Übungsblatt 4 - mit Lösungen

Diskrete Zufallsvariablen

Stochastik@AIN2
Prof. Dr. Barbara Staehle
Sommersemester 2022
HTWG Konstanz

|Einfache und mittelschwere Aufgaben|

AUFGABE 4.1 GLÜCKSOKTAEDER

Wir besuchen das Casino „Glückauf“. Dort gibt es zwei Typen von Laplace-Oktaedern (Würfeln mit 8 Seiten, deren Seiten jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden):

- Typ1 ist beschriftet mit den Ziffern $1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3$
- Typ2 ist beschriftet mit den Ziffern $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3$

Für ein Spiel wird mit je einem Oktaeder vom Typ1 und einem Oktaeder vom Typ2 gewürfelt. Wir definieren die folgenden Zufallsvariablen:

- X_1 bildet ab auf die Zahl, die der Oktaeder vom Typ1 zeigt,
- X_2 bildet ab auf die Zahl, die der Oktaeder vom Typ2 zeigt.

TEILAUFGABE 4.1.1 3 PUNKTE

a) Geben Sie für beide Zufallsvariablen jeweils die (Wahrscheinlichkeits)verteilung und die Verteilungsfunktion an.

b) Stellen Sie in einem Diagramm die (Wahrscheinlichkeits)verteilungen von X_1 und X_2 dar.

c) Stellen Sie in einem Diagramm die Verteilungsfunktion von X_1 und X_2 dar.

LÖSUNG

a)

x	1	2	3
$P(X_1 = x)$	0.5	0.125	0.375
$P(X_2 = x)$	0.375	0.375	0.25

Tabelle 1: Verteilung von X_1 und X_2

Verteilungsfunktionen von X_1 und X_2

$$F_1(x) = P(X_1 \le x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.5 & 1 \le x < 2 \\ 0.6125 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

$$F_2(x) = P(X_2 \le x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.375 & 1 \le x < 2 \\ 0.75 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

b) Siehe Abbildung 3.

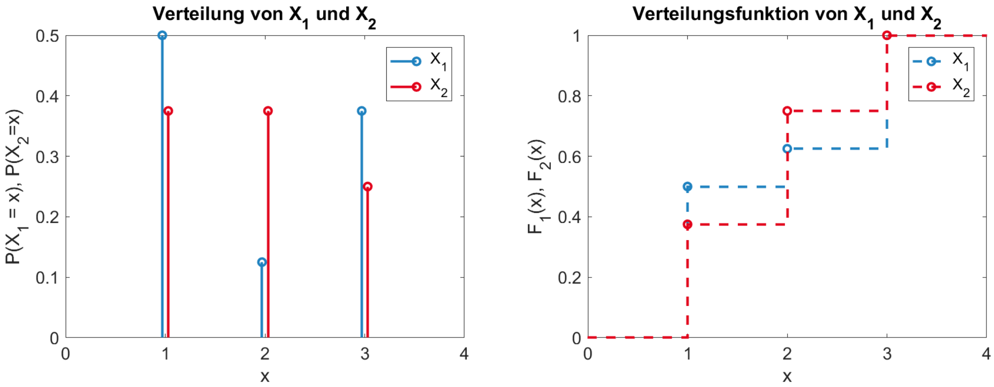

Abbildung 1: Verteilung und Verteilungsfunktion von X_1 und X_2

c) Siehe Abbildung 3.

Teilaufgabe 4.1.2 3 Punkte

a) Berechnen Sie für X_1 und X_2 jeweils den Erwartungswert.

b) Berechnen Sie für X_1 und X_2 jeweils die Varianz.

c) Berechnen Sie für X_1 und X_2 jeweils die Standardabweichung.

Lösung

a) $\mathrm{E}(X_1) = \mu_1 = \sum_{x\in\{1,2,3\}} x \cdot P(X_1 = x) = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.125 + 3 \cdot 0.375 = 0.5 + 0.25 + 1.25 = 1.875$
$\mathrm{E}(X_2) = \mu_2 = \sum_{x\in\{1,2,3\}} x \cdot P(X_2 = x) = 1 \cdot 0.375 + 2 \cdot 0.375 + 3 \cdot 0.25 = 0.375 + 0.75 + 0.75 = 1.875$

b)
$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_1) &= \mathrm{E}(X_1 - \mu_1)^2 = \textstyle\sum_{x\in\{1,2,3\}} (x - \mu_1)^2 \cdot P(X_1 = x) \\
&= (1 - 1.875)^2 \cdot 0.5 + (2 - 1.875)^2 \cdot 0.125 + (3 - 1.875)^2 \cdot 0.375 \\
&= (-0.875)^2 \cdot 0.5 + (0.125)^2 \cdot 0.125 + (1.125)^2 \cdot 0.375 \\
&= 0.383 + 0.002 + 0.475 \\
&= 0.859
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_2) &= \mathrm{E}(X_2 - \mu_2)^2 = \textstyle\sum_{x\in\{1,2,3\}} (x - \mu_2)^2 \cdot P(X_2 = x) \\
&= (1 - 1.875)^2 \cdot 0.375 + (2 - 1.875)^2 \cdot 0.375 + (3 - 1.875)^2 \cdot 0.25 \\
&= (-0.875)^2 \cdot 0.375 + (0.125)^2 \cdot 0.375 + (1.125)^2 \cdot 0.25 \\
&= 0.287 + 0.006 + 0.315 \\
&= 0.609
\end{aligned}$$

c) $\sigma_{X_1} = \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)} = \sqrt{0.859} = 0.927$
$\sigma_{X_2} = \sqrt{\mathrm{Var}(X_2)} = \sqrt{0.609} = 0.781$

Aufgabe 4.2 4 Punkte

Betrachten Sie die Zufallsvariable X, welche folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung hat:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.25	0.35	0.2	0.1

a) Zeichnen Sie ein Diagramm der (Wahrscheinlichkeits)verteilung.

b) Zeichnen Sie ein Diagramm der Verteilungsfunktion.

c) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$

d) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$

Lösung

a) Siehe Abbildung 3.

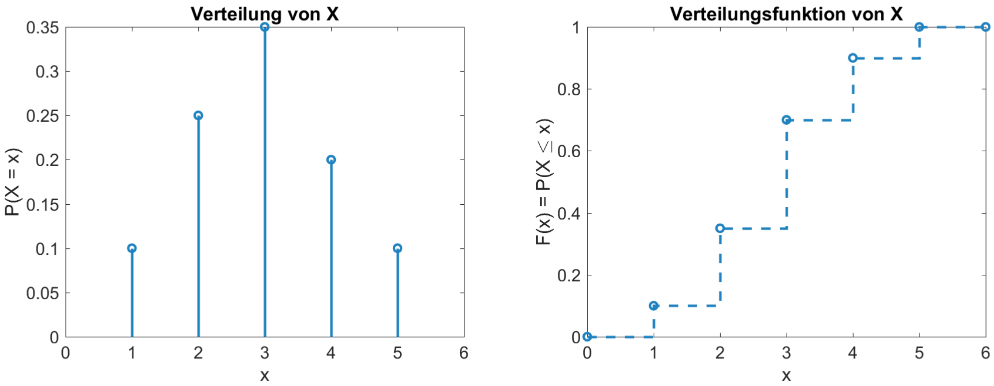

Abbildung 2: Verteilung und Verteilungsfunktion von X

b) Siehe Abbildung 3.

c) $\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in \{1,2,3,4,5\}} x \cdot P(X = x)$
$= 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.35 + 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.1 = 0.1 + 0.5 + 1.05 + 0.8 + 0.5 = 2.95$

d)
$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \textstyle\sum_{x \in \{1,2,3,4,5\}} (x-\mu)^2 \cdot P(X = x) \\
&= (1-2.95)^2 \cdot 0.1 + (2-2.95)^2 \cdot 0.25 + (3-2.95)^2 \cdot 0.35 + (4-2.95)^2 \cdot 0.2 + (5-2.95)^2 \cdot 0.1 \\
&= (-1.95)^2 \cdot 0.1 + (-0.95)^2 \cdot 0.25 + (0.05)^2 \cdot 0.35 + (1.05)^2 \cdot 0.2 + (2.05)^2 \cdot 0.1 \\
&= 3.8025 \cdot 0.1 + 0.9025 \cdot 0.25 + 0.0025 \cdot 0.35 + 1.1025 \cdot 0.2 + 4.2025 \cdot 0.1 \\
&= 0.38025 + 0.225625 + 0.000875 + 0.2205 + 0.42025 \\
&= 1.2475
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3 Würfeln bis die 1 kommt

Im Casino „Glückauf“ kann man auch „normalen“ Würfeln spielen. Hierfür wird mit einem fairen Laplace W6 folgendes Spiel gespielt: Der Würfel wird so lange geworfen, bis eine 1 fällt, höchstens jedoch 5 Mal. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der hierfür nötigen Würfe an.

Beispiele: Für die Würfelfolge $(5,6,3,1)$ gilt $X = 4$, für $(4,1)$ gilt $X = 2$, für $(5,6,3,3,2)$ gilt $X = 5$, ebenso wie für $(5,4,3,2,1)$.

Teilaufgabe 4.3.1 2 Punkte

a) Geben Sie (andeutungsweise) den Ereignisraum Ω des Experiments an.

b) Geben Sie den Träger (= Wertebereich) von X an.

Lösung

a) $\Omega = \{1, (2,1), (3,1), \ldots (6,1), (2,2,1), (2,3,1), \ldots, (6,6,1), \ldots (2,2,2,2,1), \ldots (6,6,6,6,6)\}$

b) $X = \{1,2,3,4,5\}$.

Teilaufgabe 4.3.2 2 Punkte

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X

LÖSUNG

a) siehe Tabelle 2

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{6} = 0.167$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = 0.139$	$(\frac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{6} = 0.116$	$(\frac{5}{6})^3\cdot\frac{1}{6} = 0.096$	$(\frac{5}{6})^4 = 0.482$

Tabelle 2: Verteilung von X

b) Verteilungsfunktionen von X

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} = 0.167 & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{36} = 0.306 & 2 \leq x < 3 \\ \frac{91}{216} = 0.421 & 3 \leq x < 4 \\ \frac{671}{1296} = 0.518 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & 5 \leq x \end{cases}$$

TEILAUFGABE 4.3.3 2 PUNKTE

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 mal gewürfelt werden muss.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 5 mal gewürfelt werden muss.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 mal gewürfelt werden muss.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 4 mal gewürfelt werden muss.

LÖSUNG

a) $P(X=2) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = 0.139$

b) $P(X \leq 5) = 1$ (siehe Definition des Experiments)

c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=1) - P(X=2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{36} = 0.694$

d) $P(X > 4) = P(X=5) = (\frac{5}{6})^4 = 0.482$

AUFGABE 4.4 ZUFALLSBITS, 3 PUNKTE

Für eine Test-Übertragung werden Bitfolgen der Länge 3 zufällig generiert. Betrachten Sie die Zufallsvariable X = *Anzahl der Einsen in einer Bitfolge der Länge 3*. Geben Sie an

a) den Ereignisraum Ω

b) den Wertebereich von X

c) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

d) den Erwartungswert von X

e) die Varianz von X

f) die Standardabweichung von X

LÖSUNG

a) Es gibt 8 mögliche Bitfolgen (Ergebnisse des Experiments).
Damit gilt $\Omega = \{111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000\}$.

b) Beobachtet wird die Anzahl X der Einsen. X kann also die Werte $x_i = 0, 1, 2, 3$ annehmen.

c) Da es sich um ein Laplace-Experiment handelt, bestimmt man die Wahrscheinlichkeiten einfach durch Abzählen und erhält die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

d) $E(X) = \sum_{x\in\{0,1,2,3\}} x \cdot P(X = x) = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$

e) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 9 - \frac{9}{4} = \frac{24}{8} - \frac{9}{4} = \frac{6}{8} = 0.75$

f) $\sigma = \sqrt{(\mathrm{Var}(X))} = 0.866$

AUFGABE 4.5 LOSEN!, 3 PUNKTE

Bei einem Glücksspiel können Sie jeweils mit der selben Wahrscheinlichkeit eines von drei Losen ziehen.

a) Bei **Variante A** sind die zugehörigen Gewinne sind jeweils 0, 1 und 99 €. Wie groß ist der erwartete durchschnittliche Gewinn?

b) Bei **Variante B** sind die zu den Losen gehörenden Gewinne 25, 30 und 45 €. Wie groß ist hier der erwartete durchschnittliche Gewinn?

c) Berechnen Sie für beide Spielvarianten die Varianz.

LÖSUNG

a) $E(X_A) = \sum_{x\in\{0,1,99\}} x \cdot P(X = x) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 99 = \frac{100}{3} = 33.333$ (€)

b) $E(X_B) = \sum_{x\in\{25,30,45\}} x \cdot P(X = x) = \frac{1}{3} \cdot 25 + \frac{1}{3} \cdot 30 + \frac{1}{3} \cdot 45 = \frac{100}{3} = 33.333$ (€)

c) $\mathrm{Var}(X_A) = E(X_A^2) - E(X_A)^2 = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 9801 - \frac{10000}{9} = \frac{19406}{9} = 2156.222$ (€^{2})
$\mathrm{Var}(X_B) = E(X_B^2) - E(X_A)^2 = \frac{1}{3} \cdot 625 + \frac{1}{3} \cdot 900 + \frac{1}{3} \cdot 2025 - \frac{10000}{9} = \frac{650}{9} = 72.222$ (€^{2})

AUFGABE 4.6 TWITTER BOTS, 3 PUNKTE

Alice steigt als Social-Media-Managerin bei einem großen Unternehmen ein und bekommt die Aufgaben einen Twitter Bot (siehe Twitter bot bei Wikipedia)zu programmieren, der in unregelmäßigen Abständen einen Tweet über ein Produkt des Unternehmens absetzt. Ihr Bot soll möglichst menschenähnlich wirken, daher verwendete sie eine **Zufallsvariable, für die Zeit in Stunden, die zwischen zwei Tweets liegt**.

In Absprache mit ihren Vorgesetzten testet sie zwei Modelle für die Verteilung dieser Zufallsvariablen. Die Verteilung der entsprechenden Zufallsvariablen T_1, T_2 sind wie folgt:

t	0.5	1	4	12	24
$P(T_1 = t)$	0	0.25	0.75	0	0
$P(T_2 = t)$	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

Tabelle 3: Verteilung von T_1 und T_2

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung jeder Zufallsvariable.

b) Würden Sie eine der beiden Zufallsverteilung als Grundlage für einen Twitter Bot einsetzen, der menschenähnlich wirken soll? Wenn ja, welchen? Wenn nein, warum nicht?
Hier gibt es keine richtige Lösung, kommt auf die Begründung an!!

LÖSUNG

a)
- $\mathrm{E}(T_1) = \sum_{t\in\{0.5,1,4,12,24\}} t \cdot P(T_1 = t) = 1 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.75 = 3.25$
- $\mathrm{E}(T_2) = \sum_{t\in\{0.5,1,4,12,24\}} t \cdot P(T_2 = t) = 0.5\cdot 0.5+1\cdot 0.25+4\cdot 0.125+12\cdot 0.0625+24\cdot 0.0625 = 3.25$
- $\mathrm{Var}(T_1) = \sum_{t\in\{0.5,1,4,12,24\}}(t - \mathrm{E}(T_1)^2) \cdot P(T_1 = t) = (1-3.25)^2 \cdot 0.25 + (4.25)^2 \cdot 0.75 = 1.6875$
- $\mathrm{Var}(T_2) = \sum_{t\in\{0.5,1,4,12,24\}}(t - \mathrm{E}(T_2)^2) \cdot P(T_2 = t) = (0.5-3.25)^2 \cdot 0.5 + (1-3.25)^2 \cdot 0.25 + (4-3.25)^2 \cdot 0.125 + (12-3.25)^2 \cdot 0.0625 + (24-3.25)^2 \cdot 0.0625 = 36.8125$
- $\sigma_{T_1} = \sqrt{\mathrm{Var}(T_1)} = 1.2990$
- $\sigma_{T_2} = \sqrt{\mathrm{Var}(T_2)} = 6.0673$

b) Mein Vorschlag: Natürlich kommt es auf den Inhalt der Tweets an, um zu beurteilen ob der Bot glaubwürdig ist. Aber wenn man sich alleine die Zeiten ansieht, die zwischen den Tweets liegen, ist T_2 zu bevorzugen, da ein Mensch es nicht schafft, in so regelmäßigen Abständen wie durch T_1 beschrieben, zu twittern. Beide Modelle sind sowieso nicht sonderlich glaubhaft, eine Zufallsvariable mit kontinuierlichem Wertebereich ist viel sinnvoller (also keine diskreten Abstände), weiterhin wären Tages- und Nachtzeiten bzw. Zeitzonen zu berücksichtigen!

|Mittelschwere und schwere Aufgaben|

Aufgabe 4.7 Ein spezielles Roulettespiel, 4 Punkte

Beim Roulette im Casino „Glückauf" gibt es 18 schwarze Felder, 18 rote Felder und zwei grüne Null-Felder. Sie spielen ein spezielles Spiel: Sie setzen jede Runde auf „'schwarz". Rollt die Kugel in einer Runde auf ein schwarzes Feld, so erhalten Sie den doppelten Einsatz, ansonsten verlieren Sie den Einsatz.

Es werden zwei Spiele gespielt:

- Spiel 1: Sie setzen in einer Runde 100 €.
- Spiel 2: Sie setzen in hundert Runden 1 €.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen für die Zufallsvariablen
   - G_1: Gewinn in Spiel 1
   - G_2: Gewinn in **einer Runde von** Spiel 2

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von G_1.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von G_2.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariable G_3: Gewinn in Spiel 2 (das sich über 100 Runden zieht)

Lösung

a)
- Da man pro Runde nur den Einsatz verlieren (Gewinn = -100 €), oder den Einsatz verdoppeln kann (Gewinn = 200 - 100 = 100 €) gilt für die Verteilung der Zufallsvariable G_1 nach Laplace:

g	-100	100
$P(G_1 = g)$	$\frac{10}{19}$	$\frac{9}{19}$.

- Da man pro Runde nur den Einsatz verlieren (Gewinn = -1 €), oder den Einsatz verdoppeln kann (Gewinn = 2 - 1 = 1 €) gilt für die Verteilung der Zufallsvariable G_2 nach Laplace:

g	-1	1
$P(G_2 = g)$	$\frac{10}{19}$	$\frac{9}{19}$.

b) Mit Teilaufgabe (a) berechnet sich
- $\mathrm{E}(G_1) = \sum_{x \in \{-100,100\}} g \cdot P(G = g) = \frac{10}{19} \cdot -100 + \frac{9}{19} \cdot 100 = -\frac{100}{19} = -5.26$ (€)
- $\mathrm{Var}(G_1) = \mathrm{E}(G_1^2) - \mathrm{E}(G_1)^2 = \frac{10}{19} \cdot 10000 + \frac{9}{19} \cdot 10000 - (\frac{100}{19})^2 = 9972.29$ (€ ^{2})
  $\sigma_{G_1} = \sqrt{\mathrm{Var}(G_1)} = 99.86$(€)

c) Mit Teilaufgabe (a) berechnet sich
- $\mathrm{E}(G_2) = \sum_{x \in \{-1,1\}} g \cdot P(G = g) = \frac{10}{19} \cdot -1 + \frac{9}{19} \cdot 1 = -\frac{1}{19} = -0.0526$ (€)
- $\mathrm{Var}(G_2) = \mathrm{E}(G_2^2) - \mathrm{E}(G_2)^2 = \frac{10}{19} \cdot 1 + \frac{9}{19} \cdot 1 - (\frac{1}{19})^2 = \frac{19406}{9} = 0.997$ (€ ^{2})
  $\sigma_{G_2} = \sqrt{\mathrm{Var}(G_2)} = 0.9986$ (€)

Bemerkung: G_2 hätte man auch als $\frac{1}{100} \cdot G_1$ (lineare Skalierung von G_1) berechnen können:

- $\mathrm{E}(G_2) = \frac{1}{100} \cdot \mathrm{E}(G_1) = -0.0526$ (€)
- $\mathrm{Var}(G_2) = (\frac{1}{100})^2 \cdot \mathrm{Var}(G_1) = 0.997$ (€ ^{2})
  $\sigma_{G_2} = \frac{1}{100}\sigma_{G_1} = 0.9986$ (€)

d) Für die Zufallsvariable G_3 gilt: $G_3 = \sum_{i=1}^{100} G_2$ (100 unabhängige Wiederholungen des Experiments, welches durch G_2 beschrieben wird):

- $\mathrm{E}(G_3) = 100 \cdot E(G_2) = -5.26$ (€)
- $\mathrm{Var}(G_3) = 100 \cdot \mathrm{Var}(G_3) = 99.72$ (€ ^{2})
  $\sigma_{G_3} = \sqrt{\mathrm{Var}(G_3)} = 9.986$ (€)

Aufgabe 4.8 Ein spezielles Würfelspiel (Klausur SS18)

Alice und Bob spielen ein Glücksspiel. Hierzu verwenden Sie zwei gleichartige spezielle, faire 6-seitige Würfel, mit denen gleichzeitig gewürfelt wird. Die verwendeten Würfel sind jeweils mit den Ziffern $1, 1, 2, 2, 3, 3$ beschriftet.

Betrachten Sie die folgenden Zufallsvariablen:

- X_1, die Augenzahl, die Würfel 1 zeigt
- X_2, die Augenzahl, die Würfel 2 zeigt
- $X_3 = X_1 + X_2$, die Zahl, die durch die Addition der Augenzahlen der beiden Würfeln entsteht.

Teilaufgabe 4.8.1 3 Punkte

a) Geben Sie für X_1 und X_3 jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung an (z.B. in einer gemeinsamen Tabelle).

b) Stellen Sie in einem gemeinsamen Diagramm die Wahrscheinlichkeitsverteilunsfunktion von X_1 und X_3 dar. Achten Sie auf korrekte Beschriftungen. Ihr Diagramm muss **nicht exakt** sein, soll aber den Unterschied zwischen den Verteilungsfunktionen klar machen.

c) Alice gewinnt, falls Würfel 1 ein Zahl größer als 1 zeigt, Bob gewinnt, falls die Summe der Augenzahlen der Würfel höchsten 4 ist. Ist dieses Spiel fair? (**Anmerkung:** Ein Spiel ist **fair**, wenn alle Spieler die gleiche Chance haben, zu gewinnen.)

Lösung

a) Siehe Tabelle 4.

b) Siehe Abbildung 3.

c)
- $P(\text{Alice gewinnt}) = P(X_1 > 1) = 1 - P(X_1 \leq 1) = 1 - P(X_1 = 1) = 1 - 1/3 = 2/3$
- $P(\text{Bob gewinnt}) = P(X_3 \leq 4) = 1 - P(X_3 > 4) = 1 - P(X_3 = 5) - P(X_3 = 6) = 1 - 2/9 - 1/9 = 1 - 1/3 = 2/3$
- Das Spiel ist fair: beide gewinnen mit gleicher Wahrscheinlichkeit

x	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x)$	1/3	1/3	1/3	0	0	0
$P(X_3 = x)$	0	1/9	2/9	1/3	2/9	1/9

Tabelle 4: Verteilung von X_1 und X_3

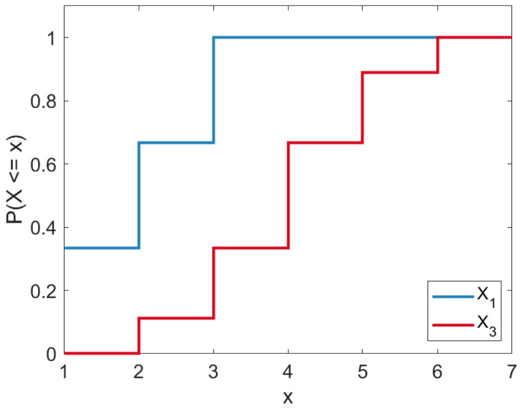

Abbildung 3: Verteilungsfunktion von X_1 und X_3

TEILAUFGABE 4.8.2 2 PUNKTE

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1

b) Berechnen Sie die Varianz von X_1

c) Berechnen Sie die Standardabweichung von X_1

d) Berechnen Sie für X_3 Erwartungswert und die Varianz mit Hilfe Ihrer Berechnungen für X_1.

LÖSUNG

a) $\mathrm{E}(X_1) = \mu_{X_1} = \sum_{x\in\{1,2,3\}} x \cdot P(X_1 = x) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$

b)
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_1) &= \mathrm{E}(X_1 - \mu_{X_1})^2 = \textstyle\sum_{x\in\{1,2,3\}} (x - \mu_{X_1})^2 \cdot P(X_1 = x) \\ &= (1-2)^2 \cdot \tfrac{1}{3} + (2-2)^2 \cdot \tfrac{1}{3} + (3-2)^2 \cdot \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{1}{3} + 0 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3} = 0.667\end{aligned}$$

c) $\sigma_{X_1} = \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$

d) $\mathrm{E}(X_3) = \mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 2\mathrm{E}(X_1) = 4$
$\mathrm{Var}(X_3) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 2\mathrm{Var}(X_1) = \frac{4}{3}$

AUFGABE 4.9 ROTE UND BLAUE WÜRFEL (ACHTUNG: AUFWÄNDIG!)

Wir würfeln mit einem roten und einem blauen fünfseitigen Würfel, die mit der gleichen Wahrscheinlichkeit jeweils die Zahlen 1,2,3,4 oder 5 zeigen.
Basierend auf den Ergebnissen dieses Experiments betrachten wir die folgenden Zufallsvariablen:

- X_1 bildet ab auf die Zahl, die der rote Würfel zeigt,
- X_2 bildet ab auf die Zahl, die der blaue Würfel zeigt,
- X_3 bildet ab auf die Differenz der roten und der blauen gewürfelten Zahl: $X_3 = X_1 - X_2$.
- X_4 bildet ab auf die Summe der roten und der blauen gewürfelten Zahl: $X_4 = X_1 + X_2$.

TEILAUFGABE 4.9.1 4 PUNKTE

Geben Sie für die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, X_4 ihren Wertebereich und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

LÖSUNG

a) $\Omega = \{(x, y) \mid x \text{ ist die rote Zahl}, y \text{ ist die blaue Zahl}\} = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (5,5)\}$
Zufallsfunktionen und Wertebereich
- $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_1(x, y) = x, \quad W_{X_1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_1(x, y) = y, \quad W_{X_2} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $X_3 : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_3(x, y) = x - y, \quad W_{X_3} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
- $X_4 : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_4(x, y) = x + y, \quad W_{X_4} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1)
- $P[X_1 = 1] = P[X_2 = 1] = \frac{1}{5}$
- $P[X_1 = 2] = P[X_2 = 2] = \frac{1}{5}$
- $P[X_1 = 3] = P[X_2 = 3] = \frac{1}{5}$
- $P[X_1 = 4] = P[X_2 = 4] = \frac{1}{5}$
- $P[X_1 = 5] = P[X_2 = 5] = \frac{1}{5}$

2)
- $P[X_3 = -4] = \frac{1}{25}$
- $P[X_3 = -3] = \frac{2}{25}$
- $P[X_3 = -2] = \frac{3}{25}$
- $P[X_3 = -1] = \frac{4}{25}$
- $P[X_3 = 0] = \frac{1}{5}$
- $P[X_3 = 1] = \frac{4}{25}$
- $P[X_3 = 2] = \frac{3}{25}$
- $P[X_3 = 3] = \frac{2}{25}$
- $P[X_3 = 4] = \frac{1}{25}$

3)
- $P[X_4 = 2] = \frac{1}{25}$
- $P[X_4 = 3] = \frac{2}{25}$
- $P[X_4 = 4] = \frac{3}{25}$
- $P[X_4 = 5] = \frac{4}{25}$
- $P[X_4 = 6] = \frac{1}{5}$
- $P[X_4 = 7] = \frac{4}{25}$
- $P[X_4 = 8] = \frac{3}{25}$
- $P[X_4 = 9] = \frac{2}{25}$
- $P[X_4 = 10] = \frac{1}{25}$

TEILAUFGABE 4.9.2 2 PUNKTE

Berechnen Sie

a) den Erwartungswert von X_1, X_2, X_3 und X_4

b) die Varianz von X_1, X_2, X_3 und X_4

LÖSUNG

a) Erwartungswert

1) $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[X_2] = \frac{1}{5} \cdot \sum i = 1^5 i = \frac{1}{5} 15 = 3$
2) $\mathrm{E}[X_3] = \mathrm{E}[X_1 - X_2] = \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[-X_2] = \mathrm{E}[X_1] - \mathrm{E}[X_2] = 3 - 3 = 0$
3) $\mathrm{E}[X_4] = \mathrm{E}[X_1 + X_2] = \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] = 3 + 3 = 6$

b) Varianz

1) $\mathrm{Var}[X_1] = \mathrm{Var}[X_2] = \mathrm{E}[X_1^2] - \mathrm{E}[X_1]^2 = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^{5} i^2 - 9 = \frac{55}{5} - 9 = 2$
2) $\mathrm{Var}[X_3] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[-X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + (-1)^2 \mathrm{Var}[X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] = 2 + 2 = 4$ (da X_1, X_2 unabhängig sind)
3) $\mathrm{Var}[X_4] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] = 2 + 2 = 4$ (da X_1, X_2 unabhängig sind)

|Digitalaufgaben|

AUFGABE 4.10 ZUFALLSZAHLENGENERATOR, 5 PUNKTE

Elektronische Werkzeuge liefern keine echten Zufallszahlen, sondern nur *Pseudo*-Zufallszahlen, welche sie mittels mathematischer Methoden generieren. Diese mathematischen Methoden benötigen alle einen sogenannten *Seed*, aus welchem sie die (Pseudo-)Zufallszahlen generieren.

Ihre Aufgabe: Zeigen Sie, dass die zufällig erzeugten Zahlen in Abhängigkeit vom Seed variieren, dass diese Unterschiede aber verschwinden, je mehr zufällige Zahlen erzeugt werden.

a) Schreiben Sie ein Programm, dass den Zufallszahlengenerator zuerst mit Ihrem Geburtsdatum (z.B. 01012000 für den 1.1.2000), dann mit einer anderen Zahl (z.B. einem anderem Team-Geburtsdatum) initialisiert.

b) Erzeugen Sie für beide Initalisierungen $n = 100, 10000, 1000000$ zufällige **Integer-Werte** (ganze Zahlen) zwischen 1 und 10.

c) Stellen Sie die relativen Häufigkeiten der in diesen 3 Versuchen erhaltenen Zufallszahlen für beide Initalisierungen jeweils in einem gemeinsamen Diagramm dar (insgesamt erstellen Sie also bitte 3 verschiedene Diagramme).

d) Zeigen Sie anhand dieser Darstellung, dass der Unterschied in der Verteilung der Zufallszahlen-Zahlen mit wachsendem n abnimmt.

Hinweise:

- Verwenden Sie eine Programmiersprache Ihrer Wahl und z.B. die Bibliotheken `java.util.Random` bzw. `Python random` und deren Methoden.
- Teamgröße: 3-5 (ein Team darf identische Lösungen abgeben, Namen der Teammitglieder bitte in der Lösung angeben)

LÖSUNG

Siehe Musterlösung in Moodle / gitlab