} = \frac{V_{out}}{R_{level}} + \frac{V_{out} - V_a}{R_a} \quad (3.69)$$

$$\frac{V_s - V_b}{R_{16}} = \frac{V_b}{Z_b} + \frac{V_b - V_{out}}{R_b} \quad (3.70)$$

$$\frac{V_a}{R_{17}} = \frac{V_s - V_a}{Z_a} + \frac{V_{out} - V_a}{R_a} \quad (3.71)$$

$$I_{in} = \frac{V_s - V_a}{Z_a} + \frac{V_s - V_b}{R_{16}} \quad (3.72)$$

Ακόμα, για την εφαρμογή της μεθόδου MNA ορίζεται η βοηθητική Εξίσωση 3.73:

$$V_s = V_{in} \quad (3.73)$$

Εκφράζοντας το σύστημα των Εξισώσεων 3.69-3.73 με τη μορφή πινάκων της Εξίσωσης 1.70 και επιλύοντας το συμβολικά ως προς το διάνυσμα V , προκύπτει μια μακροσκελής αναπαράσταση της τάσης εξόδου V_{out} ως γραμμική συνάρτηση της τάσης εισόδου V_{in} . Έτσι, βάσει της Εξίσωσης 2.1 μπορεί να υπολογιστεί η συνεχής συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, λαμβάνοντας τελικά τη μορφή της Εξίσωσης 3.74:

$$H(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2} \quad (3.74)$$

Στη συνέχεια, με εφαρμογή του διγραμμικού μετασχηματισμού σύμφωνα με την Εξίσωση 2.2 προκύπτει η διακριτή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, η οποία λαμβάνει τη μορφή της Εξίσωσης 3.75:

$$H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}} \quad (3.75)$$

Ειδικότερα, προκύπτει ότι οι συντελεστές της διακριτής συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ μπορούν να υπολογιστούν απευθείας από τους συντελεστές της συνεχούς συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ μέσω των Εξισώσεων 3.76-3.81:

$$B_0 = \beta_0 + \beta_1 c + \beta_2 c^2 \quad (3.76)$$

$$B_1 = 2\beta_0 - 2\beta_2 c^2 \quad (3.77)$$

$$B_2 = \beta_0 - \beta_1 c + \beta_2 c^2 \quad (3.78)$$

$$A_0 = \alpha_0 + \alpha_1 c + \alpha_2 c^2 \quad (3.79)$$

$$A_1 = 2\alpha_0 - 2\alpha_2 c^2 \quad (3.80)$$

$$A_2 = \alpha_0 - \alpha_1 c + \alpha_2 c^2 \quad (3.81)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, η μεταβλητή c υπολογίζεται μέσω της Εξίσωσης 3.82:

$$c = \frac{2}{T_s} \quad (3.82)$$

Τελικά, σύμφωνα με την Εξίσωση 2.5, η προσομοίωση του σταδίου φιλτραρίσματος υλοποιείται μέσω του φίλτρου IIR που περιγράφεται από την Εξίσωση 3.83:

$$y[n] = \sum_{k=0}^2 b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^2 a_k y[n-k] \quad (3.83)$$

Στην παραπάνω σχέση, οι συντελεστές b_k και a_k προκύπτουν κανονικοποιώντας τους συντελεστές B_k και A_k της διακριτής συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ σύμφωνα με τις Εξισώσεις 3.84 και 3.85:

$$b_k = \frac{B_k}{A_0}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (3.84)$$

$$a_k = \frac{A_k}{A_0}, \quad k = 1, 2 \quad (3.85)$$

Κεφάλαιο 4

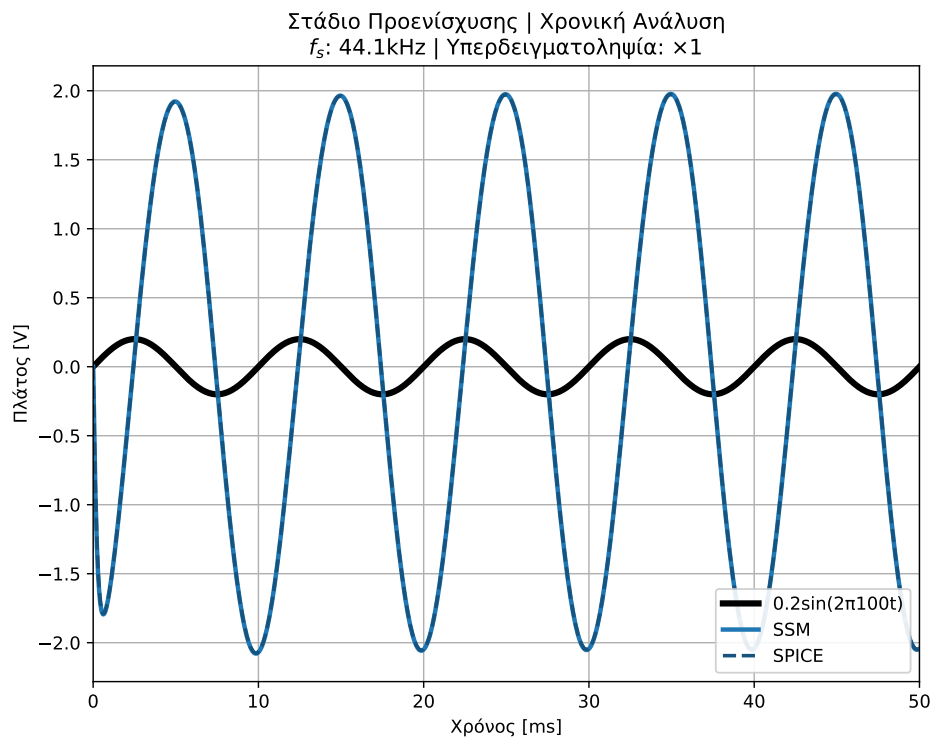
Αξιολόγηση

4.1 Σύγκριση Προσομοιώσεων

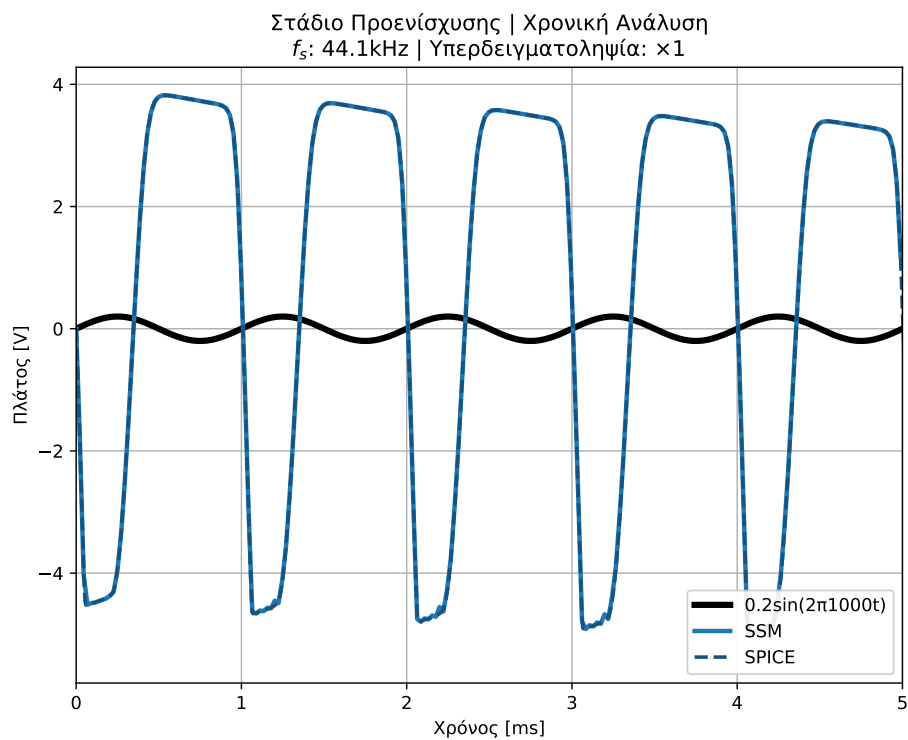
Στην πρώτη φάση της διαδικασίας αξιολόγησης, τα τέσσερα μοντέλα των βασικών σταδίων του *BOSS DS-1* που υλοποιήθηκαν, καθώς επίσης και το πλήρες εικονικό αναλογικό μοντέλο του πεταλιού που συγκροτείται από αυτά, συγκρίνονται με μοντέλα των αντίστοιχων κυκλωμάτων αναφοράς που αναπτύχθηκαν στο περιβάλλον ενός λογισμικού τύπου SPICE. Σε γενικές γραμμές, τα μοντέλα του SPICE θεωρούνται ιδιαίτερα ακριβή ως προς την ψηφιακή προσομοίωση των αντίστοιχων αναλογικών κυκλωμάτων, επομένως αποτελούν κατάλληλο μέτρο σύγκρισης για την αξιολόγηση της ακρίβειας των υλοποιημένων μοντέλων. Έτσι, στο πλαίσιο της διαδικασίας αξιολόγησης κάθε υλοποιημένου μοντέλου, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που προέκυψαν από τη διεξαγωγή χρονικής και AC ανάλυσης συγκρίνονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των μοντέλων SPICE. Τα αποτελέσματα όλων των προσομοιώσεων παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στις Εικόνες 4.1–4.36.

Η χρονική ανάλυση κάθε υλοποιημένου μοντέλου πραγματοποιείται για ημιτονοειδές σήμα εισόδου της μορφής $A \sin(2\pi ft)$, το οποίο παράγεται για διάφορες τιμές πλάτους A και συχνότητας f και για συνολική χρονική διάρκεια 5 περιόδων. Το σήμα αυτό διακριτοποιείται με συχνότητα δειγματοληψίας Mf_s όπου $f_s = 44.1\text{kHz}$ και M είναι ο συντελεστής υπερδειγματοληψίας. Ακόμα, για τη μέθοδο Newton-Raphson ορίζεται κατώφλι $\varepsilon = 10^{-6}$ και μέγιστος αριθμός 10 επαναλήψεων. Από την άλλη μεριά, τα μοντέλα SPICE χρησιμοποιούν το δικό τους εσωτερικό προσαρμοζόμενο χρονικό βήμα, διατηρώντας τις προεπιλεγμένες τιμές για όλες τις παραμέτρους.

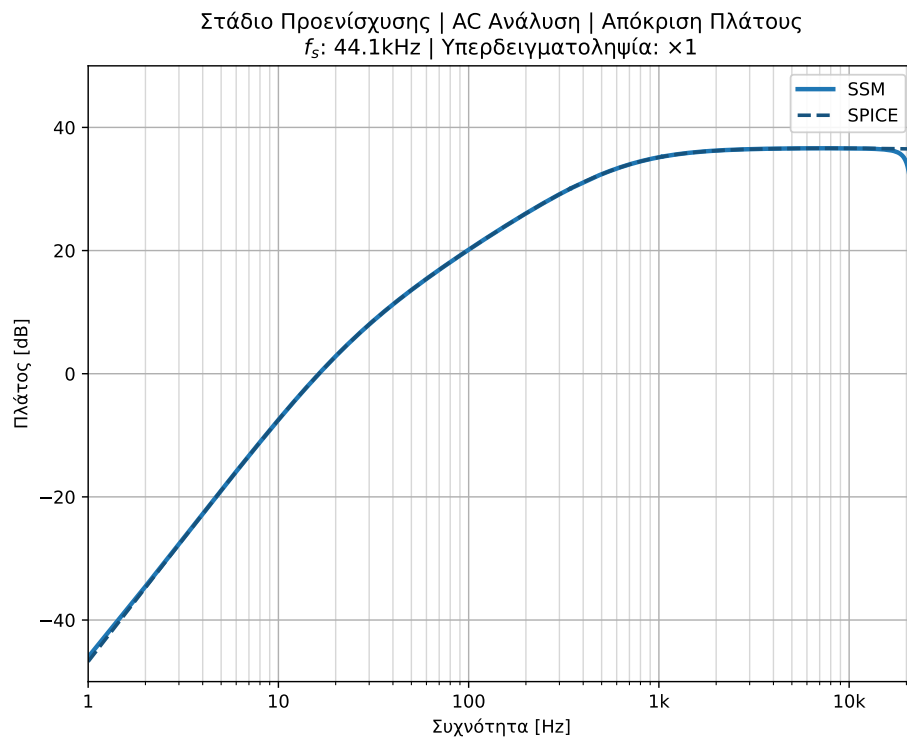
Για τη διεξαγωγή της AC ανάλυσης, τα στάδια προενίσχυσης και ψαλιδισμού αρχικά γραμμικοποιούνται με εφαρμογή της σειράς Taylor, ενώ στο στάδιο ενίσχυσης η διαδικασία τεχνητού ψαλιδισμού παρακάμπτεται. Στη συνέχεια, για κάθε γραμμικό μοντέλο πραγματοποιείται μια χρονική ανάλυση διάρκειας 1s με σήμα εισόδου τη συνάρτηση δέλτα για τον υπολογισμό της αντίστοιχης κρουστικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου. Έτσι, μέσω του DFT υπολογίζεται τελικά η ζητούμενη συχνοτική απόκριση, η οποία διαχωρίζεται σε απόκριση πλάτους, εκφρασμένη σε dB, και απόκριση φάσης, εκφρασμένη σε μοίρες. Από την άλλη μεριά, στα μοντέλα SPICE η AC ανάλυση εφαρμόζεται απευθείας στο πεδίο της συχνότητας, όπως έχει περιγραφεί.



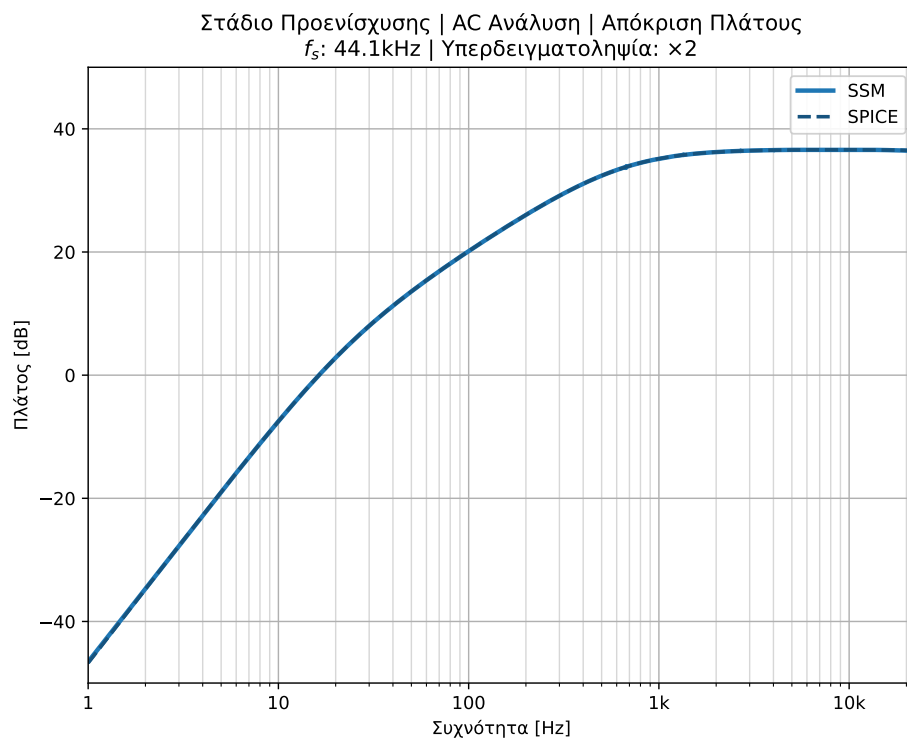
Εικόνα 4.1: Χρονική απόκριση του σταδίου προενίσχυσης (I)



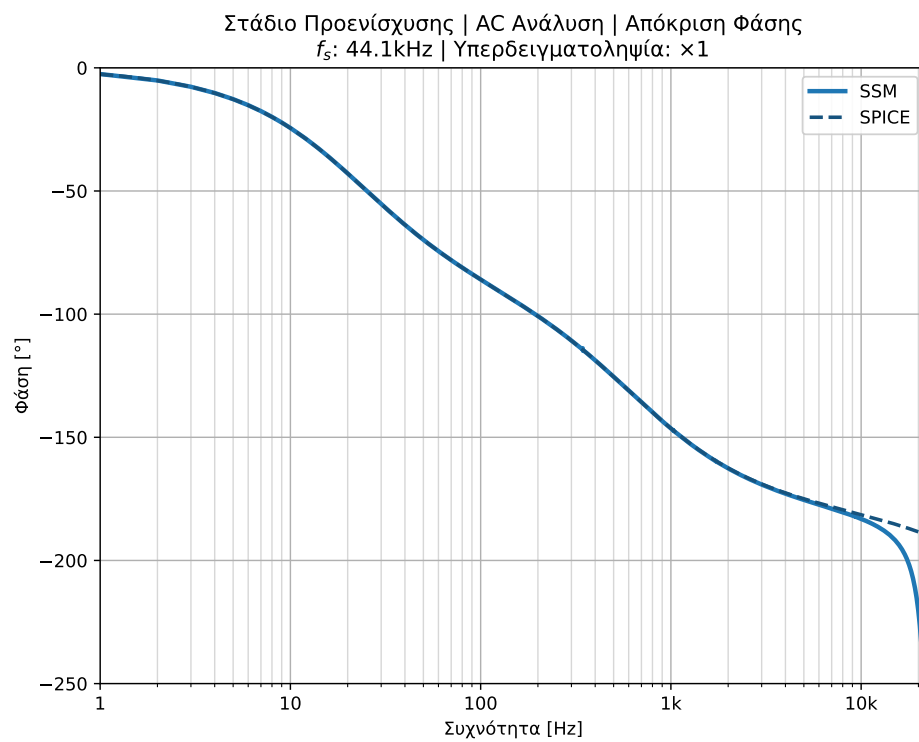
Εικόνα 4.2: Χρονική απόκριση του σταδίου προενίσχυσης (II)



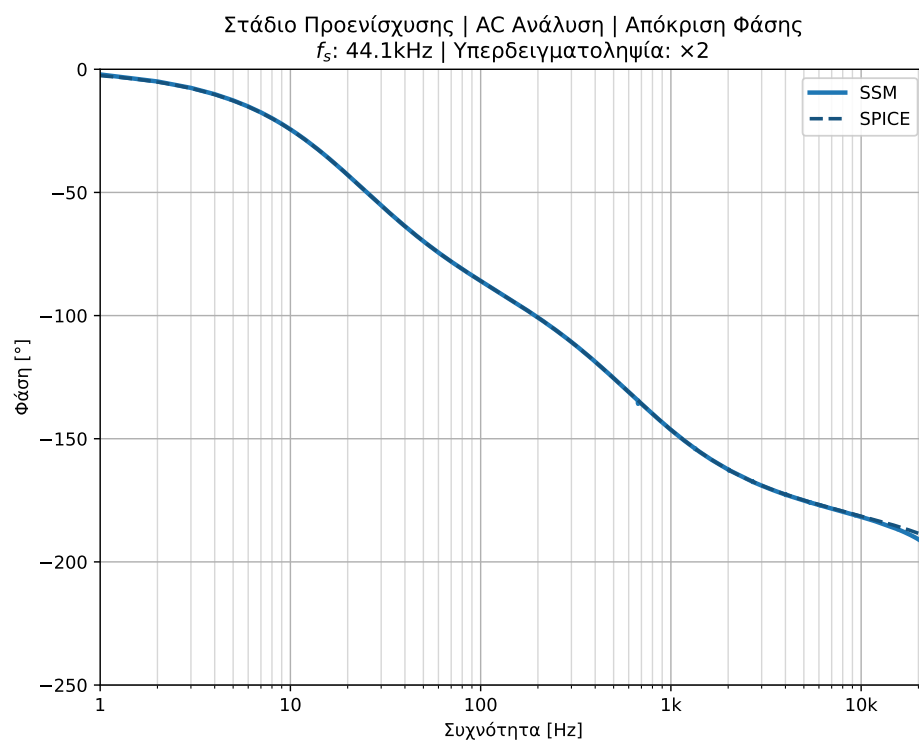
Εικόνα 4.3: Απόκριση πλάτους του σταδίου προενίσχυσης (I)



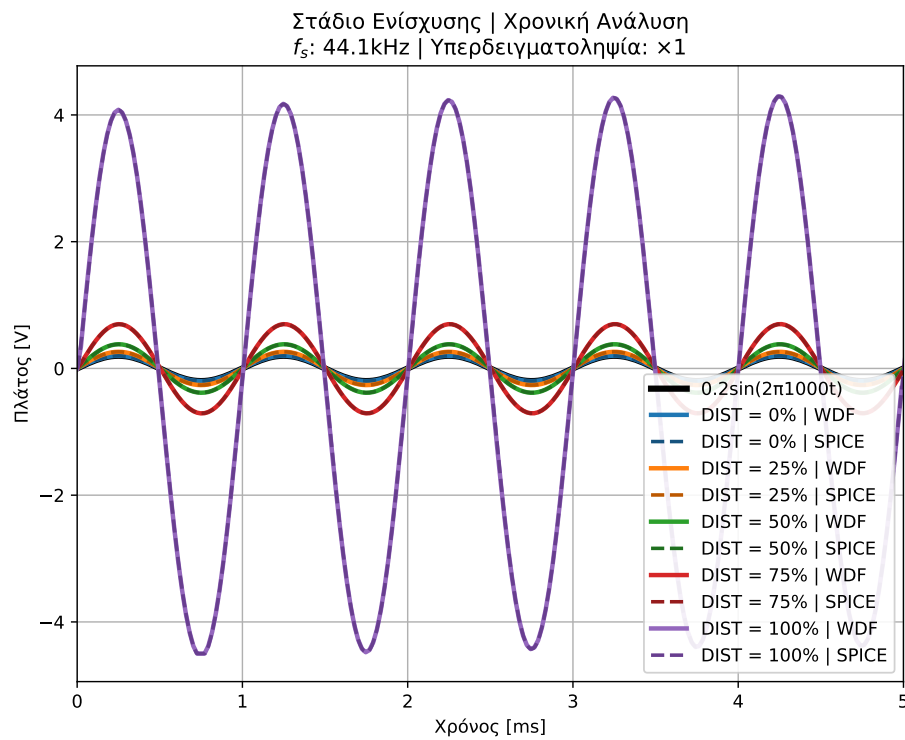
Εικόνα 4.4: Απόκριση πλάτους του σταδίου προενίσχυσης (II)



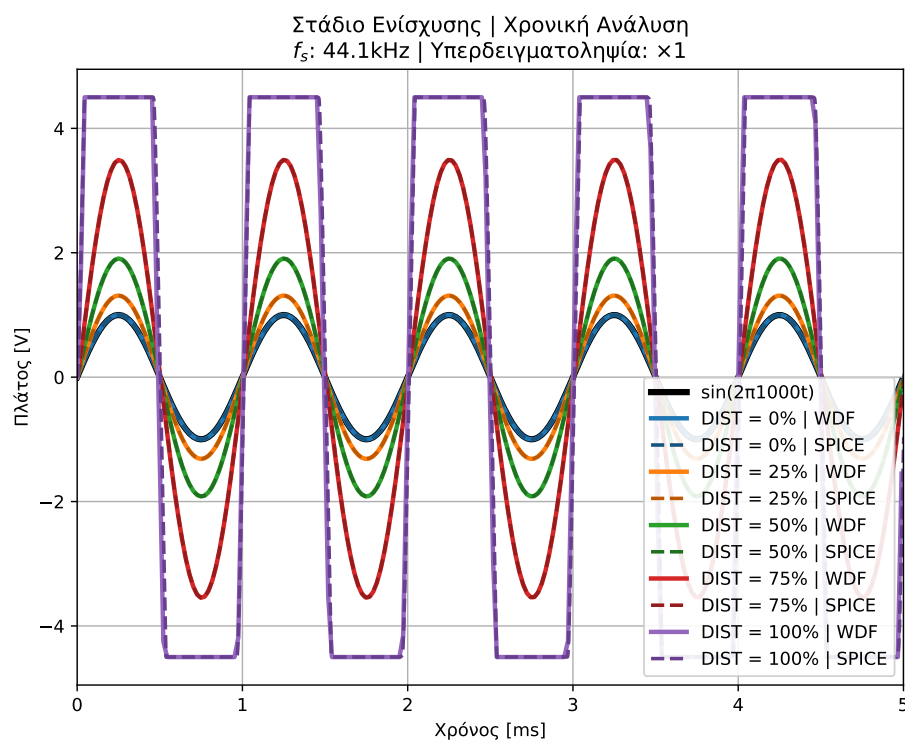
Εικόνα 4.5: Απόκριση φάσης του σταδίου προενίσχυσης (I)



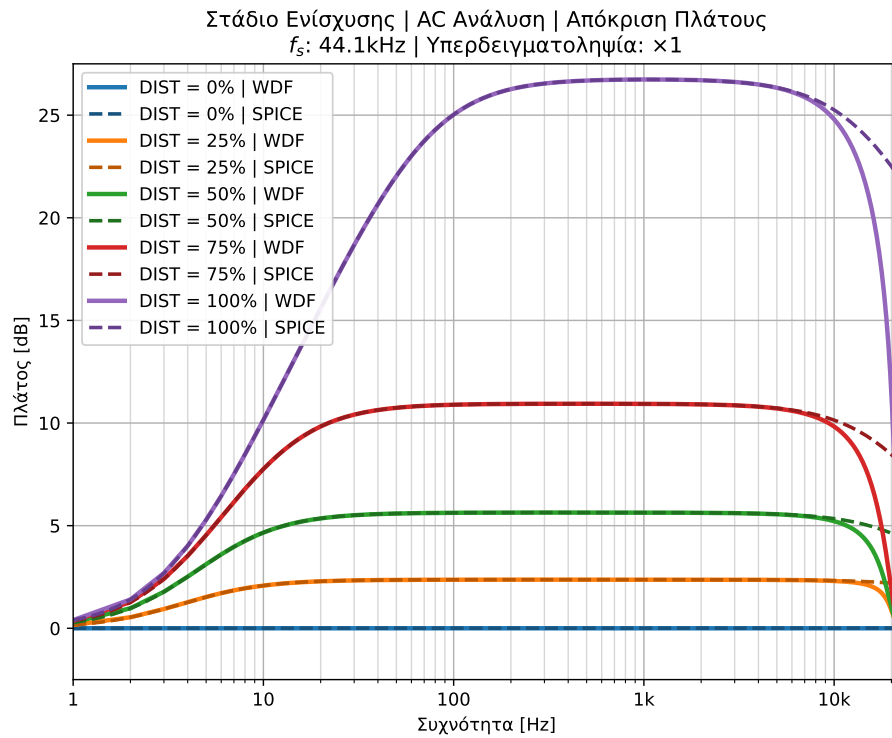
Εικόνα 4.6: Απόκριση φάσης του σταδίου προενίσχυσης (II)



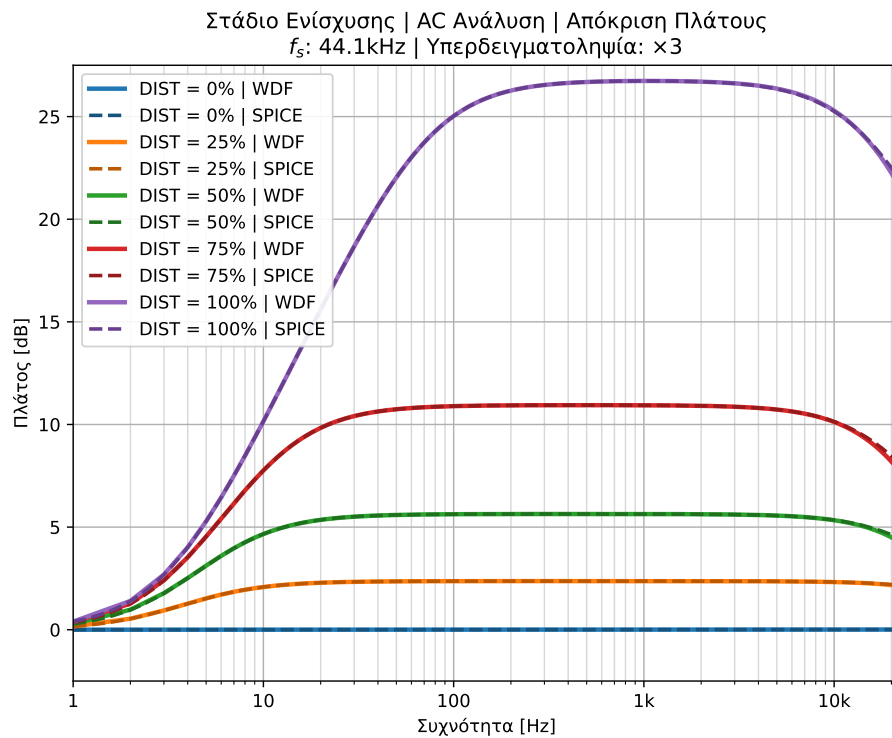
Εικόνα 4.7: Χρονική απόκριση του σταδίου ενίσχυσης (I)



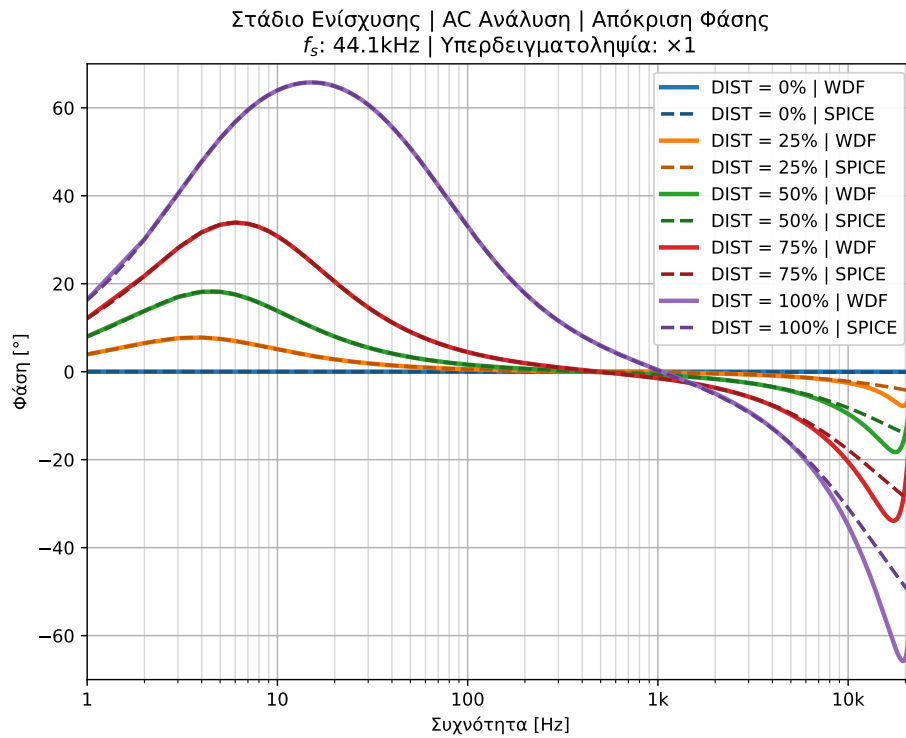
Εικόνα 4.8: Χρονική απόκριση του σταδίου ενίσχυσης (II)



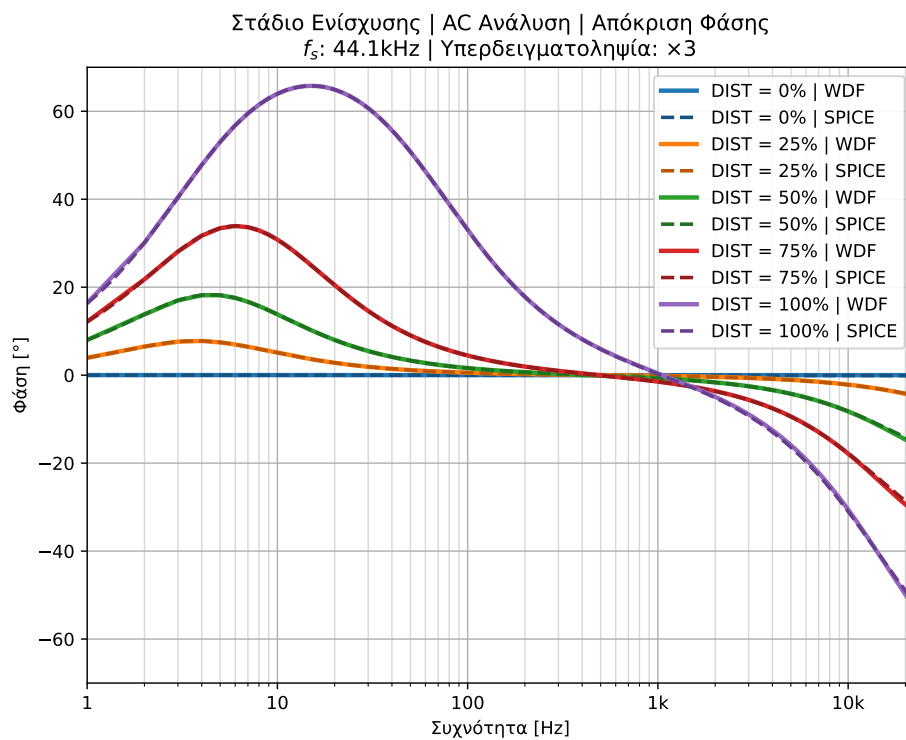
Εικόνα 4.9: Απόκριση πλάτους του σταδίου ενίσχυσης (I)



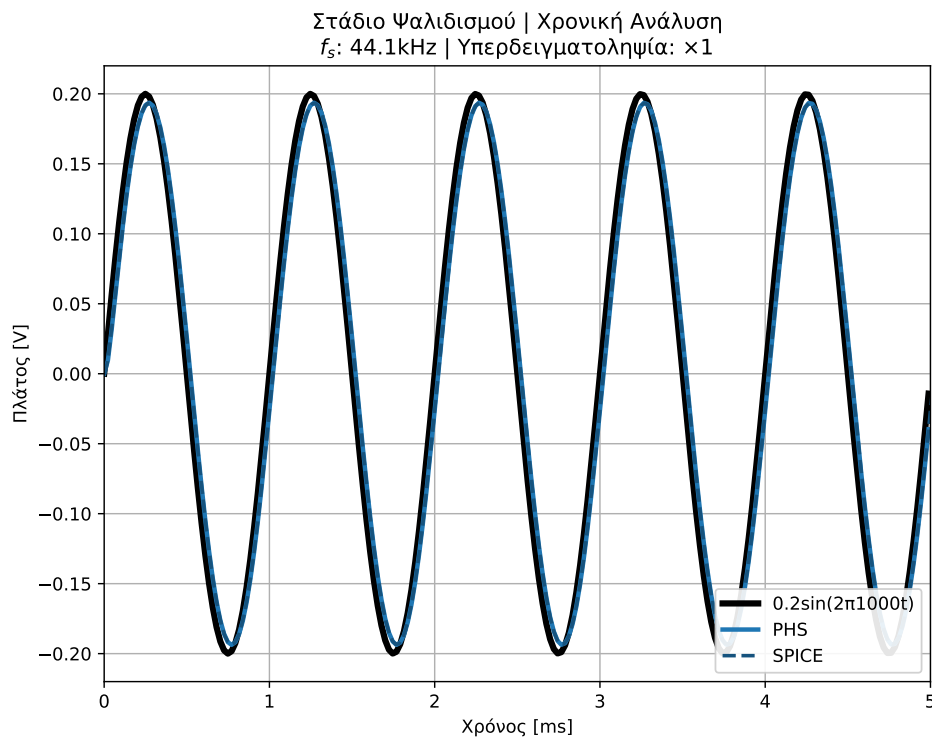
Εικόνα 4.10: Απόκριση πλάτους του σταδίου ενίσχυσης (II)



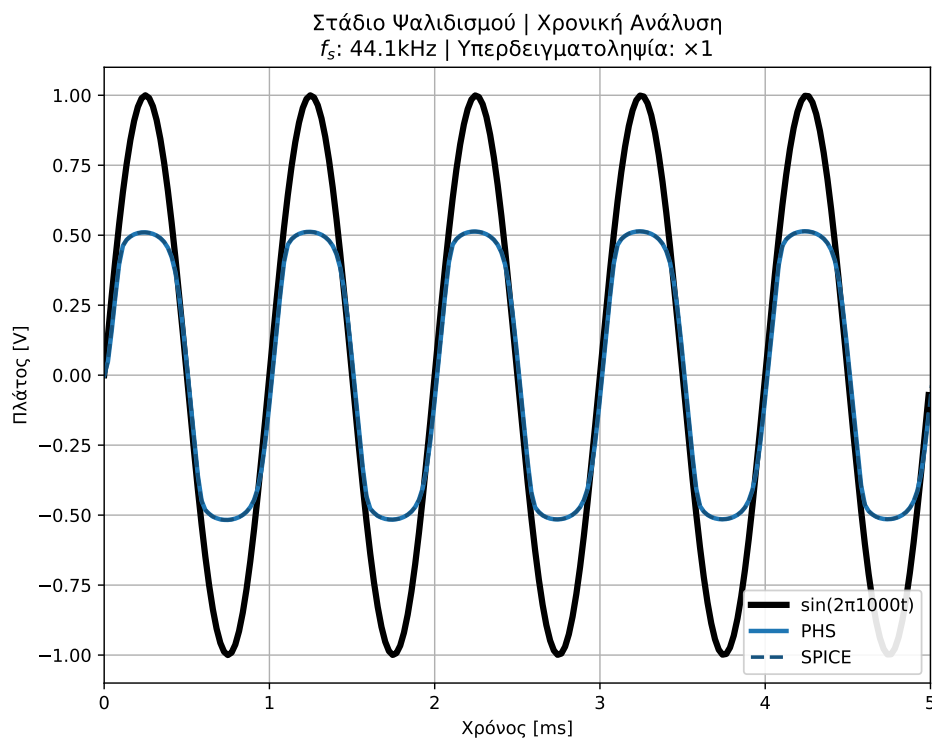
Εικόνα 4.11: Απόκριση φάσης του σταδίου ενίσχυσης (I)



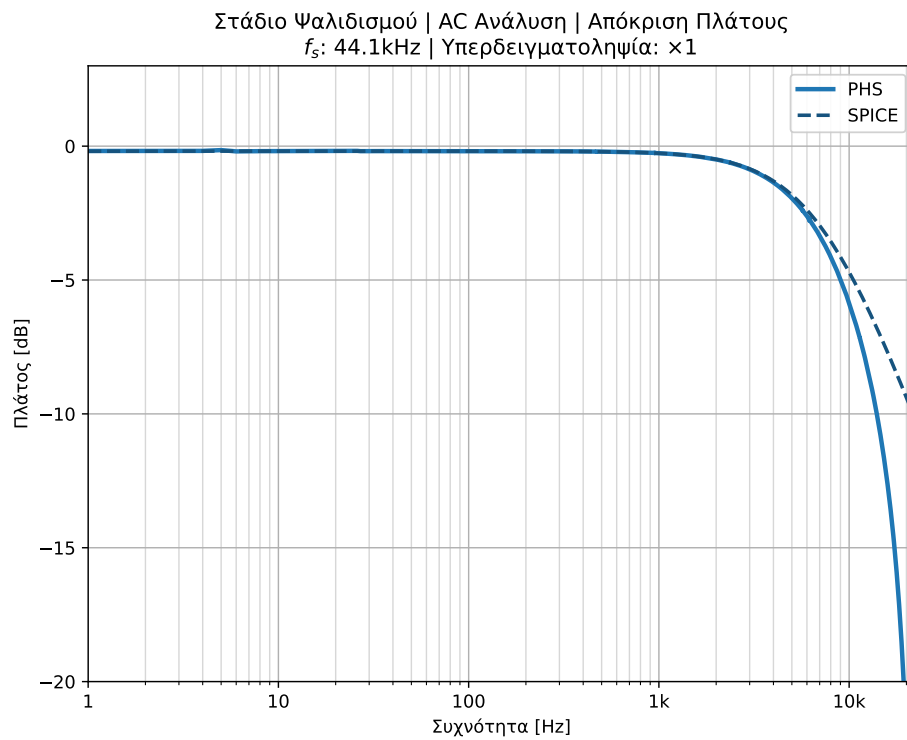
Εικόνα 4.12: Απόκριση φάσης του σταδίου ενίσχυσης (II)



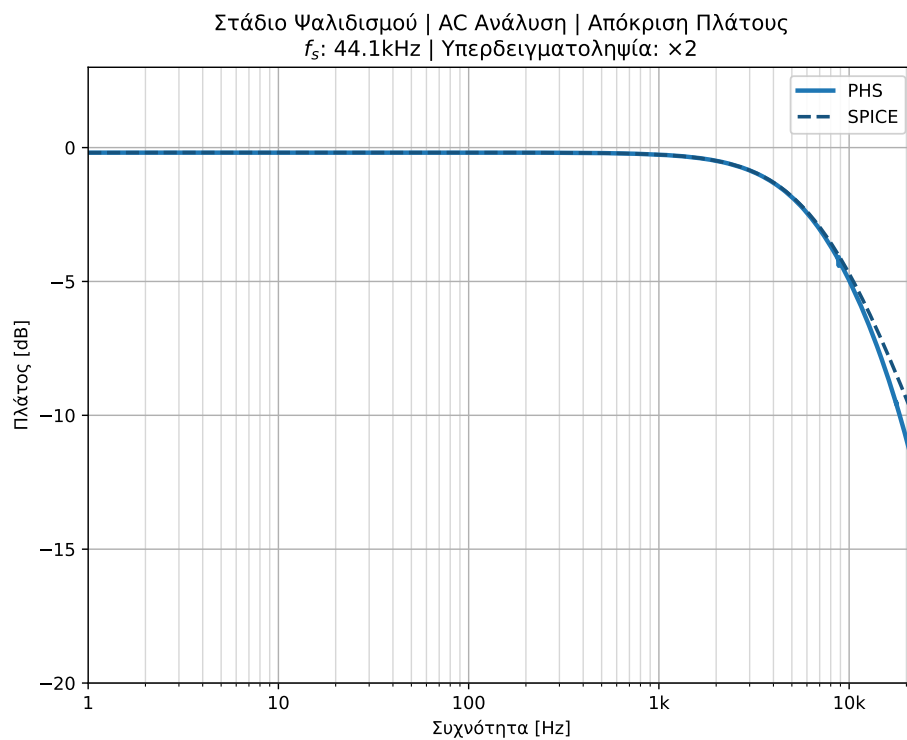
Εικόνα 4.13: Χρονική απόκριση του σταδίου ψαλιδισμού (I)



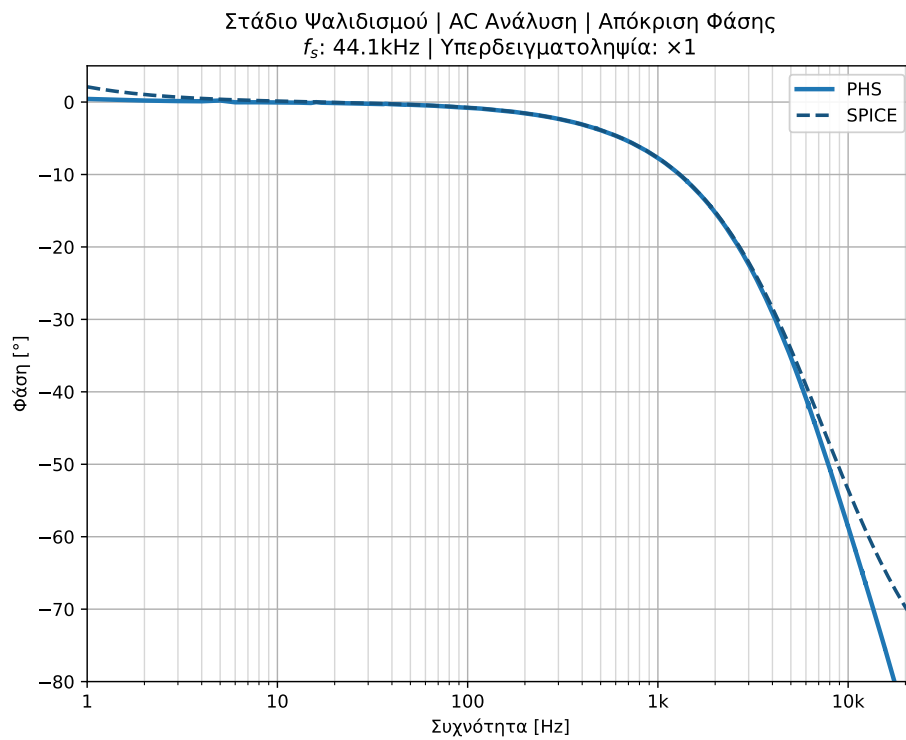
Εικόνα 4.14: Χρονική απόκριση του σταδίου ψαλιδισμού (II)



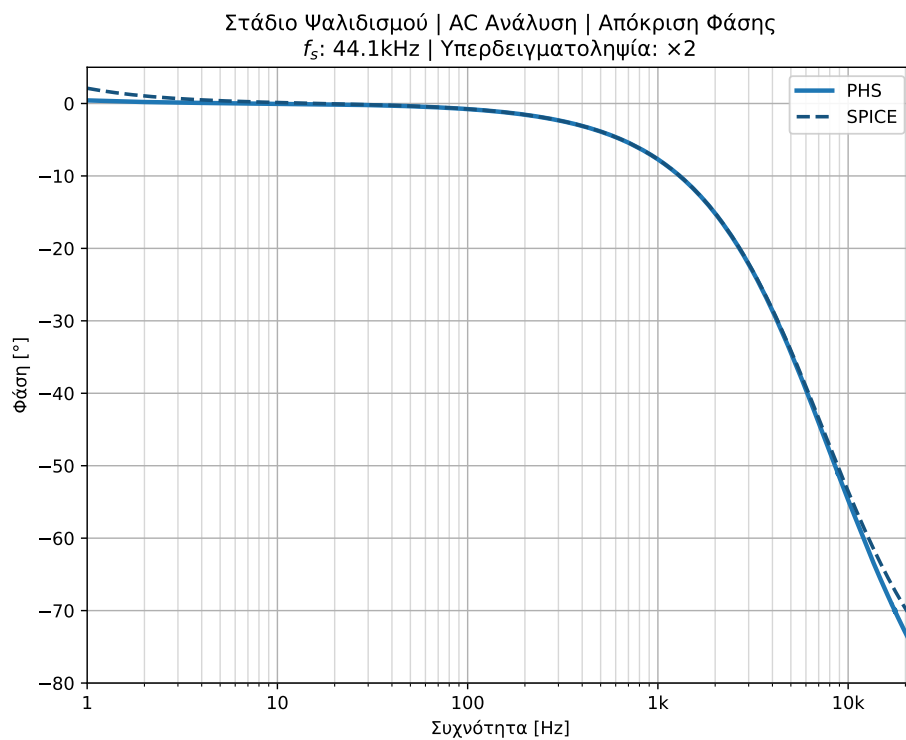
Εικόνα 4.15: Απόκριση πλάτους του σταδίου ψαλιδισμού (I)



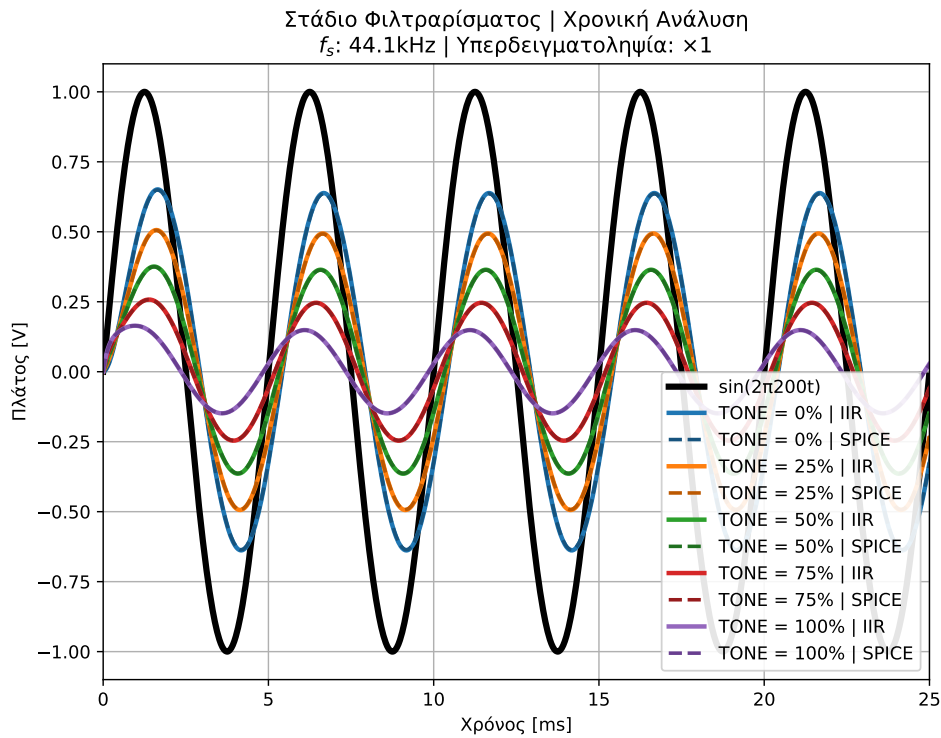
Εικόνα 4.16: Απόκριση πλάτους του σταδίου ψαλιδισμού (II)



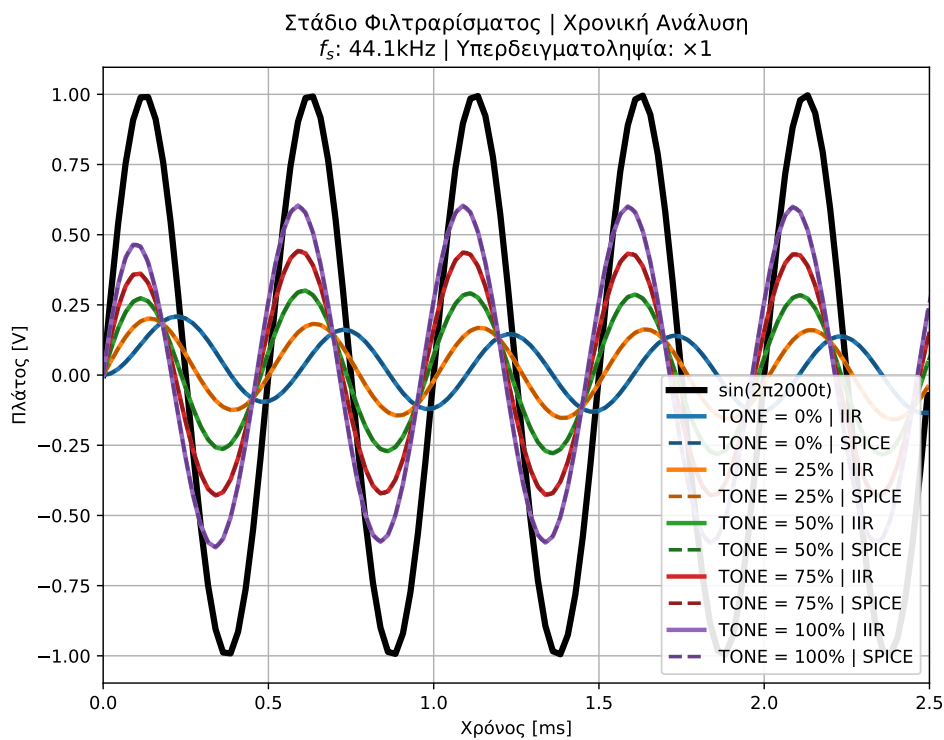
Εικόνα 4.17: Απόκριση φάσης του σταδίου ψαλιδισμού (I)



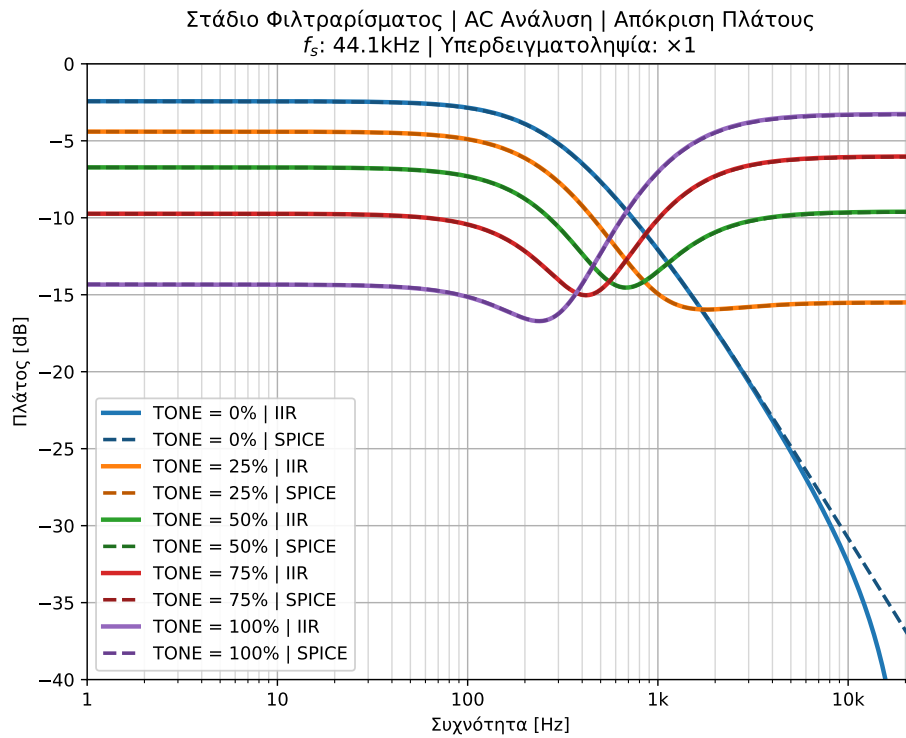
Εικόνα 4.18: Απόκριση φάσης του σταδίου ψαλιδισμού (II)



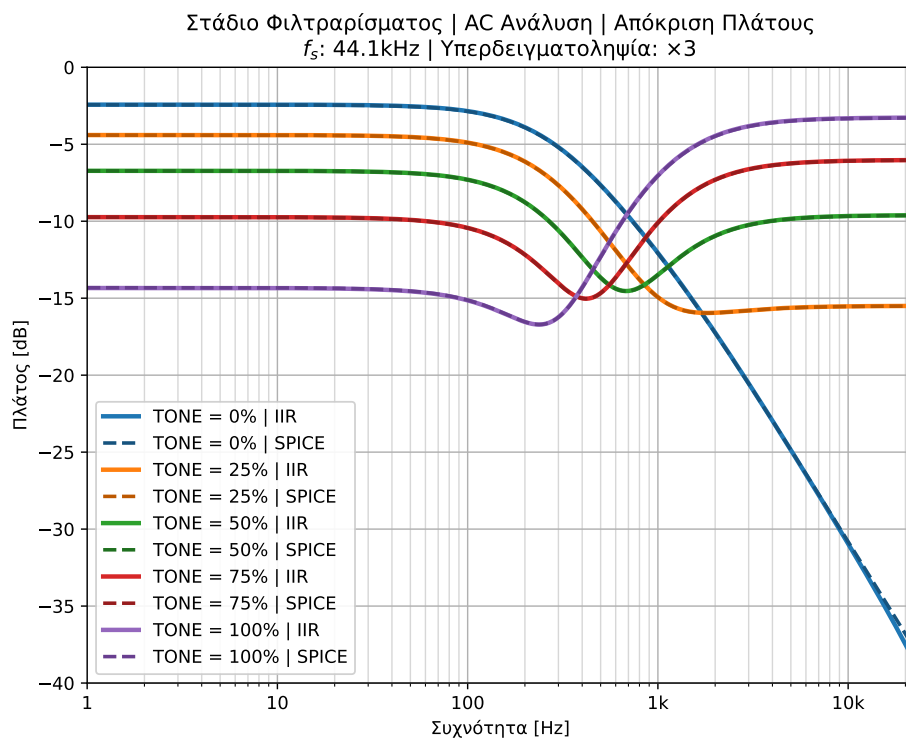
Εικόνα 4.19: Χρονική απόκριση του σταδίου φιλτραρίσματος (I)



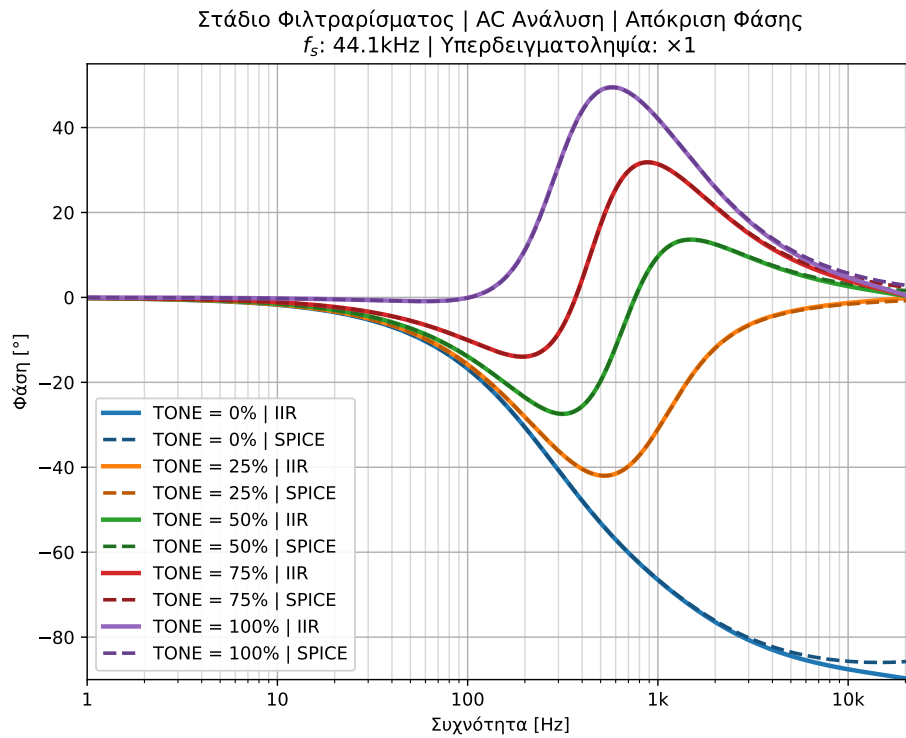
Εικόνα 4.20: Χρονική απόκριση του σταδίου φιλτραρίσματος (II)



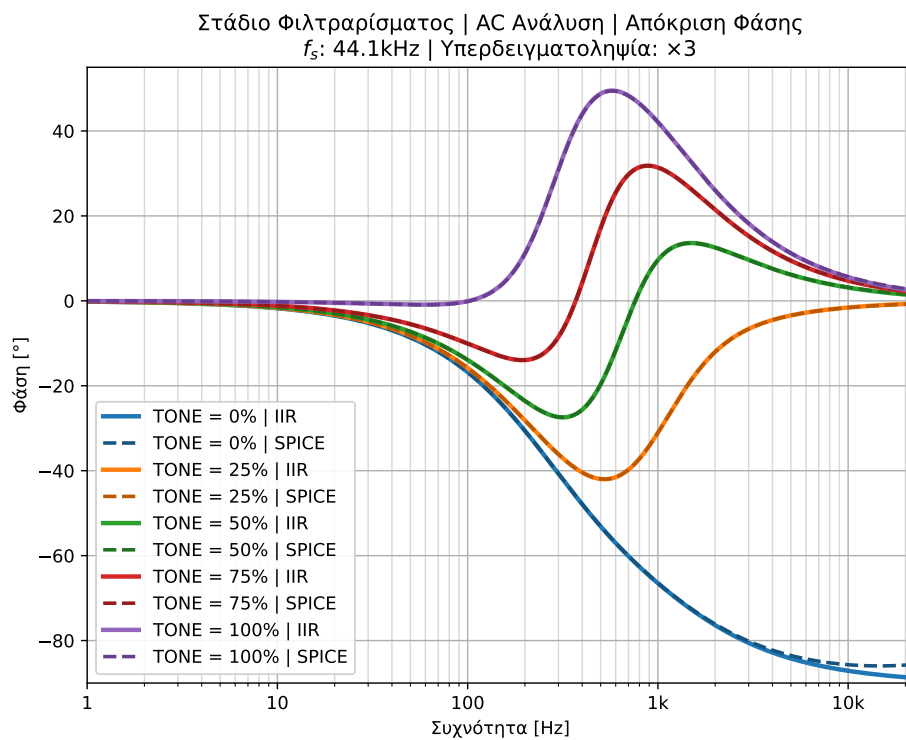
Εικόνα 4.21: Απόκριση πλάτους του σταδίου φιλτραρίσματος (I)



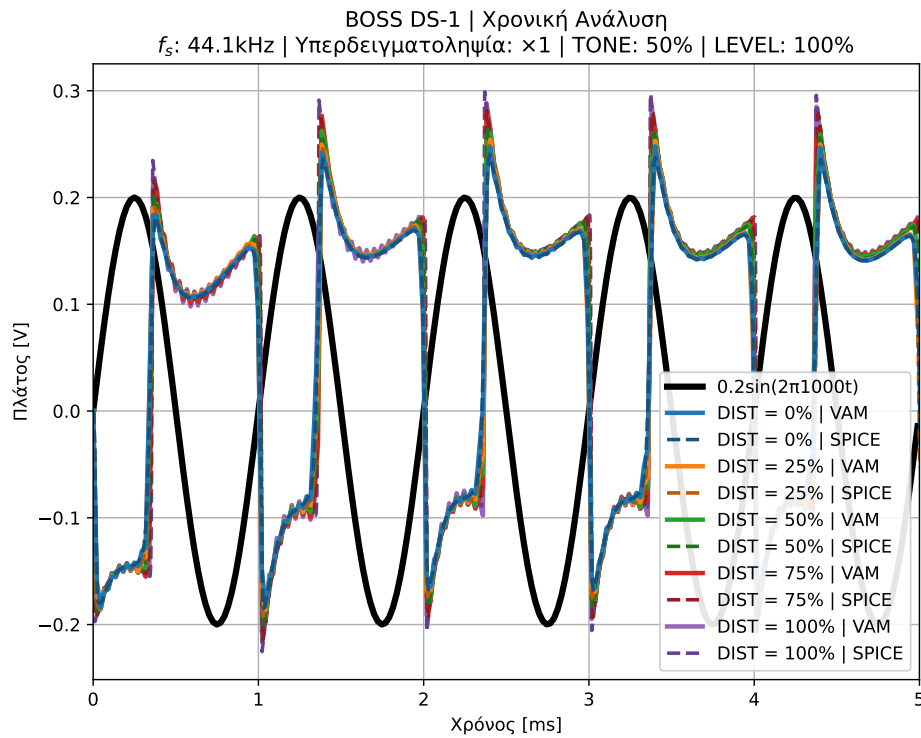
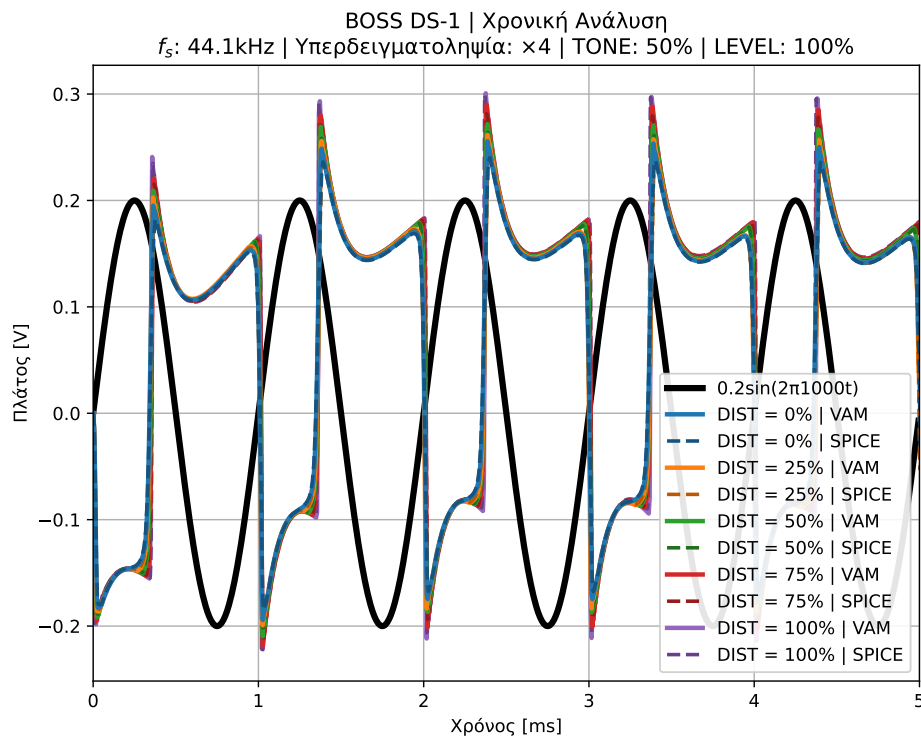
Εικόνα 4.22: Απόκριση πλάτους του σταδίου φιλτραρίσματος (II)

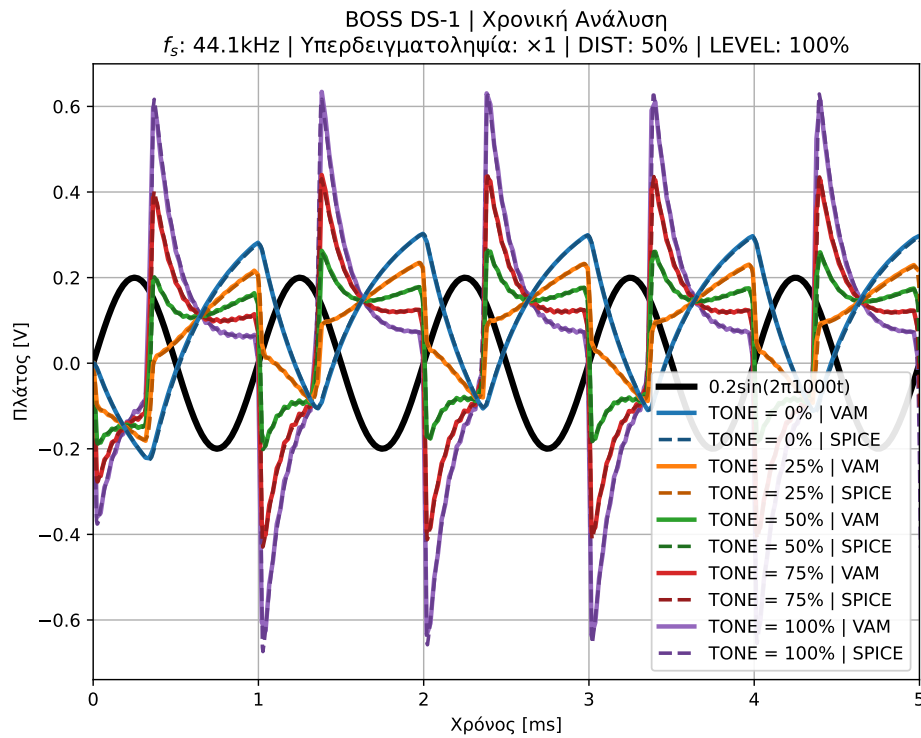
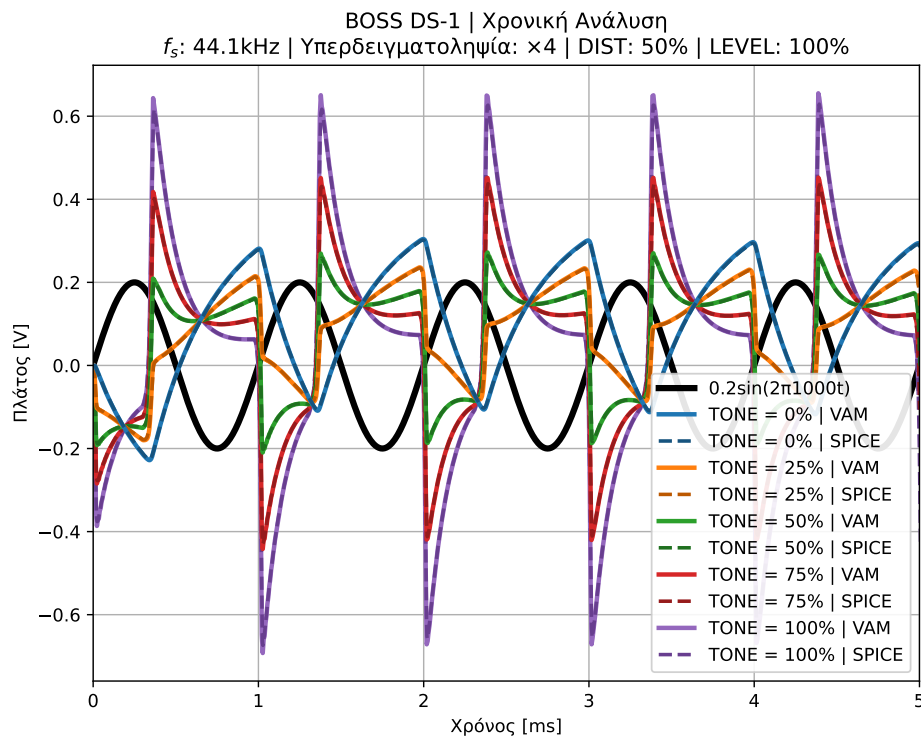


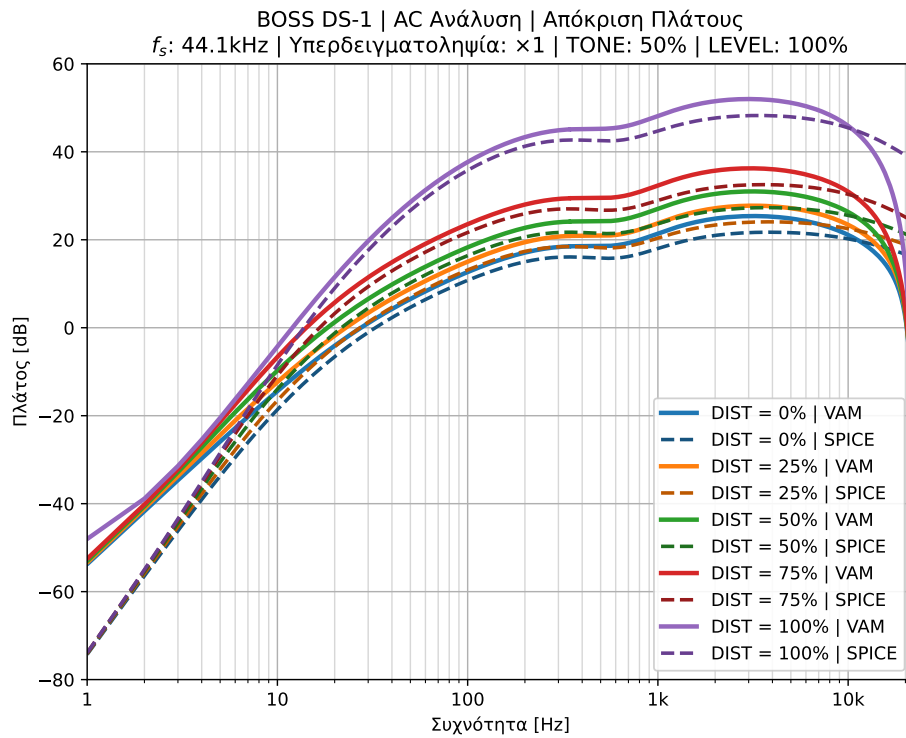
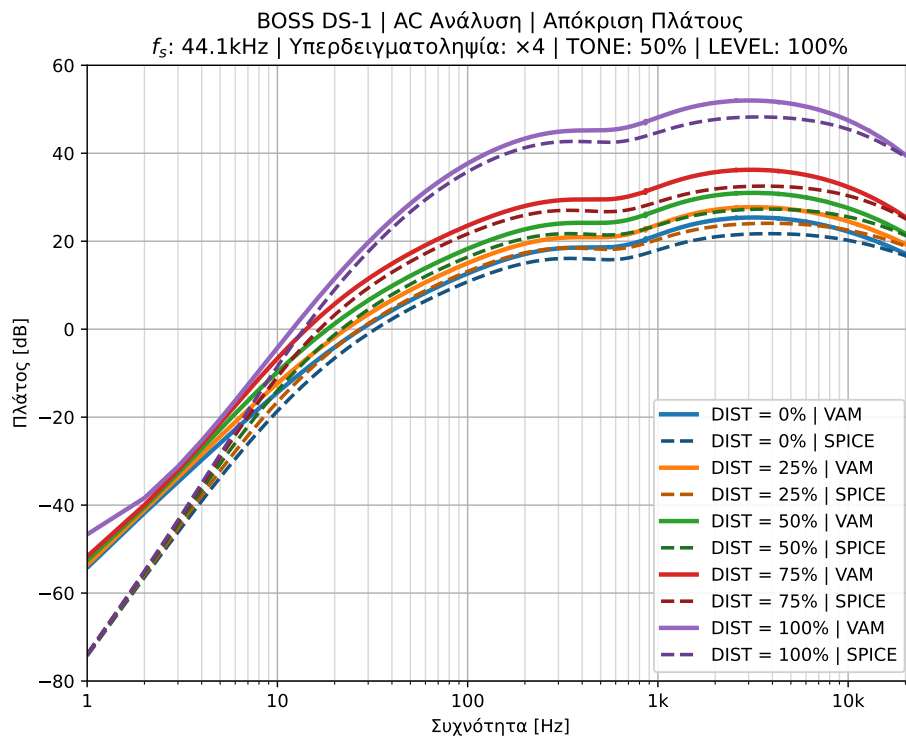
Εικόνα 4.23: Απόκριση φάσης του σταδίου φιλτραρίσματος (I)

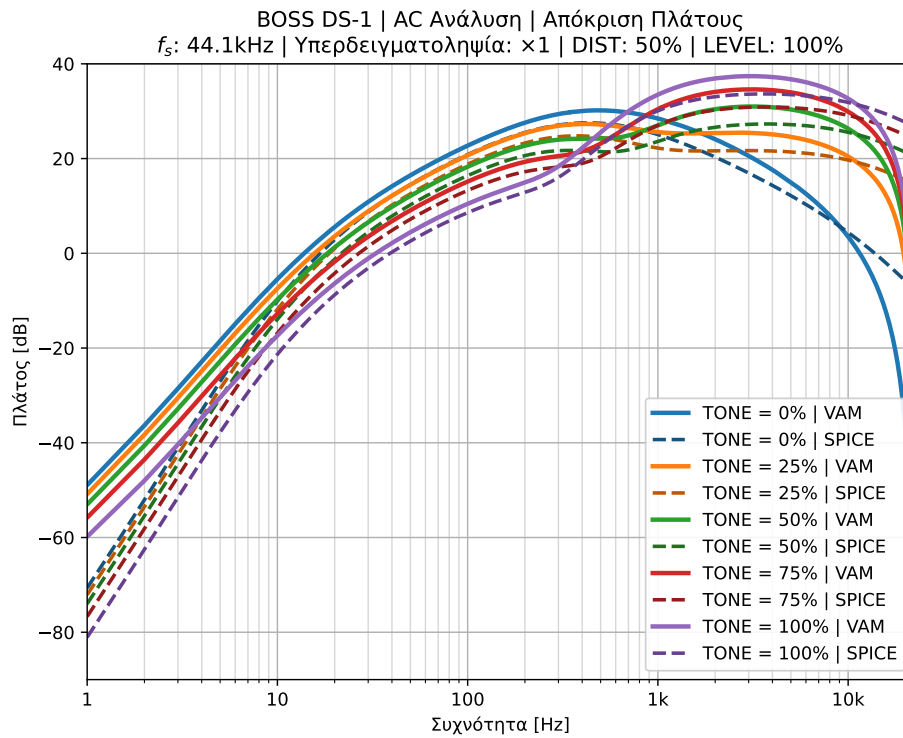
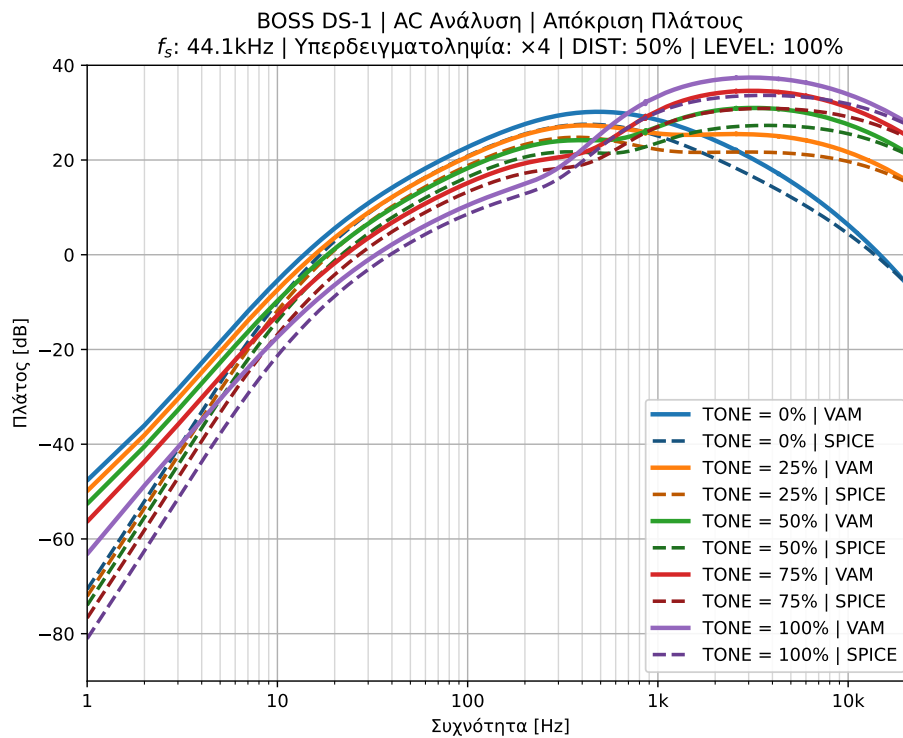


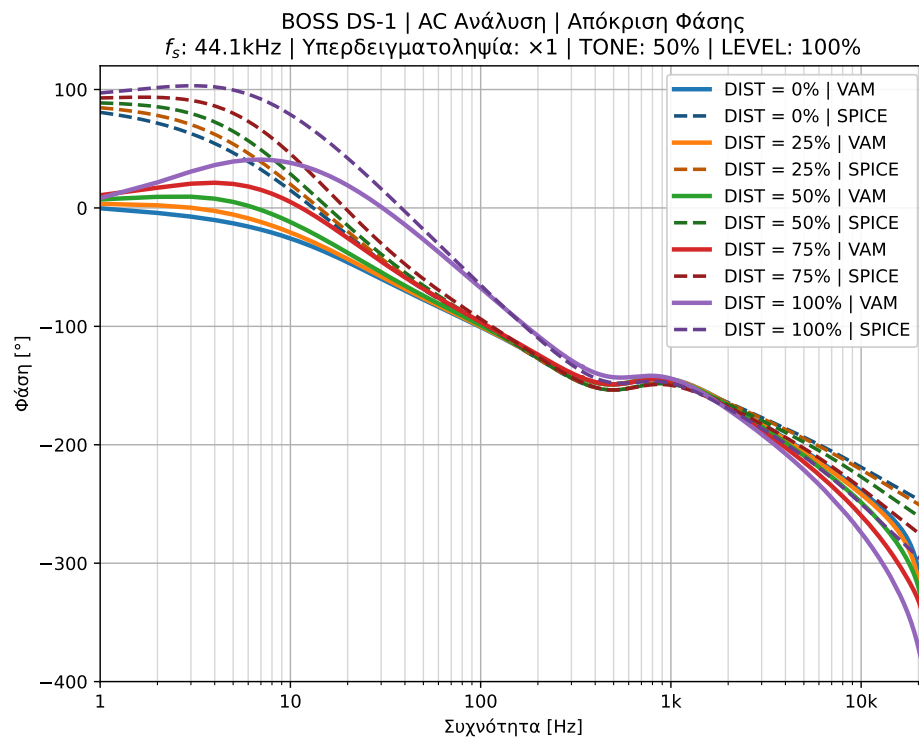
Εικόνα 4.24: Απόκριση φάσης του σταδίου φιλτραρίσματος (II)

Εικόνα 4.25: Χρονική απόκριση του *BOSS DS-1* (I)Εικόνα 4.26: Χρονική απόκριση του *BOSS DS-1* (II)

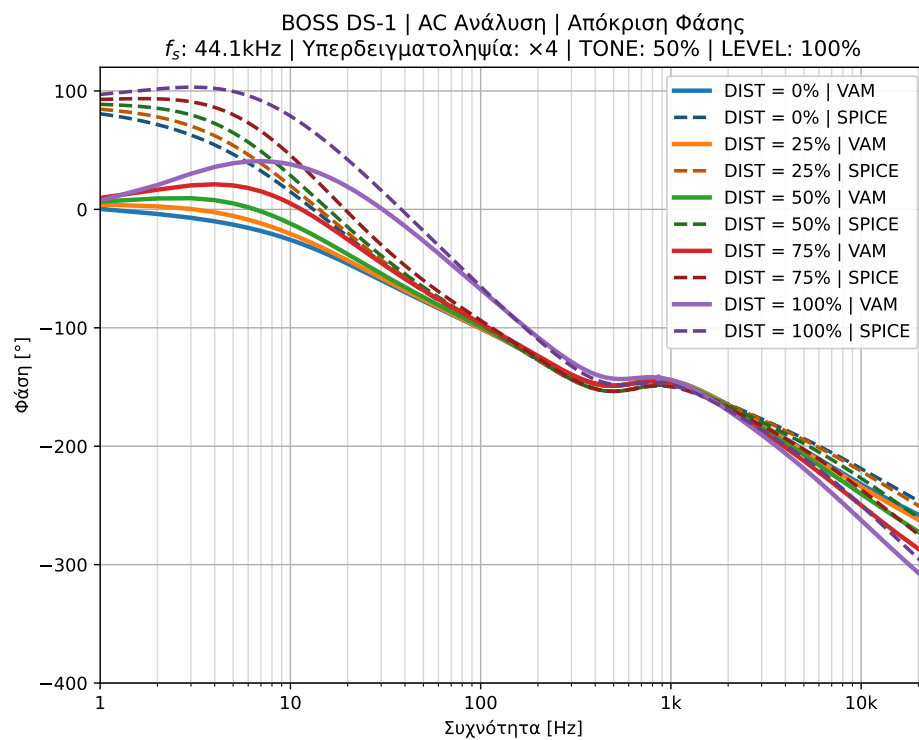
Εικόνα 4.27: Χρονική απόκριση του *BOSS DS-1* (III)Εικόνα 4.28: Χρονική απόκριση του *BOSS DS-1* (IV)

Εικόνα 4.29: Απόκριση πλάτους του *BOSS DS-1* (I)Εικόνα 4.30: Απόκριση πλάτους του *BOSS DS-1* (II)

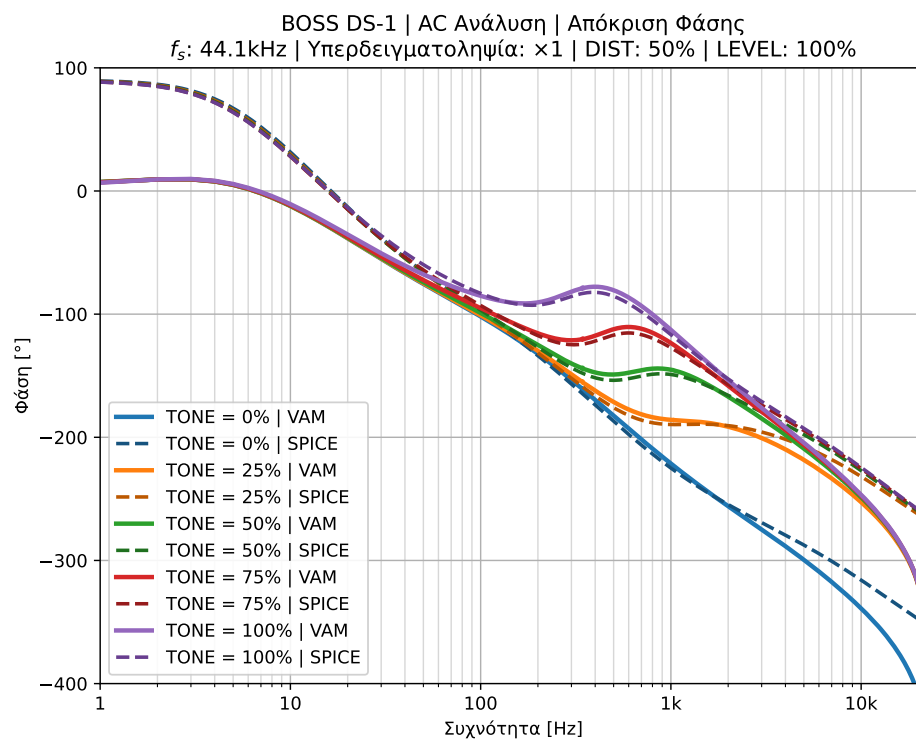
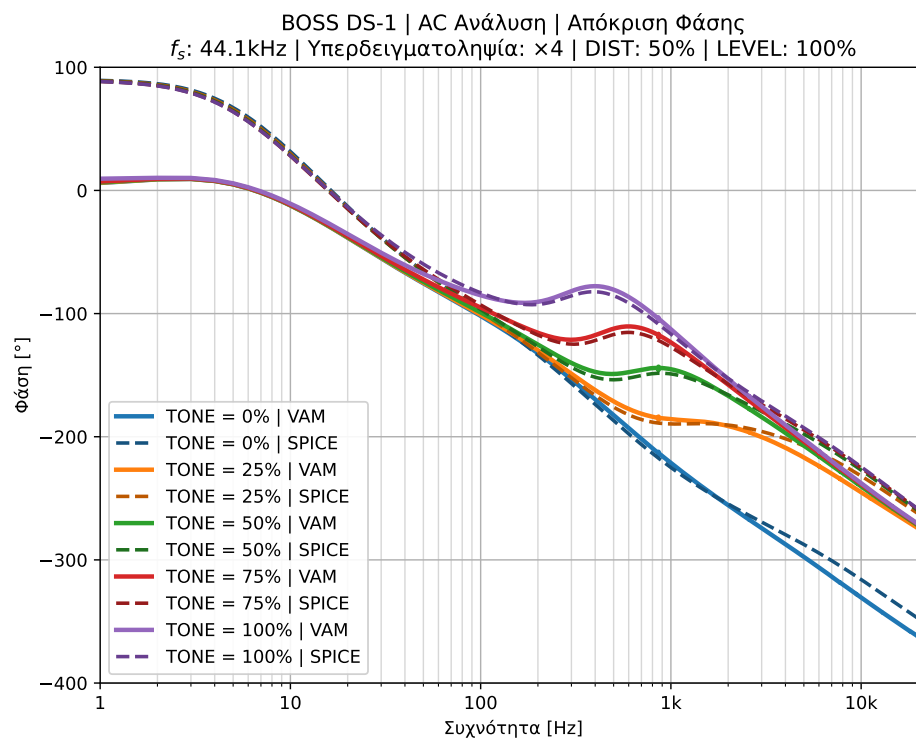
Εικόνα 4.31: Απόκριση πλάτους του *BOSS DS-1* (III)Εικόνα 4.32: Απόκριση πλάτους του *BOSS DS-1* (IV)



Εικόνα 4.33: Απόκριση φάσης του BOSS DS-1 (I)



Εικόνα 4.34: Απόκριση φάσης του BOSS DS-1 (II)

Εικόνα 4.35: Απόκριση φάσης του *BOSS DS-1* (III)Εικόνα 4.36: Απόκριση φάσης του *BOSS DS-1* (IV)

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων στις Εικόνες 4.1–4.36, αρχικά προκύπτει το συμπέρασμα ότι η ακρίβεια των υλοποιημένων μοντέλων είναι αρκετά ικανοποιητική, ενώ η λειτουργία κάθε σταδίου γίνεται πιο ξεκάθαρη. Ενδεικτικά:

- Στην Εικόνα 4.3 φαίνεται πως το στάδιο προενίσχυσης ενισχύει εξαιρετικά τις υψηλές συχνότητες, γεγονός που αντικατοπτρίζεται στις Εικόνες 4.1 και 4.2, όπου ένα σήμα χαμηλού πλάτους και συχνότητας ενισχύεται γραμμικά, ενώ ένα σήμα ίδιου πλάτους και υψηλότερης συχνότητας ωθεί το τρανζίστορ στη μη γραμμική περιοχή λειτουργίας του, οδηγώντας σε ασύμμετρη παραμόρφωση.
- Στις Εικόνες 4.7–4.9 φαίνεται πως το ποτενσιόμετρο *DIST* ρυθμίζει το κέρδος του γραμμικού σταδίου ενίσχυσης, ενώ παρατηρείται ο ψαλιδισμός που προκαλείται όταν η τάση εξόδου επιχειρεί να ξεπεράσει τα όρια των $\pm 4.5V$.
- Στις Εικόνες 4.13 και 4.14 φαίνεται πως το στάδιο ψαλιδισμού περιορίζει μη γραμμικά την τάση εξόδου για σήματα εισόδου με σχετικά υψηλό πλάτος, ενώ τα σήματα εισόδου σχετικά χαμηλού πλάτους επηρεάζονται πρακτικά ελάχιστα.
- Στην Εικόνα 4.21 φαίνεται πως το ποτενσιόμετρο *TONE* μεταβάλλει το σχήμα της απόκρισης πλάτους του σταδίου φιλτραρίσματος τονίζοντας διαφορετικές περιοχές συχνοτήτων, ενώ στις Εικόνες 4.19 και 4.20 αντικατοπτρίζεται πως επηρεάζεται ένα σήμα εισόδου χαμηλής και υψηλής συχνότητας αντίστοιχα.

Ακόμα, στα διαγράμματα απόκρισης πλάτους και φάσης κάθε μοντέλου μπορεί να παρατηρηθεί σε μικρό ή μεγάλο βαθμό το φαινόμενο της στρέβλωσης συχνότητας. Συγκεκριμένα, περίπου μετά τα 10kHz είναι εμφανής η απόκλιση της συχνοτικής απόκρισης των υλοποιημένων μοντέλων, τα οποία έχουν διακριτοποιηθεί, από αυτή των μοντέλων SPICE, τα οποία δεν εφαρμόζουν κάποια διακριτοποίηση κατά την AC ανάλυση. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να περιοριστεί μέσω υπερδειγματοληψίας, ωστόσο πρακτικά δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα για σήματα ηλεκτρικής κιθάρας, καθώς τα ηχεία των ενισχυτών συνήθως κόβουν τις συχνότητες πέρα από τα 5–6kHz.

Επιπλέον, παρατηρώντας τις Εικόνες 4.25 και 4.27 γίνεται αντιληπτή η επίδραση του φαινομένου της αναδίπλωσης συχνότητας στο πεδίο του χρόνου. Ειδικότερα, οι κυματισμοί που εμφανίζονται οφείλονται στο γεγονός ότι οι μη γραμμικότητες του κυκλώματος εισάγουν συχνότητες που ξεπερνούν τη συχνότητα Nyquist, με αποτέλεσμα την αλλοίωση του φάσματος των σημάτων εξόδου και κατά συνέπεια των αντίστοιχων κυματομορφών. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να αποτελέσει σημαντικό πρόβλημα όταν η αλλοίωση εκτείνεται στις χαμηλές συχνότητες, ωστόσο μπορεί να περιοριστεί μέσω υπερδειγματοληψίας, όπως φαίνεται στις Εικόνες 4.26 και 4.28.

Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στις Εικόνες 4.29–4.36, οι οποίες παρουσιάζουν μια απόκλιση των συχνοτικών αποκρίσεων του ενιαίου μοντέλου του *BOSS DS-1* από τις αντίστοιχες προσομοιώσεις του SPICE. Η απόκλιση αυτή οφείλεται κατά κύριο λόγο στα φαινόμενα αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα στάδια ψαλιδισμού και φιλτραρίσματος του κυκλώματος, τα οποία δεν είναι επαρκώς απομονωμένα μεταξύ τους. Ωστόσο, παρά τις γενικότερες διαφορές, το σχήμα των συχνοτικών αποκρίσεων φαίνεται να διατηρείται αρκετά καλά, εξαιρώντας τις πολύ χαμηλές συχνότητες, ενώ ακόμα παρατηρείται ένα ελαφρώς μεγαλύτερο κέρδος στις υψηλότερες συχνότητες.

4.2 Διεξαγωγή Έρευνας

Στη δεύτερη φάση της διαδικασίας αξιολόγησης πραγματοποιήθηκε μια διαδικτυακή έρευνα με επίκεντρο την ακρόαση και τη σύγκριση ορισμένων ηχητικών δειγμάτων, στην οποία έλαβαν μέρος συνολικά 35 άτομα χωρίς απαραίτητο μουσικό υπόβαθρο. Συγκεκριμένα, η έρευνα είχε τη μορφή μιας δοκιμής ABX [100], σύμφωνα με την οποία οι συμμετέχοντες αρχικά ακούν δύο διαφορετικά αλλά παρόμοια ηχητικά δείγματα *A* και *B*, ενώ στη συνέχεια ελέγχεται η ικανότητα τους να αντιληφθούν ποιο από αυτά τα δύο δείγματα ταυτίζεται με ένα κρυφό τρίτο δείγμα *X*. Επιπλέον, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να βαθμολογήσουν την ομοιότητα των δειγμάτων *A* και *B* σε μια γραμμική κλίμακα από το 1 έως το 7, καθώς επίσης και να υποδείξουν την ενδεχόμενη προτίμηση τους ανάμεσα σε αυτά. Ειδικότερα, το ερωτηματολόγιο που συντάχθηκε στο πλαίσιο της έρευνας αξιολόγησης είχε την παρακάτω μορφή:

- *Πόσο όμοια σας ακούγονται τα δείγματα A και B;*
 - *Καθόλου ← 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 → Απόλυτα*
- *Ποιο από τα δύο δείγματα πιστεύετε ότι ταυτίζεται με το δείγμα X;*
 - *Το δείγμα A*
 - *Το δείγμα B*
 - *Δε μπορώ να απαντήσω με σιγουριά*
- *Ποιο από τα δύο δείγματα προτιμάτε ηχητικά;*
 - *Το δείγμα A*
 - *Το δείγμα B*
 - *Δεν έχω κάποια προτίμηση*

Για τη διεξαγωγή της έρευνας προετοιμάστηκαν συνολικά 5 ομάδες ηχητικών δειγμάτων, ηχογραφώντας ισάριθμα αποσπάσματα ηλεκτρικής κιθάρας διάρκειας μερικών δευτερολέπτων. Κάθε απόσπασμα επεξεργάστηκε αφενός από το μοντέλο του *BOSS DS-1* που υλοποιήθηκε, χωρίς υπερδειγματοληψία, και αφετέρου από το μοντέλο του κυκλώματος στο *SPICE*, συμπεριλαμβάνοντας τα στάδια εισόδου και εξόδου. Οι ρυθμίσεις των ποτενσιομέτρων που εφαρμόστηκαν για τα δείγματα κάθε ομάδας παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1. Ακόμα, κάθε δείγμα επεξεργάστηκε από ένα ψηφιακό φίλτρο που προσομοιώνει τη συχνотική απόκριση του ηχείου ενός ενισχυτή κιθάρας, κόβοντας τις υψηλές συχνότητες. Έτσι προέκυψαν για κάθε ομάδα τα δείγματα *A* και *B*, επιλέγοντας τυχαία κάποιο από αυτά για το δείγμα *X*.

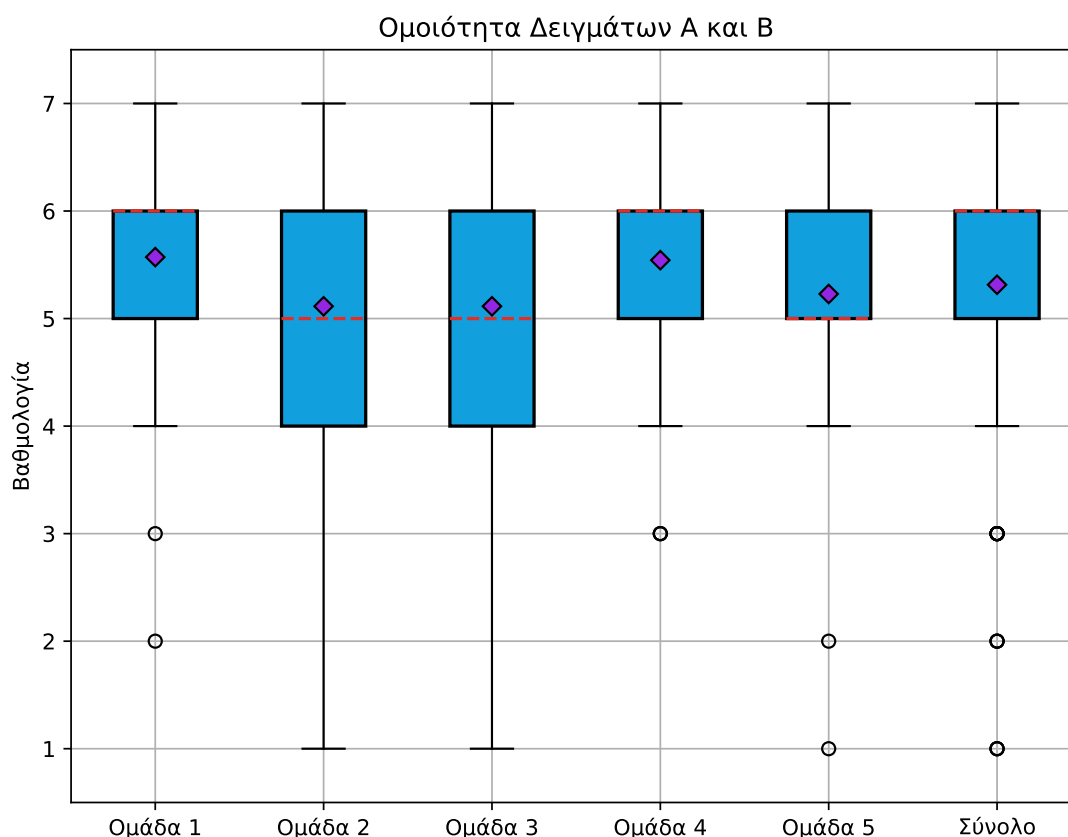
Πίνακας 4.1: Ρυθμίσεις ποτενσιομέτρων των ηχητικών δειγμάτων

Ομάδα	<i>DIST</i>	<i>TONE</i>	<i>LEVEL</i>
1	0 %	80 %	100 %
2	25 %	60 %	100 %
3	50 %	50 %	100 %
4	75 %	70 %	100 %
5	100 %	70 %	100 %

Τα αποτελέσματα των μέσων βαθμολογιών ομοιότητας των δειγμάτων *A* και *B* που προέκυψαν για κάθε ομάδα παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 4.2. Παράλληλα, στα θηκογράμματα της Εικόνας 4.37 περιγράφεται αναλυτικά η στατιστική κατανομή των αποτελεσμάτων της διαδικασίας βαθμολόγησης ομοιότητας των δειγμάτων *A* και *B*, όπου οι μέσες τιμές του Πίνακα 4.2 απεικονίζονται ως ρόμβοι. Συνολικά, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως η ομοιότητα ανάμεσα στα ηχητικά χαρακτηριστικά των δύο προσομοιώσεων γίνεται αρκετά αισθητή, χωρίς να παρουσιάζονται ιδιαίτερες διαφορές από ομάδα σε ομάδα δειγμάτων. Ωστόσο, η επίτευξη ικανοποιητικών αλλά όχι βέλτιστων αποτελεσμάτων αποτελεί μια πρώτη ένδειξη πως υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης, η οποία θα επανεξεταστεί στη συνέχεια.

Πίνακας 4.2: Μέσες βαθμολογίες ομοιότητας των δειγμάτων *A* και *B*

Ομάδα	Ομοιότητα
1	5.57
2	5.11
3	5.11
4	5.54
5	5.23
Σύνολο	5.31

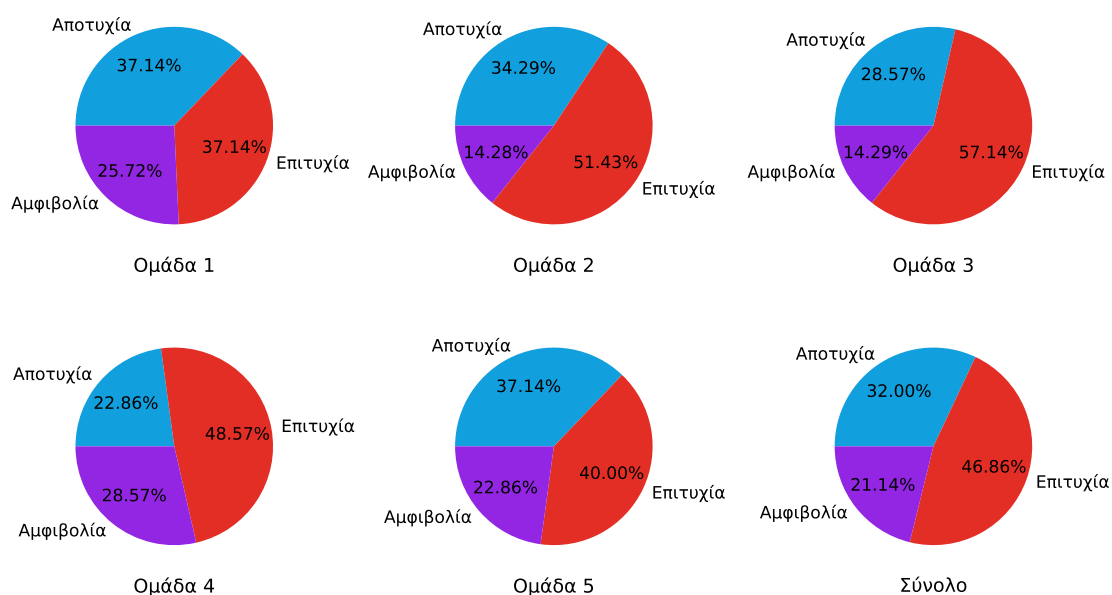


Εικόνα 4.37: Αποτελέσματα βαθμολόγησης ομοιότητας των δειγμάτων *A* και *B*

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη διαδικασία αναγνώρισης του δείγματος X παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 4.3. Ειδικότερα, το πλήθος των απαντήσεων των συμμετεχόντων κατανέμεται στις στήλες «Αποτυχία» και «Επιτυχία» ανάλογα με την ορθότητα τους, ενώ η στήλη «Αμφιβολία» περιλαμβάνει τις απαντήσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες δε μπορούσαν να αναγνωρίσουν το δείγμα X με σιγουριά. Ακόμα, παρατίθενται οι αντίστοιχες ποσοστιαίες κατανομές των απαντήσεων για κάθε ομάδα, οι οποίες επιπλέον οπτικοποιούνται στα γραφήματα πίτας της Εικόνας 4.38. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα ποσοστά επιτυχίας αναγνώρισης του δείγματος X είναι σχετικά υψηλά, γεγονός που αναδεικνύει την ύπαρξη ηχητικών διαφορών ανάμεσα στα δείγματα A και B . Ωστόσο, δεδομένου ότι οι συμμετέχοντες είχαν τη δυνατότητα να ξανακούσουν τα δείγματα όσες φορές επιθυμούσαν και λαμβάνοντας υπόψιν τον παράγοντα των τυχαίων απαντήσεων, είναι ενθαρρυντικό το γεγονός ότι σε περισσότερες από τις μισές περιπτώσεις συνολικά οι συμμετέχοντες δεν κατάφεραν να αναγνωρίσουν επιτυχώς το δείγμα X .

Πίνακας 4.3: Αναλυτικά αποτελέσματα αναγνώρισης του δείγματος X

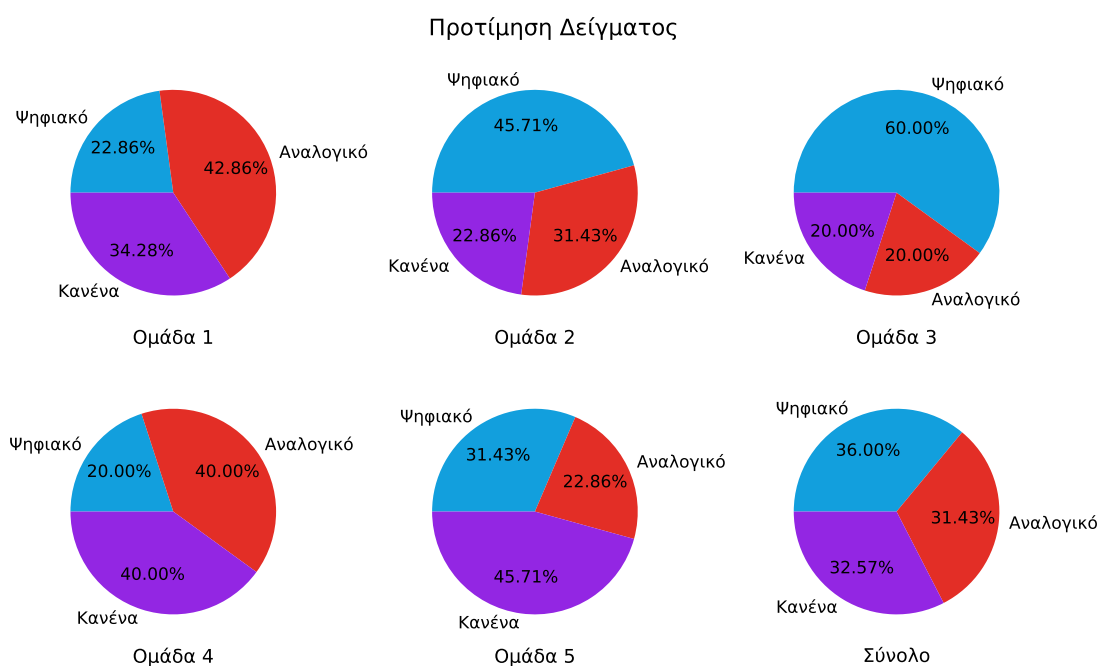
Ομάδα	Απαντήσεις			Ποσοστό (%)		
	Αποτυχία	Επιτυχία	Αμφιβολία	Αποτυχία	Επιτυχία	Αμφιβολία
1	13	13	9	37.14	37.14	25.72
2	12	18	5	34.29	51.43	14.28
3	10	20	5	28.57	57.14	14.29
4	8	17	10	22.86	48.57	28.57
5	13	14	8	37.14	40.00	22.86
Σύνολο	56	82	37	32.00	46.86	21.14

Αναγνώριση Δείγματος X Εικόνα 4.38: Οπτικοποιημένα αποτελέσματα αναγνώρισης του δείγματος X

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν σχετικά με την προτίμηση των συμμετεχόντων ως προς κάποιο από τα δείγματα Α και Β παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 4.4. Συγκεκριμένα, το πλήθος των απαντήσεων των συμμετεχόντων κατανέμεται στις στήλες «Ψηφιακό», που αναφέρεται στα δείγματα του υλοποιημένου μοντέλου του BOSS DS-1, και «Αναλογικό», υιοθετώντας συμβατικά αυτή την ονομασία για τα δείγματα του αντίστοιχου μοντέλου SPICE, λόγω της αναμενόμενης ακρίβειας του. Για την αποφυγή μεροληπτικών αποτελεσμάτων, οι συμμετέχοντες δε γνώριζαν ποιο δείγμα αντιστοιχεί σε ποιο μοντέλο, ενώ οι απαντήσεις στις οποίες δεν είχαν κάποια προτίμηση για κάποιο συγκεκριμένο δείγμα περιλαμβάνονται στη στήλη «Κανένα». Ακόμα, οι αντίστοιχες ποσοστιαίες κατανομές των απαντήσεων για κάθε ομάδα απεικονίζονται στην Εικόνα 4.39, όπου συνολικά γίνεται εμφανής μια ελαφριά προτίμηση προς τα ψηφιακά δείγματα, χωρίς όμως οι διαφορές να είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Ωστόσο, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως οι ηχητικές διαφορές ανάμεσα στα δύο μοντέλα δεν αποτελούν απαραίτητα αρνητικό χαρακτηριστικό.

Πίνακας 4.4: Αναλυτικά αποτελέσματα προτίμησης δείγματος

Ομάδα	Απαντήσεις			Ποσοστό (%)		
	Ψηφιακό	Αναλογικό	Κανένα	Ψηφιακό	Αναλογικό	Κανένα
1	8	15	12	22.86	42.86	34.28
2	16	11	8	45.71	31.43	22.86
3	21	7	7	60.00	20.00	20.00
4	7	14	14	20.00	40.00	40.00
5	11	8	16	31.43	22.86	45.71
Σύνολο	63	55	57	36.00	31.43	32.57



Εικόνα 4.39: Οπτικοποιημένα αποτελέσματα προτίμησης δείγματος

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

5.1 Σύνοψη

Στην παρούσα εργασία υλοποιήθηκε ένα εικονικό αναλογικό μοντέλο του κλασικού πεταλιού παραμόρφωσης *BOSS DS-1*, διαχωρίζοντας το κύκλωμα του πεταλιού σε στάδια και προσομοιώνοντας καθένα από αυτά μέσω διαφορετικών θεωρητικών προσεγγίσεων που μοντελοποιούν ηλεκτρονικά κυκλώματα στοιχείο προς στοιχείο. Το υλοποιημένο μοντέλο είναι κατάλληλο για την επεξεργασία σημάτων ήχου σε πραγματικό χρόνο, ενώ η ακρίβεια της προσομοίωσης είναι συγκρίσιμη με αυτή ενός αντίστοιχου μοντέλου του κυκλώματος στο SPICE. Παρά την ύπαρξη ηχητικών διαφορών, τα ηχητικά δείγματα του υλοποιημένου μοντέλου όχι μόνο δεν υστερούν έναντι αυτών του μοντέλου SPICE, αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις προτιμώνται υποκειμενικά. Αυτή η παρατήρηση είναι αρκετή προκειμένου να αναθεωρηθεί το πραγματικό ζητούμενο της Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης, θέτοντας το ερώτημα αν μια ψηφιακή προσομοίωση πρέπει να στοχεύει πάντα στην πιστή αντιγραφή των ηχητικών χαρακτηριστικών ενός αναλογικού κυκλώματος ή αν η απόκλιση από την ιδανική συμπεριφορά μπορεί να είναι προτιμητέα. Εξάλλου, όπως καμία φυσική διάταξη ενός αναλογικού κύκλωματος δε μπορεί να είναι απολύτως όμοια με κάποια άλλη, λόγω των αναπόφευκτων αποκλίσεων στις τιμές των επί μέρους κυκλωματικών στοιχείων, έτσι και η υλοποίηση πανομοιότυπων ψηφιακών προσομοιώσεων ενδεχομένως να στερείται ουσιαστικής σημασίας. Σε κάθε περίπτωση, η σύγκριση ανάμεσα στον αναλογικό και στον ψηφιακό ήχο παραμένει μεγάλη και ενδιαφέρουσα συζήτηση, ωστόσο, όπως ανέδειξε η παρούσα εργασία, η επιλογή ανάμεσα σε αυτές τις δύο μορφές ήχου αποτελεί ένα υποκειμενικό ζήτημα.

5.2 Συνεισφορά

Η παρούσα εργασία φαινομενικά δε συνεισφέρει άμεσα στο πεδίο της Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης, καθώς δεν προτείνει κάποια νέα σχετική τεχνική. Ωστόσο, αποτελεί μια έρευνα που συγκεντρώνει το σύνολο των προσεγγίσεων που έχουν προταθεί τα τελευταία 25 χρόνια, παρουσιάζοντας πρακτικά την εφαρμογή ορισμένων από αυτές για την πλήρη προσομοίωση ενός πεταλιού παραμόρφωσης. Έτσι, ο αναγνώστης εισάγεται ομαλά σε αυτό το ιδιαίτερο διεπιστημονικό πεδίο, αποκτώντας μια ολοκληρωμένη εικόνα με ελάχιστες προαπαιτούμενες γνώσεις.

5.3 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Η προσομοίωση του *BOSS DS-1* που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μπορεί να κριθεί ως επιτυχημένη, καθώς χαρακτηρίζεται από ικανοποιητικά ηχητικά χαρακτηριστικά και υπολογιστική απόδοση. Ωστόσο, το μοντέλο που υλοποιήθηκε επιδέχεται αρκετές τροποποιήσεις, οι οποίες μπορούν να βελτιώσουν τόσο την ακρίβεια όσο και την απόδοση της προσομοίωσης σε πραγματικό χρόνο. Ενδεικτικά:

- Το στάδιο προενίσχυσης που μοντελοποιήθηκε μέσω ενός SSM θα μπορούσε να υλοποιηθεί εφαρμόζοντας κάποια παραλλαγή της DK-method, η οποία μεταξύ άλλων πλεονεκτημάτων είναι και πιο αποδοτική από την κλασική K-method.
- Το στάδιο ενίσχυσης που μοντελοποιήθηκε μέσω της αναπαράστασης WDF, ως ενδεικτική εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθοδολογίας στην πράξη, θα μπορούσε να προσομοιωθεί πιο αποδοτικά μέσω ενός ψηφιακού φίλτρου IIR.
- Το στάδιο ψαλιδισμού θα μπορούσε να βελτιωθεί ως προς την απόδοση, μειώνοντας τη διαστατικότητα της αναπαράστασης PHS με κατάλληλο διαχωρισμό των στοιχείων που καταναλώνουν ισχύ, όπως έχει αναφερθεί.
- Το στάδιο φιλτραρίσματος θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί μαζί με το στάδιο ψαλιδισμού μέσω της αναπαράστασης PHS ως ένα ενιαίο στάδιο, αποφεύγοντας έτσι τις αποκλίσεις που προέκυψαν λόγω των φαινομένων αλληλεπίδρασης.
- Οι λύσεις των πεπλεγμένων και υπερβατικών εξισώσεων των μη γραμμικών σταδίων του κυκλώματος θα μπορούσαν να υπολογιστούν εκ των προτέρων, βελτιώνοντας σημαντικά την απόδοση της προσομοίωσης σε πραγματικό χρόνο.
- Οι τυπικές τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για τις παραμέτρους των μη γραμμικών στοιχείων του κυκλώματος θα μπορούσαν να προκύψουν ύστερα από πειραματισμό, τροποποιώντας έτσι τα χαρακτηριστικά της παραμόρφωσης.

Τέλος, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η άμεση σύγκριση της προσομοίωσης με ένα αυθεντικό αναλογικό πετάλι *BOSS DS-1*, καθώς επίσης και η υλοποίηση ενός αντίστοιχου μοντέλου βασισμένου στα νευρωνικά δίκτυα, τα οποία ήδη αποτελούν μία από τις πιο επικρατούσες τεχνικές Εικονικής Αναλογικής Μοντελοποίησης.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Σήματα και Συστήματα*. Φούντας, 2012, ISBN: 9789603307334.
- [2] Σ. Θεοδωρίδης, Κ. Μπερμπερίδης και Λ. Κοφίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*. Τυποθήτω, 2005, ISBN: 9604021141.
- [3] Σ. Πανάς, *Επεξεργασία Αναλογικών Σημάτων*. University Studio Press, 1992, ISBN: 9601201572.
- [4] Σ. Πανάς, *Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων*. University Studio Press, 1992, ISBN: 9601201750.
- [5] Γ. Μουστακίδης, *Βασικές Τεχνικές Επεξεργασίας Σημάτων*. Τζιόλα, 2019, ISBN: 9789604180165.
- [6] W. H. Hayt, J. E. Kemmerly, and S. M. Durbin, *Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων*. Τζιόλα, 2014, ISBN: 9789604184378.
- [7] Ν. Παπαμάρκος, *Ηλεκτρικά Κυκλώματα*. Νικόλαος Παπαμάρκος, 2015, ISBN: 9789609273152.
- [8] Σ. Πακτίτης, *Αναλογικά Φίλτρα*. Ίων, 2007, ISBN: 9789604116416.
- [9] R. C. Jaeger and T. N. Blalock, *Μικροηλεκτρονική*. Τζιόλα, 2017, ISBN: 9789604185580.
- [10] A. S. Sedra and K. C. Smith, *Μικροηλεκτρονικά Κυκλώματα*. Παπασωτηρίου, 2017, ISBN: 9789604911066.
- [11] W. Shockley, “The Theory of p-n Junctions in Semiconductors and p-n Junction Transistors”, *The Bell System Technical Journal*, vol. 28, no. 3, pp. 435–489, Jul. 1949, Nokia Bell Labs.
- [12] J. J. Ebers and J. L. Moll, “Large-Signal Behavior of Junction Transistors”, *Proceedings of the IRE*, vol. 42, no. 12, pp. 1761–1772, Dec. 1954, IEEE.
- [13] Σ. Παπαϊωάννου και Χ. Βοζίκης, *Αριθμητική Ανάλυση*. Κάλλιπος, 2015, ISBN: 9789606033797.
- [14] Θ. Ρασσιάς, *Μαθηματική Ανάλυση I*. Τσότρας, 2014, ISBN: 9786185066116.
- [15] Θ. Ρασσιάς, *Μαθηματική Ανάλυση II*. Τσότρας, 2014, ISBN: 9786185066123.
- [16] B. Holmes and M. V. Walstijn, “Improving the Robustness of the Iterative Solver in State-Space Modelling of Guitar Distortion Circuitry”, in *18th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15)*, Trondheim, Norway, Dec. 2015.

- [17] D. T. Yeh, J. S. Abel, A. Vladimirescu, and J. O. Smith, “Numerical Methods for Simulation of Guitar Distortion Circuits”, *Computer Music Journal*, vol. 32, no. 2, pp. 23–42, Jun. 2008, MIT Press.
- [18] L. W. Nagel and D. O. Pederson, “SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)”, University of California, Berkeley, Tech. Rep. ERL-M382, Apr. 1973.
- [19] A. Vladimirescu, *The SPICE Book*. Wiley, 1994, ISBN: 0471609269.
- [20] Α. Χατζόπουλος, Δ. Κωνσταντίνου, Γ. Μπόντζιος και Σ. Α. Φάρχα, *SPICE. Τζιόλα*, 2017, ISBN: 9789604183142.
- [21] W. J. McCalla and D. O. Pederson, “Elements of Computer-Aided Circuit Analysis”, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 18, no. 1, pp. 14–26, Jan. 1971, IEEE.
- [22] C.-W. Ho, A. E. Ruehli, and P. A. Brennan, “The Modified Nodal Approach to Network Analysis”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 22, no. 6, pp. 504–509, Jun. 1975, IEEE.
- [23] R. C. D. Paiva, “Circuit Modeling Studies Related to Guitars and Audio Processing”, Ph.D. Dissertation, Aalto University, 2013.
- [24] S. D’Angelo, “Virtual Analog Modeling of Nonlinear Musical Circuits”, Ph.D. Dissertation, Aalto University, 2014.
- [25] S. D’Angelo, “Lightweight Virtual Analog Modeling”, in *22nd Colloquium on Music Informatics (XXII CIM)*, Udine, Italy, Sep. 2018, pp. 59–63.
- [26] J. Chowdhury, “A Comparison of Virtual Analog Modelling Techniques for Desktop and Embedded Implementations”, Sep. 2020. doi: 10.48550/arXiv.2009.02833.
- [27] J. Pakarinen and D. T. Yeh, “A Review of Digital Techniques for Modeling Vacuum-Tube Guitar Amplifiers”, *Computer Music Journal*, vol. 33, no. 2, pp. 85–100, Jun. 2009, MIT Press.
- [28] D. T. Yeh and J. O. Smith, “Discretization of the ’59 Fender Bassman Tone Stack”, in *9th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-06)*, Montreal, Canada, Sep. 2006.
- [29] D. T. Yeh, J. S. Abel, and J. O. Smith, “Simplified, Physically-Informed Models of Distortion and Overdrive Guitar Effects Pedals”, in *10th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-07)*, Bordeaux, France, Sep. 2007.
- [30] D. Brojboiu, “Simplified Modelling of the Boss DS-1 Distortion Pedal”, 2019. [Online]. Διαθέσιμο: https://www.academia.edu/65479550/Simplified_Modelling_of_the_Boss_DS_1_Distortion_Pedal.
- [31] J. Macak and J. Schimmel, “Nonlinear Circuit Simulation Using Time-Variant Filter”, in *12th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-09)*, Como, Italy, Sep. 2009.

- [32] M. E. R. Bennett, “State Space Modelling of the Fuzz Face Guitar Pedal”, M.S. Thesis, McGill University, 2021.
- [33] K. Dempwolf, M. Holters, and U. Zölzer, “Discretization of Parametric Analog Circuits for Real-Time Simulations”, in *13th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-10)*, Graz, Austria, Sep. 2010.
- [34] I. Cohen and T. Helie, “Real-Time Simulation of a Guitar Power Amplifier”, in *13th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-10)*, Graz, Austria, Sep. 2010.
- [35] G. Borin, G. D. Poli, and D. Rocchesso, “Elimination of Delay-Free Loops in Discrete-Time Models of Nonlinear Acoustic Systems”, *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 8, no. 5, pp. 597–605, Sep. 2000, IEEE.
- [36] D. T. Yeh, “Digital Implementation of Musical Distortion Circuits By Analysis and Simulation”, Ph.D. Dissertation, Stanford University, 2009.
- [37] D. T. Yeh and J. O. Smith, “Simulating Guitar Distortion Circuits Using Wave Digital and Nonlinear State-Space Formulations”, in *11th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-08)*, Espoo, Finland, Sep. 2008.
- [38] Ι. Συγγελάκης, “Μοντελοποίηση και Ψηφιακή Προσομοίωση Κυκλωμάτων Ήχου”, Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2021.
- [39] M. Holters and U. Zölzer, “Physical Modelling of a Wah-Wah Effect Pedal as a Case Study for Application of the Nodal DK Method to Circuits with Variable Parts”, in *14th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-11)*, Paris, France, Sep. 2011.
- [40] F. Eichas, M. Fink, M. Holters, and U. Zölzer, “Physical Modeling of the MXR Phase 90 Guitar Effect Pedal”, in *17th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-14)*, Erlangen, Germany, Sep. 2014.
- [41] P. R. Benois, “Simulation Framework for Analog Audio Circuits Based on Nodal DK Method”, M.S. Thesis, Helmut Schmidt University, 2013.
- [42] D. T. Yeh, J. S. Abel, and J. O. Smith, “Automated Physical Modeling of Nonlinear Audio Circuits For Real-Time Audio Effects - Part I: Theoretical Development”, *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 18, no. 4, pp. 728–737, May 2010, IEEE.
- [43] D. T. Yeh, “Automated Physical Modeling of Nonlinear Audio Circuits For Real-Time Audio Effects - Part II: BJT and Vacuum Tube Examples”, *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 20, no. 4, pp. 1207–1216, May 2012, IEEE.
- [44] M. Holters and U. Zölzer, “A Generalized Method for the Derivation of Non-Linear State-Space Models from Circuit Schematics”, in *23rd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Nice, France: IEEE, Sep. 2015.
- [45] A. van der Schaft, “Port-Hamiltonian Systems: An Introductory Survey”, in *International Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, Aug. 2006, pp. 1339–1365.

- [46] A. Falaize-Skrzek and T. Hélie, “Simulation of an Analog Circuit of a Wah Pedal: A Port-Hamiltonian Approach”, in *135th Audio Engineering Society Convention*, New York, USA: AES, 2013.
- [47] A. Falaize and T. Hélie, “Passive Guaranteed Simulation of Analog Audio Circuits: A Port-Hamiltonian Approach”, *Applied Sciences*, vol. 6, no. 10, Sep. 2016, MDPI.
- [48] R. Müller and T. Hélie, “A Minimal Passive Model of the Operational Amplifier: Application to Sallen-Key Analog Filters”, in *22nd International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-19)*, Birmingham, UK, Sep. 2019.
- [49] A. Fettweis, “Wave Digital Filters: Theory and Practice”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 74, no. 2, pp. 270–327, Feb. 1986, IEEE.
- [50] K. J. Werner, “Virtual Analog Modeling of Audio Circuitry Using Wave Digital Filters”, Ph.D. Dissertation, Stanford University, 2016.
- [51] D. Fränken, J. Ochs, and K. Ochs, “Generation of Wave Digital Structures for Networks Containing Multiport Elements”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 52, no. 3, pp. 586–596, Mar. 2005, IEEE.
- [52] K. J. Werner, J. O. Smith, and J. S. Abel, “Wave Digital Filter Adaptors for Arbitrary Topologies and Multiport Linear Elements”, in *18th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15)*, Trondheim, Norway, Dec. 2015.
- [53] K. J. Werner, V. Nangia, J. O. Smith, and J. S. Abel, “A General and Explicit Formulation for Wave Digital Filters with Multiple/Multiport Nonlinearities and Complicated Topologies”, in *2015 IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA)*, New Paltz, NY, USA: IEEE, Oct. 2015.
- [54] K. J. Werner, V. Nangia, J. O. Smith, and J. S. Abel, “Resolving Wave Digital Filters with Multiple/Multiport Nonlinearities”, in *18th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15)*, Trondheim, Norway, Dec. 2015.
- [55] M. J. Olsen, K. J. Werner, and J. O. Smith, “Resolving Grouped Nonlinearities In Wave Digital Filters Using Iterative Techniques”, in *19th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-16)*, Brno, Czech Republic, Sep. 2016.
- [56] K. J. Werner, W. R. Dunkel, M. Rest, M. J. Olsen, and J. O. Smith, “Wave Digital Filter Modeling of Circuits with Operational Amplifiers”, in *24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Budapest, Hungary: IEEE, Aug. 2016.
- [57] A. Farina, “Simultaneous Measurement of Impulse Response and Distortion with a Swept-Sine Technique”, in *108th Audio Engineering Society Convention*, Paris, France: AES, 2000.

- [58] A. Farina, “Non-linear Convolution: A New Approach for the Auralization of Distorting Systems”, in *110th Audio Engineering Society Convention*, Amsterdam, The Netherlands: AES, May 2001.
- [59] A. Farina and E. Armelloni, “Emulation of Not-Linear, Time-Variant Devices by the Convolution Technique”, in *Congresso AES Italia*, Como, Italy: AES, Nov. 2005.
- [60] A. Novak, L. Simon, P. Lotton, and F. Kadlec, “Modeling of Nonlinear Audio Systems Using Swept-Sine Signals: Application to Audio Effects”, in *12th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-09)*, Como, Italy, Sep. 2009.
- [61] A. Novak, L. Simon, and P. Lotton, “Analysis, Synthesis, and Classification of Nonlinear Systems Using Synchronized Swept-Sine Method for Audio Effects”, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2010, Springer.
- [62] A. Novak, L. Simon, F. Kadlec, and P. Lotton, “Nonlinear System Identification Using Exponential Swept-Sine Signal”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 59, no. 8, pp. 2220–2229, Aug. 2010, IEEE.
- [63] A. Novak, L. Simon, P. Lotton, and J. Gilbert, “Chebyshev Model and Synchronized Swept Sine Method in Nonlinear Audio Effect Modeling”, in *13th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-10)*, Graz, Austria, Sep. 2010.
- [64] L. Tronchin, “The Emulation of Nonlinear Time-Invariant Audio Systems with Memory by Means of Volterra Series”, *Journal of the Audio Engineering Society*, vol. 12, no. 60, pp. 984–996, Dec. 2012, AES.
- [65] F. Eichas, S. Möller, and U. Zölzer, “Block-Oriented Modeling of Distortion Audio Effects Using Iterative Minimization”, in *18th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15)*, Trondheim, Norway, Dec. 2015.
- [66] F. Eichas and U. Zölzer, “Black-Box Modeling of Distortion Circuits with Block-Oriented Models”, in *19th International Conference on Digital Audio Effects (DAFX-16)*, Brno, Czech Republic, 2016.
- [67] F. Eichas and U. Zölzer, “Virtual Analog Modeling of Guitar Amplifiers with Wiener-Hammerstein Models”, in *44th German Annual Conference on Acoustics (DAGA 2018)*, Munich, Germany, Mar. 2018.
- [68] A. Schuck, L. F. Ferreira, R. Husemann, and B. E. J. Bodmann, “A Simple Nonlinear Transfer Function for a Wiener-Hammerstein Model to Simulate Guitar Distortion and Overdrive Effects”, *Integral Methods in Science and Engineering*, pp. 425–436, 2019, Springer.
- [69] F. Eichas, S. Möller, and U. Zölzer, “Block-Oriented Gray Box Modeling of Guitar Amplifiers”, in *20th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-17)*, Edinburgh, UK, Sep. 2019.

- [70] J. Chowdhury, “Complex Nonlinearities for Audio Signal Processing”, 2020. [Online]. Διαθέσιμο: https://ccrma.stanford.edu/~jatin/papers/Complex_NLs.pdf.
- [71] T. Vanhatalo, P. Legrand, M. Desainte-Catherine, *et al.*, “A Review of Neural Network-Based Emulation of Guitar Amplifiers”, *Applied Sciences*, vol. 12, no. 12, Jun. 2022, MDPI.
- [72] M. A. M. Ramírez, E. Benetos, and J. D. Reiss, “Deep Learning for Black-Box Modeling of Audio Effects”, *Applied Sciences*, vol. 10, no. 2, Jan. 2020, MDPI.
- [73] A. Wright, E.-P. Damskägg, L. Juvela, and V. Välimäki, “Real-Time Guitar Amplifier Emulation with Deep Learning”, *Applied Sciences*, Jan. 2020, MDPI.
- [74] M. A. Martínez-Ramírez and J. D. Reiss, “Modeling Nonlinear Audio Effects with End-to-End Deep Neural Networks”, in *2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Brighton, UK: IEEE, May 2019.
- [75] A. van den Oord, S. Dieleman, H. Zen, *et al.*, “WaveNet: A Generative Model for Raw Audio”, Sep. 2016.
- [76] E.-P. Damskägg, L. Juvela, E. Thuillier, and V. Välimäki, “Deep Learning for Tube Amplifier Emulation”, in *2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Brighton, UK: IEEE, May 2019.
- [77] E.-P. Damskägg, L. Juvela, and V. Välimäki, “Real-Time Modeling of Audio Distortion Circuits with Deep Learning”, in *Proceedings of the 16th Sound & Music Computing Conference (SMC 2019)*, Malaga, Spain, May 2019, pp. 332–339.
- [78] A. Wright, E.-P. Damskägg, and V. Välimäki, “Real-Time Black-Box Modelling with Recurrent Neural Networks”, in *22nd International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-19)*, Birmingham, UK, Sep. 2019.
- [79] T. Schmitz and J.-J. Embrechts, “Real Time Emulation of Parametric Guitar Tube Amplifier With Long Short Term Memory Neural Network”, Apr. 2018. doi: 10.48550/arXiv.1804.07145.
- [80] A. Wright and V. Välimäki, “Perceptual Loss Function for Neural Modelling of Audio Systems”, in *2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Barcelona, Spain: IEEE, May 2020.
- [81] J. D. Parker, F. Esqueda, and A. Bergner, “Modelling of Nonlinear State-Space Systems Using a Deep Neural Network”, in *22nd International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-19)*, Birmingham, UK, Sep. 2019.
- [82] J. Wilczek, A. Wright, V. Välimäki, and E. A. P. Habets, “Virtual Analog Modeling of Distortion Circuits Using Neural Ordinary Differential Equations”, in *25th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx20in22)*, Vienna, Austria, Sep. 2022.

- [83] J. Engel, L. Hantrakul, C. Gu, and A. Roberts, “DDSP: Differentiable Digital Signal Processing”, in *8th International Conference on Learning Representations (ICLR 2020)*, Apr. 2020.
- [84] B. Kuznetsov, J. D. Parker, and F. Esqueda, “Differentiable IIR Filters for Machine Learning Applications”, in *Proceedings of the 23rd International Conference on Digital Audio Effects (DAFx2020)*, 2020.
- [85] F. Esqueda, B. Kuznetsov, and J. D. Parker, “Differentiable White-Box Virtual Analog Modeling”, in *24th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx20in21)*, Vienna, Austria, Sep. 2021.
- [86] Štěpán Miklánek, A. Wright, V. Välimäki, and J. Schimmel, “Neural Grey-Box Guitar Amplifier Modelling with Limited Data”, in *26th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-23)*, Copenhagen, Denmark, Sep. 2023.
- [87] Y.-T. Yeh, Y.-H. Chen, Y.-C. Cheng, *et al.*, “DDSP Guitar Amp: Interpretable Guitar Amplifier Modeling”, Aug. 2024. doi: 10.48550/arXiv.2408.11405.
- [88] L. Juvela, E.-P. Damskägg, A. Peussa, *et al.*, “End-to-End Amp Modeling: From Data to Controllable Guitar Amplifier Models”, Mar. 2024. doi: 10.48550/arXiv.2403.08559.
- [89] Y.-T. Yeh, W.-Y. Hsiao, and Y.-H. Yang, “Hyper Recurrent Neural Network: Condition Mechanisms for Black-Box Audio Effect Modeling”, in *27th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx24)*, Guildford, UK, Sep. 2024.
- [90] A. Carson, A. Wright, J. Chowdhury, V. Välimäki, and S. Bilbao, “Sample Rate Independent Recurrent Neural Networks for Audio Effects Processing”, in *27th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx24)*, Guildford, Surrey, UK, Sep. 2024.
- [91] F. G. Germain and K. J. Werner, “Design Principles for Lumped Model Discretisation Using Möbius Transforms”, in *18th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15)*, Trondheim, Norway, Dec. 2015.
- [92] F. Esqueda, “Aliasing Reduction in Nonlinear Audio Signal Processing”, Ph.D. Dissertation, Aalto University, 2018.
- [93] J. Schattschneider and U. Zölzer, “Discrete-Time Models for Nonlinear Audio Systems”, in *2nd International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-99)*, Trondheim, Norway, Dec. 1999.
- [94] J. Kahles, F. Esqueda, and V. Välimäki, “Oversampling for Nonlinear Waveshaping: Choosing the Right Filters”, *Journal of the Audio Engineering Society*, vol. 67, no. 6, pp. 440–449, Jul. 2019, AES.
- [95] A. Carson, “Aliasing Reduction in Virtual Analogue Modelling”, M.S. Thesis, The University of Edinburgh, 2020.
- [96] ElectroSmash, *Boss DS-1 Distortion Analysis*. [Online]. Διαθέσιμο: <https://www.electrosmash.com/boss-ds1-analysis>.

- [97] M. Porter, “Virtual Analog Modeling of Guitar Effects Circuits”, M.S. Thesis, The University of Edinburgh, 2019.
- [98] R. C. D. Paiva, S. D’Angelo, J. Pakarinen, and V. Välimäki, “Emulation of Operational Amplifiers and Diodes in Audio Distortion Circuits”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 59, no. 10, pp. 688–692, Oct. 2012, IEEE.
- [99] D. T. Yeh, J. S. Abel, and J. O. Smith, “Simulation of the Diode Limiter In Guitar Distortion Circuits by Numerical Solution of Ordinary Differential Equations”, in *10th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-07)*, Bordeaux, France, Sep. 2007.
- [100] J. Mačák, “Real-Time Digital Simulation of Guitar Amplifiers as Audio Effects”, Ph.D. Dissertation, Brno University of Technology, 2012.

Παράρτημα:

Κώδικας & Εργαλεία

Στο πλαίσιο της εργασίας αναπτύχθηκε κώδικας ο οποίος βρίσκεται στο αποθετήριο του ακόλουθου συνδέσμου: <https://github.com/mogeadis/VAM-DS1>

Σε πρώτο στάδιο, η ανάπτυξη του κώδικα έγινε σε επίπεδο πρωτοτυποποίησης με τη γενικού σκοπού και υψηλού επιπέδου γλώσσα προγραμματισμού *Python*¹. Οι βιβλιοθήκες της *Python* που αξιοποιήθηκαν για την υλοποίηση και την αξιολόγηση της ψηφιακής προσομοίωσης παρουσιάζονται στον Πίνακα Π.1. Σε δεύτερο στάδιο, η προσομοίωση υλοποιήθηκε ως *plugin* για χρήση σε πραγματικό χρόνο μέσα από το προγραμματιστικό πλαίσιο ανάπτυξης *JUCE*² και τη γλώσσα προγραμματισμού χαμηλού επιπέδου *C++*³, όπου για τις υπολογιστικά απαιτητικές πράξεις πινάκων αξιοποιήθηκε η βιβλιοθήκη γραμμικής άλγεβρας *Fastor*⁴.

Πίνακας Π.1: Βιβλιοθήκες της *Python*

Βιβλιοθήκη	Χρήση
<i>NumPy</i> ⁵	Αριθμητικοί υπολογισμοί
<i>SymPy</i> ⁶	Συμβολικοί υπολογισμοί
<i>Scipy</i> ⁷	Επεξεργασία σημάτων
<i>Pandas</i> ⁸	Χειρισμός και ανάλυση δεδομένων
<i>Matplotlib</i> ⁹	Σχεδίαση επιστημονικών γραφημάτων

Η ανάπτυξη όλου του κώδικα, καθώς επίσης και η συγγραφή του παρόντος κειμένου που πραγματοποιήθηκε με το σύστημα στοιχειοθεσίας *L^AT_EX*¹⁰, έγιναν με το δωρεάν λογισμικό επεξεργασίας κώδικα *Visual Studio Code*¹¹ της *Microsoft*.

¹*Python*: <https://python.org>

²*JUCE*: <https://juce.com>

³*C++*: <https://isocpp.org>

⁴*Fastor*: <https://github.com/romeric/Fastor>

⁵*NumPy*: <https://numpy.org>

⁶*SymPy*: <https://sympy.org>

⁷*Scipy*: <https://scipy.org>

⁸*Pandas*: <https://pandas.pydata.org>

⁹*Matplotlib*: <https://matplotlib.org>

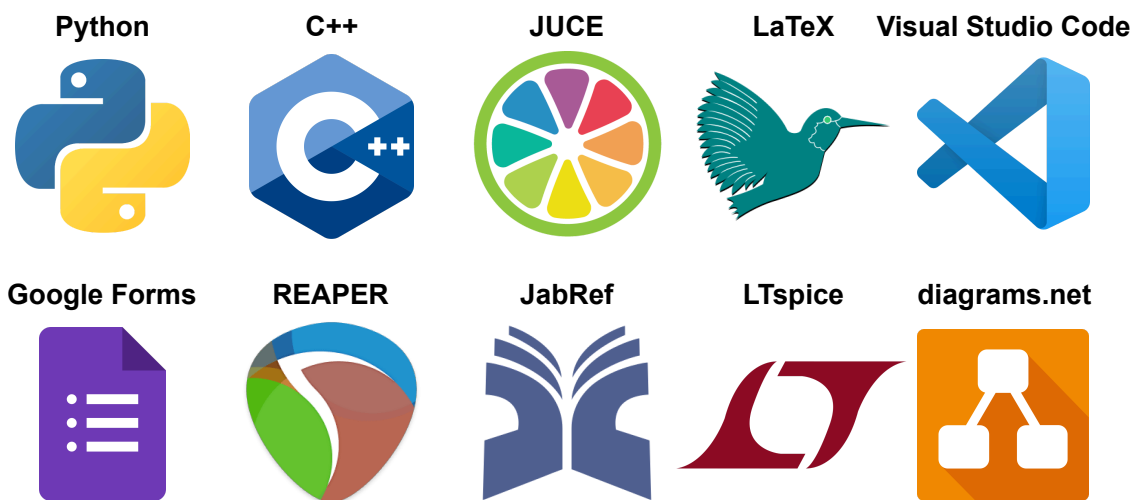
¹⁰*L^AT_EX*: <https://latex-project.org>

¹¹*Visual Studio Code*: <https://code.visualstudio.com>

Το διαδικτυακό ερωτηματολόγιο για την αξιολόγηση της προσομοίωσης συντάχθηκε στο περιβάλλον διαχείρισης ερευνών *Google Forms*¹², ενώ η προετοιμασία των ηχητικών δειγμάτων που συμπεριλήφθηκαν στην έρευνα πραγματοποιήθηκε με χρήση του *REAPER*¹³, του εμπορικού λογισμικού επεξεργασίας ήχου της *Cockos*.

Τέλος, οι πηγές που συγκεντρώθηκαν κατά το στάδιο επισκόπησης του ερευνητικού πεδίου οργανώθηκαν με το δωρεάν λογισμικό διαχείρισης βιβλιογραφικών αναφορών *JabRef*¹⁴, οι προσομοιώσεις SPICE του ηλεκτρονικού κυκλώματος του πεταλιού *BOSS DS-1* πραγματοποιήθηκαν με το δωρεάν λογισμικό *LTspice*¹⁵ της *Analog Devices*, ενώ για τη σχεδίαση των διάφορων διαγραμμάτων που παρουσιάστηκαν αξιοποιήθηκε η δωρεάν διαδικτυακή εφαρμογή *diagrams.net*¹⁶.

Τα λογότυπα των εργαλείων λογισμικού που αξιοποιήθηκαν στο πλαίσιο της εργασίας απεικονίζονται στην Εικόνα Π.1:



Εικόνα Π.1: Λογότυπα εργαλείων λογισμικού

¹²*Google Forms*: <https://docs.google.com/forms>

¹³*REAPER*: <https://reaper.fm>

¹⁴*JabRef*: <https://jabref.org>

¹⁵*LTspice*: <https://analog.com/ltspice>

¹⁶*diagrams.net*: <https://diagrams.net>