Übungsblatt 3 - mit Lösungen

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Stochastik@AIN2

Prof. Dr. Barbara Staehle

Wintersemester 2021/2022

HTWG Konstanz

|Einfache und mittelschwere Aufgaben|

Aufgabe 3.1 Klausurergebnisse

Teilaufgabe 3.1.1 1 Punkt

Wir betrachten eine Klausur zur Stochastik. Die Verteilung der Studierenden auf die Noten 1, 2, 3, 4 und 5 beträgt 8, 16, 32, 24 bzw. 20 %.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Studierender mindestens die Note 2 erzielt hat?

Lösung

Gegeben sind die Ereignisse A und B:

- A : Erzielen der Note 1, $\quad P(A) = 0.08$
- B : Erzielen der Note 2, $\quad P(B) = 0.16$

A und B sind disjunkt, da ein Studierender nur genau eine Note haben kann. Damit gilt:

$$P(\text{mindestens Note 2}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.08 + 0.16 = 0.24 = 24\%.$$

Teilaufgabe 3.1.2 2 Punkte

Im letzten Semester haben alle Studierenden des 2. Semesters sowohl an der Klausur Stochastik als auch an der Klausur Mathematik 2 teilgenommen. In der nachstehenden Vierfeldertafel sind die Ereignisse S (Stochastik bestanden), M (Mathematik 2 bestanden), $\overline{S}$ (Stochastik nicht bestanden) und $\overline{M}$ (Mathematik 2 nicht bestanden) sowie die möglichen Kombinationen aus den Ereignissen mit ihren relativen Häufigkeiten in % angegeben.

	S	$\overline{S}$	Σ
M	62	13	75
$\overline{M}$	10	15	25
Σ	72	28	100

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Studierender aus dem 2. Semester

a) die Stochastik Klausur bestanden hat, wenn er die Mathematik 2 Klausur bestanden hat?

b) die Mathematik 2 Klausur bestanden hat, wenn er die Stochastik Klausur bestanden hat?

c) die Mathematik 2 Klausur nicht bestanden hat, wenn er die Stochastik Klausur bestanden hat?

LÖSUNG

Aus der Tabelle liest man folgende Wahrscheinlichkeiten ab:

- $P(S) = 0.72, P(M) = 0.75$
- $P(S \cap M) = 0.62$
- $P(S \cap \overline{M}) = 0.1$

Damit berechnen sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als

a) $P(S|M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{0.62}{0.75} = 0.8267 = 82.67\%$

b) $P(M|S) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0.62}{0.72} = 0.8611 = 86.11\%$

c) $P(\overline{M}|S) = \frac{P(S \cap \overline{M})}{P(S)} = \frac{0.1}{0.72} = 0.1388 = 13.88\%$

AUFGABE 3.2 GLÜHBIRNEN

TEILAUFGABE 3.2.1 2 PUNKTE

Alice sucht in zwei großen, verschiedenen, voneinander unabhängigen Kisten nach einer Lampe mit genau 10 Watt. Die eine Kiste enthält LED-Lampen, die andere Energiesparlampen. Alice weiß, dass die Wahrscheinlichkeit, eine LED-Lampe mit 10 Watt zu finden bei $P(L) = 20\%$ liegt, die Wahrscheinlichkeiten dafür, eine Energiesparlampe mit 10 Watt zu finden bei $P(E) = 40\%$.

Alice zieht aus jeder Kiste genau eine zufällig ausgewählte Lampe (also insgesamt eine LED-Lampe und eine Energiesparlampe). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens eine Lampe (egal welcher Bauart) mit genau 10 Watt gefunden hat?

Hinweise:

- Sie können annehmen, dass das die Watt-Zahlen der Energiesparlampen und LEDs voneinander unabhängig sind.
- Führen Sie alle aus dem Text ableitbaren Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten explizit auf, bevor Sie beginnen, die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

LÖSUNG

Gegeben sind die Ereignisse L und E:

- L : LED hat 10 Watt, $\quad P(L) = 0.2$
- E : Energiesparlampe hat 10 Watt, $\quad P(E) = 0.4$

$P(\text{mindestens eine Lampe mit 10 Watt}) = P(L \cup E) = P(L) + P(E) - P(L \cap E)$

Da L und E unabhängig sind (Konstruktion des Szenarios), gilt $P(L \cap E) = P(L) \cdot P(E) = 0.08$

Damit: $P(\text{mindestens eine Lampe mit 10 Watt}) = 0.2 + 0.4 - 0.08 = 0.52 = 52\%$

Teilaufgabe 3.2.2 2 Punkte

Bob hat auf seinem Schreibtische einen Karton, in dem sich 5 Glühbirnen, darunter 2 defekte befinden, stehen. Bob wählt nun eine Glühbirne nach der anderen zufällig aus, prüft diese auf Funktionalität, protokolliert das Ergebnis und legt die gezogene bei Seite. Er wiederholt den Prozess, bis die beiden defekten Glühbirnen gefunden sind.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Bob im ersten Versuch eine defekte Glühbirne?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Bob im zweiten Versuch eine defekte Glühbirne? (Verwenden Sie eine Fallunterscheidung!)

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Bob erst nach der dritten Ziehung die beiden defekten Glühbirnen gefunden?
Nutzen Sie einen Ereignisbaum, um das Experiment zu modellieren!

Lösung

a) $P(D_1) = \frac{2}{5}$

b) $P(D_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{falls Bob im ersten Versuch schon eine kaputte Birne gezogen hat} \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & \text{falls Bob im ersten Versuch keine kaputte Birne gezogen hat} \end{cases}$

c) Wenn Bob erst nach der 3. Ziehung die beiden defekten Glühbirnen gefunden haben soll, gib es hierfür zwei mögliche Versuchsausgänge:

Der Karton enthält nach der 1. Ziehung 4 Glühbirnen, nach der 2. Ziehung nur noch 3 Glühbirnen. Aus dem Ereignisbaum in Bild A-23 folgt dann (d: defekt; $\overline{d}$: einwandfrei):

$$P = P(d\,\overline{d}\,d) + P(\overline{d}\,d\,d) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

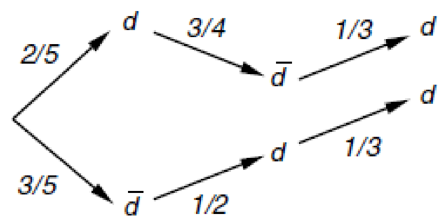


Bild A-23

Abbildung 1: Quelle: Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3

Aufgabe 3.3 Kreditkarten, 2 Punkte

Eine Bank hat herausgefunden, dass sich Ihre Kundschaft in die Kategorien Chaoten, Normalos und Streber unterteilen lässt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Angehöriger jeder Gruppe seine Kreditkarte verliert sind wie folgt:

- Streber: Die Wahrscheinlichkeit des Kredikartenverlusts beträgt 1.5%
- Normalos: Die Wahrscheinlichkeit des Kredikartenverlusts beträgt 3%
- Chaoten: Die Wahrscheinlichkeit des Kredikartenverlusts beträgt 5.5%

Die Bank weiß weiter, dass 20 % der Kunden Streber sind, 50 % der Kunden sind Normalos.

a) Modellieren Sie das Szenario mithilfe der Ereignisse

- V: Ein Kunde verliert die Kreditkarte
- S, T, C: Ein Kunde gehört zur Gruppe der Streber, Normalos oder Chaoten.

und leiten Sie deren entsprechenden Wahrscheinlichkeiten aus dem Text ab.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde (egal aus welcher Gruppe) seine Kreditkarte verliert?

c) Ein Kunde meldet den Verlust seiner Kreditkarte. Geben Sie (unter dieser Bedingung) die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Kunde

1) ein Streber
2) ein Normalo
3) ein Chaot

ist.

LÖSUNG

a)
- ablesen: $P(S) = 0.2, P(N) = 0.5$
- alle Kunden gehören einer der Kategorien an, daher $P(C) = 1 - P(N) - P(S) = 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3$
- ablesen: $P(V|S) = 0.015, P(V|N) = 0.03, P(V|C) = 0.055$

b) Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(V) = P(V|S) \cdot P(S) + P(V|N) \cdot P(N) + P(V|C) \cdot P(C) = 0.015 \cdot 0.2 + 0.03 \cdot 0.5 + 0.055 \cdot 0.3 = 0.0345$$

c) 1) Formel von Bayes:

$$P(S|V) = \frac{P(V|S) \cdot P(S)}{P(V)} = \frac{0.2 \cdot 0.015}{0.0345} = 0.087$$

2) Formel von Bayes:

$$P(N|V) = \frac{P(V|N) \cdot P(N)}{P(V)} = \frac{0.5 \cdot 0.03}{0.0345} = 0.435$$

3) Formel von Bayes:

$$P(N|C) = \frac{P(V|C) \cdot P(C)}{P(V)} = \frac{0.3 \cdot 0.055}{0.0345} = 0.4783$$

Ein Kunde der seine Kredikarte verloren hat, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 8.7% ein Streber, mit einer Wahrscheinlichkeit von 43.5% ein Normalo und mit einer Wahrscheinlichkeit von 47.83% ein Chaot.

AUFGABE 3.4 ELEKTRONIKVERSAND, 3 PUNKTE

Bei einem Elektronik-Versand können Artikel aus den drei Abteilungen Audio, Kommunikationstechnik und PC-Zubehör bestellt werden. Von den bestellten Artikeln entfallen 40 die Abteilung Audio, 35 % auf Kommunikationstechnik und 25 % auf PC-Zubehör. Sind Kunden mit einem Artikel unzufrieden, so können sie diesen bei Vorliegen bestimmter Gründe zurückschicken.
Der Anteil der Retouren beträgt bei Audio 3 %, bei Kommunikationstechnik 5 % und bei PC-Zubehör 1 %.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Artikel an den Elektronik-Versand zurückgeschickt wird?

Hinweis: Geben Sie zuerst die im Text genannten Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten an. Arbeiten Sie ggf. mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum.

LÖSUNG

Verwende Ereignisse:

- A, K, P Artikel stammt aus Abteilung Audio, Kommunikationstechnik, PC-Zubehör
- Z : Artikel wird zurückgeschickt

Folgende Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

- $P(A) = 0.4, \quad P(Z|A) = 0.03$
- $P(K) = 0.35, \quad P(Z|K) = 0.05$
- $P(P) = 0.25, \quad P(Z|P) = 0.01$

Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet sich $P(Z)$ als

$$P(Z) = P(A) \cdot P(Z|A) + P(K) \cdot P(Z|K) + P(P) \cdot P(Z|P)$$
$$= 0.4 \cdot 0.03 + 0.35 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.01 = 0.032 = 3.2\%$$

|Mittelschwere und schwere Aufgaben|

Aufgabe 3.5 Im Restaurant, 2 Punkte

In einem Restaurant bestellen gewöhnlich 40% der Gäste keine Vorspeise und 30% der Gäste keinen Nachtisch. 15% der Gäste nehmen weder Vorspeise noch Nachtisch.

Verwenden Sie geeignete Ereignisse, um alle aus dem Text ableitbaren Wahrscheinlichkeiten anzugeben.

Beantworten Sie dann folgende Fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ein Gast keine Nachspeise nimmt, unter der Bedingung, dass er auch keine Vorspeise genommen hat?

b) ein Gast, der eine Vorspeise gewählt hat, auch noch einen Nachtisch bestellt?

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, zum Modellieren der gegebenen Wahrscheinlichkeiten eine **Vierfeldertafel** zu verwenden.

Lösung

Verwende Ereignisse

- V : ein Gast bestellt eine Vorspeise
- N : ein Gast bestellt einen Nachtisch

Gegebene Wahrscheinlichkeiten:

- $P(\overline{V}) = 0.4 \Rightarrow P(V) = 1 - P(\overline{V}) = 0.6$
- $P(\overline{N}) = 0.3 \Rightarrow P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 0.7$
- $P(\overline{V} \cap \overline{N}) = P(\overline{V \cup N}) = 0.15 \Rightarrow P(V \cup N) = 1 - P(\overline{V \cup N}) = 0.85$

Berechne gesuchte Wahrscheinlichkeiten aus deren Definition und den gegebenen Wahrscheinlichkeiten:

a) $P(\overline{N} \mid \overline{V}) = \frac{\overline{N} \cap \overline{V}}{\overline{V}} = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$

b)
- Ansatz: $P(N \mid V) = \frac{P(N \cap V)}{P(V)}$
- Nebenrechnung: $\Rightarrow$ $$\begin{aligned} P(V \cup N) &= P(V) + P(N) - P(V \cap N) \\ P(V \cap N) &= P(V) + P(N) - P(V \cup N) \\ &= 0.6 + 0.7 - 0.85 = 0.45 \end{aligned}$$
- Ergebnis: $P(N \mid V) = \frac{P(N \cap V)}{P(V)} = \frac{0.45}{0.6} = 0.75$

Aufgabe 3.6 Eine spezielle Urne, 2 Punkte

In einer Urne befinden sich 4 weiße (W) und 6 schwarze (S) Kugeln. Eine Kugel wird zufällig entnommen und dafür eine der anderen Farbe wieder hineingelegt. Dann wird der Urne eine weitere Kugel entnommen.

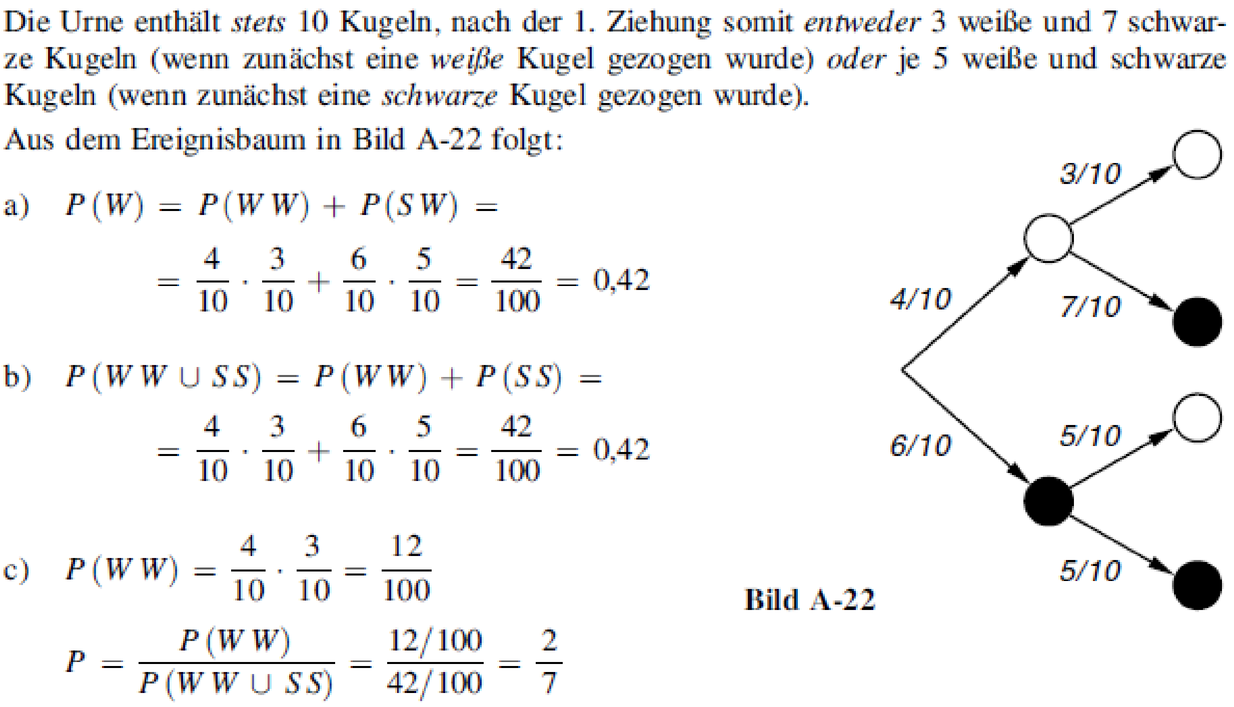
Bestimmen Sie mit Hilfe des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die zuletzt gezogene Kugel weiß ist

b) man bei beiden Ziehungen jeweils Kugeln gleicher Farbe erhält

c) beide Kugeln weiß sind, wenn bekannt ist, dass die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben

LÖSUNG



Die Urne enthält *stets* 10 Kugeln, nach der 1. Ziehung somit *entweder* 3 weiße und 7 schwarze Kugeln (wenn zunächst eine *weiße* Kugel gezogen wurde) *oder* je 5 weiße und schwarze Kugeln (wenn zunächst eine *schwarze* Kugel gezogen wurde).
Aus dem Ereignisbaum in Bild A-22 folgt:

a) $P(W) = P(WW) + P(SW) =$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

b) $P(WW \cup SS) = P(WW) + P(SS) =$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

c) $P(WW) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100}$

$$P = \frac{P(WW)}{P(WW \cup SS)} = \frac{12/100}{42/100} = \frac{2}{7}$$

Bild A-22

Abbildung 2: Quelle: Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3

AUFGABE 3.7 IM THEATER

TEILAUFGABE 3.7.1 2 PUNKTE

Zehn befreundete heterosexuelle binäre Paare (jeweils Mann & Frau) setzten sich in eine Reihe, die 20 Plätze umfasst. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es, wenn

a) sich die Personen beliebig setzen können (N_1),

b) die Partner jeweils nebeneinander sitzen (N_2),

c) die Frauen alle nebeneinander sitzen (N_3)? (**Achtung: schwer!**)

LÖSUNG

a) $N_1 = 20! = 2.43 \times 10^{18}$

b) $N_2 = 10! \cdot 2^{10} = 3.716 \times 10^9$
10! für die Anordnungen der Paare, 2^{10} für die Möglichkeiten in der die Paare jeweils noch sitzen

c) $N_3 = 11 \cdot 10! \cdot 10! = 1.45 \times 10^{14}$
11 für die Möglichkeiten wo die Frauen nebeneinander sitzen können, jeweils 10! für die Möglichkeiten wie die Frauen bzw. die Männer auf den verbleibenden Plätzen angeordnet sind.

TEILAUFGABE 3.7.2 3 PUNKTE

Die Vorstellung „Der Besuch der alten Dame“ wird von Erwachsenen und Jugendlichen besucht. 60% der Erwachsenen und 20% der Jugendlichen kaufen ein Programmheft.

a) Wie groß ist der Anteil der Jugendlichen unter den Besuchern, wenn 40% aller Besucher ein Programmheft kaufen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Käufer eine Programmheftes ein Jugendlicher?

Hinweis: Verwenden Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum.

LÖSUNG

Gegeben sind die Ereignisse E, J und P:

- J : Besucher ist Jugendlicher, $P(J) = x$
- E : Besucher ist Erwachsener, $P(E) = 1 - x$
- P : Besucher kauft Programmheft, $P(P) = 0.4$
- $P(P \mid J) = 0.2$
- $P(P \mid E) = 0.6$

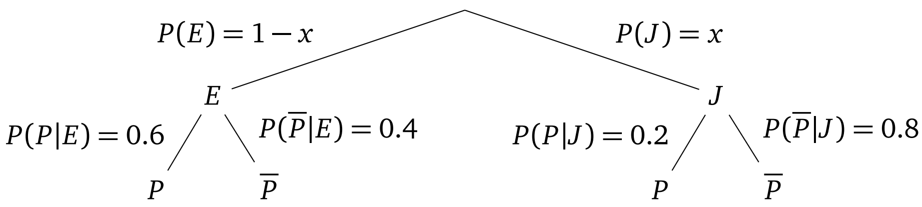


Abbildung 3: Ableitungsbaum für Szenario "Programmheft“

a) Gesucht: $P(J) = x$
Verwende Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und löse nach x auf:

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P|J)P(J) + P(P|E)P(E) \\ 0.4 &= 0.2x + 0.6(1-x) \\ 0.4 &= 0.2x + 0.6 - 0.6x \\ 0.4x &= 0.2 \\ x &= 0.5 \end{aligned}$$

50% der Besucher sind Jugendliche.

b) Gesucht: $P(J|P)$
Nach Definition / Formel von Bayes
$P(J|P) = \frac{P(J \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|J)P(J)}{P(P)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.4} = \frac{1}{4} = 0.25$

Aufgabe 3.8 An der Grenze, 4 Punkte

Wir betrachten eine fiktive Grenze zur Schweiz, die nur von Autos aus Großbritannien, Frankreich und Deutschland passiert wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein britisches Auto über die Grenze fährt, ist 10%, die Wahrscheinlichkeit, dass ein deutsches Auto über die Grenze fährt, ist 70%.

Die Zöllner an dieser Grenze wissen, dass ein britisches Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% Schwarzgeld schmuggelt, ein deutsches Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% und ein französisches Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von 30%.

Hinweis: Verwenden Sie zur Modellierung die folgenden Ereignisse (und die jeweiligen Gegenereignisse):

- GB, F, D : ein Auto kommt aus Großbritannien, Frankreich, Deutschland
- S : ein Auto schmuggelt Schwarzgeld.

a) Modellieren Sie das beschriebene Szenario z.B. durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum oder mit Hilfe einer Stichpunktliste. Geben Sie alle aus dem Text ableitbaren Wahrscheinlichkeiten der beschriebenen Ereignisse an.

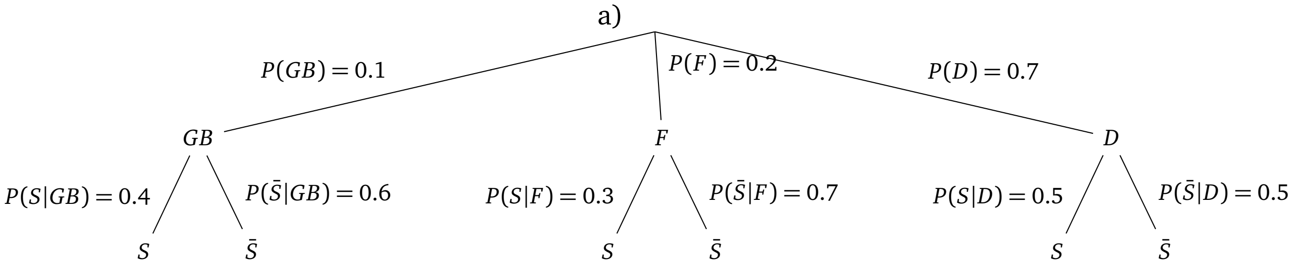
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Auto (beliebiger Nationalität) Schwarzgeld schmuggelt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto das kein Schwarzgeld schmuggelt, aus Groß-Britannien ist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto das Schwarzgeld schmuggelt, aus Deutschland ist?

Lösung

a)



b) $P(S) = P(S|GB)P(GB) + P(S|F)P(F) + P(S|D)P(D) = 0.1 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.5 = 0.04 + 0.06 + 0.35 = 0.45$ (totale Wahrscheinlichkeit)

c) $P(D|S) = \frac{P(S \cap D)}{P(S)} = \frac{P(S|D)P(D)}{P(S)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.45} = 0.778$ (Definition)

d) $P(GB|\bar{S}) = \frac{P(\bar{S}|GB)P(GB)}{P(\bar{S}|GB)P(GB) + P(\bar{S}|F)P(F) + P(\bar{S}|D)P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.1}{0.6 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.7} = 0.109$ (Bayes)
alternativ: $P(GB|\bar{S}) = \frac{P(GB \cap \bar{S}}{\bar{S}} = \frac{P(GB|\bar{S})P(GB)}{1 - P(S)} = \frac{0.1 \cdot 0.6}{1 - 0.45} = \frac{0.06}{0.55} = 0.109$ (Definition, Gegenereignis)

Aufgabe 3.9 Qualitätskontrolle I, 3 Punkte

Eine Maschine zur Herstellung von USB-Sticks produziert nicht fehlerfrei. Es werden daher drei Qualitätskontrollen hintereinander geschaltet, um die fehlerhaften Sticks auszusondern. Bei der ersten Kontrolle werden 90 %, bei der zweiten Kontrolle werden 75 % und bei der dritten Kontrolle werden 50 % der jeweils noch vorhandenen defekten USB-Sticks entdeckt und entfernt.

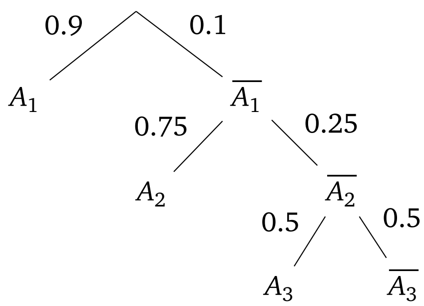
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhafter USB-Stick jeweils bei der ersten, zweiten oder dritten Kontrolle entdeckt wird?
Hinweis: Verwenden Sie bedingte Wahrscheinlichkeiten und einen mehrstufigen Wahrscheinlichkeitsbaum zur Modellierung des Szenarios.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhafter USB-Stick die Fabrik verlässt, ohne dass er bei einer Kontrolle entdeckt wird?

Lösung

a) Ereignis A_i: Ein fehlerhafter USB-Stick wird im Schritt i ausgesondert ($i \in \{1,2,3\}$).
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten siehe Baum

- $P(A_1) = 0.9$
- $P(A_2) = 0.1 \cdot 0.75 = 0.075$
- $P(A_3) = 0.1 \cdot 0.25 \cdot 0.5 = 0.0125$



b)
- Idee 1: „Stick wird in Kontrolle 1,2 und 3 nicht entdeckt“ und die Wahrscheinlichkeiten sind alle unabhängig :

$$P(K) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0.1 \cdot 0.25 \cdot 0.5 = 0.0125$$

- Idee 2: Gegenwahrscheinlichkeit zu „Stick wird in Kontrolle 1, 2 oder 3 entdeckt“:

$$P(K) = 1\breve{}(P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)) = 1 - (0.9 + 0.075 + 0.0.0125) = 0.0125$$

AUFGABE 3.10 HIV-TEST, 3 PUNKTE

Das Ziel eines HIV-Tests sollte die möglichst sichere Erkennung (positive Testung) eines Infizierten sein (hohe **Sensitivität**). Gleichzeitig sollte aber auch ein nicht Infizierter mit hoher Wahrscheinlichkeit als negativ getestet werden (hohe **Spezifität**) um falsch positive Tests zu vermeiden.

Bei den heute üblichen HIV-Schnelltests (z.B. ELISA) ist die Wahrscheinlichkeit für eine positive Testreaktion bei Infizierten 99.9%=0.999 (Sensitivität des Tests). Nur 0.1%=0.001, oder einer von 1000, der Infizierten werden also irrtümlich negativ getestet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nichtinfizierter tatsächlich auch negativ getestet wird, liegt ebenfalls bei 99.9% =0.999 (Spezifität des Tests). Bei 0.1%=0.001, oder einer von 1000, der Nichtinfizierten ist der Test also irrtümlich positiv. Man kann davon ausgehen, dass aktuell etwa 0.08%=0.0008 der deutschen Bevölkerung HIV infiziert sind (Quelle: Wikipedia).

a) Stellen Sie die im Text angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaumes dar. Verwenden Sie hierfür die Ereignisse $+$: Test ist positiv und I : Person ist HIV-infiziert.

Angenommen, alle Bewohner Deutschlands (nehmen Sie an, dass dies $n = 82$ Millionen sind, wovon 65600 Menschen tatsächlich mit HIV infiziert sind und 81934400 Menschen nicht mit HIV infiziert sind) würden sich auf HIV testen lassen und für alle Personen gelten die gleichen Testbedingungen.

b) Wie viele positive n_+ Testergebnisse würde der Test liefern?

c) Wie viele richtig positive Ergebnisse n_{r+} (Personen die positiv getestet wurden und HIV infiziert sind) würde der Test liefern?

d) Wie viele falsch negative Ergebnisse n_{f-} (Personen die negativ getestet wurden aber HIV infiziert sind) würde der Test liefern?

e) Wie viele falsch positive Ergebnisse n_{f+} (Personen die positiv getestet wurden aber nicht HIV infiziert sind) würde der Test liefern?

Berechnen Sie nun noch zwei weitere Wahrscheinlichkeiten:

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, die positiv getestet wurde, tatsächlich HIV infiziert?

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, die negativ getestet wurde, tatsächlich nicht HIV infiziert?

LÖSUNG

a)

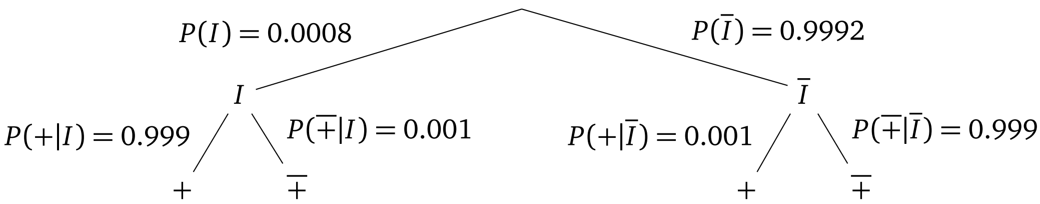


Abbildung 4: Wahrscheinlichkeitsbaum für allgemeine Wahrscheinlichkeiten des HIV-Tests

b) Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(+) = P(+ \mid I)P(I) + P(+ \mid \overline{I})P(\overline{I}) = 0.001798$
$\Rightarrow n_+ = n \cdot P(+) = 1474688$

c) $n_{r+} = n \cdot P(+ \cap I) = n \cdot P(I) \cdot P(+ \mid I) \approx 65534$

d) $n_{f-} = n \cdot P(\overline{+} \cap I) = n \cdot P(I) \cdot P(\overline{+} \mid I) \approx 66$

e) $n_{f+} = n \cdot P(+\cap \bar{I}) = n \cdot P(\bar{I}) \cdot P(+\mid \bar{I}) = 81934$

f) Satz von Bayes: $P(I\mid +) = \frac{P(I)P(+\mid I)}{P(I)P(+\mid I)+P(\bar{I})P(+\mid \bar{I})} = \frac{0.0008\cdot 0.999}{0.0008\cdot 0.999+0.9992\cdot 0.001} = 0.44021 \approx 44\%$.
Anmerkung: Dieser Prozentsatz entspricht ungefähr der Wirklichkeit. Eine positiv getestete Person ist also mit einer Wahrscheinlichkeit von **55% HIV negativ**. Daher wird ein positives Testergebnis immer mit einem zweiten Test abgesichert / widerlegt.

g) Satz von Bayes: $P(\bar{I}\mid \bar{+}) = \frac{P(\bar{I})P(\bar{+}\mid \bar{I})}{P(\bar{I})P(\bar{+}\mid \bar{I})+P(I)P(\bar{+}\mid I)} = \frac{0.9992\cdot 0.999}{0.9992\cdot 0.999+0.0008\cdot 0.001} = 0.999999 \approx 99.9999\%$.
Anmerkung: Dieser Prozentsatz entspricht ebenso ungefähr der Wirklichkeit. Eine negativ getestete Person ist mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit tatsächlich HIV negativ.

AUFGABE 3.11 QUALITÄTSKONTROLLE II, 3 PUNKTE

Ein Zulieferer produziert ein Bauteil X auf den drei Maschinen A, B und C, die mit Ausschussquoten von 4, 3 bzw. 1 % arbeiten. Bei einer Lieferung an einen seiner Kunden stammen 20 % der Bauteile von Maschine A, 30 % von B und 50 % von C.

a) Verwenden Sie zur Modellierung die folgenden Ereignisse:

   - A, B, C : Bauteil kommt von Maschine A,B,C
   - D : defektes Bauteil, FF : fehlerfreies Bauteil

   Geben Sie (so möglich) für diese Ereignisse, sowie die aus dem Text direkt ableitbaren bedingten Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten an!

b) Der Kunde akzeptiert Lieferungen mit einer Ausschussquote von maximal 2 %. Würde die maximale Ausschussquote in der Lieferung überschritten, falls keine Endkontrolle durchgeführt würde? (Berechnen Sie also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil defekt ist)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil von Maschine B stammt, wenn es bei der Endkontrolle als defekt eingestuft wurde?

LÖSUNG

a)
   - A, B, C : Bauteil kommt von Maschine A,B,C
     $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(C) = 0.5$
   - D : defektes Bauteil, FF : fehlerfreies Bauteil
     $P(D|A) = 0.04, P(D|B) = 0.03, P(D|C) = 0.01$

b) Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:
$P(D) = P(A)\cdot P(D|A) + P(B)\cdot P(D|B) + P(C)\cdot P(D|C) = 0.2\cdot 0.04 + 0.3\cdot 0.03 + 0.5\cdot 0.01 = 0.022 = 2.2\%$
ja, die Ausschussquote würde überschritten werden

c) Satz von Bayes:
$P(B|D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)\cdot P(D|B)}{P(D)} = \frac{0.3\cdot 0.003}{0.022} = 0.409 = 40.9\%$.

Aufgabe 3.12 Ziege oder Auto?, 3 Punkte

In einer Quizsendung wird ein Spiel nach folgenden Regeln gespielt:

- Ein Auto und zwei Ziegen werden zufällig auf drei Tore verteilt.
- Zu Beginn des Spiels sind alle Tore verschlossen, sodass Auto und Ziegen nicht sichtbar sind.
- Der Kandidat, dem die Position des Autos völlig unbekannt ist, wählt ein Tor aus, das aber vorerst verschlossen bleibt.
- Fall A: Hat der Kandidat das Tor mit dem Auto gewählt, öffnet der Moderator eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich immer eine Ziege befindet. Der Moderator hat dabei die freie Wahl. Bei den nachfolgenden Lösungen werden allerdings Zusatzannahmen über die Art des Auswahlprozesses, die der Moderator verwendet, gemacht werden.
- Fall B: Hat der Kandidat ein Tor mit einer Ziege gewählt, dann muss der Moderator dasjenige der beiden anderen Tore öffnen, hinter dem die zweite Ziege steht.
- Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere ungeöffnete Tor zu wählen.
- Das vom Kandidaten letztlich gewählte Tor wird geöffnet, und er erhält das Auto, falls es sich hinter diesem Tor befindet.

Nehmen Sie an, dass der Kandidat Tür Nr. 1 gewählt hat und der Moderator Tür Nr. 3 öffnet. Was ist die beste Strategie (die mit der höchsten Gewinnwahrscheinlichkeit)

a) Der Kandidat entscheidet nach Zufall, welche der beiden noch verschlossenen Türen er wählt.

b) Der Kandidat bleibt bei der Tür, die er zu Beginn gewählt hat.

c) Der Kandidat wechselt zur anderen verschlossenen Tür.

Lösung

Definiere Ereignis G : der Kandidat gewinnt.

- Da eine Ziege „aufgedeckt“ wurde, sind hinter den beiden verbleibenden Türen mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Ziege oder das Auto. Damit $P(G) = \frac{1}{2}$.
- Das „Aufdecken“ der Ziege ändert nichts an den Anfangswahrscheinlichkeiten (2 Ziegen, 1 Auto), damit gilt $P(G) = \frac{1}{3}$.
- Definiere die Ereignisse
  - G_i : Der Gewinn ist hinter Tor $i, i = 1, 2, 3$
  - M_j : Der Moderator hat das Tor $j, j = 1, 2, 3$ geöffnet

  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tor 2 ist? Gesucht ist $P(G_2|M_3)$. Aus den Regeln 1,4,5 und der Wahl des Kandidaten lässt sich ableiten

  - $P(G_1) = P(G_2) = P(G_3) = \frac{1}{3}$
  - $P(M_3|G_1) = \frac{1}{2}$ (wenn das Auto hinter Tür 1 ist, sind hinter Tür 2 und 3 Ziegen, der Moderator wählt also eine der beiden Türen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$)
  - $P(M_3|G_2) = 1$ (wenn das Auto hinter Tür 2 ist, dann macht der Moderator Tür 3 auf)

– $P(M_3|G_3) = 0$ (wenn das Auto hinter Tür 3 ist, macht der Moderator sie nicht auf)

Wende nun den Satz von Bayes an:

$$P(G_2|M_3) = \frac{P(M_3|G_2)P(G_2)}{P(M_3|G_1)P(G_1) + P(M_3|G_2)P(G_2) + P(M_3|G_3)P(G_3)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Summa summarum lohnt es sich für den Kandidaten also zur verschlossenen Tür (Nr. 2) zu wechseln.

Aufgabe 3.13 Die Auroraseuche auf der Enterprise (Klausur WS20/21), 10 Punkte

Captain James Kirk, Kapitän des Raumschiffes Enterprise hat folgendes Problem: Die Auroraseuche ist eine Krankheit, deren auffälligstes Symptom Veränderungen der Hautfarbe des Erkrankten ist, er wird zunächst grün, dann blau und zuletzt rot. Unbehandelt folgt auf diese letzte Phase der Tod.

Dummerweise wurde die Seuche auf der Enterprise eingeschleppt und konnte sich dort unkontrolliert verbreiten. Die Auroraseuche auf der Enterprise weist eine **Prävalenz** von 0.06 auf (mit einer Wahrscheinlichkeit 0.06 ist eine zufällig ausgewählte Person mit der Auroraseuche infiziert).

Glücklicherweise existiert für die Auroraseuche ein Test, dessen **Sensivität** (das Ergebnis einer infizierte Person ist positiv) gleich 0.89 ist und dessen **Spezifität** (das Ergebnis einer nicht-infizierten Person ist negativ) gleich 0.97 ist.

a) (2 Punkte) Modellieren Sie das beschriebene Szenario z.B. durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum oder mit Hilfe einer Stichpunktliste. Geben Sie alle aus dem Text ableitbaren Wahrscheinlichkeiten und Gegenwahrscheinlichkeiten der beschriebenen Ereignisse an. Verwenden Sie zur Modellierung die folgenden Ereignisse (und die jeweiligen Gegenereignisse):
   - A : eine Person ist mit der Auroraseuche infiziert.
   - T : eine Person wird positiv auf die Auroraseuche getestet.

Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeiten dass

b) (0.5 Punkte) ein Test (einer beliebigen Person) positiv ausfällt.

c) (0.5 Punkte) ein Test (einer beliebigen Person) negativ ausfällt.

d) (1 Punkt) ein Testergebnis falsch positiv ist (eine Person ist gesund und erhält ein positives Ergebnis).

e) (1 Punkt) ein Testergebnis falsch negativ ist (eine Person ist infiziert und erhält ein negatives Ergebnis).

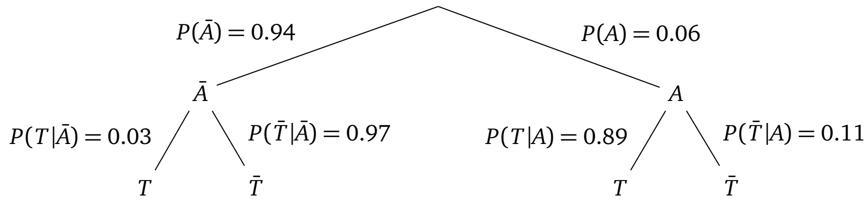
f) (1.5 Punkte) eine positiv getestete Person auch tatsächlich erkrankt ist.

g) (1.5 Punkte) eine negativ getestete Person auch tatsächlich gesund ist.

Nutzen Sie nun Ihr errechnetes Wissen und beantworten Sie die Frage, die sich Captain Kirk stellt:

h) (2 Punkte) Der Test auf die Auroraseuche ist zeitaufwändig und teuer, aber wenn die Krankheit schon in einem frühen Stadium erkannt und behandelt wird, ist sie vollständig heilbar. Andererseits löst eine Behandlung der Auroraseuche bei einer gesunden Person unangenehme Nebenwirkungen aus. Wenn Sie für die Besatzung (grob vereinfacht 1000 Personen) der Enterprise verantwortlich wären, würden Sie dann alle Besatzungsmitglieder der Enterprise (ohne Rücksicht auf Risikofaktoren oder Symptome) testen lassen? Oder würden Sie eine andere Strategie wählen? Begründen Sie Ihre Meinung Hilfe Ihrer obigen Überlegungen.

LÖSUNG

a) 

b) $P(T) = P(A) \cdot P(T|A) + P(\bar{A}) \cdot P(T|\bar{A}) = 0.94 \cdot 0.03 + 0.06 \cdot 0.89 = 0.0816$

c) $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0.0816 = 0.9184$

d) $P(\text{falsch positiv}) = P(T \cap \bar{A}) = 0.94 \cdot 0.03 = 0.0282$

e) $P(\text{falsch negativ}) = P(\bar{T} \cap A) = 0.06 \cdot 0.11 = 0.0066$

f) $P(A|T) = \frac{P(A \cap T}{P(T)} = \frac{P(A) \cdot P(T|A)}{P(T)} = \frac{0.06 \cdot 0.89}{0.0816} = 0.65441$

g) $P(\bar{A}|\bar{T}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{T}}{P(\bar{T})} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}|\bar{T})}{1 - P(T)} = \frac{0.94 \cdot 0.97}{0.9184} = 0.99281$

h) Argumentation über False Positives, False Negatives, bedingte Wahrscheinlichkeiten ...