Übungsblatt 5 - mit Lösungen

Diskrete Verteilungen

Stochastik@AIN2

Prof. Dr. Barbara Staehle

Sommersemester 2022

HTWG Konstanz

|Einfache und mittelschwere Aufgaben|

Hinweis: Die Aufgaben lassen sich alle per Hand (eigenständige Überlegungen) lösen, schneller geht es aber, wenn Sie die vorkommenden Zufallsvariablen als binomial-, geometrisch oder poissonverteilt modellieren.

Aufgabe 5.1 3 Punkte

Ein 10-seitiger fairer Würfel (W10) wird 5 mal geworfen. Wir betrachten die Zufallsvariablen X = Anzahl der geworfenen Einsen.

a) Überlegen Sie sich, wie X verteilt ist. Geben Sie dann den Ereignisraum des Zufallsexperimentes (andeutungsweise), sowie den Wertebereich von X an.

b) Geben Sie die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an (konkret also für jeden Wert, den X annehmen kann, dessen Wahrscheinlichkeit).

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   - in 5 Würfen höchstens zwei Einsen zu haben
   - in 5 Würfen mindestens drei Einsen zu haben

d) Wie viele Einsen kann man bei 5 Würfen des W10 auf lange Sicht erwarten (Geben Sie den Erwartungswert an)?

Lösung

Vorüberlegung: X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{10}$: $X \sim Bin(5, \frac{1}{10})$.

a) $\Omega = \{(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,2),\ldots,(3,7,10,8,9),\ldots,(10,10,10,10,10)\}$
   Wertebereich: $T = \{0,1,2,3,4,5\}$.

b) Da $X \sim Bin(5, \frac{1}{10})$ gilt für $x \in W$, die Wahrscheinlichkeit genau x Einsen zu werfen

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{5}{x} (\frac{1}{10})^x (\frac{9}{10})^{5-x}$$

   Die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist daher

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.5905	0.3281	0.0729	0.0081	0.00045	0.00001

c)
   - $P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} P(X = x) = 0.5905 + 0.3281 + 0.0729 = 0.9914$
   - $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.9914 = 0.0086$

d) $E(X) = np = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$

AUFGABE 5.2 3 PUNKTE

Sie lesen in einer Zeitung, dass es am Gardasee im August durchschnittlich an 8 Tagen regnet. Sie möchten das Wetter am Gardasee im Jahr 2022 simulieren und nehmen an, dass jeder Tag des Augusts in Ihrer Simulation die gleiche Regenwahrscheinlichkeit hat (die Sie aus der Zeitungsaussage ableiten).

Betrachten Sie die Zufallsvariablen

- R: ist gleich 1, falls der 8.8.2022 am Gardasee ein Regentag ist, 0 sonst
- A: Anzahl der Tag im August 2022 , die am Gardasee verregnet sind
- W: Anzahl der Tage, die man am Gardasee ab dem 1.82022 bis zum ersten Regentag warten werden muss

a) Geben Sie an wie und mit welchen Parametern die Zufallsvariablen R, A, W jeweils verteilt sind.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es im August 2022 am Gardasee mehr als 3 Regentage geben?

c) Was ist (auf lange Sicht, beobachtet über mehrere Jahre) der Erwartungswert der Anzahl der Tage, die man ab dem 1. August auf Regen warten werden muss?

LÖSUNG

Vorüberlegung: Der August hat $n = 31$ Tage. Wahrscheinlichkeit eines Regentages im August 2022 am Gardasee: $p = \frac{8}{31} = 0.258$

a)
- R ist Bernoulli-verteilt: $R \sim Ber(p) = Ber(0.258)$
- A ist Binomial-verteilt: $A \sim Bin(n, p) = Bin(31, 0.258)$
- W ist geometrisch verteilt: $W \sim geom(p) = geom(0.258)$

b) $P(A > 3) = 1 - P(A \leq 3) = 1 - P(A = 0) - P(A = 1) - P(A = 2) - P(A = 3) = 1 - \binom{31}{0}p^0(1-p)^{31} - \binom{31}{1}p^1(1-p)^{30} - \binom{31}{2}p^2(1-p)^{29} - \binom{31}{3}p^3(1-p)^{28} = 1 - 0.0000958 - 0.00103 - 0.00539 - 0.018 = 0.975$

c) $E(W) = \frac{1}{p} = \frac{31}{8} = 3.875$
Anmerkung: die geometrische Verteilung ist *Gedächtnislos*. Das bedeutet, dass man nicht nur ab dem 1.8. im Mittel 3.875 Tage auf Regen wartet, sondern nach jedem beliebigen anderen Regentag.

AUFGABE 5.3 2 PUNKTE

Ein Software-Hersteller hat für seine Kunden eine Hotline eingerichtet. An Werktagen rufen zwischen 20.00 und 21.00 Uhr durchschnittlich 5 Kunden an. Man nimmt an, dass die Anzahl der Anrufe pro Stunde poissonverteilt ist. Die Hotline ist so besetzt, dass sie in dieser Zeit 4 Anrufe entgegennehmen kann.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 20 und 21 Uhr genau 3 Kunden anrufen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hotline überlastet ist?

LÖSUNG

Definiere die Zufallsvariable X: Anzahl der Hotline-Anrufe zwischen 20 und 21 Uhr.
Es gilt: $\lambda = 5$ (Anrufe pro Stunde) und $X \sim Po(\lambda) = Po(5)$

a) $P(X = 3) = \frac{5^3}{3!}e^{-5} = 0.1403$

b) Die Hotline ist überlastet wenn mehr als 4 Anrufe eintreffen:
$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) = 1 - e^{-5}(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!}) = 1 - e^{-5}(1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{625}{24}) = 0.559$

AUFGABE 5.4 2 PUNKTE

Ein Stoppschild wird von 10% aller Fahrzeuge ignoriert. Sie machen einen Ferienjob in der Verkehrsüberwachung und müssen Übertretungen beobachten und protokollieren.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 Fahrzeugen mehr als 2 das Stoppschild ignorieren?

b) Wie groß ist der Erwartungswert der ignorierenden Fahrzeuge bei 50 beobachteten Fahrzeugen?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie höchstens 5 Fahrzeuge beobachten müssen, um das erste Fahrzeug (in Ihrer Beobachtung) zu sehen, welches das Stoppschild ignoriert?

d) Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Fahrzeuge die Sie beobachten müssen, bis das erste Fahrzeug das Stoppschild ignoriert?

LÖSUNG

Vorüberlegung: X = Anzahl der Fahrzeuge die das Schild ignorieren ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0.1$: $X \sim Bin(50, 0.1)$. Y = Anzahl der Fahrzeuge die ich beobachten muss, bis das erste Fahrzeug das Schild ignoriert, ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = 0.1 : Y \sim geom(0.1)$

a) $P(X > 2) = 1-(P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2)) = 1-\binom{50}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^{49} - \binom{50}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^{48} = 1-0.0051-0.0286-0.07794 = 0.8883$

b) $\mathrm{E}(X) = np = 50 \cdot 0.1 = 5$

c) $P(Y \leq 5) = 1-(1-p)^5 = 1-0.9^5 = 0.4095$

d) $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$

AUFGABE 5.5 2 PUNKTE

Im Durchschnitt muss ein Kaffeeautomat 180 Anforderungen pro Stunde bedienen. Man nimmt an, dass die Anzahl der Anforderungen poissonverteilt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von drei Minuten mehr als 5 Anforderungen eintreten?

LÖSUNG

Vorüberlegung: X = Anzahl der Kaffees pro 3 Minuten ist poissonverteilt mit $\lambda = 9$: $X \sim Po(9)$. (180 pro Stunde entspricht 3 pro Minuten entspricht 9 pro 3 Minuten)

$$P(X > 5) = 1-\sum_{x=0}^{5} P(X = x) = 1-e^{-9} \sum_{x=0}^{5} \frac{9^x}{x!} = 0.8843$$

AUFGABE 5.6 3 PUNKTE

Geben Sie für die folgenden Szenarien jeweils an, wie die Zufallsvariablen, welche das Szenario beschreiben, verteilt sind und berechnen Sie deren Mittelwert und Varianz. Finden Sie weiterhin die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

a) Carol ist Bowlen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 schafft sie einen Strike (und legt alle Kegel auf einmal um).
Wenn sie 10 Versuche hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie weniger als 3 Strikes macht?

b) Im Mittel hält an einer bestimmten Bushaltestelle alle 15 Minuten ein Bus.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem 15 Minuten-Intervall kein Bus anhält?

c) 20% aller Müsli-Schachteln enthalten ein Gratis-Spielzeug.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie weniger als 4 Schachteln öffnen, bis Sie ein Spielzeug finden?

LÖSUNG

a)
- $S =$ Anzahl der Strikes in 10 Versuchen ist binomialverteilt mit $n = 10, p = 0.3 : S \sim Bin(10, 0.3)$
- $\mathrm{E}(S) = np = 10 \cdot 0.3 = 3$
- $\mathrm{Var}(S) = npq = 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 2.1$
- $P(S < 3) = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^i = \binom{10}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^8 = 0.028 + 0.121 + 0.234 = 0.383$

b)
- $B =$ Anzahl der Bus-Stopps in einem Intervall von 15 Minuten ist poissonverteilt mit $\lambda = 1 : B \sim Po(1)$
- $\mathrm{E}(B) = \lambda = 1$
- $\mathrm{Var}(B) = \lambda = 1$
- $P(B = 0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-1} \cdot 1 = 0.368$

c)
- $M =$ Anzahl der Müslischachteln die ich öffnen muss, bis ich ein Spielzeug finde ist geometrisch verteilt mit $p = 0.2 : M \sim geom(0.2)$
- $\mathrm{E}(M) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.2} = 5$
- $\mathrm{Var}(M) = \frac{0.8}{0.2^2} = 20$
- $P(M < 4) = 1 - q^3 = 1 - 0.8^3 = 0.488$

|Mittelschwere und schwere Aufgaben|

AUFGABE 5.7 2 PUNKTE

Sind die folgenden Zufallsvariablen binomialverteilt? Begründen Sie Ihre Meinung!

a) Ziehen von 5 Kugeln aus einer Urne mit 10 roten und 10 weißen Kugeln ohne Zurücklegen. X_1 ist die Anzahl der roten Kugeln.

b) Wiederholtes Würfeln mit einem W6. X_2 ist die Anzahl der Würfe bis zur ersten 6.

c) Zehnmaliges Würfeln mit einem W6. X_3 ist die Anzahl der gewürfelten 6n.

d) Jeder der 100 Mitarbeiter von Firma Müller ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 7% krank. X_4 ist die Anzahl der Erkrankten an einem bestimmten Tag.

e) 11 % der Bevölkerung Deutschlands haben Blutgruppe B. X_5 ist die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in Familie Schmidt.

f) 11 % der Bevölkerung Deutschlands haben Blutgruppe B. X_6 ist die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in einer zufällig ausgewählten Gruppe von 100 Deutschen.

LÖSUNG

a) Nein, da ohne Zurücklegen gezogen wird, ändert sich die Erfolgswahrscheinlichkeit bei jedem Zug (X_1 ist hypergeometrisch verteilt).

b) Nein, die Anzahl der Würfelwürfe liegt nicht fest (X_2 ist geometrisch verteilt).

c) Ja, $n = 10$ maliges Würfeln, Erfolgswahrscheinlichkeiten unabhängig, X_3 gibt die Anzahl der Erfolge an: $X_3 \sim Bin(10, 1/6)$.

d) Nein, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Mitarbeiter völlig unabhängig voneinander krank sind (Ansteckung erhöht die Erkrankungswahrscheinlichkeit).

e) Nein, da Blutgruppenzugehörigkeit vererbt wird. Innerhalb einer Familie sind die Erfolgswahrscheinlichkeiten also nicht unabhängig.

f) Ja, da da die Personen zufällig ausgewählt wurden, kann man davon ausgehen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeiten unabhängig sind: $X_6 \sim Bin(100, 0.11)$.

AUFGABE 5.8 3 PUNKTE

Über einen fehlerbehafteten Nachrichtenkanal werden Bits (0 bzw. 1) gesendet. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit (d.h., dass eine gesendete Null als eine Eins ankommt oder umgekehrt), ist $p = 0.3$.

Betrachte nun $X =$ Übertragungserfolg für ein Bit, $Y =$ Anzahl der Bitfehler in einer zufällig gesendeten Bitfolge der Länge 3, sowie $Z =$ Anzahl der Übertragungsversuche bis zum ersten **falsch** übertragenem Bit und $Z_2 =$ Anzahl der Übertragungsversuche bis zum ersten **korrekt** übertragenem Bit.

a) Geben Sie an, wie die Zufallsvariablen X, Y, Z und Z_2 verteilt sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Übertragung von 3 Bits (mindestens) ein Bitfehler auftritt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste falsch übertragene Bit erst im 3. Versuch auftritt?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste korrekt übertragene Bit erst im 3. Versuch auftritt?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 5 Versuche bis zum ersten Übertragungserfolg (korrekt übertragenes Bit) benötigt werden?

f) Was ist der Erwartungswert für die Anzahl der bis zum ersten Erfolg notwendigen Übertragungen?

g) Wie viele Bits müssen mindestens übertragen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% das erste Mal ein Bit **verfälscht** übertragen wurde?

h) Wie viele Bits müssen mindestens übertragen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% das erste Mal ein Bit **fehlerfrei** übertragen wurde?

LÖSUNG

a) X ist Bernoulli-verteilt mit $p = 0.7 : X \sim Ber(0.7)$
Y ist binomialverteilt mit $n = 3, p = 0.3 : Y \sim Bin(3, 0.3)$
Z ist geometrisch verteilt mit $p = 0.3 : Z \sim geom(0.3)$
Z_2 ist geometrisch verteilt mit $p_2 = 1 - p = 0.7 : Z_2 \sim geom(0.7)$

b) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^3 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.343 = 0.657$

c) $P(Z = 3) = p \cdot (1-p)^2 = 0.3 \cdot 0.7^2 = 0.147$

d) $P(Z_2 = 3) = p_2 \cdot (1-p_2)^2 = 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.063$

e) $P(Z_2 \leq 5) = 1 - (1-p_2)^5 = 0.9976$

f) $\mathrm{E}(Z_2) = \frac{1}{p_2} = 1.429$

g) $z_{0.9}$ ist der gesuchte Wert, für den gilt $P(Z \leq z_{0.9}) = 90\%$;
Berechnung: $F(z_{0.9}) = 0.9 \Rightarrow 1 - (1-p)^{z_{0.9}} = 0.9 \Rightarrow 0.7^{z_{0.9}} = 0.1 \Rightarrow z_{0.9} = \frac{\log(0.1)}{\log(0.7)} = 6.456$
Antwort: Wenn mindestens 7 Bits übertragen werden, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens ein Bit fehlerhaft übertragen worden.

h) $a_{0.9}$ ist der gesuchte Wert, für den gilt $P(Z_2 \leq a_{0.9}) = 90\%$;
Berechnung: $F_2(a_{0.9}) = 0.9 \Rightarrow 1 - (1-p_2)^{a_{0.9}} = 0.9 \Rightarrow 0.3^{a_{0.9}} = 0.1 \Rightarrow a_{0.9} = \frac{\log(0.1)}{\log(0.3)} = 1.912$
Antwort: Wenn mindestens 2 Bits übertragen wird, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens ein Bit fehlerfrei übertragen worden.

AUFGABE 5.9

Emil sitzt in der HTWG-Strandbar und beobachtet die vorbeifahrenden Boote.
Annahme: Emil beobachtet immer nur ein Boot auf einmal!

TEILAUFGABE 5.9.1 4 PUNKTE

Ein von Emil beobachtetes Boot ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.25$ ein Segelboot.
Modellieren Sie die Beobachtungen von Emil mit Hilfe der Zufallsvariablen

- X: Anzahl der Boote die Emil beobachten muss, bis er das erste Segelboot sieht
- Y: Anzahl der Segelboote innerhalb einer Serie von 10 Booten

a) Geben Sie an, wie die Zufallsvariablen X und Y verteilt sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 10 von Emil beobachteten Booten mindestens zwei Segelboote sind?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst das 5. von Emil beobachtete Boot das erste von ihm beobachtete Segelboot ist?

d) Wie viele Boote muss Emil mindestens beobachten, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens ein Segelboot dabei war?

LÖSUNG

a) X ist geometrisch verteilt mit $p = 0.25 : X \sim geom(0.25)$
Y ist binomialverteilt mit $n = 10, p = 0.25 : Y \sim Bin(10, 0.25)$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1}) = 1 - (\binom{10}{0} \cdot 0.25^0 \cdot (0.75)^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.25^1 \cdot (0.75)^9) = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.0563 - 10 \cdot 0.25 \cdot 0.0750 = 0.75597$

c) $P(Y = 5) = p \cdot (1-p)^4 = 0.25 \cdot 0.75^4 = 0.0791$

d) $y_{0.9}$ ist der gesuchte Wert, für den gilt $P(Y \leq y_{0.9}) = 90\%$;
Berechnung: $F(z_{0.9}) = 0.9 \Rightarrow 1 - (1-p)^{z_{0.9}} = 0.9 \Rightarrow 0.75^{y_{0.9}} = 0.1 \Rightarrow y_{0.9} = \frac{\log(0.1)}{\log(0.75)} = 8.004$
Antwort: Wenn Emil mindestens 9 Boote beobachtet hat, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens ein Segelboot dabei gewesen.

TEILAUFGABE 5.9.2 3 PUNKTE

Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Motorboote M, die Emil pro Stunde beobachtet, poissonverteilt mit Rate $\lambda_M = 5$ ist. Nehmen Sie weiterhin an, dass die Anzahl Ruderboote R, die Emil pro Stunde beobachtet, poissonverteilt mit Rate $\lambda_R = 10$ ist.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von M.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet Emil innerhalb von einer Stunde genau 10 Ruderboote?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet Emil innerhalb einer Stunde weniger als 2 Motorboote?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet Emil innerhalb einer Stunde mindestens 2 Boote, die entweder Motor- oder Ruderboot sein können?

LÖSUNG

a) $\mathrm{E}(M) = \mathrm{Var}(M) = 5$

b) $P(R = 10) = \frac{\lambda_R^{10}}{10!} e^{-\lambda_R} = \frac{10^{10}}{10!} e^{-10} = 0.125$

c) $P(M < 2) = \sum_{x=0}^{1} P(M = x) = e^{-\lambda_M} \sum_{x=0}^{1} \frac{\lambda_M^x}{x!} = e^{-5} \sum_{x=0}^{1} \frac{5^x}{x!} = e^{-5}(1+5) = 0.0404$

d) $M + R$ ist poissonverteilt mit Rate $\lambda_M + \lambda_R = 15$. Daher kann man rechnen
$P(M + R \geq 2) = 1 - P(M + R \leq 1) = 1 - (e^{-(\lambda_M + \lambda_R)} \sum_{x=0}^{1} \frac{(\lambda_M + \lambda_R)^x}{x!}) = 1 - (e^{-15} \sum_{x=0}^{1} \frac{15^x}{x!}) = 1 - (e^{-15}(1 + 15)) = 0.999995$

AUFGABE 5.10 JOBSUCHE, 2 PUNKTE

Um nach Ihrem Studium einen Job zu finden, nutzen Sie verschiedene Möglichkeiten.

- Auf ungeheuer.de finden Sie im Mittel 3.5 passende Stellen pro Woche. Die Anzahl der gefundenen Stellen pro Woche sei Zufallsvariable Z_1.
- Auf trittstein.de finden Sie täglich mit 15% Wahrscheinlichkeit eine passende Stelle. Die Wahrscheinlichkeit einen Job an einem bestimmten Tag zu finden jeweils unabhängig von den anderen Tagen.
  - Die Anzahl der Tage, die Sie suchen müssen, bis Sie eine passende Stelle gefunden haben sei Zufallsvariable Z_2.
  - Die Anzahl der Stellen, die Sie nach 20 Tagen gefunden haben, sei Zufallsvariable Z_3.

a) Geben Sie an, wie und mit welchen Parametern die Zufallsvariablen Z_1, Z_2, Z_3 verteilt sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie auf ungeheuer.de mindestens einen Job in einer Woche finden?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie auf trittstein.de nach höchstens 3 Tagen eine Stelle finden?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie auf trittstein.de nach 20 Tagen genau 20 Stellen finden?

LÖSUNG

a)
- $Z_1 \sim Po(3.5)$
- $Z_2 \sim geom(0.15)$
- $Z_3 \sim Bin(20, 0.15)$

b) $P(Z_1 \geq 1) = 1 - P(Z_1 = 0) = 1 - \frac{3.5^0}{0!} e^{-3.5} = 1 - e^{-3.5} = 1 - 0.0302 = 0.9698$

c) $P(Z_2 \leq 3) = 1 - (1 - 0.15)^3 = 1 - 0.6141 = 0.3859$

d) $P(Z_3 = 20) = \binom{20}{20} \cdot 0.15^{20} \cdot (0.85)^0 = 3.325 \times 10^{-17}$

AUFGABE 5.11 DAS VIRUS TANZT MIT, 5 PUNKTE

Am 6.12.2021 weißt der Landkreis Konstanz eine 7-Tage Inzidenz (= Neuinfektionen pro 100000 Einwohner gemittelt über die letzten 7 Tage)von grob 500 auf (Quelle: https://www.corona-in-zahlen.de). Grob vereinfacht kann man also annehmen, dass eine zufällig ausgewählte Person aus dem Landkreis Konstanz mit einer Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0.005$ mit dem Corona-Virus infiziert ist. Als weitere Vereinfachung vernachlässigen wir Effekte von Impfung oder Immunität durch überstandene Erkrankung, so dass diese gleiche Wahrscheinlichkeit für alle gilt.

Wir betrachten den Fall, dass $N = 1000$ Personen zusammen in einem Club tanzen und zwei Szenarien:

- **Szenario 1**: Es gibt keine Zugangskontrollen, jede Person die will, darf in den Club. Es ist also jede Person mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0.005$ mit dem Corona-Virus infiziert.
- **Szenario 2**: Nur Personen, die ein Zertifikat über einen negativen Schnelltest vorweisen können, dürfen in den Club. Nehmen wir an, für alle Personen gilt die gleiche Prävalenz p_1 und alle werden mit dem gleichen Schnelltest getestet, der eine Sensitivität von 85% und eine Spezifität von 99% hat. Personen mit einem positiven Testergebnis bleiben zu Hause. Es sind also nur noch die Personen, die mit einem falsch-negativen Testergebnis den Club besuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_2 \leq p_1$ mit dem Corona-Virus infiziert.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_2, mit der eine im Club tanzende Person in Szenario 2 mit dem Virus infiziert ist.

b) Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X_1 und X_2 an (wie und mit welchen Parametern), welche die Anzahl der infizierten Club-Besucher beschreibt. X_1 beschreibt die Anzahl für **Szenario 1**, X_2 beschreibt die Anzahl für **Szenario 2**.

c) Geben Sie die Erwartungswerte der Zufallsvariablen X_1 und X_2 an.

d) Geben Sie für beide Szenarien die Wahrscheinlichkeiten an, dass keine im Club tanzende Person mit dem Corona-Virus infiziert ist.

e) Geben Sie für beide Szenarien den Wert an, unter dem die Anzahl der infizierten Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% liegt.

LÖSUNG

a) Verwende Ereignisse I: Person ist infiziert und P: Schnelltestergebniss ist positiv. Damit

- $P(I) = p_1 = 0.005$ (Prävalenz)
- $P(P|C) = 0.85$ (Sensitivität) $\Rightarrow P(\overline{P}|C) = 0.15$) (Gegenwahrscheinlichkeit)
- $p_2 = P(\overline{P} \cap C) = P(\overline{P}|C) \cdot P(C) = 0.15 \cdot 0.005 = 0.00075$ (Wahrscheinlichkeit für einen falsch negativen Test)

b) $X_1 \sim \text{Bin}(N, p_1) = \text{Bin}(1000, 0.005)$
$X_2 \sim \text{Bin}(N, p_2) = \text{Bin}(1000, 0.00075)$

c) $\text{E}[X_1] = N \cdot p_1 = 1000 \cdot 0.005 = 5$
$\text{E}[X_2] = N \cdot p_2 = 1000 \cdot 0.00075 = 0.75$

d) $P(X_1 = 0) = (1 - p_1)^N = 0.995^{1000} = 0.0067$
$P(X_2 = 0) = (1 - p_2)^N = 0.99925^{1000} = 0.4722$

e) Gesucht ist jeweils das 99% - Quantil: Berechnung mit MATLAB
Szenario 1: $x_{0.99} = \text{binoinv}(0.99, N, p_1) = \text{binoinv}(0.99, 1000, 0.005) = 11.$
Szenario 2: $x_{0.99} = \text{binoinv}(0.99, N, p_2) = \text{binoinv}(0.99, 1000, 0.00075) = 3.$

|Aufgaben aus [ZwKo99] |

Anmerkung: [ZwKo99] stammt noch aus der Zeit, in der man viele Aufgaben nur mittels Nachschlagen in Tabellen lösen konnte (welche in diesem Buch enthalten sind). Daher wirken manche der Rechenwege in den Musterlösungen etwas merkwürdig.

AUFGABE 5.12 1 PUNKT

A biased coin has a probability of heads of 0.75. What is the probability of obtaining 5 or more heads in 8 flips?

LÖSUNG

- Sei X die ZV, welche die Anzahl der Heads in der Reihe der Münzwürfe angibt. Dann gilt $X \sim Bin(8, 0.75)$.
- $P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{8} P(X = k) = 0.8862$
- MATLAB:sum(binopdf([5:8],8,0.75))

AUFGABE 5.13 2 PUNKTE

The probability a randomly selected home in Columbia County will lose power during a summer storm is 0.25. Suppose 14 homes in this county are selected at random. What is the probability exactly (a) 4 homes will lose power, (b) more than 6 will lose power, and (c) between 2 and 7 (inclusive) will lose power

LÖSUNG

- Let X be the number of homes (out of 14) that will lose power. $X \sim Bin(14, 0.25)$.
- (a) $P(X = 4) = 0.2202$
- (b) $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0.9617 = 0.0383$
- (c) $P(2 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 1) = 0.9897 - 0.1010 = 0.8887$
- MATLAB: Nutzung einer Verteilung (X) als Objekt:
  - X = makedist('Binomial','N',14,'p',0.25)
  - a = X.pdf(4)
  - b = 1 - X.cdf(6)
  - c = sum(X.pdf(2:7))

AUFGABE 5.14 1 PUNKT

When flipping a biased coin (so that heads occur only 30% of the time), what is the probability that the first head occurs on the 10th flip?

LÖSUNG

- Die Anzahl der Münzwürfe, die bis zum ersten Versuch durchgeführt werden müssen, ist eine geometrisch verteilte Zufallsvariable: $X \sim geom(0.3)$
- $P(X = 10) = 0.3 \cdot 0.7^9 = 0.0121$
- MATLAB: geopdf(9,0.3) (Da MATLAB die Anzahl der **Fehlschläge** vor dem Erfolg als geometrisch verteilt interpretiert)

AUFGABE 5.15 2 PUNKTE

The probability a randomly selected customer has the correct change when making a purchase at the local donut shop is 0.1. (a) What is the probability the first person to have correct change will be the fifth customer? (b) What is the probability the first person with correct change will be at least the sixth customer?

LÖSUNG

- Let X be the number of the first customer with correct change: $X \sim geom(0.1)$
- (a) $P(X = 5) = 0.0656$ (MATLAB: geopdf(4,0.1))
- (b) $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.4095 = 0.5905$ (MATLAB: 1 - geocdf(4,0.1))

AUFGABE 5.16 2 PUNKTE

The number of black bear sightings in Northeastern Pennsylvania during a given week has a Poisson distribution with $\lambda = 3$. For a randomly selected week, what is the probability of (a) exactly 2 sightings, (b) more than 5 sightings, (c) between 4 and 7 sightings (inclusive)?

LÖSUNG

- Let X be the random variable representing the number of black bear sightings during any given week; X is Poisson with $\lambda = 3$: $X \sim Po(3)$
- (a) $P(X = 2) = 0.224$
- (b) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.815 = 0.185$
- (c)$P(4 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3) = 0.988 - 0.647 = 0.341$
- MATLAB: Nutzung einer Verteilung (X) als Objekt:
  - X = makedist('Poisson','lambda',3)
  - a = X.pdf(2)
  - b = 1 - X.cdf(4)
  - c = sum(X.pdf(4:7))

Quelle: [ZwKo99] Zwillinger und Kokoska: "CRC standard probability and statistics tables and formulae", Chapman & Hall/CRC Press, 1999.