Kapitel 8: Komplexitätsanalyse

- Effizienz von Algorithmen
- Messung der CPU-Zeit
- Laufzeiten von Algorithmen
- Größenordnungen von Laufzeiten
- Beispiele
- Worst-Case, Average-Case und Best-Case-Analyse
- Analyse von rekursiven Funktionen
- Analyse von Teile-und-Herrsche-Funktionen

Effizienz von Algorithmen

Ziel

- Bestimmung der Effizienz eines Algorithmus, d.h.
  - Laufzeitbedarf und
  - Speicherplatzbedarf
- Hier: Betrachtung der Laufzeit.
  (Speicherplatzbedarf ist meistens von nicht so großem Interesse)

Typische Aufgabenstellung

- Es stehen mehrere Algorithmen zur Verfügung, die alle dasselbe Problem lösen.
  Wähle den effizientesten Algorithmus.
- Beispiel: Es gibt zahlreiche Sortierverfahren (später).
  Welches Sortierverfahren ist am effizientesten?

Ansätze

- Messung der CPU-Zeit
- Ermittlung der Größenordnung der Laufzeit durch Analyse des Algorithmus

Messung der CPU-Zeit

Vorgehensweise

Implementiere den Algorithmus in einer konkreten Programmiersprache (z.B. Java) und messe CPU-Zeit (z.B. mit Funktion `System.nanoTime`) auf einem konkreten Rechner:

```java
public static void main(String[] args) {
     // ...
     long start = System.nanoTime(); // aktuelle Zeit in nsec
     sort(x);
     long end = System.nanoTime();
     double elapsedTime = (double)(end-start)/1.0e06; // Zeit in msec
     System.out.println(" Elapsed time in " + elapsedTime + " msec");
}
```

Vorteil:

Es werden konkrete Zeiten ermittelt

Nachteil:

Man erhält keine allgemeingültigen Aussagen:

- Zeiten beziehen sich auf bestimmte Laufzeitumgebung:
  Rechner, Betriebssystem, Compiler.
- Zeiten lassen sich nur für wenige Eingabewerte ermitteln.
  Keine Aussagen über andere Eingabewerte möglich.

Laufzeiten von Algorithmen

Elementare Operationen

- Ein Algorithmus führt eine Folge von elementaren Operationen aus:
  Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Vergleiche, Zuweisungen, Feldzugriffe, etc.
- Eine elementare Operation kann in einer konstanten Zeit ausgeführt werden.
  Der Einfachheit wegen wird ein Einheitskostenmaß angenommen,
  d.h. alle elementaren Operationen benötigen die gleiche Zeit.

Laufzeit

- Die Laufzeit eines Algorithmus wird definiert als:

  T(n) = Anzahl der elementaren Operationen, die der Algorithmus durchläuft,
  um eine Eingabe der Größe n zu bearbeiten.

- Man beachte, dass oft die Angabe der Laufzeit in Abhängigkeit von konkreten Eingabe-Werten unzweckmäßig ist.
- Wir abstrahieren daher von den konkreten Eingabe-Werten und betrachten die Laufzeit in der Abhängigkeit von der Größe (dem Umfang) der Eingabe.
- Beispiel: bei einem Sortieralgorithmus wird die Laufzeit bestimmt, die notwendig ist um n Zahlen zu sortieren (n ist die Größe der Eingabe).

Beispiel

- Betrachtet werden zwei Algorithmen zur Berechnung von:

$$sum(n) = \sum_{i=1}^{n} i$$

- Algorithmus sum1 berechnet die Summe in einer Schleife, während Algorithmus sum2 die bekannte Formel sum(n) = n*(n+1)/2 ausnutzt.

```
public static int sum1(int n)
{
      int s = 0;
      for (int i = 1; i <= n; i++)
            s = s + i;
      return s;
}
```

```
public static int sum2(int n)
{
      int s;
      s = n * (n+1) / 2;
      return s;
}
```

Analyse der Laufzeiten

- sum1 benötigt 2n Additionen, n+2 Zuweisungen und n+1 Vergleiche.
  Damit T(n) = 4n + 3.
- sum2 benötigt eine Addition, eine Division, eine Multiplikation und eine Zuweisung.
  Damit T(n) = 4.

Größenordnungen von Laufzeiten – O-Notation

- Die Konstanten in den Laufzeiten ergeben sich aus der etwas unrealistischen Annahme, dass alle elementaren Operationen die gleiche Zeit benötigen.
- Würde eine Multiplikation zweimal so stark wie eine Addition gewichtet werden, würden sich andere Konstanten ergeben.
- Die Konstanten sind also nicht sonderlich aussagekräftig. Wir werden uns daher mit Hilfe der O-Notation von den Konstanten befreien.

Definition O-Notation

T(n) ist in der Größenordnung von f(n)

$$T(n) = O(f(n)),$$

falls Konstante c und n_0 existieren, so daß

$$T(n) \le c*f(n) \qquad \text{für } n \ge n_0.$$

Beispiel Algorithmus sum1:

- $T(n) = 4*n + 3 \le 5*n$ für $n \ge 3$.
- Damit ist T(n) = O(n). „T(n) ist linear“.

Bemerkung zur O-Notation

Die hier verwendete O-Notation ist mathematisch etwas ungenau aber gebräuchlich

- Eigentlich ist O(f(n)) ist eine Menge von Funktionen:

  $O(f(n)) = \{T(n) \,/\, T(n) \le c*f(n)$ für ein c und für ein n_0 mit $n \ge n_0\}$

- Daher gilt beispielsweise:

$2n+1 \in O(n)$	hier: $2n+1 = O(n)$
$2n+1 \in O(n^2)$	hier: $2n+1 = O(n^2)$
$4n^2 + 5n - 3 \in O(n^2)$	hier: $4n^2 + 5n - 3 = O(n^2)$

Möglichst einfache und kleine Größenordnungen

- Die Laufzeit sollte mit einer möglichst einfachen und kleinen Größenordnung (sie auch Tabelle auf der nächsten Seite) abgeschätzt werden.
- Beispielsweise ist

  $2n+1 = O(n)$

  besser als

  $2n+1 = O(5n)$ oder
  $2n+1 = O(n^2)$

Polynomielle Größenordnung

- Bei der Analyse von Laufzeiten ergibt sich oft eine polynomielle Funktion:

$$T(n) = a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k$$

- Dann läßt sich T(n) wie folgt abschätzen:

$$T(n) = O(n^k)$$

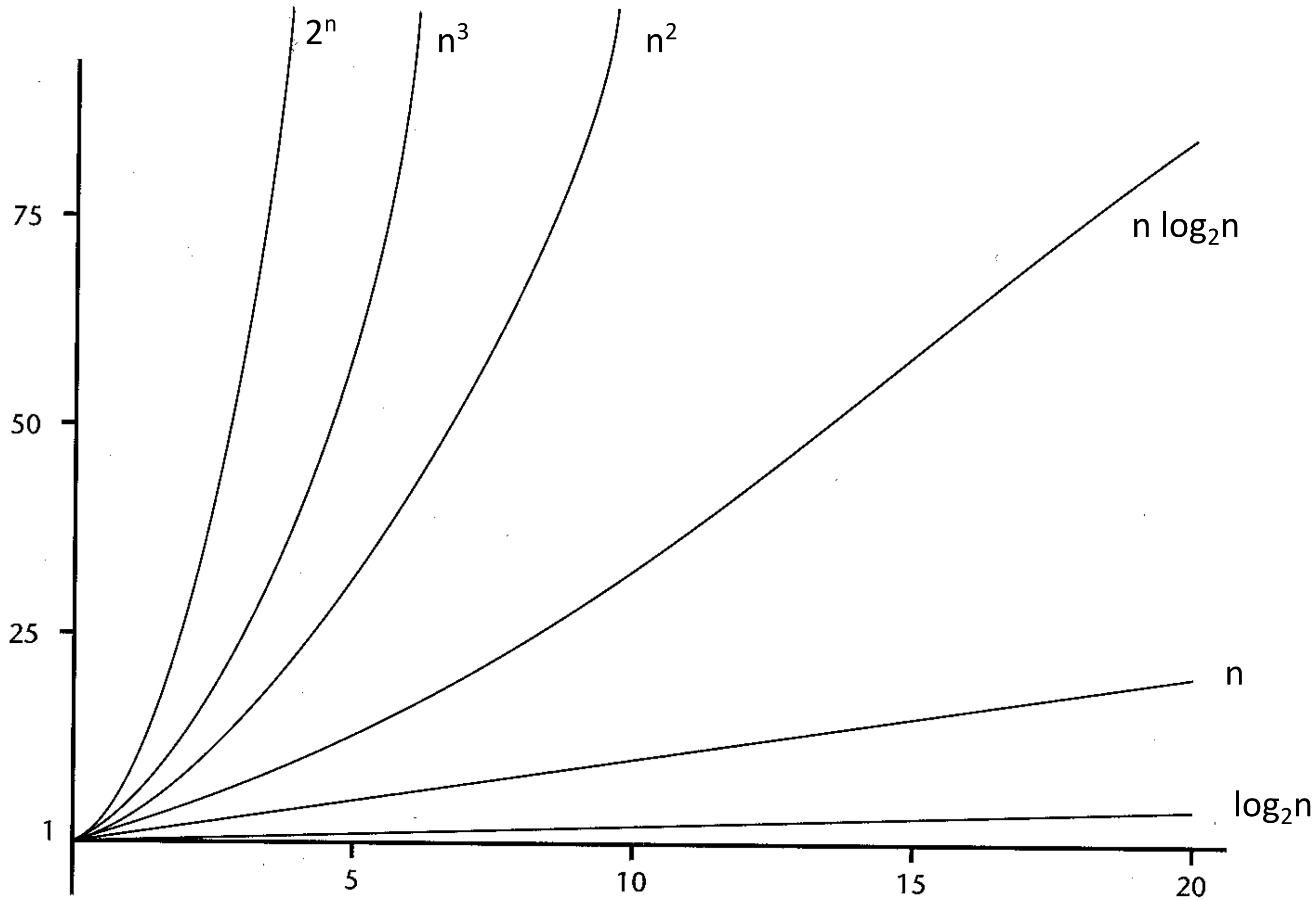
Beispiele:

- $2n+1 = O(n)$
- $4n^2 + 5n - 3 = O(n^2)$
- $7n^3 - 2n = O(n^3)$

Typische Größenordnungen

Größen-ordnung der Laufzeit T(n)	Verhalten der Laufzeit T(n), falls sich n verdoppelt	Bezeichnung
O(1)	ändert sich nicht	konstant
$O(\log_2 n)$	wächst um eine kleine Konstante	logarithmisch
$O(\sqrt{n})$	wächst um Faktor $\sqrt{2}$	
O(n)	verdoppelt sich	linear
$O(n \log_2 n)$	wird etwas mehr als doppelt so groß	
$O(n^2)$	wächst um Faktor 4	quadratisch
$O(n^3)$	wächst um Faktor 8	kubisch
$O(n^k)$	wächst um Faktor 2^k	polynomiell
$O(2^n)$	wächst sehr rasch	exponentiell

Graphische Darstellung typischer Größenordnungen



Aufgabe 8.1

Analysieren Sie die Laufzeiten für folgende Programmstücke:

```
for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = i; j < n; j++)
        a[i][j] = 1;
```

```
// Einheitsmatrix:
for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = 0; j < n; j++)
        a[i][j] = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
    a[i][i] = 1;
```

```
// Matrixmultiplikation:
for (i = 0; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < n; j++) {
        c[i][j] = 0;
        for (k = 0; k < n; k++)
            c[i][j] += a[i][k] * b[k][j];
    }
}
```

Aufgabe 8.2 (1)

- Analysieren Sie die folgenden beiden Algorithmen zur Auswertung eines Polynoms n-ten Grades:

$$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

- Der Algorithmus polyNaiv berechnet jede einzelne Potenz iterativ und addiert die Potenzen mittels einer Schleife zusammen.

```
static double polyNaiv(double[] a, int n, double x) {

    double s = a[0];
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        // p = x hoch i berechnen:
        double p = 1.0;
        for (int j = 1; j <= i; j++)
            p = p * x;
        s = s + a[i] * p;
    }
    return s;
}
```

Aufgabe 8.2 (2)

- Der Algorithmus polyHorner verwendet das Horner-Schema:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
$$= a_0 + x * (a_1 + x * (a_2 + \dots + x * (a_{n-1} + x * a_n) \dots))$$

- polyHorner berechnet den oberen Ausdruck von innen nach außen mittels einer Schleife.

```
static double polyHorner(double[] a, int n, double x) {

    double s = 0;

    for (int i = n; i >= 0; i--)
        s = s*x + a[i];

    return s;
}
```

Aufgabe 8.3

- Durch eine Analyse werden für zwei Algorithmen, die das gleiche Problem lösen, folgende Laufzeiten ermittelt:

  Algorithmus A: $T_A(n) = C_1 \cdot n \cdot \log_2 n = O(n \log_2 n)$ und

  Algorithmus B: $T_B(n) = C_2 \cdot n^2 = O(n^2)$.

- Außerdem ergibt eine Laufzeitmessung auf einem konkreten Rechner für eine Eingabe der Größe n = 1000 folgende CPU-Zeiten:

  Algorithmus A: 2 msec

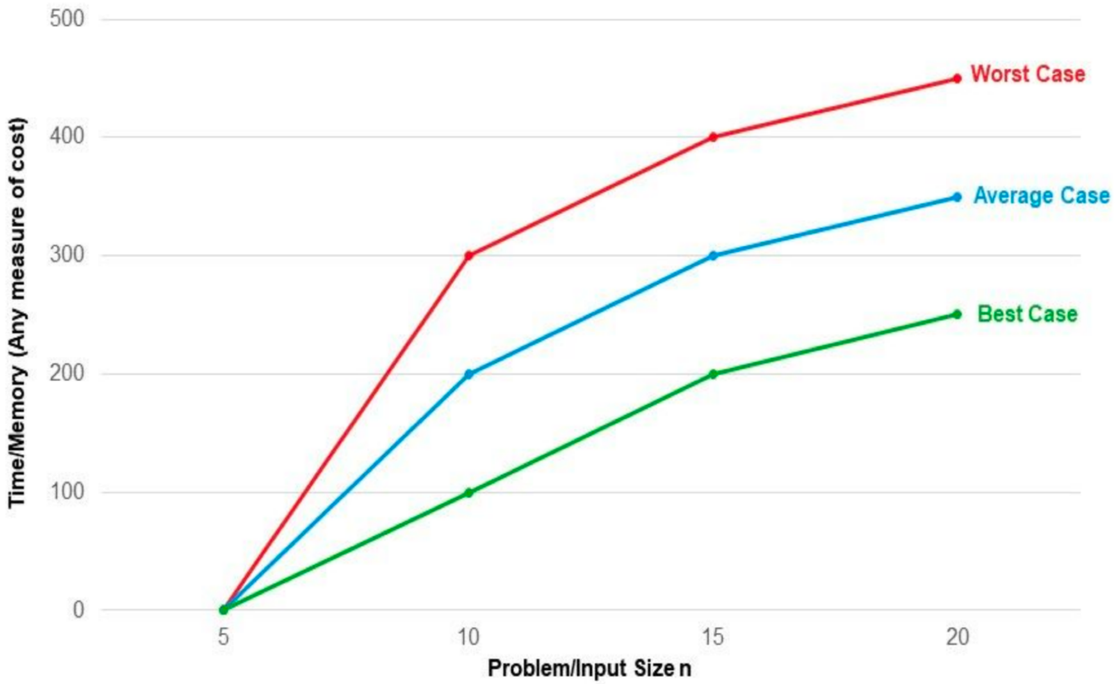
  Algorithmus B: 1 msec

- Skizzieren Sie $T_A(n)$ und $T_B(n)$ in einem Schaubild.

- Welche CPU-Zeiten erwarten Sie für $n = 10^6$?

Worst-Case, Average-Case und Best-Case

- In vielen Fällen hängt die Laufzeit nicht nur von der Größe der Eingabe sondern auch von den konkreten Eingabewerten ab.
- Beispiel: Die Laufzeit einiger Sortierverfahren ist für ein bereits sortiertes Feld um eine Größenordnung schneller als für ein ungeordnetes Feld.



https://www.slideteam.net/graphical-representation-of-best-average-and-worst-case.html

Worst-Case-Analyse

- Eingaben betrachten, bei der Laufzeiten maximal sind.
- Wird am häufigsten durchgeführt.

Average-Case-Analyse

- Mittelwert der Laufzeiten für alle Eingaben der Größe n bilden.
- In der Praxis sehr nützlich, technisch aber schwieriger durchzuführen.

Best-Case-Analyse

- Eingaben betrachten, bei der Laufzeiten minimal sind.
- Wird eher selten durchgeführt.

Beispiel: Sequentielle Suche – Best-Case-Analyse

```
static int suche(int[] a, int x) {

   int n = a.length;
   int i = 0;
   while(i < n) {
      if (x == a[i])
         break;
      i++;
   }
   return i;
}
```

Funktion sucht x in einem Feld
a[0], a[1], … a[n-1] und
liefert i, falls x == a[i] und sonst n.

- Best Case:
  x befindet sich am Anfang des Feldes, d.h. x == a[0].
- Es werden 5 Operationen benötigt: n = a.length, i=0, i<n, a[i], x == a[i].
- Damit: T(n) = 5 = O(1)

Beispiel: Sequentielle Suche – Worst-Case-Analyse

```
static int suche(int[] a, int x) {

   int n = a.length;
   int i = 0;
   while(i < n) {
      if (x == a[i])
         break;
      i++;
   }
   return i;
}
```

- Worst case:
  x kommt nicht im Feld a vor.
- Damit: $T(n) = 4n + 3 = O(n)$

Beispiel: Sequentielle Suche – Average-Case-Analyse

```
static int suche(int[] a, int x) {

   int n = a.length;
   int i = 0;
   while(i < n) {
      if (x == a[i])
         break;
      i++;
   }
   return i;
}
```

- Es gibt n+1 unterschiedliche Fälle, die gleich wahrscheinlich sind:

  x == a[0], x == a[1], … x == a[n-1] oder x kommt in a nicht vor.

- Damit:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \{ 0*4+5 + 1*4+5 + 2*4+5 + \ldots +(n-1)*4+5 + n*4+3 \} / (n+1) \\
&= \{ 4*(1+2+\ldots+n) + 5n+3) \} / (n+1) \\
&= \{ 2n(n+1) + 5n+3 \} / (n+1) \\
&\approx 2n + 5 \\
&= O(n).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.4

Die Funktion istPrim prüft, ob n eine Primzahl ist.
Führen Sie eine Best-Case und eine Worst-Case-Analyse durch.

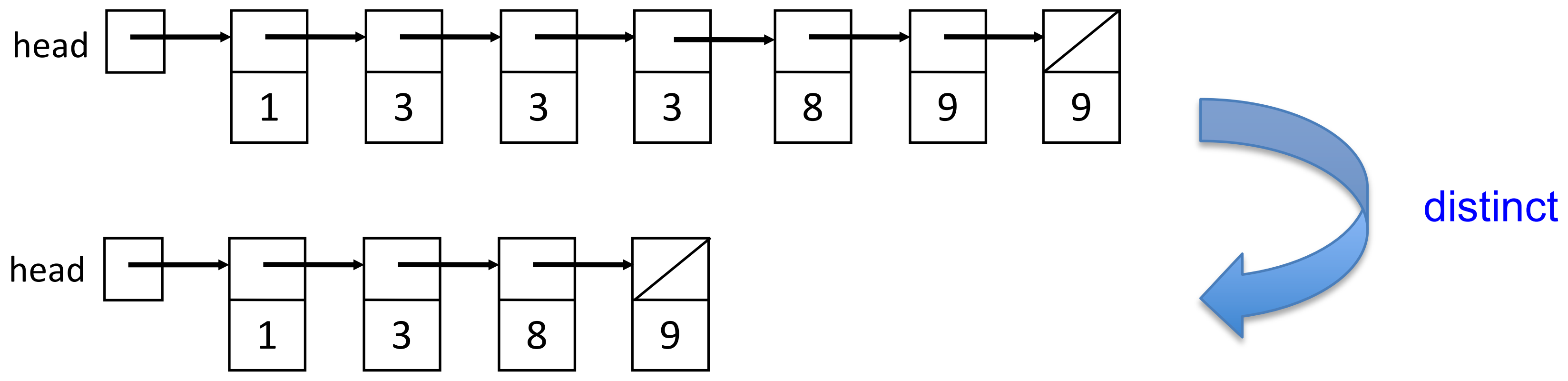
```
static boolean istPrim(int n) {

   for (int i = 2; i*i <= n; i++) {
      if (n%i == 0)  // i ist Teiler von n
         return false;
   }
   return true;
}
```

Vorsicht bei nicht-konventionell geschachtelten Schleifen

```
for (int i = 0; i++; i < n) {
    for (...) {
        // Innere Schleife nimmt
        // Einfluss auf äussere Schleife
        ...
    }
}
```

- Die innere Schleife kann beispielsweise die Schleifenvariable i oder den Endwert n der Schleifenvariable verändern.
- Statt for-Schleife kann auch while- oder do-while-Schleife auftreten.

Beispiel: Entfernen von Duplikaten in einer aufsteigend sortierten Liste




```
void distinct() {
    for (Node p = head; p != null; p = p.next) {
        while (p.next != null && p.data == p.next.data)
            p.next = p.next.next; // Duplikat loeschen
    }
}
```

- Jeder Durchlauf durch die innere while-Schleife reduziert die Liste um 1 Element und sorgt dafür, dass die äußere for-Schleife einmal weniger durchlaufen wird.
- Daher ist die Laufzeit von distinct für eine Liste mit n Knoten immer:

  $T(n) = O(n)$

Analyse von rekursiven Funktionen

Aufrufstruktur-Methode

- Stelle Aufrufstruktur dar.
- Ermittle Laufzeit für jeden Aufruf und addiere alle Laufzeiten zusammen

Beispiel fak-Funktion

```
static int fak(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fak(n-1);
}
```

Aufrufstruktur:	Laufzeiten:
fak(n)	c_1
fak(n-1)	c_1
…	…
fak(1)	c_1
fak(0)	c_0

Summe aller Laufzeiten:

$T(n) = c_1 n + c_0 = O(n)$.

Analyse von Teile-und-Herrsche-Funktionen mit zwei rekursiven Aufrufen

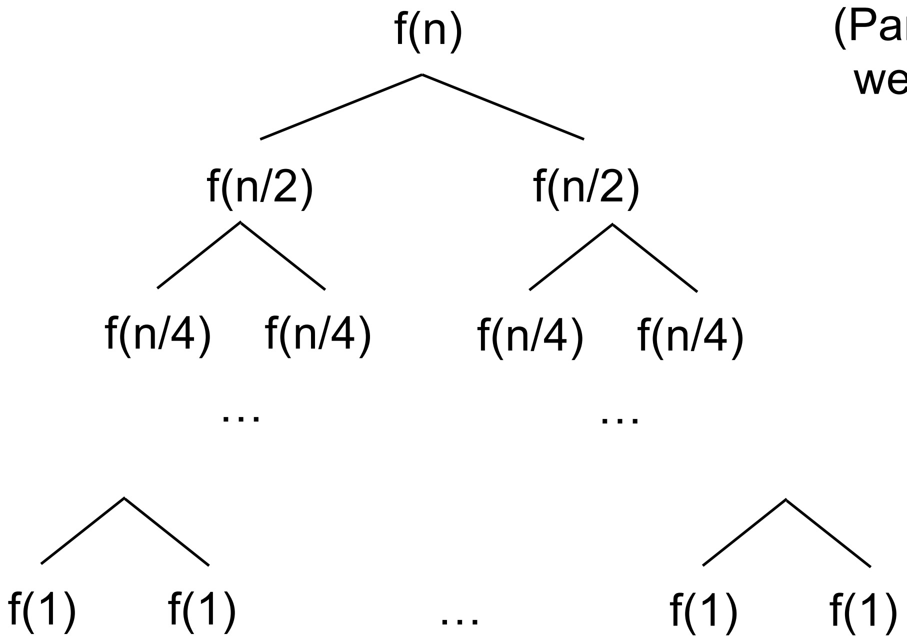
Die Funktion f bearbeitet die Eingabe x der Größe n nach dem Teile-und-Herrsche-Prinzip.

```
Funktion f(x,n) {

    if  (n == 1) {
        // Basisfall:
        löse Problem direkt; Ergebnis sei lös;                                   // (1)
        return lös;
    }
    else {
        // Teileschritt:
        teile x in zwei Teilprobleme x1 und x2 jeweils der Größe n/2;    // (2)
        lös1 = f(x1,n/2);
        lös2 = f(x2,n/2);

        // Herrscheschritt:
        Setze Lösung lös für x aus lös1 und lös2 zusammen;                  // (3)
        return lös;
    }
}
```

Aufrufstruktur für Teile-und-Herrsche-Funktionen mit zwei rekursiven Aufrufen

Maximale Rek.Tiefe

$= \log_2(n)$



(Parameter x ist weggelassen)

Analyse von Teile-und-Herrsche-Funktionen mit einem rekursiven Aufruf

Die Funktion f bearbeitet die Eingabe x
der Größe n nach dem Teile-und-Herrsche-Prinzip.

```
Funktion f(x,n) {

    if  (n == 1) {
        // Basisfall:
        löse Problem direkt; Ergebnis sei lös;                     // (1)
        return lös;
    }
    else {
        // Teileschritt:
        reduziere x auf ein Teilproblem x1 der Größe n/2;          // (2)
        lös1 = f(x1,n/2);

        // Herrscheschritt:
        Berechne Lösung lös für x aus lös1;                        // (3)
        return lös;
    }
}
```

Aufrufstruktur für Teile-und-Herrsche-Funktionen mit einem rekursiven Aufruf

Maximale Rek.Tiefe

$= \log_2(n)$

f(n)

(Parameter x ist weggelassen)

f(n/2)

f(n/4)

…

f(1)

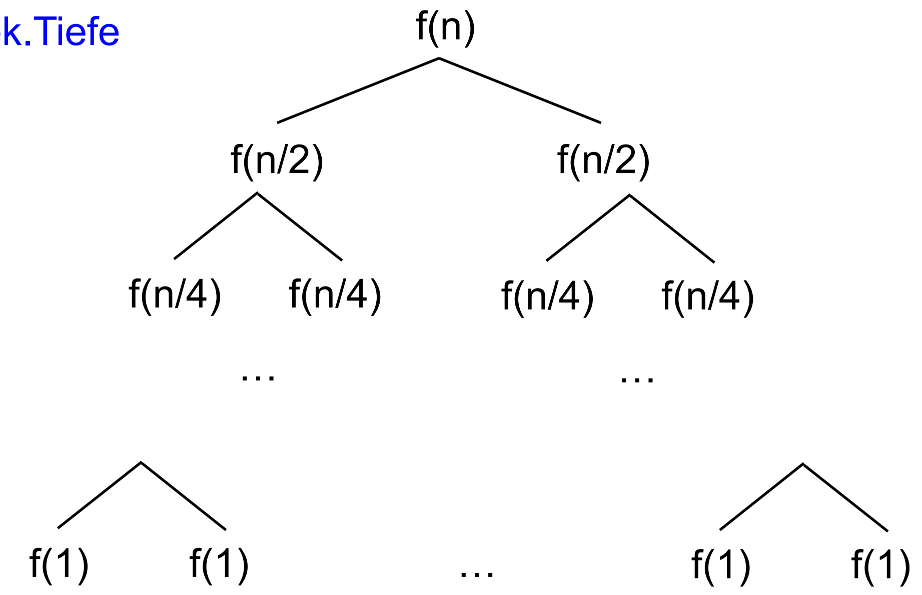
Laufzeiten für verschiedene Fälle von Teile-und-Herrsche-Funktionen

Fall	Art der Teile-und-Herrsche-Funktion	Laufzeit
A	Ein Problem der Größe n wird in zwei Teilprobleme der Größe n/2 zerlegt. Basisfall (1): konstante Laufzeit. Teileschritt (2) und Herrsche-Schritt (3): konstanter Aufwand.	O(n)
B	Ein Problem der Größe n wird in zwei Teilprobleme der Größe n/2 zerlegt. Basisfall (1): konstante Laufzeit. Teileschritt (2) und Herrsche-Schritt (3): linearer Aufwand.	O(n log n)
C	Ein Problem der Größe n wird in nur einem Teilproblem der Größe n/2 zerlegt. (Aufrufstruktur bildet eine lineare Kette). Basisfall (1): konstante Laufzeit. Teileschritt (2) und Herrsche-Schritt (3): konstanter Aufwand.	O(log n)
D	Ein Problem der Größe wird n in nur einem Teilproblem der Größe n/2 zerlegt. (Aufrufstruktur bildet eine lineare Kette). Basisfall (1): konstante Laufzeit. Teileschritt (2) und Herrsche-Schritt (3): linearer Aufwand.	O(n)

Analyse für Fall A

Maximale Rek.Tiefe

$= \log_2(n)$



$c_1 * 2^0$

$c_1 * 2^1$

$c_1 * 2^2$

…

$c_1 * 2^{\log(n)-1}$

$c_0 * 2^{\log(n)}$

Laufzeiten für jede Rekursiontiefe

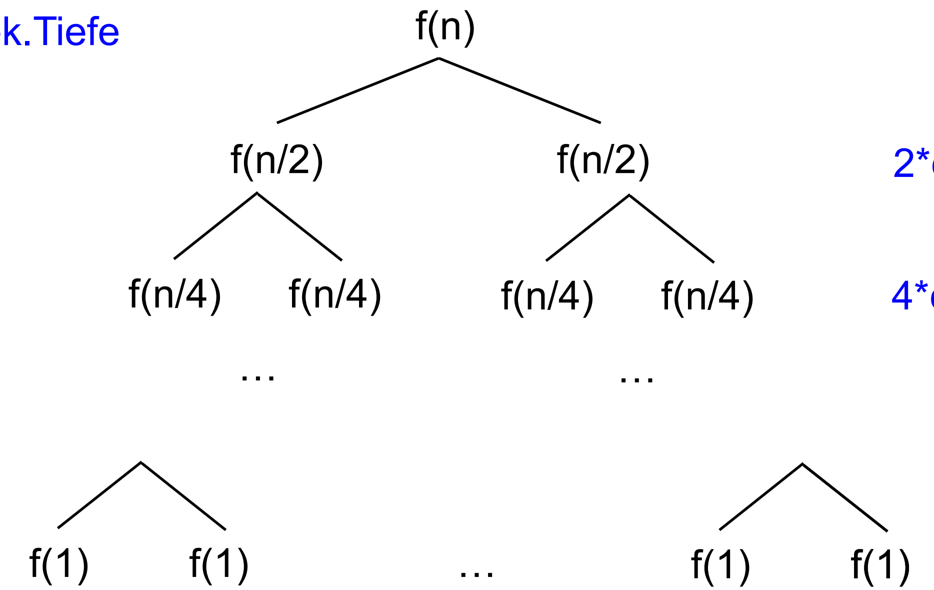
Summe aller Laufzeiten:

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 * (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{\log(n)-1}) + c_0 * 2^{\log(n)} \\ &= c_1 * (2^{\log(n)} - 1) + c_0 * n \\ &= c_1 * (n - 1) + c_0 * n \\ &= O(n). \end{aligned}$$

Analyse für Fall B

Maximale Rek.Tiefe

$= \log_2(n)$



$c_1 * n$

$2 * c_1 * (n/2) = c_1 * n$

$4 * c_1 * (n/4) = c_1 * n$

…

$c_1 * n$

$c_0 * n$

Laufzeiten für jede Rekursiontiefe

Summe aller Laufzeiten:

$T(n) = c_1 * n * \log(n) + c_0 * n$

$= O(n * \log(n))$.

Analyse für Fall C und D

Maximale Rek.Tiefe $= \log_2(n)$	$f(n)$	c_1	c_1*n	Laufzeiten für Fall C
	$f(n/2)$	c_1	$c_1*(n/2)$	Laufzeiten für Fall D
	$f(n/4)$	c_1	$c_1*(n/4)$	
	…	…	…	
		c_1		
	$f(1)$	c_0	c_0	

Summe aller Laufzeiten im Fall C:

$$T(n) = c_1*\log(n) + c_0$$
$$= O(\log(n)).$$

Summe aller Laufzeiten im Fall D:

$$T(n) = c_1* (1 + ½ + ¼ + ...)*n + c_0$$
$$= O(n).$$

Aufgabe 8.5

Die Funktion max berechnet das Maximum in einem Feld
nach dem Teile-und-Herrsche-Prinzip.

Beurteilen Sie, ob diese Funktion eine bessere Laufzeit erwarten lässt als eine herkömmliche Funktion, die iterativ (d.h. mit einer Schleife) das Maximum bestimmt.

```java
static int max(int[] a, int li, int re) {

   if (li == re)
      return a[li];
   else {
      int m = (li+re)/2;
      int maxL = max(a,li,m);
      int maxR = max(a,m+1,re);
      if (maxL >= maxR)
         return maxL;
      else
         return maxR;
   }
}
```

Aufgaben

Aufgabe 8.6

Welche Laufzeit hat die binäre Suche aus Kapitel 7?

Aufgabe 8.7

- Was leistet folgende Funktion f ?
- Welche Laufzeit hat die Funktion f, wenn beide Felder a und b die Größe n haben?

```
static boolean f(int[] a, int[] b) {

   assert isSorted(b);

   for (int x : a) {
      if (!binSuche(b,x))
         return false;
   }
   return true;
}
```

Aufgabe 8.8

Die Klasse TreeSet aus der Java-API gestattet die Speicherung einer Menge von Elementen als binären Suchbaum (später).

- Mit der Methode `add(x)` lässt sich ein Element x zur Menge dazufügen.
  Finden Sie in der Java-API die Laufzeit dieser Methode heraus.

- Welche Laufzeit hat die Funktion f?
  Setzen Sie dazu für `Math.random()` eine konstante Laufzeit voraus.

```java
public static void f(int n) {
   TreeSet<Double> s = new TreeSet<Double>();

   for (int i = 0; i < n; i++) {
      double x = Math.random();
      s.add(x)
   }
}
```

Aufgabe 8.9 (1)

- Gegeben sei ein Kursverlauf x einer Aktie,
  wobei x[i] der Kurswert am Tag i ist ($0 \le i \le n-1$).

- Gesucht ist ein Einkaufstag e und ein Verkaufstag $v \ge e$, so dass

  $(x[v] - x[e]) \,/\, x[e]$ (relativer Gewinn)

  maximal ist.

- Überzeugen Sie sich, dass die beiden folgenden Algorithmen das Problem lösen:
  - Naives Verfahren: Maximumbildung über alle (e,v)-Paare.
  - Teile-und-Herrsche-Verfahren.

- Geben Sie die Laufzeiten für beide Algorithmen an.

Aufgabe 8.9 (2)

```
class Aktienkurs {
    public static class OptEinVerkauf {
        public int einkauf;
        public int verkauf;
        public double gewinn;
        OptEinVerkauf(int e, int v, double g) {
            einkauf = e; verkauf = v; gewinn = g;
        }
    }

    public static OptEinVerkauf optEinVerkaufNaiv(double[ ] x) {
        int e = 0, v = 0;
        double g = 0;
        for (int i = 0; i < x.length-1; i++) {
            for (int j = i+1; j < x.length; j++) {
                double gNeu = (x[j]-x[i])/x[i];
                if (gNeu > g) {
                    e = i;
                    v = j;
                    g = gNeu;
                }
            }
        }
        return new OptEinVerkauf(e, v, g);
    }
```

Liefert zu Kursverlauf x den optimalen Ein- und Verkaufstag zurück.

Naives Verfahren.

Aufgabe 8.9 (3)

```
private static class TuHReturn {
        OptEinVerkauf optev;
        int min;
        int max;
        TuHReturn(OptEinVerkauf o, int mi, int ma) {
                optev = o; min = mi; max = ma;
        }
}

public static OptEinVerkauf optEinVerkaufTuH(double[ ] x) {
        TuHReturn ret = optEinVerkaufTuH(x, 0, x.length-1);
        return ret.optev;
}
```

Rückgabewerttyp für Teile-und-Herrsche-Funktion

Liefert zu Kursverlauf x den optimalen Ein- und Verkaufstag zurück.

Teile-und-Herrsche-Verfahren.

Aufgabe 8.9 (4)

```
private static TuHReturn optEinVerkaufTuH(double[ ] x, int li, int re) {

    if (li == re) {
        return new TuHReturn(new OptEinVerkauf(li, li, 0), li, li);
    }
    else {
        int m = (li+re)/2;

        // Optimaler Ein/Verkauf in linker Hälfte:
        TuHRetun retL = optEinVerkaufTuH(x, li, m);
        int eL = retL.optev.einkauf;
        int vL= retL.optev.verkauf;
        double gL = retL.optev.gewinn;

        // Optimaler Ein/Verkauf in rechter Hälfte:
        TuHRetun retR = optEinVerkaufTuH(x, m+1, re);
        int eR = retR.optev.einkauf;
        int vR= retR.optev.verkauf;
        double gR= retR.optev.gewinn;

        // Einkauf in linker Hälfte und Verkauf in rechter Hälfte:
        double gLR = (x[retR.max] - x[retL.min]) / x[retL.min];
```

Liefert zu Kursverlauf x im Bereich von li bis re einschl. den optimalen Ein- und Verkaufstag zurück.

Teile-und-Herrsche-Verfahren.

Aufgabe 8.9 (5)

```
        // Opt. Ein- u. Verkaufstag ermitteln:
        OptEinVerkauf oev;
        if (gL >= gR && gL >= gLR)
            oev = retL.optev;
        else if (gR >= gLR)
            oev = retR.optev;
        else
            oev = new OptEinVerkauf(retL.min, retR.max,  gLR);

        // Min u Max berechnen:
        int min, max;
        if (x[retL.min] <= x[retR.min])
            min = retL.min;
        else
            min = retR.min;
        if (x[retL.max] >= x[retR.max])
            max = retL.max;
        else
            max = retR.max;

        //  Opt. Ein/Verkauf zurückliefern:
        return new TuHReturn(oev, min, max);
    }
}
```