Übungsblatt 6

Stetige Zufallsvariablen

Stochastik@AIN2
Prof. Dr. Barbara Staehle
Sommersemester 2022
HTWG Konstanz

|Einfache und mittelschwere Aufgaben|

Aufgabe 6.1

Wir betrachten die folgenden Fälle, in denen X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $f(x)$ sei:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x \quad (0 \leq x \leq 2)$

b) $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0, \lambda > 0)$

Außerhalb der angegebenen Intervalle gilt jeweils $f(x) = 0$.

Teilaufgabe 6.1.1 2 Punkte

Bestimmen Sie für jeden Fall die jeweiligen Verteilungsfunktionen $F(x)$.

Teilaufgabe 6.1.2 3 Punkte

Berechnen Sie für jeden Fall (und für b) mit $\lambda = 0.5$) die Wahrscheinlichkeiten

1) $P(X = 0)$

2) $P(X \leq 1)$

3) $P(X \geq 2)$

Teilaufgabe 6.1.3 2 Punkte

Bestimmen Sie für jeden Fall den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Standardabweichung σ_X der ZV X.

Aufgabe 6.2 Klickzahlen

Angenommen, die Zufallsvariable X: „Klicks pro Woche (in Millionen) auf die Webseite von Facebook“ lässt sich beschreiben mit der (in diesem Fall frei erfundenen) Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} & (6 \leq x \leq 8) \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{4}x & (8 \leq x \leq 10) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Teilaufgabe 6.2.1 2 Punkte

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

Teilaufgabe 6.2.2 1 Punkt

Stellen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion graphisch dar.

TEILAUFGABE 6.2.3 2 PUNKTE

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Facebook in einer Woche höchstens 7 Millionen Klicks?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Facebook in einer Woche zwischen 7 und 9 Millionen Klicks?

TEILAUFGABE 6.2.4 3 PUNKTE

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Klickzahlen.

b) Berechnen Sie die Varianz der Klickzahlen.

AUFGABE 6.3 ZUFALLSZAHLENGENERATOR

Ein Zufallsgenerator erzeugt zufällig eine reelle Zahl X zwischen 2.5 und 4.5. Die Verteilungsfunktion von X ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 2.5 \\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} & \text{für } 2.5 < x \leq 4.5 \\ 1 & \text{für } x \geq 4.5. \end{cases}$$

TEILAUFGABE 6.3.1 3 PUNKTE

Bestimmen Sie für die Zufallsvariable X

a) die Dichtefunktion

b) die Wahrscheinlichkeit, dass X nicht größer als 3 wird

c) die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen 2 und 4 annimmt

TEILAUFGABE 6.3.2 3 PUNKTE

a) den Erwartungswert

b) die Varianz

c) die Standardabweichung

TEILAUFGABE 6.3.3 2 PUNKTE

a) Geben Sie den Median der erzeugten Zufallszahlen an.

b) Unter welchem Wert liegen 90% der erzeugten Zufallszahlen?

AUFGABE 6.4 GLÜCKSRAD

In einer Fernsehshow wird ein Glücksrad in Bewegung gesetzt und der Stillstand abgewartet. Es sei $X =$ Position des Glücksrads in Grad ($0 \leq X \leq 360$) bei Stillstand. Der Mechanismus ist so konstruiert, dass keine Winkel bevorzugt auftreten, also alle Winkel gleich wahrscheinlich sind.

TEILAUFGABE 6.4.1 2 PUNKTE

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X an.

TEILAUFGABE 6.4.2 2 PUNKTE

Welcher Winkel wird vom Glücksrad in 25% bwz. 90% aller Fälle **über**schritten?

Aufgabe 6.5 Überraschender Kaffeegenuss

In der Cafeteria wird eine neue Kaffeemaschine aufgestellt, die „überraschenden Kaffee-Genuss“ verspricht.

Teilaufgabe 6.5.1 3 Punkte

Wenn Sie diese Maschine benutzen, erhalten Sie für 3€ eine willkürliche, völlig zufällige Menge Kaffee $M_1 \in [200, 600]$ ml. Nehmen Sie an, dass M_1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit jede reelle Zahl zwischen 200 und 600 sein kann. Berechnen Sie unter dieser Annahme

a) die Wahrscheinlichkeit, dass Sie höchsten 500 ml Kaffee bekommen,

b) die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwischen 200 und 300 ml Kaffee bekommen,

c) den Erwartungswert und die Standardabweichung der Kaffeemenge die Sie bekommen.

Teilaufgabe 6.5.2 3 Punkte

Die Kaffeemaschine überrascht weiterhin durch die zufällige Zeit, die sie für die Zubereitung einer Tasse Kaffee benötigt. Für jede Tasse Kaffee benötigt sie eine Zeit T_1, die exponentialverteilt mit Rate $\lambda = 2\ \text{min}^{-1}$ ist. Berechnen Sie

a) die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine mehr als eine halbe Minute für die Zubereitung einer Tasse Kaffee braucht,

b) die Zubereitungsdauer, welche in 75% aller Fällen nicht überschritten wird,

c) den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zubereitungsdauer.

Aufgabe 6.6 Normaler Kaffeegenuss, 2 Punkte

Die alte Kaffeemaschine, die schon immer in der Cafeteria stand, arbeitet auch ein wenig zufällig: Die Menge Kaffee M_2, welche von dieser Maschine in den Becher gefüllt wird, ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 300 ml und Standardabweichung 50 ml.

a) Geben Sie an, wie M_2 verteilt ist ($M_2 \sim \ldots$).

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit füllt diese Maschine höchsten 350 ml in den Becher?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit füllt diese Maschine mindestens 200 ml in den Becher?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit füllt diese Maschine genau 250 ml in den Becher?

Aufgabe 6.7 Glühbirnen, 2 Punkte

Ein Ingenieur unterstellt, dass die Lebensdauer X eines bestimmten Typs von Glühbirnen (in Stunden) durch eine Exponentialverteilung mit $\mathrm{E}(X) = 800$ beschrieben werden kann.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Glühbirne länger als 1000 Stunden brennt?

b) Welche Brenndauer wird nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% überschritten?

Aufgabe 6.8 Intelligenz, 2 Punkte

Auf Wikipedia lesen Sie „Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine durch einen Intelligenztest ermittelte Kenngröße zur Bewertung des intellektuellen Leistungsvermögens [..] im Vergleich zu einer Referenzgruppe [..]- Die „bevölkerungsrepräsentative“ Referenzgruppe kann alters- bzw. schulklassenspezifisch sein (v. a. bei Kindern und Jugendlichen) oder spezifisch für Bildungsgrade (beispielsweise Gymnasiasten oder Berufsgruppen) (vergleiche Normierung). Bei den heutigen Tests, die eine IQ-Norm verwenden, wird anhand der Verteilung der Testergebnisse einer hinreichend großen Stichprobe der Normwert unter Annahme einer Normalverteilung der Intelligenz [..] ermittelt und in eine Skala mit dem **Mittelwert 100 und der Standardabweichung 15** umgerechnet. “

Berechnen Sie unter der Annahme dieser Normalverteilung

a) welcher Anteil der Bevölkerung einen IQ von mindestens 120 hat,

b) wie groß der Anteil der Personen in der Bevölkerung ist, die IQ-Werte zwischen 100 und 110 haben,

c) welche IQ-Werte die intelligentesten 10 % der Bevölkerung haben,

d) welche IQ-Werte von mindestens von 99 % der Bevölkerung erreicht werden.

Aufgabe 6.9 Ausziehen

Teilaufgabe 6.9.1 1 Punkt

Laut einer Umfrage der Europäischen Union ziehen junge Frauen in Deutschland aus dem Elternhaus aus, wenn sie im Durchschnitt 23.9 Jahre alt sind. Das „Auszugsalter“ kann als normalverteilt angesehen werden mit einer Standardabweichung von 6.4 Jahren.

Berechnen Sie den Prozentsatz der jungen deutschen Frauen, die mit spätestens 19 Jahren zu Hause ausziehen.

Teilaufgabe 6.9.2 1 Punkt

Geben Sie mit Hilfe der 68-95-99.7 bzw. der 3σ-Regel die Bereiche an, in welche das „Auszugsalter“ für 68.3%, 95.5% bzw. 99.7% der deutschen jungen Frauen fällt.

Teilaufgabe 6.9.3 1 Punkt

Glauben Sie diesen Zahlen?

|Mittelschwere und schwere Aufgaben|

Aufgabe 6.10

Die stetige Zufallsvariable X besitze die jeweils angegebene Dichtefunktion $f(x)$:

a) $f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b)$

b) $f(x) = mx \quad (0 < x \leq 10, m \in \mathbb{R})$

Außerhalb des jeweils angegebenen Intervalls gilt stets $f(x) = 0$.

Teilaufgabe 6.10.1 2 Punkte

Bestimmen Sie den Wert des Parameter c (in Abhängigkeit von a und b) und den Wert des Parameters m.

Teilaufgabe 6.10.2 2 Punkte

Berechnen Sie für beide Dichten den Erwartungswert und die Varianz.

Aufgabe 6.11 Zufällige Keksproduktion, 2 Punkte

Das Abfüllgewicht von Kekspackungen der Firma Schokolo ist normalverteilt mit $\mu = 299$ g und $\sigma = 2$ g.

a) Was ist der Erwartungswert des Gewichts einer Kekspackung?

b) Welches Gewicht wird von 95% aller Packungen **höchstens** angenommen?

c) Es ist ein Toleranzbereich von 300 ± 5 g vorgegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt eine abgefüllte Packung außerhalb dieses Toleranzbereichs?

Aufgabe 6.12 Schnelle Autofahrer, 2 Punkte

Die Reaktionszeit X eines Autofahrers kann als normalverteilt angenommen werden. Angenommen, der Erwartungswert beträgt 0.6 Sekunden und die Standardabweichung 0.08 Sekunden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Reaktionszeit größer als 0.5 Sekunden?

b) Unter welchem Wert liegt die Reaktionszeit mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit?

c) Über welchem Wert liegt die Reaktionszeit mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 6.13 Simulation des Konstanzer Fahrradverkehrs (Klausur WS19/20)

Bob und Alice bearbeiten für eine Simulation des Fahrradverkehrs in Konstanz verschiedene Aufgaben.

Teilaufgabe 6.13.1 4 Punkte

Bob erhält die Aufgabe die Verkehrssicherheit der Fahrräder zu simulieren. Hierfür überlegt er sich Folgendes: In der Simulation werden zufällig Fahrräder erzeugt, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.75$ eine **funktionierende** Beleuchtung haben. Diese Wahrscheinlichkeit kann für die zufällig erzeugten Fahrräder jeweils als unabhängig angenommen werden.

- B: Anzahl der Fahrräder mit **funktionierender** Beleuchtung innerhalb einer Serie von 10 zufällig erzeugten Fahrrädern

- E: Anzahl der Fahrräder die zufällig erzeugt werden müssen, bis das erste eine **nicht funktionierende** Beleuchtung hat

a) Geben Sie an, wie die Zufallsvariablen B und E verteilt sind. Geben Sie weiterhin die Erwartungswerte dieser Zufallsvariablen an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst das 5. zufällig erzeugte Fahrrad eine nicht funktionierende Beleuchtung hat?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 zufällig erzeugten Fahrrädern mindestens 5 Fahrräder sind, die eine funktionierende Beleuchtung haben?

d) Kann man die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 zufällig erzeugten Fahrrädern mindestens 5 Fahrräder sind, die eine funktionierende Beleuchtung, haben auch näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung berechnen? Begründen Sie Ihre Meinung!

TEILAUFGABE 6.13.2 4 PUNKTE

Alice ist dafür verantwortlich, die Zeit, die ein zufällig erzeugtes Fahrrad im simulierten Konstanz herum fährt, zu erzeugen. Hierfür verwende sie die folgenden **stetigen** Zufallsvariablen:

- Z_V: Zeit in Stunden, die ein Fahrrad **am Vormittag** (0 bis 12 Uhr) in der Simulation fahrend in Konstanz verbringt ist normalverteilt mit Erwartungswert 0.5 und Standardabweichung 1.
- Z_N: Zeit in Stunden, die ein Fahrrad **am Nachmittag** (12 bis 24 Uhr) in der Simulation fahrend in Konstanz verbringt ist normalverteilt mit Erwartungswert 2 und Standardabweichung 1.
- $Z_T = Z_V + Z_N$: Zeit in Stunden, die ein Fahrrad **am gesamten Tag** (0 bis 24 Uhr) in der Simulation fahrend in Konstanz verbringt.

Hinweis: Z_N und Z_V sind **voneinander unabhängig**.

a) Geben Sie an, wie die Zufallsvariable Z_T verteilt ist.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbringt ein Fahrrad **am Vormittag** in der Simulation höchstens 2 Stunden fahrend in Konstanz?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbringt ein Fahrrad **am Nachmittag** in der Simulation genau 2 Stunden fahrend in Konstanz?

d) Wie viel Zeit verbringen 90% der zufällig erzeugten Fahrräder **am gesamten Tag** höchstens fahrend in Konstanz?

e) In welchem Intervall liegen 90% der zufällig erzeugten **Fahrzeiten am gesamten Tag**?

TEILAUFGABE 6.13.3 2 PUNKTE

Die **Geschwindigkeit** eines zufällig erzeugten Fahrrads, wird beschrieben durch:

- G: Geschwindigkeit in km/h eines zufällig erzeugten Fahrrads ist gleichverteilt. G kann Werte zwischen 5 und 25 annehmen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein für die Simulation zufällig erzeugtes Fahrrad eine Geschwindigkeit von genau 15?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Fahrrad eine Geschwindigkeit von weniger als 20?

c) Unter welchem Wert liegt die Geschwindigkeit nur für 10% der zufällig erzeugten Fahrräder?