

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

**A fény nemklasszikus állapotainak
előállítása lineáris optikai rendszerekkel**

DIPLOMAMUNKA

Mogyorósi Gábor
Fizikus MSc

Témavezető: **Dr. Ádám Péter**
egyetemi docens
Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet



Pécs, 2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Irodalmi áttekintés	5
1.1. Elektromágneses sugárzás kvantumelmélete	5
1.2. A fény nemklasszikus állapotai	11
1.3. Nemklasszikus állapotok előállítása koherens állapotok szuperpozíciójaként	14
1.4. Schrödinger-macska állapotok előállítása lineáris optikai rendszerekkel . .	16
1.4.1. A nyalábosztó és a homodin mérés elmélete	17
1.4.2. Koherens állapotok szuperpozíciója Kerr-közegben	20
1.4.3. Schrödinger-macska állapot előállítása Kerr-állapotból	22
2. Nemklasszikus állapotok előállítása lineáris optikai rendszerekkel	25
2.1. Koherens állapotok szuperpozíciója egyenesen	26
2.2. Koherens állapotok szuperpozíciója rácson	29
2.3. Nemklasszikus állapotok előállítása: Eredmények	32
Összefoglalás	39
A. Nyalábosztó-transzformáció	40
Irodalomjegyzék	43

Bevezetés

A fény speciális kvantumállapotainak előállítása az egyik legintenzívebb és legérdekesebb kutatási téma a kvantumoptikában. Különösen fontosnak tartott állapot a két koherens állapot szuperpozíciójából álló Schrödinger-macska állapot. Ezeknek az állapotknak fontos alkalmazásai vannak a kvantumkommunikációban, valamint az információfeldolgozásban. A Schrödinger-macska állapotokból kiindulva Janszky és Ádám az 1990-es években a fény tetszőleges nemklasszikus állapotainak előállítására egy hatékony kvantumállapot tervezési módszert javasoltak [1, 2, 3, 4, 5]. Megmutatták, hogy a fázistérben egy egyenesen, vagy egy körön vett kis számú koherens állapot szuperpozíciójával a nemklasszikus állapotok jól közelíthetők.

A dolgozat célja, hogy kidolgozzunk egy olyan lineáris optikai rendszert, amellyel a fény nevezetes nemklasszikus állapotai diszkrét koherens állapotok szuperpozíciójával közelítve állíthatók elő. Ez az optikai rendszer a Schrödinger-macska állapotok feltételes előállítására korábban kidolgozott optikai rendszereken alapul [6, 7, 8, 9]. A dolgozatban megmutatjuk, hogy a rendszerrel egyenesen, illetve rácson vett koherens állapot szuperpozíciók állíthatók elő. A szuperpozíciók paraméterei meghatározott tartományokban a rendszerben szereplő homodin mérésekkel és a bemenő állapotok paramétereivel változtathatók. Numerikus módszert dolgoztunk ki, amellyel az optikai rendszer paraméterei úgy határozhatók meg, hogy a rendszer az előre meghatározott nemklasszikus állapotot állítsa elő jó közelítéssel.

Az 1. fejezetben az elektromágneses sugárzás kvantumelméletének az alapjait tárgyaljuk. Majd a kvantált sugárzási tér nevezetes állapotát, a koherens állapotot mutatjuk be részletesen. Ezt követően ismertetjük a fény nemklasszikus állapotait, ahol kiemeljük az egyik legfontosabbat, a Schrödinger-macska állapotot.

A továbbiakban a nemklasszikus állapotok lineáris rendszerekkel történő előállítását tárgyaljuk. Itt a legfontosabb alapfogalmakat, mint a nyalábosztó és a homodin mérés elméletét, részletesen mutatjuk be. Megmutatjuk, hogy ha az adott két bemeneti forrás kis mértékben eltérő koherens állapotok szuperpozíciójából áll, akkor egy lineáris optikai rendszerrel feltételesen előállítható a Schrödinger-macska állapot.

A 2. fejezetben megmutatjuk, hogy a Schrödinger-macska állapotot feltételesen előállító lineáris optikai rendszerből összeállított kaszkád rendszer a fázistérben egyenesen, illetve rácson vett koherens állapot szuperpozíciókat hoz létre. A továbbiakban egy két-lépéses numerikus módszert dolgozunk ki. Elsőként meghatározzuk egy adott kvantum-állapotot közelítő, a leírt kísérleti berendezéssel létrehozható koherens állapot szuperpozíció paramétereit. Majd meghatározzuk azokat a mérési paramétereket, melyekkel az előző lépésben kiszámolt szuperponált állapot létrehozható.

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Ádám Péternek, valamint Molnár Emesének, Mechler Mátyásnak és Varga Árpádnak a diplomamunkám elkészítéséhez nyújtott segítségét.

1. fejezet

Irodalmi áttekintés

1.1. Elektromágneses sugárzás kvantumelmélete

A fény kettős természetének vizsgálata a XX. század elején a fizikusok körében az egyik legérdekesebb téma volt. A fény kettős természetét tárgyaló elmélet alapja Paul Dirac munkássága alapján született meg az 1920-as évek végén [10]. Ezen elmélet szerint az elektromágneses sugárzási teret a klasszikus elektrodinamika törvényeinek megfelelően egy adott térrészben, periodikus határfeltételek mellett normálmodusokra bontjuk, majd a téregyenletekkel összhangban minden normálmodushoz harmonikus oszcillátort rendelünk úgy, hogy az oszcillátor energiája megegyezzen a térmódus energiájával, azaz a kvantummechanika elmélete szerint tárgyaljuk. Eredményül az $\mathbf{E}(\vec{r}, t)$ elektromos és $\mathbf{H}(\vec{r}, t)$ mágneses térerősséget kapjuk, amelyek Heisenberg-képben kifejezett alakja egy L hosszúságú kocka alakú térrészben periodikus határfeltételek mellett:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\vec{r}, t) &= \sum_{k,\theta} \mathbf{E}_{k,\theta}(\vec{r}, t) = i \sum_{k,\theta} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 L^3}} \vec{e}_{k,\theta} \cdot (\hat{\mathbf{a}}_{k,\theta} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\vec{r}} - \hat{\mathbf{a}}_{k,\theta}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k}\vec{r}}), \\ \mathbf{H}(\vec{r}, t) &= \sum_{k,\theta} \mathbf{H}_{k,\theta}(\vec{r}, t) = i \sum_{k,\theta} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\mu_0 L^3 \omega_k}} \vec{k} \times \vec{e}_{k,\theta} \cdot (\hat{\mathbf{a}}_{k,\theta} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\vec{r}} - \hat{\mathbf{a}}_{k,\theta}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k}\vec{r}}).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Az ω_k sajátértékekhez tartozó $\mathbf{E}_{k,\theta}$, $\mathbf{H}_{k,\theta}$ sajátfüggvényeket módusfüggvényeknek hívjuk. A fenti egyenletekben szereplő mennyiségek: \hbar a redukált Planck-állandó, $\vec{e}_{k,\theta}$ a polarizációs vektor, a θ index a két polarizációs irányt jelöli, c a vákuumbeli fénysebesség, ε_0 a vákuum permittivitása, μ_0 a vákuum mágneses permeabilitása, ω_k a körfrekvencia, a \vec{k} hullámszámvektor pedig eleget tesz a

$$k = n \frac{2\pi}{L}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \text{és} \quad \omega_k = c \cdot |\vec{k}|, \tag{1.2}$$

egyenleteknek, valamint $\vec{e}_{k,\theta}$ vektor merőleges \vec{k} -ra, azaz: $\vec{e}_{k,\theta} \cdot \vec{k} = 0$.

Az elektromágneses mező egymástól független harmonikus oszcillátorok összessége. A különböző módusfüggvényekhez tartozó harmonikus oszcillátorokat módusoknak hívjuk. A továbbiakban a módusindexet k -val jelöljük: $k \equiv (k, \theta)$.

Az (1.1) összefüggésekben szereplő $\hat{\mathbf{a}}_k$ és $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger$ operátorok a harmonikus oszcillátor el-tüntető és keltő operátora, melyek a kanonikus felcserélési relációnak tesznek eleget:

$$[\hat{\mathbf{a}}_k, \hat{\mathbf{a}}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad (1.3)$$

ahol $\delta_{kk'}$ a Kronecker-deltát jelöli, melynek definíciója:

$$\delta_{kk'} = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = k', \\ 0, & \text{ha } k \neq k'. \end{cases} \quad (1.4)$$

A szabad elektromágneses tér kvantálását módusonként az általános koordinátakon és impulzusokon keresztül végezhetjük el: bevezetjük $\hat{\mathbf{q}}_k$ és $\hat{\mathbf{p}}_k$ önadjungált operátorokat, és így az $\hat{\mathbf{a}}_k$, $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger$ operátorok kifejezhetők ezek segítségével [11, 12]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_k &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \hat{\mathbf{q}}_k + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \hat{\mathbf{p}}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{\mathbf{q}}_k + i \hat{\mathbf{p}}_k), \\ \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}} \hat{\mathbf{q}}_k - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} \hat{\mathbf{p}}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{\mathbf{q}}_k - i \hat{\mathbf{p}}_k), \end{aligned} \quad (1.5)$$

ahol $\hat{\mathbf{p}}_k$ és $\hat{\mathbf{q}}_k$ operátorokra teljesül a

$$[\hat{\mathbf{p}}_k, \hat{\mathbf{q}}_{k'}] = -i\hbar\delta_{kk'} \quad (1.6)$$

felcserélési reláció. Az inverz összefüggések:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{\mathbf{a}}_k + \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger), \\ \hat{\mathbf{p}}_k &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{\mathbf{a}}_k - \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Az (1.1) és az (1.5) egyenletek felhasználásával a teljes sugárzási tér energiája $L^3 = V$ térfogatban:

$$\mathbf{H} = \sum_k \mathbf{H}_k = \frac{1}{2} \sum_k \int_V (\epsilon_0 \mathbf{E}_k^2 + \mu_0 \mathbf{H}_k^2) dV = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_k (\hat{\mathbf{p}}_k^2 + \omega_k^2 \hat{\mathbf{q}}_k^2). \quad (1.8)$$

Láthatjuk, hogy a sugárzási tér energiája az oszcillátorenergiák összegeként áll elő. A kvantummechanikából ismert módon az $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k = \hat{\mathbf{n}}_k$ számoperátorok sajátértékei a nem-negatív egész számok. A k indexű módus energia-sajátértékei így:

$$E_{n_k} = \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \quad n_k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

ahol a $\hbar\omega_k$ energiakvantumot, vagyis az elektromágneses tér módusainak az elemi gerjesztéseinak nevezük, a megfelelő normált $|n_k\rangle$ számsajtállapotok kielégítik az $\hat{\mathbf{n}}_k$ operátor sajátérték-egyenletét:

$$\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \hat{\mathbf{a}}_k |n_k\rangle = \hat{\mathbf{n}}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle. \quad (1.10)$$

Az $\hat{\mathbf{a}}_k$ operátorok az adott módus fotonszám sajátállapotait eggyel kisebb állapotba viszik át, azaz csökkentik a tér gerjesztettségét, míg az $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger$ operátorok növelik a gerjesztettséget:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_k |n_k\rangle &= \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \\ \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger |n_k\rangle &= \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ezért nevezik $\hat{\mathbf{a}}_k$ -t fotoneltüntető, $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger$ -t pedig fotonkeltő operátornak. A gerjesztettség nélküli állapotot fotovákuumnak nevezük. A vákuumállapotot az eltüntető operátor a nullvektorba viszi, azaz

$$\hat{\mathbf{a}}_k |0\rangle = 0. \quad (1.12)$$

Az $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger$ keltő operátorok segítségével megadhatjuk az összes energia-sajátállapotot:

$$|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \frac{(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger)^{n_1} \cdot (\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger)^{n_2} \cdot \dots \cdot (\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger)^{n_k} \cdot \dots}{\sqrt{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k! \cdot \dots}} |0\rangle. \quad (1.13)$$

Ez a betöltésiszám reprezentáció: a k -adik módus az n_k -adik gerjesztett állapotban van. Ezt szokás még fotonszámbázisnak vagy Fock-bázisnak hívni.

Az (1.1) és (1.8) egyenletek fejezik ki a fény kettős természetét. A térbeli viselkedés, a hullámtulajdonságok a klasszikus módussorfejtésből kapott periodikus $e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ módusfüggvényekben nyilvánulnak meg az (1.1) egyenletekben, de a módusok energiája az (1.8) miatt csak kvantumosan, „adagokban” változhat. A fotonszám a módus gerjesztettségének mértéke, a foton nem lokalizált objektum („rézszegek”). A módushoz rendelt harmonikus oszcillátor koordináta és impulzus operátorai a tér oszcillációját írják le, nem pedig a foton térbeli mozgását. Az (1.8) és (1.10) egyenletek alapján vákuumállapotban a sugárzási tér energiája végtelen:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k = \infty. \quad (1.14)$$

Ez azonban az elmélet gyakorlati következtetésében, a mérhető fizikai mennyiségekben, hasonlóan az L^3 kvantálási térfogathoz, nem okoz problémát. A továbbiakban a sugárzási tér egyetlen módusával foglalkozunk, azaz elhagyhatjuk a módusindexet.

Erwin Schrödinger, miután hullámegyenletét megalkotta [13], a harmonikus rezgőmozgást leíró megoldásának megtalálása után jött rá, hogy a klasszikus oszcillátornak nem a kvantumos oszcillátor magasan gerjesztett állapotai felelnek meg, hanem egy olyan hullámcsomag, melynek alakja nem változik és nem folyik szét, csak a hullámfüggvény fázisa szed fel egy triviális időfüggést a zérusponti energiája miatt. Az időfüggő Schrödinger-egyenletnek ezt a lényeges megoldását koherens állapotnak nevezzük [14]. Óriási jelentőségre az elektromágneses hullámok kvantumelméletében tett szert.

Koherens állapotokról tudni kell, hogy végtelen sok különböző gerjesztett állapot szuperpozíciója meghatározott együtthatókkal. Koherens állapotok a kvantált sugárzási tér nevezetes állapotai, mely állapotok az eltüntető operátor sajátállapotai:

$$\hat{\mathbf{a}}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (1.15)$$

ahol $\alpha = |\alpha| \cdot e^{i\phi}$ a komplex amplitúdó. Ezt eredetileg Roy J. Glauber amerikai fizikus mutatta be matematikailag, így ezért szokás Glauber-állapotnak is nevezni [15, 16]. Ezt a kvantumállapotot a harmonikus oszcillátor kvantumelméletéből ismerhetjük.

A koherens állapotok a Fock-állapotok szerint kifejthető [17]:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.16)$$

A koherens állapotok nem ortogonálisak egymásra:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{\alpha^* \beta - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2}, \quad (1.17)$$

mivel az eltüntető operátor nem hermitikus, sajátállapotai nem ortogonálisak, illetve feszítik ki a teljes Hilbert-teret. Viszont a koherens állapotok teljes rendszert alkotnak:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \mathbb{1}, \quad (1.18)$$

ahol $d^2\alpha = d(\text{Re}(\alpha)) \cdot d(\text{Im}(\alpha))$. Eszerint minden állapot kifejthető koherens állapotokkal, ám ez a kifejezés nem egyértelmű. Szokás ezt a tulajdonságot úgy is nevezni, hogy a koherens állapotok túlteljes rendszert alkotnak az oszcillátor Hilbert-terében. A koherens állapotok szerint minden tiszta állapot kifejezhető a következő alakban:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} F^\psi(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle d^2\alpha. \quad (1.19)$$

Természetesen több különböző $F^\psi(\alpha, \alpha^*)$ függvényt beírva is azonos eredményt kapunk.

Koherens állapotok esetén a fotonszám szórásnégyzete és középértéke ekvivalens, illetve megegyezik az amplitúdó abszolút értékének négyzetével:

$$(\Delta \mathbf{n})^2 = \langle \mathbf{n} \rangle = |\alpha|^2, \quad (1.20)$$

a fotonszám eloszlása pedig Poisson-eloszlású:

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (1.21)$$

A koherens állapot az oszcillátor klasszikus mozgásának megfelelő kvantumállapot, mely komplex paraméterének abszolút értéke arányos a hullám amplitúdójával, fázisa pedig a hullám kezdőfázisával egyezik meg. A kvantumos tárgyalásból következően azonban az elektromos térerősségnak bizonytalansága van, amely fázisfüggetlen és értéke állandó, megegyezik a vákuumzajjal. A koherens állapotú fény így növekvő gerjesztettség mellett egyre jobban megfelel a klasszikus hullámnak, hiszen a kvantumzaja elhanyagolható lesz az amplitúdójához képest.

Glauber felismerte, hogy koherens állapotok segítségével a fény tetszőleges kvantumállapota reprezentálható oly módon, hogy a koherens állapotok α paramétere által meghatározott komplex sík megfelel a kvantummechanikai fázistérnek. Ennek koordinátatengelyeit fény esetében az ún. $\hat{\mathbf{X}}$ és $\hat{\mathbf{Y}}$ kvadratúra operátorok átlagértékei adják. A kvadratúra operátorok középértékére és szórására a következőket kapjuk [18]:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{\mathbf{X}} | \alpha \rangle &= \text{Re}(\alpha), \quad \langle \alpha | \hat{\mathbf{Y}} | \alpha \rangle = \text{Im}(\alpha), \\ \Delta \hat{\mathbf{X}}_\alpha &= \Delta \hat{\mathbf{Y}}_\alpha = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

ahol $\hat{\mathbf{X}}$ és $\hat{\mathbf{Y}}$ operátorokat a következőképpen definiáljuk:

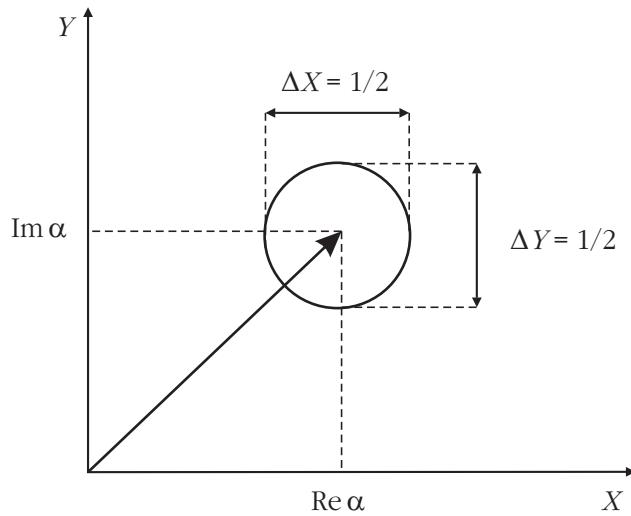
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger), \\ \hat{\mathbf{Y}} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2i} (\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}^\dagger), \end{aligned} \quad (1.23)$$

és kielégíti a felcserélési relációt:

$$[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}] = \frac{i}{2}. \quad (1.24)$$

Koherens állapotok esetében a kvadratúra operátorok szórása azonos és amplitúdó független. Kvantummechanikai leírásban a két kvadratúra operátor kanonikusan konjugált, azaz a kvadratúrák nem mérhetők egyszerre, tehát a Heisenberg-féle határozatlanossági összefüggés teljesül rájuk:

$$\Delta \hat{\mathbf{X}} \Delta \hat{\mathbf{Y}} \geq \frac{1}{4}. \quad (1.25)$$



1.1. ábra. Koherens állapot képe a fázistérben a bizonytalansági körrel.

A koherens állapotok tehát minimális bizonytalanságú állapotok. Az 1.1. ábra a kvadratúra operátorok határozatlanságát mutatja $|\alpha\rangle$ koherens állapotokban a komplex síkon. A valós tengelyre az $\hat{\mathbf{X}}$, a képzetes tengelyre az $\hat{\mathbf{Y}}$ kvadratúra operátor középértékét mérjük fel. Az ábrán láthatjuk, hogy az $|\alpha\rangle$ koherens állapotot a $(\text{Re}(\alpha), \text{Im}(\alpha))$ pont jellemzi, és e pont köré egy $\frac{1}{2}$ sugarú kört rajzolunk, amely az $\hat{\mathbf{X}}$ és $\hat{\mathbf{Y}}$ operátorok határozatlanságát jelképezi koherens állapotban.

Koherens állapotokat állíthatunk elő vákuumállapotból a $\hat{\mathbf{D}}(\alpha)$ -val jelölt koherens eltolási operátor segítségével [17, 19]:

$$|\alpha\rangle = \hat{\mathbf{D}}(\alpha)|0\rangle, \quad (1.26)$$

ahol $\hat{\mathbf{D}}(\alpha) = e^{\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \alpha^*\hat{\mathbf{a}}}$. Az eltolási operátor hatása egy $|\beta\rangle$ koherens állapotra:

$$\hat{\mathbf{D}}(\alpha)|\beta\rangle = e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} |\alpha + \beta\rangle. \quad (1.27)$$

A kvantumállapotokat kvázivalószínűség-eloszlás függvények segítségével reprezentálhatjuk a fázistéren. Ilyen eloszlások a Glauber-Sudarshan P-reprezentáció, Q-, valamint Wigner-kvázivalószínűség eloszlások [20, 21]. A dolgozatban Wigner-függvényt használunk a kvantumállapotok bemutatására. A Wigner-függvény definíciója:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\alpha\eta^* - \alpha^*\eta} \cdot \text{Tr} [\hat{\rho} \cdot e^{\eta\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \eta^*\hat{\mathbf{a}}}] d^2\eta, \quad (1.28)$$

ahol $\hat{\rho}$ a kvantumállapot sűrűségoperátorá, és $d^2\eta = d(\text{Re}(\eta)) \cdot d(\text{Im}(\eta))$.

Egy lézer koherens állapotú fényt bocsát ki, tehát klasszikus fénynek tekinthetjük. Számtalan kutatási terület köszönheti létrejöttét a lézereknek, a kvantumoptika ezen területe is. Az 1970-es évek végétől a kvantumoptikai elméleti kutatások meghatározó része nemklasszikus állapotú fénnyel foglalkozik. A nemklasszikus fény kvantumos jellege miatt viselkedését nem érthetjük klasszikus tárgyalásban, ezért nincs klasszikus megfelelője. Az elmúlt évtizedben a téma kör jelentős elméleti eredményeit a kísérleti megvalósítás követte. Több laboratóriumban sikerült már nemklasszikus állapotú fényt létrehozni, detektálni, és számos kísérletben alkalmazni.

1.2. A fény nemklasszikus állapotai

A fénynek végtelen sok kvantumállapota létezik. A fény kvantumállapota általában megváltozik, ha valamilyen optikai folyamatban vesz részt. Megváltozik az állapota akkor is, ha detektáljuk, mivel a fotonok abszorbeálódnak a térből. Ilyenkor a tiszta kvantumállapotú fény kevert állapotúvá válik, mivel csillapodási folyamatban vesz részt. A csillapodási folyamatnak az alapesete egy részlegesen áteresztő tükrön való áthaladás. Több nevezetes tulajdonságú nemklasszikus állapot létezik, amelyekkel kapcsolatos kutatások már az 1970-es évek elején megindultak. A következőkben néhány nemklasszikus állapotcsaládot mutatunk be.

Fock-állapotok

A Fock-állapotoknak a $|0\rangle$ vákuumállapotból ismételt gerjesztéssel a keltő operátorral létrehozott állapotokat nevezük, melyek az \hat{n} számoperátor sajátállapotai:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (1.29)$$

Mivel \hat{n} önadjungált operátor, a Fock-állapotok teljes ortogonális rendszert alkotnak. A koherens állapotokkal szemben nemklasszikus állapotok, kísérleti előállításuk nehézkes. Nagy n esetén $|n\rangle$ számállapot „instabil”, mert a környezeti hatások, veszteségek miatt könnyen redukálódik klasszikus állapotra. Fock-állapotok előállíthatók unitér időfejlődéssel [22], koherens állapotok szuperpozíciójaként [2] (a szuperpozíció megvalósítható pl. üregrezonátorokban [3]), és nem unitér mérési folyamat segítségével [23].

Összenyomott állapotok

Az összenyomott állapotok olyan nemklasszikus fényállapotok, amelyek neonlineáris kristályokban parametrikus konverzióval állíthatók elő. Az „összenyomott állapot” fogal-

mát James N. Hollenhorst vezette be [24]. Legfontosabb tulajdonsága, hogy valamelyik mérhető fizikai mennyiségek kvantumzaja kisebb, mint koherens állapotban.

Tekintsük a következő unitér operátort, melynek „squeezing operátor” a neve:

$$\hat{\mathbf{S}}(\zeta) = e^{\frac{1}{2}\zeta^* \hat{\mathbf{a}}^2 - \frac{1}{2}\zeta(\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^2}, \quad (1.30)$$

ahol $\zeta = r \cdot e^{i\theta}$ komplex paraméter, és $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Az $\hat{\mathbf{S}}(\zeta)$ operátor a vákuumállapotot a $|\zeta, 0\rangle$ összenyomott vákuumállapotba viszi át, ezt az állapotot pedig a $\hat{\mathbf{D}}(\alpha)$ koherens eltolási operátor az $|\alpha, \zeta\rangle$ összenyomott koherens állapotba transzformálja:

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{\mathbf{S}}(\zeta)\hat{\mathbf{D}}(\alpha)|0\rangle. \quad (1.31)$$

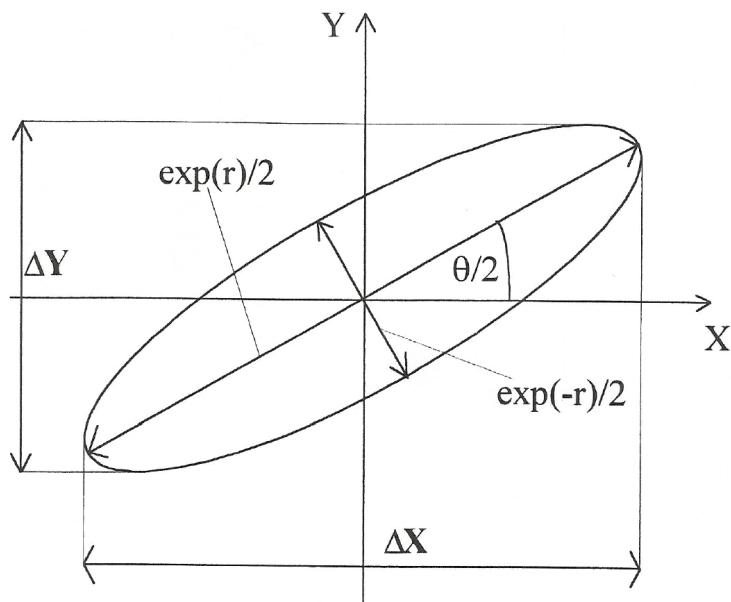
Az $\hat{\mathbf{S}}(\zeta)$ operátor az $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^\dagger$ operátorokat a következőképp transzformálja:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{S}}(\zeta) &= \hat{\mathbf{a}} \cosh r - \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta} \sinh r, \\ \hat{\mathbf{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{S}}(\zeta) &= \hat{\mathbf{a}}^\dagger \cosh r - \hat{\mathbf{a}} e^{-i\theta} \sinh r. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ezek ismeretében az $\hat{\mathbf{X}}$ és $\hat{\mathbf{Y}}$ kvadratúra operátorok középértéke és szórása:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{\mathbf{X}} | \alpha \rangle_{\zeta, \alpha} &= \text{Re}(\alpha), \quad \langle \alpha | \hat{\mathbf{Y}} | \alpha \rangle_{\zeta, \alpha} = \text{Im}(\alpha), \\ \Delta \hat{\mathbf{X}} &= \frac{1}{2} [e^{-2r} \sin^2(\frac{\theta}{2}) + e^{2r} \cos^2(\frac{\theta}{2})], \\ \Delta \hat{\mathbf{Y}} &= \frac{1}{2} [e^{-2r} \cos^2(\frac{\theta}{2}) + e^{2r} \sin^2(\frac{\theta}{2})]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

A fázistérben ábrázolva egy elforgatott helyzetű, α középpontú ellipszist kapunk.



1.2. ábra. Összenyomott vákuumállapot képe a fázistérben.

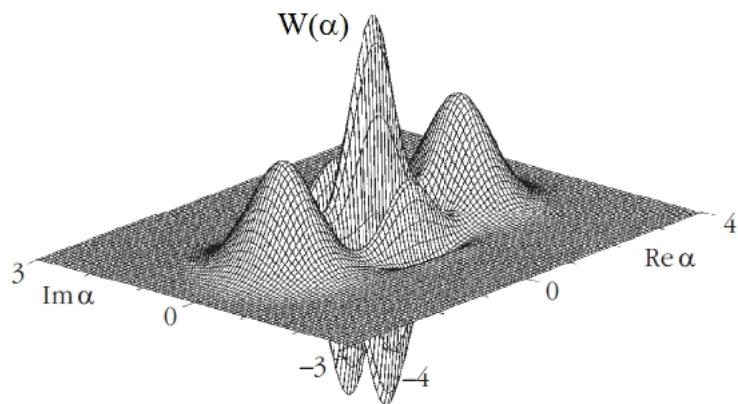
Az 1.2. ábra magyarázza az állapot elnevezését: a koherens állapot szimmetrikus, kör alakú bizonytalansági képét „összenyomtuk”, ellipszissé deformáltuk. Láthatjuk, hogy az ellipszis nagytengelye $\frac{1}{2}e^r$, kistengelye $\frac{1}{2}e^{-r}$, a nagytengely $\frac{\theta}{2}$ szöget zár be az X-tengellyel. Az összenyomott koherens állapotot α vektorral eltolva kapjuk meg [25].

Schrödinger-macska állapot

A lineáris szuperpozíció elve a kvantummechanika legfontosabb alapelve [26]. Bár mely két vagy több állapot szuperpozíciója is állapot [27]. A szuperpozíció elvének legegyszerűbb következménye a kvantuminterferencia, amely a szuperponált állapotot felépítő egyes állapotok, mint valószínűségi amplitúdók között lép fel, ha fizikailag mérhető mennyiséget származtatunk. A különböző állapotok között vett operátor-középértékek az interferenciatagok. Különösen érdekesek azok a kvantumszuperpozíciók, amelyek makroszkopikusan megkülönböztethető, kváziklasszikus állapotok között jön létre. Ezknél a statisztikus keverék és a kvantumszuperpozíció közötti különbség jól bemutatható. Ilyen állapot fordul elő Schrödinger híres macska-paradoxonában [28], ezért nevezzük ezeket „Schrödinger-macska állapotok”-nak. Páros, illetve páratlan Schrödinger-macska állapotnak nevezzük a következő állapotokat:

$$|\alpha, \pm\rangle = c_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad (1.34)$$

ahol a c_{\pm} a normálási tényező. Az $|\alpha, +\rangle$ a páros, az $|\alpha, -\rangle$ pedig a páratlan állapot. Ilyen állapotokat először Mark Hillery definiált [29], tulajdonságait Janszky József és Andrei V. Vinogradov [30] vizsgálta. Az 1.3. ábrán a páros Schrödinger-macska állapot Wigner-függvényét láthatjuk.



1.3. ábra. Páros Schrödinger-macska állapot Wigner-függvénye a fázistérben. A két Gauss-harang a koherens állapotoknak felel meg, és a két görbe közötti hullámzó rész pedig a kvantuminterferencia.

Említésre méltó Janszky és Vinogradov további munkássága, akik megmutatták, hogy a fázistér valós egyenese mentén Gauss-súlyfüggvényel vett folytonos koherens állapot szuperpozíciója egy összenyomott vákuumállapot:

$$|0, \gamma\rangle = \frac{\sqrt[4]{1+\gamma}}{\sqrt{\pi\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\gamma}} |x\rangle dx, \quad (1.35)$$

ahol $\gamma = \frac{2v}{u+v}$ egy paraméter, ami az összenyomott vákuumállapot összenyomottságának mértékét határozza meg, ahol $u = \cosh r$, és $v = \sinh r$, $|x\rangle$ jelöli a koherens állapotot a fázistér valós tengelyén. Az összenyomott vákuumállapot tehát páros Schrödinger-macska állapotok folytonos Gauss-súlyfüggvényel vett szuperpozíciója.

1.3. Nemklasszikus állapotok előállítása koherens állapotok szuperpozíciójaként

Az előző részben tárgyalt nemklasszikus állapotok előállítása többféle módon lehetséges. Ennek egyik módja, hogy a nemklasszikus állapotokat koherens állapotok diszkrét, illetve folytonos szuperpozíciójával közelítjük.

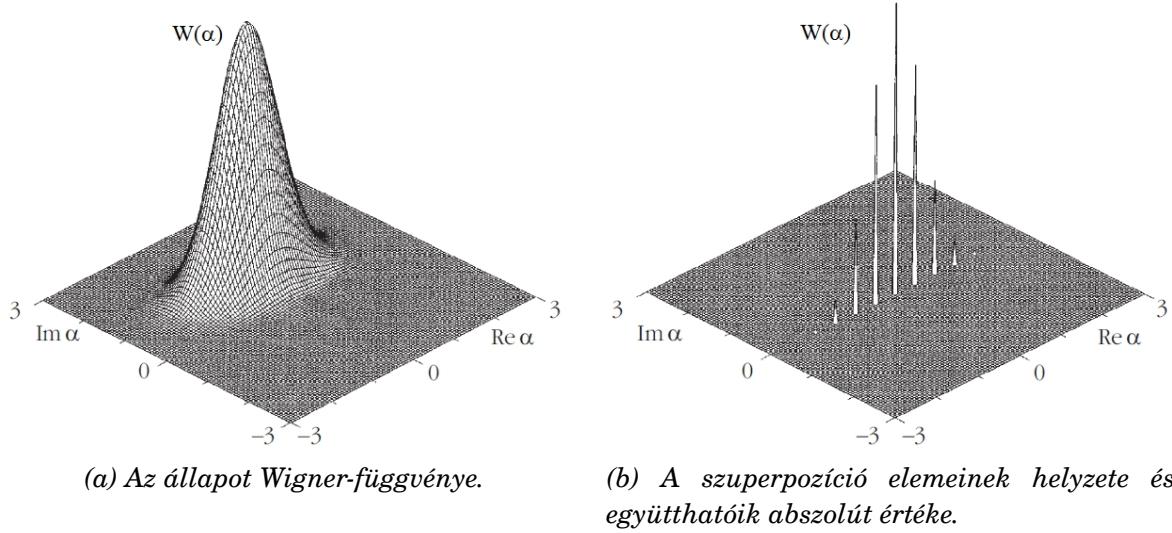
Koherens állapot szuperpozíciókat különféle fizikai folyamatok során állíthatjuk elő. A folytonos szuperpozíciók diszkrét szuperpozíciókkal közelíthetők, az egydimenziós reprezentáció sugallhatja a nemklasszikus állapotot adó folyamatot. Mindezek indokolják az egydimenziós koherens állapot reprezentációk körében végzett vizsgálatokat, amely Ádám Péter és Janszky József nevéhez fűződik, akik szisztematikus módszert dolgoztak ki új nemklasszikus tulajdonságú állapotok létrehozására [1, 4].

Az irodalomban számos nemklasszikus állapot egydimenziós koherens állapot reprezentációja olvasható [5, 6, 7]. A fotonszámaállapotokat és az amplitúdó összenyomott állapotokat a fázistérben egy origó középpontú körön vett folytonos szuperpozícióval írhatjuk le. Ezek a reprezentációk jelentősen leegyszerűsítik a számításokat a Glauber-féle, a teljes komplex síkon, azaz a teljes fázistéren vett reprezentációhoz képest. Segítségükkel az állapotok fizikai jellemzői és viselkedésük optikai folyamatokban egyszerű módon elemezhetők. Az egydimenziós reprezentációk igazi jelentősége az, hogy segítségükkel diszkrét koherens állapot származtathatók, amelyekkel a fény kvantumállapotai igen jó közelítéssel előállíthatók:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |\alpha_i\rangle. \quad (1.36)$$

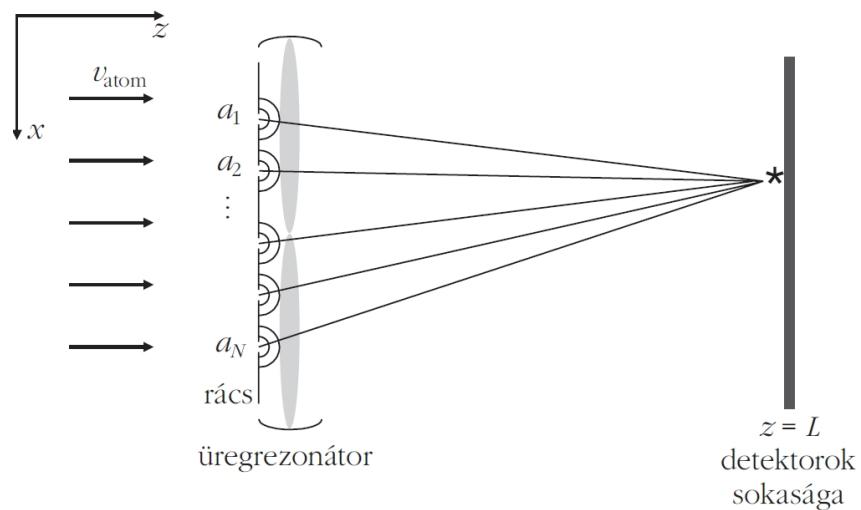
A c_i együtthatók a reprezentáció kifejtési függvényei az adott α_i pontokban.

Több nevezetes állapotot már kis számú ($N \leq 10$) koherens állapot szuperpozíciójaként állíthatjuk elő. Az 1.4. ábra egy összenyomott koherens állapotot illusztrál:



1.4. ábra. Összenyomott koherens állapot közelítése $N = 9$ koherens állapot szuperpozíciójával a fázistér valós tengelye mentén.

Ez az eredmény új lehetőséget nyit a fény nemklasszikus állapotainak tanulmányozására. Sikerült olyan módszereket kidolgozni, amelyekkel bármilyen szuperpozíció és – egyetlen kísérleti berendezéssel, a paraméterek változtatásával – több nemklasszikus állapot is létrehozható. Az 1.5. ábrán egy ilyen módszer vázlatát láthatjuk.



1.5. ábra. Koherens állapotok szuperpozícióját előállító módszer vázlatája [31].

Az elrendezésben egy kétállapotú atom halad át egy rácson és egy rezonátoron, majd a helyét detektáljuk. A rezonátorban lévő elektromágneses tér koherens állapotú, és az atomi átmenettel nem rezonáns. Megmutatható, hogy a detektálás után a rezonátorban $N + 1$ koherens állapot körön vett szuperpozíciója alakul ki. A szuperpozíció paramétereit a rések helyének, szélességének megfelelő választásával lehet beállítani. A nemklasszikus állapotok koherens állapot szuperpozícióval történő előállítása lehetővé tette általános módszerek kifejlesztését olyan összetett optikai rendszerek tárgyalására, ahol egyszerre több lineáris és nemlineáris folyamat megy végbe. A nemklasszikus állapotok fejlődése, a szuperpozíció együtthatóit ismerve, a vezetett általános összefüggésekkel egyszerűen elemezhető.

1.4. Schrödinger-macska állapotok előállítása lineáris optikai rendszerekkel

A Schrödinger-macska állapotok előállítása jelenleg is a kvantumoptika egyik intenzíven kutatott téma. Számos elméleti és kísérleti módszer lehető fel az irodalomban. Alapvetően két megközelítés létezik. Az egyik üregben vagy más fizikai rendszerben hozza létre a Schrödinger-macska állapotot nemlineáris kölcsönhatások segítségével. A másik lineáris optikai rendszerekkel haladó hullámú eljárásban állítja elő a Schrödinger-macska állapotot feltételes módon, azaz kvantummechanikai méréseken keresztül.

Bernard Yurke és David Stoler 1986-ban vetette fel, hogy kísérletileg is előállíthatók Schrödinger-macska állapotok [32]. A nemklasszikus tulajdonságok sérülékenysége viszont nehezíti az alkalmazást. A környezettel történő kölcsönhatás során elkerülhetetlenül fellépő csillapodás, dekoherencia „tönkreteszi” az adott kvantumállapotot.

A Schrödinger-macska állapotú atomi rezgések előállítására kidolgoztak egy módszert, majd ezt kísérletileg is létrehozták [33, 34]. Egy javaslat szerint a harmonikusan kötött, csapdázott atomok megfelelő gyorsításával kísérletileg is létrehozható az atom Schrödinger-macska állapota [23]. Egy másik módszer szerint az összenyomott vákuumállapotból fotonkivonással is létrehozhatók a Schrödinger-macska állapotok. Ebben az esetben csak kis méretű állapotokat tudunk közelíteni, $|\alpha|^2 \approx 1$. Több foton kivonásával nagyobb méretű állapotokat is generálhatunk, azonban ezek kísérleti megvalósítása jóval nehezebb, a sikeresség valószínűsége pedig nagyon gyorsan csökken [35, 36].

Magas minőségi tényezőjű üregben sikeresen hoztak létre Schrödinger-macska állapotokat, mikrohullámú és optikai doménekben kísérletileg [37, 38].

A Schrödinger-macska állapotok haladó hullámú előállítására lineáris optikai rend-

szerekkel az irodalomban többféle javaslat létezik, ezek közül sorolunk fel néhányat. Kis amplitúdójú ($\alpha \leq 1.2$) Schrödinger-macska állapotok szinte tökéletesen közelíthetők egyetlen foton összenyomásával. Nagyobb amplitúdójú Schrödinger-macska állapotok ($\alpha \geq 2$) nemdeterminisztikus módon előállíthatóak kisebb méretű Schrödinger-macska állapotokból [39].

Christopher C. Gerry a kereszt-Kerr effektust alkalmazta koherens állapotok szuperpozíciójának előállítására egy alternatív sémaiban [40]. Ezt az eljárást az 1.4.2. fejezetben ismertetjük.

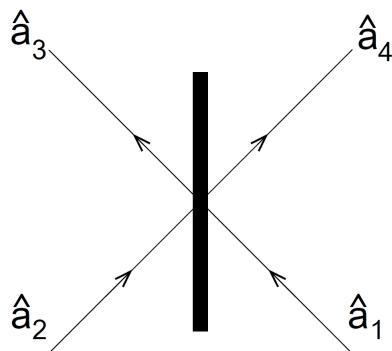
Ahhoz, hogy a lineáris optikai rendszerek működését megértsük, szükség van a nyalábosztó és a homodin mérés működésének részletes tárgyalására.

1.4.1. A nyalábosztó és a homodin mérés elmélete

Ebben a részben néhány lineáris optikai eszközt mutatunk be, melyek az előző részben bemutatott Schrödinger-macska állapot előállításában szerepet játszhatnak.

Nyalábosztó

A kvantumoptika egyik legfontosabb elemi eszköze a veszteségmentes nyalábosztó vagy félígáteresztő tükrő. A kvantummechanikában azonban ez az eszköz sokkal többre képes, mint azt a klasszikus optikában megszoktuk egy nyalábosztótól.



1.6. ábra. A veszteségmentes nyalábosztó. A két bemeneti eltüntető operátor \hat{a}_1 és \hat{a}_2 , a két kimeneti pedig \hat{a}_3 és \hat{a}_4 . Közöttük SU(2) transzformáció létesít kapcsolatot.

Egy nyalábosztónak két bemenete és két kimenete van. A bemeneten érkező két fénymodus a nyalábosztón kölcsönhat egymással, majd a kimeneteken elhagyja a nyalábosztót. A módusok léptető operátorainak kommutálási relációja miatt hatását általánosan egy SU(2) transzformációval adhatjuk meg, amely a bemeneti és kimeneti léptető operátorok

között teremt kapcsolatot:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\tau, \phi_T, \phi_R} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

ahol $\mathbf{R}_{\tau, \phi_T, \phi_R}$ az átmeneti mátrix SU(2) csoport definiáló ábrázolása [41]:

$$\mathbf{R}_{\tau, \phi_T, \phi_R} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_T} \cos \tau & e^{i\phi_R} \sin \tau \\ -e^{-i\phi_R} \sin \tau & e^{-i\phi_T} \cos \tau \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

A nyalábosztó áteresztőképessége (transzmittivitása) $\cos^2 \tau$, visszaverődési együtthatója (reflektanciája) $\sin^2 \tau$, az átmenő és a visszavert nyaláb fázistolása pedig ϕ_T , illetve ϕ_R . Kísérletileg minden SU(2) transzformáció megvalósítható nyalábosztóval, és egy adott nyalábosztó esetén a ϕ_T és ϕ_R fázisparamétereket a nyalábosztó elé és után tett fázistolókkal állíthatjuk be. Szimmetrikus nyalábosztó esetén a transzmittancia $\frac{1}{2}$, vagyis $\tau = \frac{\pi}{4}$, a fázistolások $\phi_T = 0$ és $\phi_R = \frac{\pi}{2}$, így ennek mátrixa:

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

A fázistolásmentes szimmetrikus nyalábosztó mátrixa:

$$\mathbf{R}_{\frac{\pi}{4}, 0, 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Speciális eset az ún. Hong-Ou-Mandel effektus [42], mely szerint az átmeneti mátrix

$$\mathbf{R}_{\text{HOM}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

alakban írható fel. Az (1.41) mátrixot felhasználva, egy nyalábosztó hatása két koherens állapotra:

$$\mathbf{BS} \left\{ |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 \right\} \rightarrow \left| \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \left| \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_4. \quad (1.42)$$

Az (1.42) számú egyenletet a későbbiekben többször használjuk.

Homodin mérés

A kvantummechanikai mérés alapesete a projektív mérés, amelyet von Neumann mérésnek is nevezünk [43]. Ez úgy írható le, hogy méréskor egy fizikai mennyiség hermitikus operátorának teljes rendszert alkotó sajátvektoraiból $|\psi_k\rangle$ álló projektorok hatnak az állapotra, azaz

$$\Pi_k = |\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \quad (1.43)$$

$$\sum_k \Pi_k = \mathbb{1}. \quad (1.44)$$

Ha a mérés $|\phi_k\rangle$ sajátállapothoz tartozó sajátértékhez vezet, akkor a mérés után az eredetileg $|\psi\rangle$ állapotban lévő rendszer a $|\phi_k\rangle$ állapotba kerül. Annak a valószínűsége, hogy egy $|\psi\rangle$ állapotban a mérés a $|\phi_k\rangle$ állapothoz tartozó sajátértéket adja eredményül, a következő módon adható meg:

$$P_k = |\langle\phi_k|\psi\rangle|^2, \quad (1.45)$$

kevert állapotok esetén pedig

$$P_k = \text{Tr}(\langle\phi_k|\hat{\rho}|\phi_k\rangle). \quad (1.46)$$

A homodin mérés a von Neumann mérések egy fajtája, ahol a projektor az $\hat{\mathbf{X}}$ kvadratúra operátor sajátállapotával adható meg [19]. Kvadratúra operátornak definiálhatjuk egy tetszőleges szöggel való elforgatottját is:

$$\hat{\mathbf{X}}_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\mathbf{a}} e^{-i\theta} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{i\theta}], \quad (1.47)$$

ahol θ az elforgatás szöge. Az $\hat{\mathbf{X}}_{\theta=\frac{\pi}{2}}$ operátor az $\hat{\mathbf{Y}}$ kvadratúra operátort adja. Az $|x_\theta\rangle$ állapot az $\hat{\mathbf{X}}_\theta$ operátor sajátállapota:

$$\hat{\mathbf{X}}_\theta |x_\theta\rangle = x_\theta |x_\theta\rangle. \quad (1.48)$$

Annak valószínűségi amplitúdója, hogy egy $|\alpha\rangle$ koherens állapotban a homodin mérés az x_θ eredményre vezet:

$$\langle x_\theta | \alpha \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp \left[i \langle \hat{\mathbf{x}}_{\theta+\frac{\pi}{2}} \rangle x_\theta \right] \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} (x_\theta - \langle \hat{\mathbf{x}}_\theta \rangle)^2 \right] \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} i \langle \hat{\mathbf{x}}_\theta \rangle \langle \hat{\mathbf{x}}_{\theta+\frac{\pi}{2}} \rangle \right], \quad (1.49)$$

amelyből a következőt kaphatjuk:

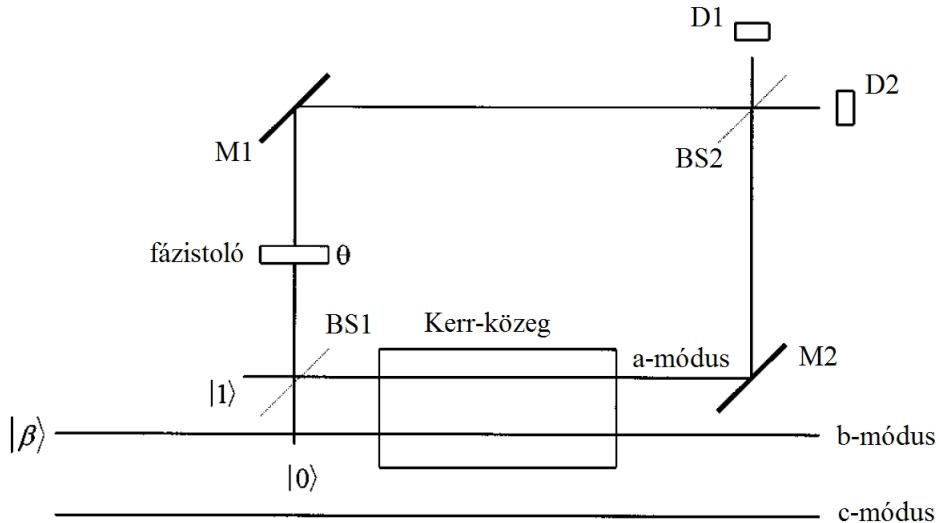
$$\begin{aligned} \langle x_{\theta=0} | \alpha \rangle &= \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp \left[i \sqrt{2} \text{Im}(\alpha) \cdot x_{\theta=0} \right] \cdot \\ &\cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(x_{\theta=0} - \sqrt{2} \text{Re}(\alpha) \right)^2 \right] \cdot \exp \left[-i \text{Re}(\alpha) \text{Im}(\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ezt a kifejezést használjuk fel a 2. fejezetben használt számításoknál.

1.4.2. Koherens állapotok szuperpozíciója Kerr-közegben

Ebben a fejezetben Christopher C. Gerry által kidolgozott Schrödinger-macska állapotok előállítására kidolgozott eljárást mutatjuk be [40]. A kísérleti elrendezés vázlata az 1.7. ábra mutatja. A berendezés egy Mach-Zehnder interferométer, amelynek egyik ágában (*a*-módus) egy Kerr-közeget helyezünk el, amelyben a módus kölcsönhat egy különböző *b*-móddal, amelyben a Schrödinger-macska állapotot akarjuk előállítani. Az ábrán feltüntetett *c*-módus csak akkor érdekes, ha a *b*-módsz összefonódott egy másik módus állapotával.

A Schrödinger-macska állapot előállításához feltesszük, hogy a Mach-Zehnder interferométer bemenetére egy egyfoton állapot és egy vákuumállapot kerül, a *b*-vel jelölt módus pedig egy $|\beta\rangle$ koherens állapotban van.



1.7. ábra. Egy sematikus vázlat Schrödinger-macska állapotok előállítására Mach-Zehnder-féle interferométerrel és egy Kerr-közeggel az egyik ágon [40].

Ennek ismeretében az első nyalábosztón (BS1) áthaladva a rendszer állapota:

$$\text{BS}\left\{ |1\rangle_1 |0\rangle_2 \right\} |\beta\rangle \rightarrow \frac{(|1,0\rangle + i|0,1\rangle)}{\sqrt{2}} |\beta\rangle. \quad (1.51)$$

Az 1.7. ábrán láthatjuk, hogy az egyik tükről előtt egy Kerr-közeg, a másik tükről előtt pedig egy fázistoló található. Tehát a tükrök előtt a rendszer állapota:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta} |1,0\rangle |\beta\rangle + i |0,1\rangle |\beta e^{-i\varphi}\rangle \right), \quad (1.52)$$

ahol $\varphi = K \frac{l}{v}$, és ahol K egy együttható, amely a $\chi^{(3)}$ harmadrendű nemlineáris szuszceptibilitással kapcsolatos, l a Kerr-közeg hossza, v a Kerr-közegbeli fénysebesség.

Ezután az M1 és M2 tükrök hatására a nyalábok $\frac{\pi}{2}$ fázistolást szenvednek, de ezt elhanyagolhatónak tekinthetjük. Végül a második nyalábosztó (BS2) hatása a rendszer állapotára:

$$\begin{aligned} \mathbf{BS}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\theta}|1,0\rangle|\beta\rangle+i|0,1\rangle|\beta e^{-i\varphi}\rangle\right)\right\}= \\ =\frac{1}{2}\left[|1,0\rangle\left(e^{i\theta}|\beta\rangle-|\beta e^{-i\varphi}\rangle\right)+i|0,1\rangle\left(e^{i\theta}|\beta\rangle+|\beta e^{-i\varphi}\rangle\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Ha a D1 (D2) detektor jelez, D2 (D1) detektor pedig nem, akkor a $|1,0\rangle$ ($|0,1\rangle$) állapotot detektáltuk, így a b -móodusban a (normálatlan) állapot:

$$|\beta\rangle\mp e^{-i\theta}|\beta e^{-i\varphi}\rangle. \quad (1.54)$$

Ez az ún. Kerr-állapot. Ha a Kerr-közeg elég hosszú, vagy K értéke elég nagy oly módon, hogy $\varphi = \pi$, valamint ha $\theta = 0$, akkor a fenti összefüggés páratlan és páros koherens állapotokká válnak: $|\beta\rangle\mp|-\beta\rangle$. A fenti egyenletnél, ha $\theta = \frac{\pi}{2}$, akkor:

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta\rangle+i|-\beta\rangle). \quad (1.55)$$

Ez az állapot szintén Schrödinger-macska állapot [27, 32].

Az (1.54) egyenletben megadott állapot, mint kiinduló állapot azonban alkalmas a Schrödinger-macska állapot előállítására. Ezt mutatjuk meg a következő fejezetben.

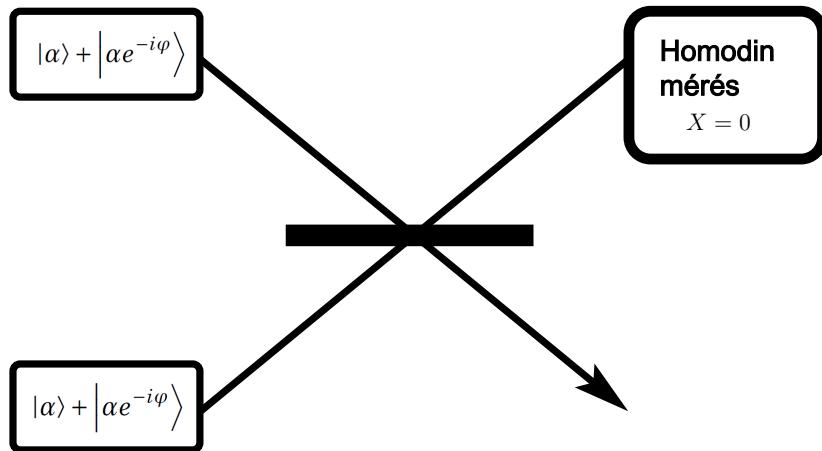
1.4.3. Schrödinger-macska állapot előállítása Kerr-állapotból

Ebben a fejezetben bemutatjuk a Schrödinger-macska állapot feltételes előállítását. Ennek lényege, hogy a két kezdeti forrás kis szeparációjú koherens állapotok szuperpozíciójából áll [8]. A két módust egy nyalábosztó bemeneteire csatoljuk, majd a kimenetek egyikén homodin mérést végezve feltételesen előállítható szimmetrikusan elhelyezett koherens állapotok szuperpozíciója a fázistér origója körül.

Tegyük fel, hogy a két kezdeti forrás koherens állapot szuperpozícióját

$$|\Phi_0\rangle = \mathcal{N}_{\Phi_0} \left(|\alpha\rangle + |\alpha e^{-i\varphi}\rangle \right), \quad (1.56)$$

alakban írhatjuk fel, ahol \mathcal{N}_{Φ_0} a normálási együttható. A szuperpozíció szeparációját a $d_0 = |\alpha - \alpha e^{-i\varphi}|$ jellemzi kis φ -re. Ezt a két bemenő állapotot egy nyalábosztóra küldjük.



1.8. ábra. Általános séma: azonos kezdeti koherens állapotok szuperpozíciója, mint két bemenő állapot, amik egy nyalábosztóra esnek.

Az általánosság elvesztése nélkül rögzítsük a bemenő állapotok fázisát:

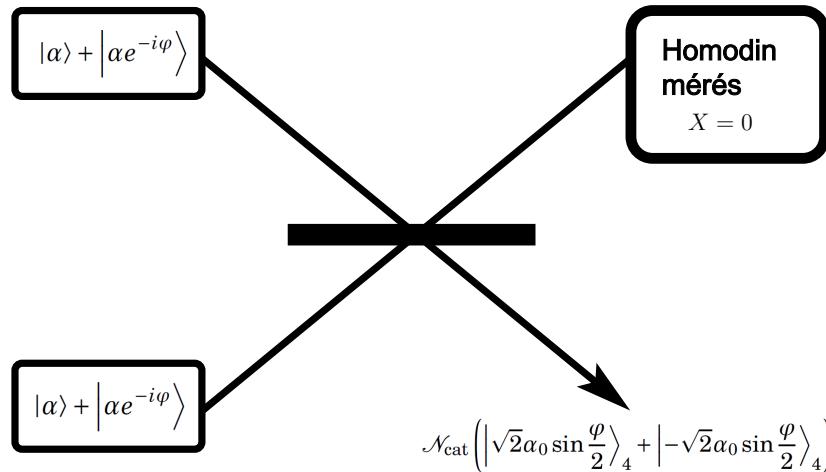
$$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}. \quad (1.57)$$

A nyalábosztó-transzformáció után a kimenő állapot:

$$|\Psi\rangle_{34} = \mathcal{N}_\Psi \left[\left(|\sqrt{2}i\alpha_0 e^{i\frac{\varphi}{2}}\rangle_3 + |\sqrt{2}i\alpha_0 e^{-i\frac{\varphi}{2}}\rangle_3 \right) |0\rangle_4 + \left| \sqrt{2}i\alpha_0 \cos\frac{\varphi}{2} \right\rangle_3 |\text{cat}\rangle_4 \right], \quad (1.58)$$

ahol $|\text{cat}\rangle_4$ a Schrödinger-macska állapot a fázistér valós tengelyén [44, 45, 46]:

$$|\text{cat}\rangle_4 = \mathcal{N}_{\text{cat}} \left(\left| \sqrt{2}\alpha_0 \sin\frac{\varphi}{2} \right\rangle_4 + \left| -\sqrt{2}\alpha_0 \sin\frac{\varphi}{2} \right\rangle_4 \right), \quad (1.59)$$



1.9. ábra. Általános séma a preparált Schrödinger-macska állapottal.

A 3-as módusban $X = 0$ -ban egy homodin mérést hajtunk végre, így a 4-es módusban a

$$|\Psi\rangle_4 = \mathcal{N}(c_1|0\rangle_4 + c_2|\text{cat}\rangle_4) \quad (1.60)$$

állapotot kapjuk, ahol a szuperpozíció együtthatói és a normálási együttható:

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle X = 0 | \sqrt{2} \alpha_0 i e^{i \frac{\varphi}{2}} \rangle + \langle X = 0 | \sqrt{2} \alpha_0 i e^{-i \frac{\varphi}{2}} \rangle, \\ c_2 &= \langle X = 0 | \sqrt{2} \alpha_0 i \cos \frac{\varphi}{2} \rangle, \\ \mathcal{N} &= (|c_1|^2 + |c_2|^2 + c_1^* c_2 \langle 0 | \text{cat} \rangle + c_1 c_2^* \langle \text{cat} | 0 \rangle)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Az együtthatók kiszámításakor a célunk, hogy c_1 zérus, vagy c_2 együtthatóhoz képest elhanyagolható legyen. Az (1.50) összefüggés alapján a c_1 , c_2 együtthatókra kapjuk:

$$\begin{aligned} |c_1| &= \left| \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-2\alpha_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \left(e^{i\alpha_0^2 \sin \varphi} + e^{-i\alpha_0^2 \sin \varphi} \right) \right| \approx 2\pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{\alpha_0^2 \varphi^2}{2}} \cdot |\cos(\alpha_0^2 \varphi)|, \\ |c_2| &= \left| \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{\alpha_0^2}{2} [\cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi + 1)]^2} \right| \approx \pi^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

A $|c_1|$ együttható akkor zérus, ha $\alpha_0^2 \varphi = \frac{\pi}{2}$. Tehát elsőrendű közelítésben:

$$\alpha_0^{\min} = \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi}}. \quad (1.63)$$

Mivel $d_0 = |\alpha - \alpha e^{-i\varphi}| = 2\alpha_0 \sin \frac{\varphi}{2} \approx \alpha_0 \varphi$, ahol $\alpha_0 = |\alpha|$, ezért:

$$|c_1| = 2\pi^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{d_0^2}{2}} \cdot |\cos(\alpha_0 d_0)|. \quad (1.64)$$

Ebben az esetben akkor lesz zérus, ha $\alpha_0 d_0 = \frac{\pi}{2}$. Tehát másodrendű közelítésben:

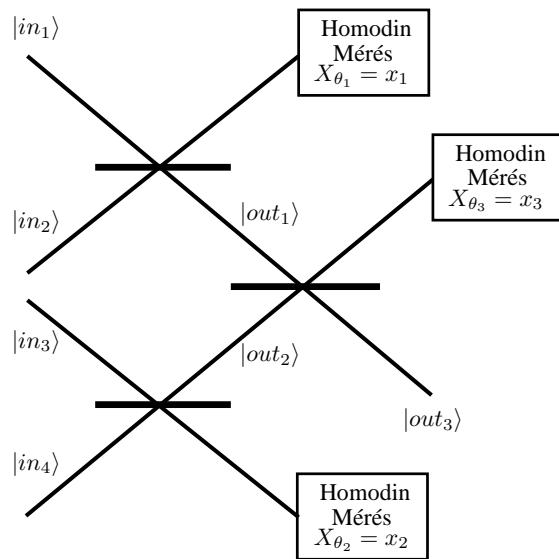
$$d_0^{\min} = \sqrt{\frac{\pi\varphi}{2}}. \quad (1.65)$$

Utóbbi kifejezés azt mutatja, hogy nagy szeparációkra ($d \geq 4$) a c_1 együttható közel lesz zérushoz. Így az (1.60) egyenlet első tagja elhanyagolható. Ezért elmondható, hogy ezzel a módszerrel feltételesen előállítható Schrödinger-macska állapot igen jó közelítéssel.

2. fejezet

Nemklasszikus állapotok előállítása lineáris optikai rendszerekkel

Az előző fejezetekben tárgyalt Schrödinger-macska állapotok előállítására használt módszerek ötletet adtak arra, hogy tetszőleges nemklasszikus állapotok is létrehozhatók az 1.9. ábrán látható elrendezés kaszkádába rendezésével.



2.1. ábra. A piramis elrendezésű összetett lineáris optikai rendszer.

A 2.1. ábra alapján láthatjuk, hogy a kísérleti elrendezés a következő lineáris optikai elemekből áll: nyalábosztók és homodin detektorok. A nyalábosztók bemeneteire 4 bemenő állapotot csatolunk, majd a kimenetek egyik ágán homodin mérést hajtunk végre.

A 2.1. és a 2.2. fejezetekben megmutatjuk, hogy különböző bemeneti állapotok esetén a fázistérben egyenesen, illetve rácson vett koherens állapot szuperpozíciók hozhatók létre a 2.1. ábrán látható elrendezéssel.

A 2.3. fejezetben egy kétlépéses numerikus eljárást dolgozunk ki, melynek első lépéseként meghatározzuk azokat a koherens állapot szuperpozíciókat, melyekkel az adott kvantumállapot létrehozható. A második lépésben azokat a mérési paramétereket határozzuk meg, amikkel az első lépésben meghatározott szuperponált állapotok megfelelő közelítéssel létrehozhatóak a kísérleti elrendezés segítségével.

2.1. Koherens állapotok szuperpozíciója egyenesen

Ebben a fejezetben azt határozzuk meg, hogy a 2.1. ábrán szereplő kísérleti elrendezés kimenetén milyen állapot jelenik meg, ha a bemeneteire a következő állapotokat csatoljuk:

$$|in_{1,2}\rangle = |in_{3,4}\rangle = \left| \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A,B} + \left| \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A,B}, \quad (2.1)$$

majd kiszámoljuk, hogy az elrendezés kimenetén milyen állapotok lesznek.

Az első nyalábosztóra az $|in_1\rangle$ és $|in_2\rangle$ állapotokat küldjük be, azaz vesszük e két állapot tenzorsorbatát:

$$\begin{aligned} |in_1\rangle \otimes |in_2\rangle &= \left| \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \left| \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \\ &\quad + \left| \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \left| \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B. \end{aligned} \quad (2.2)$$

A nyalábosztó-transzformáció után megkapjuk az $|out_1\rangle$ állapotot:

$$\begin{aligned} |out_1\rangle &= \mathbf{BS} \left\{ |in_1\rangle \otimes |in_2\rangle \right\} \rightarrow \left| \sqrt{2} \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} |0\rangle_{B'} + \left| \sqrt{2} \alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \\ &\quad + \left| \sqrt{2} \alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| \sqrt{2} \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} |0\rangle_{B'} = \\ &= \left(\left| \sqrt{2} \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} + \left| \sqrt{2} \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} \right) |0\rangle_{B'} + \\ &\quad + \left| \sqrt{2} \alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left(\left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Az $|out_2\rangle$ állapotot hasonló módon kapjuk meg. A homodin mérés után a két kimenő állapotot fogjuk a harmadik nyalábosztóra küldeni:

$$\begin{aligned} |out_1\rangle &= a_1 |0\rangle_{B'} + a_2 \left(\left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} \right), \\ |out_2\rangle &= b_1 |0\rangle_{B'} + b_2 \left(\left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

ahol az együtthatók homodin mérés után:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_1 \middle| \sqrt{2}\alpha i e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} + \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_1 \middle| \sqrt{2}\alpha i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'}, \\ a_2 &= \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_1 \middle| \sqrt{2}\alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'}, \\ b_1 &= \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_2 \middle| \sqrt{2}\alpha i e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} + \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_2 \middle| \sqrt{2}\alpha i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'}, \\ b_2 &= \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_2 \middle| \sqrt{2}\alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A továbbiakban elhagyhatjuk a módusindexeket. A fenti két kimenő módust fogjuk a harmadik nyalábosztóra küldeni. Ezeknek az állapotoknak a tenzorszorzata:

$$\begin{aligned} |\text{out}_1\rangle \otimes |\text{out}_2\rangle &= a_1 b_1 |0\rangle |0\rangle + a_1 b_2 |0\rangle \left| \sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_1 b_2 |0\rangle \left| -\sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + \\ &+ a_2 b_1 \left| \sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle |0\rangle + a_2 b_2 \left| \sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| \sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + \\ &+ a_2 b_2 \left| \sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| -\sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_1 \left| -\sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle |0\rangle + \\ &+ a_2 b_2 \left| -\sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| \sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_2 \left| -\sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| -\sqrt{2}\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A nyalábosztó-transzformáció után a kimenő állapot a következő lesz:

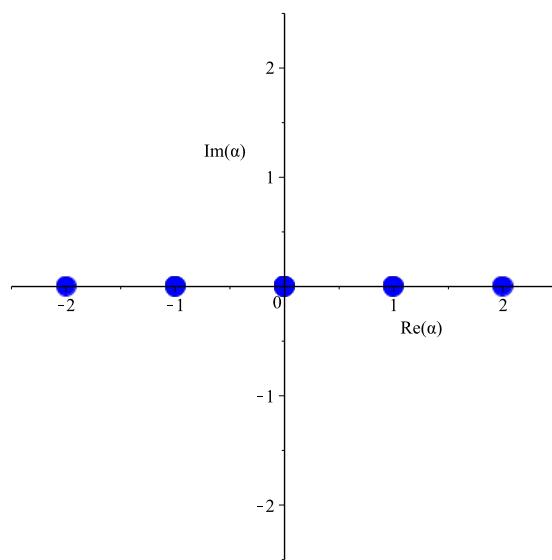
$$\begin{aligned} |\text{out}_3\rangle &= \mathbf{BS} \left\{ |\text{out}_1\rangle \otimes |\text{out}_2\rangle \right\} \rightarrow a_1 b_1 |0\rangle |0\rangle + a_1 b_2 \left| \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| -\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + \\ &+ a_1 b_2 \left| -\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_1 \left| \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + \\ &+ a_2 b_2 \left| 2\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle |0\rangle + a_2 b_2 |0\rangle \left| 2\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_1 \left| -\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| -\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + \\ &+ a_2 b_2 |0\rangle \left| -2\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_2 \left| -2\alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Alkalmazzuk a $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$ közelítést, majd vezessük be $d = \frac{\alpha \cdot \varphi}{2}$ változót. Ezután a kimenő állapot a homodin mérés után:

$$|\text{out}_3\rangle^{(\text{egyenes})} = c_1 |0\rangle + c_2 |-d\rangle + c_3 |d\rangle + c_4 |2d\rangle + c_5 |-2d\rangle, \quad (2.8)$$

ahol az együtthatók:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | 0 \rangle + a_2 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | 2d \rangle + a_2 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | -2d \rangle, \\ c_2 &= a_1 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | d \rangle + a_2 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | -d \rangle, \\ c_3 &= a_1 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | -d \rangle + a_2 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | d \rangle, \\ c_4 &= a_2 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | 0 \rangle, \\ c_5 &= a_2 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$



2.2. ábra. Egyenesen vett koherens állapotok szuperpozíciója.

A 2.2. ábrán az egyenest alkotó koherens állapotok szuperpozícióját láthatjuk. Tehát a 2.1. ábrán látható elrendezés alkalmas arra, hogy 5 koherens állapotból a fázistéren vett egyenesen szuperpozíciót hozzunk létre a (2.9) egyenlet szerint a mérési paramérekkel változtatható együtthatókkal.

2.2. Koherens állapotok szuperpozíciója rácson

Ebben a fejezetben azt számoljuk ki, hogy a 2.1. ábrán szereplő elrendezés a következő bementi állapotok esetén milyen állapotok lesznek a kimeneten.

$$\begin{aligned} |\text{in}_{1,2}\rangle &= \left| \alpha ie^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A,B} + \left| \alpha ie^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A,B}, \\ |\text{in}_{3,4}\rangle &= \left| -\alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A,B} + \left| -\alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A,B}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Az első nyalábosztóra az $|\text{in}_1\rangle$ és $|\text{in}_2\rangle$ állapotokat küldjük be, vagyis vesszük e két állapot tenzorsorozatát:

$$\begin{aligned} |\text{in}_1\rangle \otimes |\text{in}_2\rangle &= \left| \alpha ie^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| \alpha ie^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \left| \alpha ie^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| \alpha ie^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \\ &\quad + \left| \alpha ie^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| \alpha ie^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \left| \alpha ie^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| \alpha ie^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A nyalábosztó-transzformációt alkalmazva megkapjuk az $|\text{out}_1\rangle$ kimenő állapotot:

$$\begin{aligned} |\text{out}_1\rangle &= \mathbf{BS} \left\{ |\text{in}_1\rangle \otimes |\text{in}_2\rangle \right\} \rightarrow \left| \sqrt{2} \alpha ie^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} |0\rangle_{B'} + \left| \sqrt{2} \alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \\ &\quad + \left| \sqrt{2} \alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| \sqrt{2} \alpha ie^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} |0\rangle_{B'} = \\ &= \left(\left| \sqrt{2} \alpha ie^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} + \left| \sqrt{2} \alpha ie^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} \right) |0\rangle_{B'} + \\ &\quad + \left| \sqrt{2} \alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left(\left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A második nyalábosztóra az $|\text{in}_3\rangle$ és $|\text{in}_4\rangle$ állapotokat küldjük be:

$$\begin{aligned} |\text{in}_3\rangle \otimes |\text{in}_4\rangle &= \left| -\alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| -\alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \left| -\alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| -\alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \\ &\quad + \left| -\alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| -\alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B + \left| -\alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_A \left| -\alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_B. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A nyalábosztó-transzformáció után megkapjuk a $|\text{out}_2\rangle$ kimenő állapotot:

$$\begin{aligned} |\text{out}_2\rangle &= \mathbf{BS} \left\{ |\text{in}_3\rangle \otimes |\text{in}_4\rangle \right\} \rightarrow \left| -\sqrt{2} \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} |0\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left| -\sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \\ &\quad + \left| -\sqrt{2} \alpha \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left| \sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} |0\rangle_{B'} = \\ &= \left(\left| \sqrt{2} \alpha e^{i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} + \left| \sqrt{2} \alpha e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right\rangle_{A'} \right) |0\rangle_{B'} + \\ &\quad + \left| -\sqrt{2} \alpha \cos \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{A'} \left(\left| \sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Homodin mérést végezve a megfelelő móduson, a két kimenő állapot:

$$\begin{aligned} |\text{out}_1\rangle &= a_1 |0\rangle_{B'} + a_2 \left(\left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} \right), \\ |\text{out}_2\rangle &= b_1 |0\rangle_{B'} + b_2 \left(\left| \sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} + \left| -\sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle_{B'} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

ahol az együtthatók:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_1 \left| \sqrt{2} \alpha i e^{i \frac{\varphi}{2}} \right. \right\rangle_{A'} + \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_1 \left| \sqrt{2} \alpha i e^{-i \frac{\varphi}{2}} \right. \right\rangle_{A'}, \\
 a_2 &= \left\langle \hat{\mathbf{X}} = x_1 \left| \sqrt{2} \alpha i \cos \frac{\varphi}{2} \right. \right\rangle_{A'}, \\
 b_1 &= \left\langle \hat{\mathbf{Y}} = y_1 \left| \sqrt{2} \alpha e^{i \frac{\varphi}{2}} \right. \right\rangle_{A'} + \left\langle \hat{\mathbf{Y}} = y_1 \left| \sqrt{2} \alpha e^{-i \frac{\varphi}{2}} \right. \right\rangle_{A'}, \\
 b_2 &= \left\langle \hat{\mathbf{Y}} = y_2 \left| \sqrt{2} \alpha \cos \frac{\varphi}{2} \right. \right\rangle_{A'}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

A továbbiakban elhagyhatjuk a módusindexeket. A fenti két kimenő módust fogjuk a harmadik nyalábosztóra küldeni. Ezeknek az állapotoknak a tenzorszorzata:

$$\begin{aligned}
 |\text{out}_1\rangle \otimes |\text{out}_2\rangle &= a_1 b_1 |0\rangle |0\rangle + a_1 b_2 |0\rangle \left| \sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_1 b_2 |0\rangle \left| -\sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + \\
 &+ a_2 b_1 \left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle |0\rangle + a_2 b_1 \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle |0\rangle + \\
 &+ a_2 b_2 \left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| \sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_2 \left| \sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| -\sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + \\
 &+ a_2 b_2 \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| \sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_2 \left| -\sqrt{2} \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle \left| -\sqrt{2} \alpha i \sin \frac{\varphi}{2} \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

A nyalábosztó-transzformáció után a kimenő állapot:

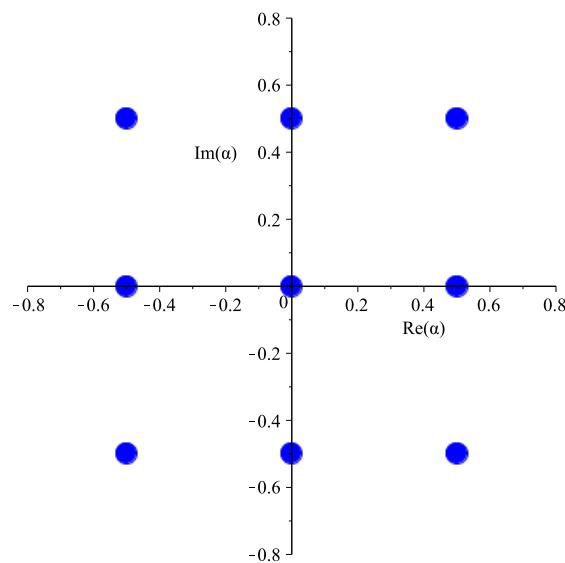
$$\begin{aligned}
 |\text{out}_3\rangle &= \mathbf{BS} \left\{ |\text{out}_1\rangle \otimes |\text{out}_2\rangle \right\} \rightarrow a_1 b_1 |0\rangle |0\rangle + a_1 b_2 \left| i \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} \right\rangle \left| -i \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} \right\rangle + \\
 &+ a_1 b_2 \left| -i \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} \right\rangle \left| i \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_1 \left| \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} \right\rangle \left| \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} \right\rangle + a_2 b_1 \left| -\frac{\alpha \cdot \varphi}{2} \right\rangle \left| -\frac{\alpha \cdot \varphi}{2} \right\rangle + \\
 &+ a_2 b_2 \left| \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} (i+1) \right\rangle \left| -\frac{\alpha \cdot \varphi}{2} (i-1) \right\rangle + a_2 b_2 \left| -\frac{\alpha \cdot \varphi}{2} (i-1) \right\rangle \left| \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} (i+1) \right\rangle + \\
 &+ a_2 b_2 \left| \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} (i-1) \right\rangle \left| -\frac{\alpha \cdot \varphi}{2} (i+1) \right\rangle + a_2 b_2 \left| -\frac{\alpha \cdot \varphi}{2} (i+1) \right\rangle \left| \frac{\alpha \cdot \varphi}{2} (i-1) \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Vezessük be $d = \frac{\alpha \cdot \varphi}{2}$ változót, így a homodin mérés után kimenő állapot:

$$\begin{aligned}
 |\text{out}_3\rangle^{(\text{rács})} &= c_1 |0\rangle + c_2 |-id\rangle + c_3 |id\rangle + c_4 |d\rangle + c_5 |-d\rangle + \\
 &+ c_6 |-(id-d)\rangle + c_7 |id+d\rangle + c_8 |-(id+d)\rangle + c_9 |id-d\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

ahol az együtthatók:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= a_1 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | 0 \rangle, & c_6 &= a_2 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | id + d \rangle, \\
 c_2 &= a_1 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | id \rangle, & c_7 &= a_2 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | -(id-d) \rangle, \\
 c_3 &= a_1 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | -id \rangle, & c_8 &= a_2 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | id - d \rangle, \\
 c_4 &= a_2 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | d \rangle, & c_9 &= a_2 b_2 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | -(id+d) \rangle. \\
 c_5 &= a_2 b_1 \langle \hat{\mathbf{X}} = x_3 | -d \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$



2.3. ábra. Rácsön vett koherens állapotok szuperpozíciója.

A 2.3. ábrán a rácsot alkotó koherens állapotok szuperpozícióját láthatjuk. Tehát a 2.1. ábrán látható elrendezés alkalmas arra, hogy 3×3 koherens állapotból a fázistéren vett rácson szuperpozíciót hozzunk létre a (2.20) egyenlet szerint a mérési paraméterekkel változtatható együtthatókkal.

2.3. Nemklasszikus állapotok előállítása: Eredmények

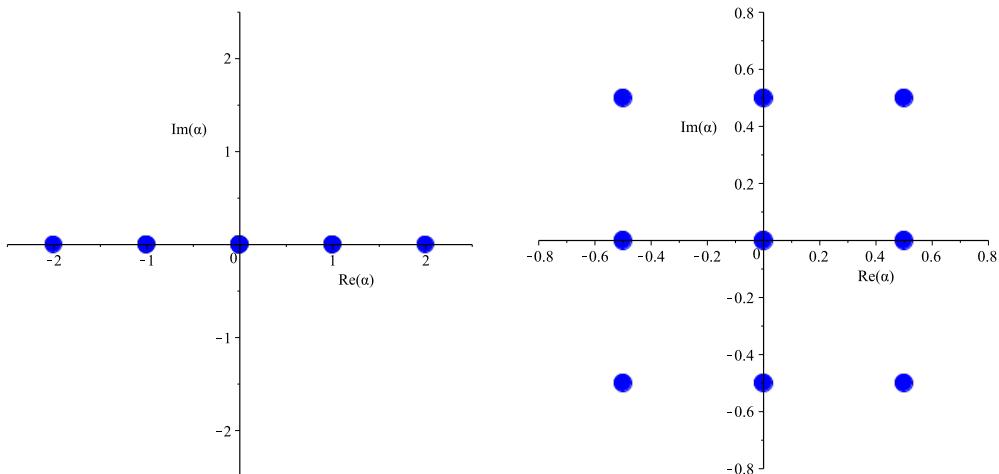
Ebben a fejezetben olyan két lépéses numerikus algoritmust mutatunk be, amellyel kiszámolhatjuk a tárgyalt kísérleti elrendezés paramétereit úgy, hogy egy adott $|\Psi_t\rangle$ nemklasszikus állapotot közelítő koherens állapot szuperpozíciót generáljon. Az algoritmus megírásához MATLAB programot, és annak beépített genetikus algoritmus utasításkészletét használtuk.

Az első lépésben meghatározzuk a (2.8) és a (2.19) egyenletekkel leírt $|out\rangle_3^{(egyenes)}$ és $|out\rangle_3^{(rács)}$ paramétereit úgy, hogy azok a legjobban közelítsek a létrehozandó $|\Psi_t\rangle$ nemklasszikus állapotot. A numerikus módszer maximalizálja az alábbi egyenletekben definiált hasonlósági paramétert (fidelity):

$$\begin{aligned} F_1 &= \left| \langle \Psi_t | out_3 \rangle^{(egyenes)} \right|, \\ F_2 &= \left| \langle \Psi_t | out_3 \rangle^{(rács)} \right|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A második lépésben meghatározzuk azokat az optimális mérési paramétereiket, melyek a 2.1. ábrán látható kísérleti elrendezés segítségével megfelelően közelítik az előző lépésben meghatározott $|\Psi_a\rangle$ koherens szuperpozíciókat. Az algoritmus során a közelítés jóságát használtuk optimalizálandó paraméternek, mely a következőképp írható fel:

$$F = |\langle \Psi_t | \Psi_a \rangle|. \quad (2.22)$$



2.4. ábra. Egyenesen és rácson vett koherens állapotok szuperpozíciója.

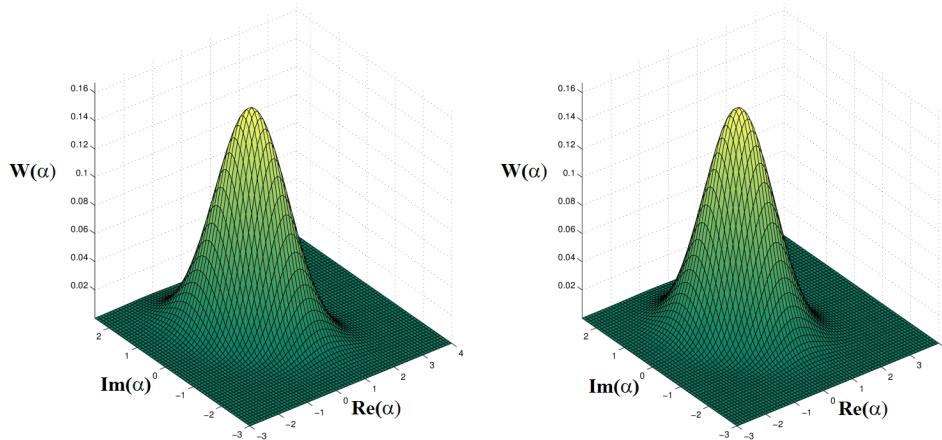
A numerikus eljárás során a következő nemklasszikus állapotokat közelítettük: össze-nyomott vákuumállapot, összenyomott koherens állapot, számaállapotok és összenyomott

számállapotok. Munkánk során többféle összenyomási paraméterrel dolgoztunk, azonban a dolgozatban csak $\zeta = \frac{i\pi}{12}$ „squeezing paraméterrel” történt számolásokat mutatjuk be. A következő fejezetekben bemutatjuk, hogy az általunk kidolgozott numerikus eljárás milyen hatékonysággal képes közelíteni néhány nemklasszikus állapotot.

Egyenesel való közelítés

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy az általunk kidolgozott numerikus eljárás az összenyomott vákuum és összenyomott koherens állapotokat milyen hatékonysággal képes közelíteni a fázistérben egyenesen vett koherens állapot szuperpozíciókkal.

Koherens állapotok egyenesen vett szuperpozíciójával az összenyomott vákuumállapotot majdnem tökéletesen közelítettük, valamint magát az állapotot $F \approx 1$ fidelity-vel tudtuk közelíteni. Az összenyomott vákuumállapot és a lineáris optikai rendszerrel létrehozott koherens állapot szuperpozíció hasonlósága közelítőleg 1. Tehát elmondható, hogy a kísérleti elrendezéssel tökéletesen előállítható az összenyomott vákuumállapot.



(a) Az állapot Wigner-függvénye. (b) A közelítő állapot Wigner-függvénye.

2.5. ábra. Összenyomott $|\alpha = 0\rangle$ vákuumállapot közelítése a fázistérben vett egyenesen.

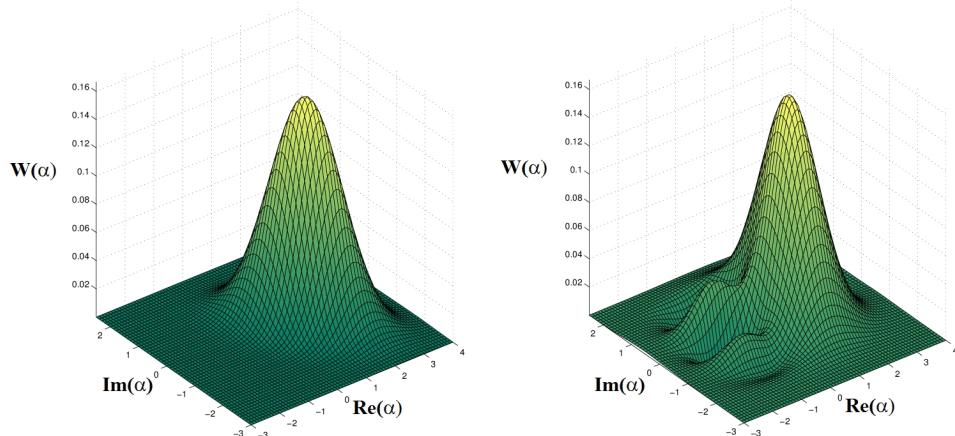
A 2.5. ábrán láthatjuk az eredeti állapot, valamint a kísérleti elrendezéssel közelített állapot Wigner-függvényét. Látható, hogy a két ábra szinte teljesen megegyezik. Az ehhez tartozó optimális paraméterek:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.4504 + 0.0452i, & c_4 &= -0.1032 + 0.1418i, \\ c_2 &= -0.3004 + 0.2916i, & c_5 &= 0.3391 + 0.1310i, \\ c_3 &= -0.6402 + 0.2168i, & d &= 0.296, \end{aligned} \quad (2.23)$$

továbbá az optimális mérési paraméterek értékei:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1.5176, \\ x_2 &= -1.51805, \\ x_3 &= 3.47674 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Az összenyomott $|\alpha = 1\rangle$ koherens állapot egyenesel való közelítésekor $F = 0.965$ lett a fidelity értéke, ennek Wigner-függvényét a 2.6. ábra mutatja.



(a) Az állapot Wigner-függvénye. (b) A közelítő állapot Wigner-függvénye.

2.6. ábra. Összenyomott $|\alpha = 1\rangle$ koherens állapot közelítése a fázistérben vett egyenesen.

Láthatjuk, hogy már nincs tökéletes egyezés, mivel a Wigner-függvények nem azonosak. Ebben az esetben az ehhez tartozó optimális paraméterek:

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.0008 - 0.0281i, & c_4 &= -0.6532 + 0.6535i, \\ c_2 &= -0.0152 + 0.0748i, & c_5 &= 0.3082 + 0.1392i, \\ c_3 &= 0.1147 - 0.1101i, & d &= 0.88, \end{aligned} \quad (2.25)$$

valamint az optimális mérési paraméterek:

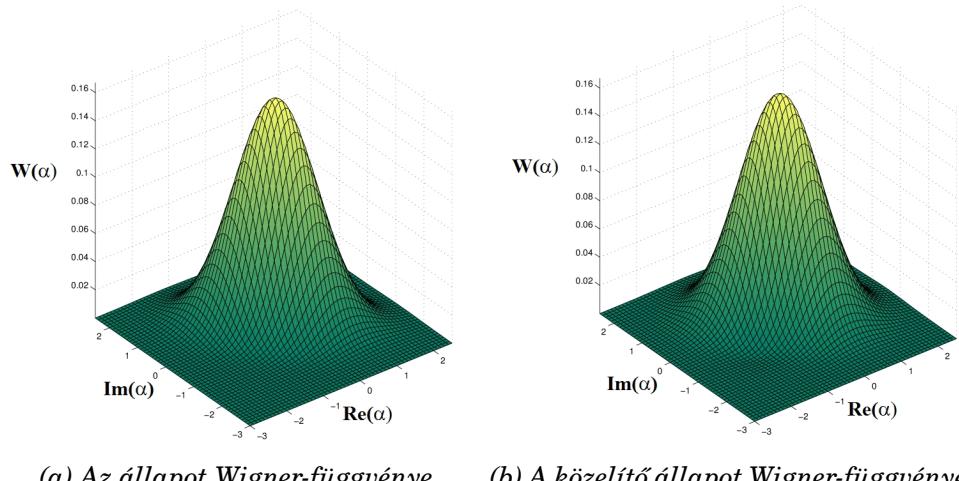
$$\begin{aligned} x_1 &= -0.169, \\ x_2 &= -1.879, \\ x_3 &= 0.791. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A számállapotokat és az összenyomott számállapotokat nem tudtuk olyan jól közelíteni. Ennek oka, hogy számításaink során beláttuk, hogy a fotonszám növelésével a közelítés egyre nehezebb.

Ráccsal való közelítés

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy az általunk kidolgozott numerikus eljárás az összenyomott vákuum és összenyomott koherens állapotokat, illetve számállapotokat és összenyomott számállapotokat milyen hatékonysággal képes közelíteni a fázistérben rácson vett koherens állapot szuperpozíciókkal.

Koherens állapotok rácson vett szuperpozíciójával az összenyomott vákuumállapotot az egyeneshez hasonlóan szinte tökéletesen tudtuk közelíteni, azaz $F = 0.9996$ a fidelity. A 2.7. ábrán a ráccsal közelített összenyomott vákuumállapotot láthatjuk.



(a) Az állapot Wigner-függvénye. (b) A közelítő állapot Wigner-függvénye.

2.7. ábra. Összenyomott $|\alpha = 0\rangle$ vákuumállapot közelítése a fázistérben vett rácson.

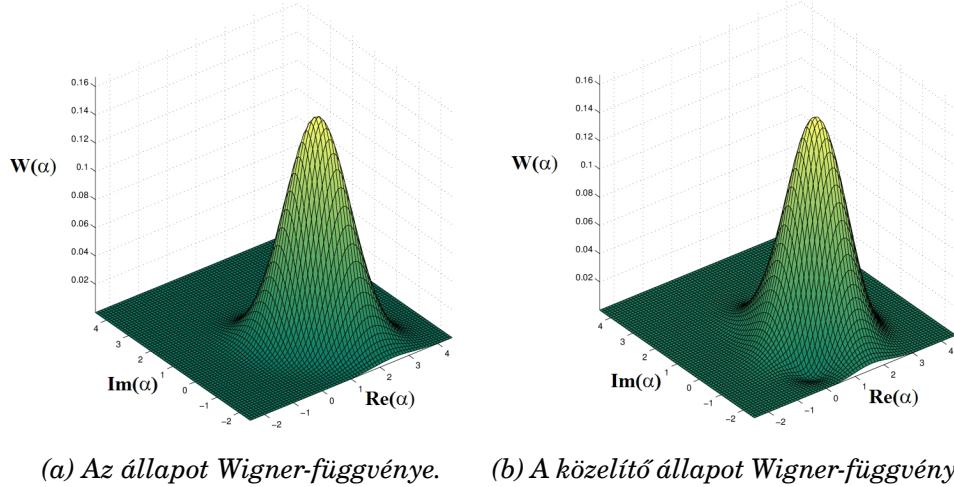
Az ábra alapján belátható, hogy az egyezés szinte tökéletes. Az ehhez tartozó optimális paraméterek:

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.1106 + 0.2901i, & c_6 &= 0.0399 + 0.0246i, \\ c_2 &= -0.2127 + 0.0674i, & c_7 &= -0.0138 + 0.0752i, \\ c_3 &= 0.0208 + 0.1058i, & c_8 &= -0.0640 + 0.1381i, \\ c_4 &= 0.1493 + 0.0922i, & c_9 &= -0.1915 + 0.4102i, \\ c_5 &= -0.2396 + 0.7196i, & d &= 0.6082. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Továbbá az optimális mérési paraméterek:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.926, \\ x_2 &= 1.539, \\ x_3 &= 5.559 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Az összenyomott $|\alpha = 1\rangle$ koherens állapot ráccsal való közelítésekor $F = 0.9906$ lett a fidelity értéke, a 2.8. ábra alapján belátható, hogy az összenyomott $|\alpha = 1\rangle$ koherens állapot az egyeneshez képest (lásd 2.6. ábra) jobban tudtuk közelíteni ráccsal.



(a) Az állapot Wigner-függvénye. (b) A közelítő állapot Wigner-függvénye.

2.8. ábra. Összenyomott $|\alpha = 1\rangle$ koherens állapot közelítése a fázistérben vett rácson.

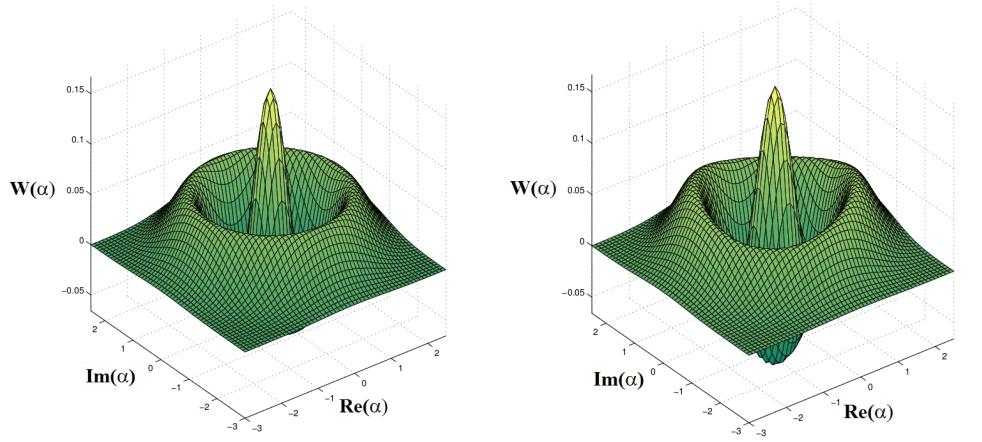
Az ehhez tartozó optimális paraméterek:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.0066 + 0.0152i, & c_6 &= 0.6638 + 0.1077i, \\ c_2 &= 0.0206 + 0.0317i, & c_7 &= 0.0162 - 0.0036i, \\ c_3 &= -0.0046 + 0.1200i, & c_8 &= -0.1559 + 0.2477i, \\ c_4 &= -0.0445 + 0.0343i, & c_9 &= -0.6203 + 0.0487i, \\ c_5 &= 0.2078 + 0.1104i, & d &= 0.88, \end{aligned} \quad (2.29)$$

valamint az optimális mérési paraméterek:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3.21, \\ x_2 &= -1.61, \\ x_3 &= 5.91. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Az egyenesen vett koherens állapotok szuperpozíciójával elég nehezen tudtuk közelíteni a számállapotokat és az összenyomott számállapotokat. A rácson vett koherens állapotok szuperpozíciójával viszont igen jól közelíthetők. Az $|n = 2\rangle$ számállapotot majdnem tökéletesen tudtuk közelíteni, azaz $F = 0.983$ a fidelity. A 2.9. ábrán láthatjuk az $|n = 2\rangle$ számállapot és a kísérleti elrendezéssel közelített állapot Wigner-függvényét.



(a) Az állapot Wigner-függvénye. (b) A közelítő állapot Wigner-függvénye.

2.9. ábra. Az $|n = 2\rangle$ számállapot közelítése a fázistérben vett rácson.

Az ehhez tartozó optimális paraméterek:

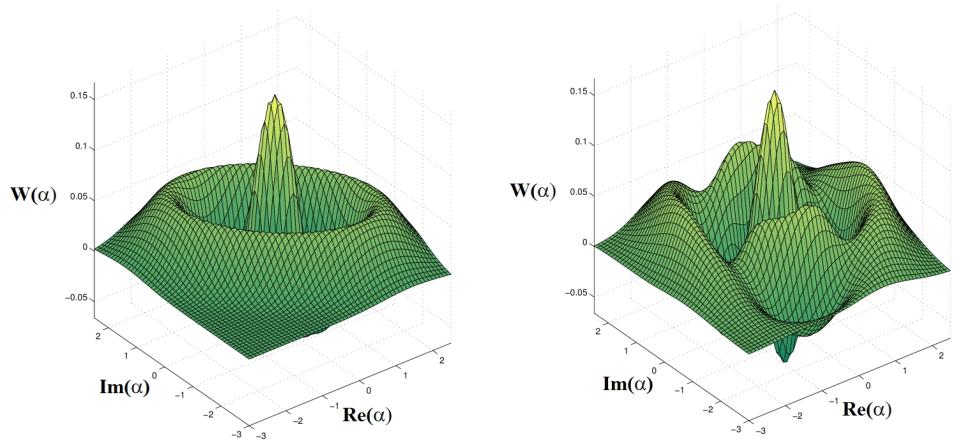
$$\begin{aligned} c_1 &= -0.1334 - 0.3310i, & c_6 &= -0.5990 + 0.1835i, \\ c_2 &= 0.1746 - 0.2665i, & c_7 &= 0.0863 + 0.3684i, \\ c_3 &= 0.0771 + 0.1911i, & c_8 &= 0.4168 - 0.1015i, \\ c_4 &= 0.0578 - 0.0108i, & c_9 &= -0.0659 - 0.0297i, \\ c_5 &= -0.0175 + 0.0105i, & d &= 0.399, \end{aligned} \quad (2.31)$$

valamint az optimális mérési paraméterek:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.499, \\ x_2 &= 38.78, \\ x_3 &= -0.003. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Az összenyomott $|n = 2\rangle$ számállapotot ugyan nem tökéletesen, de elég jól tudtuk közelíteni, és $F = 0.928$ a fidelity értéke. A 2.10. ábrán láthatjuk is, hogy nem egyezik az eredeti és a kísérleti elrendezéssel közelített állapot Wigner-függvénye. Az ehhez tartozó optimális paraméterek:

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.5056 + 0.1441i, & c_6 &= 0.1011 + 0.1097i, \\ c_2 &= 0.0471 - 0.2596i, & c_7 &= 0.1892 - 0.0959i, \\ c_3 &= -0.0218 - 0.0264i, & c_8 &= 0.3445 - 0.0038i, \\ c_4 &= 0.2732 - 0.1533i, & c_9 &= -0.5188 + 0.3154i, \\ c_5 &= -0.0001 + 0.0018i, & d &= 0.96. \end{aligned} \quad (2.33)$$



(a) Az állapot Wigner-függvénye. (b) A közelítő állapot Wigner-függvénye.

2.10. ábra. Összenyomott $|n = 2\rangle$ számállapot közelítése a fázistérben vett rácson.

Továbbá az optimális mérési paraméterek:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.747, \\ x_2 &= -1.026, \\ x_3 &= 0.002. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Konklúzió

A bemutatott eredmények azt mutatják, hogy vannak olyan nemklasszikus állapotok, melyeket az előzőekben leírt módszerrel jól lehet közelíteni, így ezeket az állapotokat később kísérletileg is elő lehet állítani. Vannak viszont olyan nemklasszikus állapotok, melyeket nem lehet jól közelíteni. Egyenesen vett koherens állapotok szuperpozíciójával például nehezen tudtuk közelíteni a szám- és összenyomott számállapotokat. Ennek oka, hogy 3 szabad paraméterünk ebben az esetben nem ad elég szabadságot ahhoz, hogy az ilyen nemklasszikus állapotokat jól közelítsük.

Összefoglalás

A dolgozatban a fény tetszőleges kvantumállapotainak haladó hullámú előállítására adtunk javaslatot. Kidolgoztunk egy lineáris optikai rendszert, amely nyalábosztókat és homodin méréseket tartalmaz, amellyel koherens állapot szuperpozíciók állíthatók elő a fázistérben vett egyenesen, valamint rácson. A szuperpozíció paramétereit bizonyos tartományon belül a kísérleti elrendezésben szereplő három homodin mérés segítségével, illetve az elrendezés bemenő paramétereivel szabályozhatjuk.

Numerikus eljárást dolgoztunk ki, amelyekkel úgy határozható meg a kísérleti berendezés paraméterei, hogy egy előre meghatározott koherens állapot szuperpozíciót állítson elő a berendezés. A program a szuperpozíció paramétereit úgy határozza meg, hogy a szuperponált állapot egy adott nemklasszikus állapotot közelítsen. A numerikus eljárásban speciális nemklasszikus állapotokat közelítettünk: összenyomott vákuumállapot, összenyomott koherens állapot, szám- és összenyomott számállapotok.

Az általunk kidolgozott módszer jó lehetőséget ad arra, hogy a fény nemklasszikus állapotait kísérletileg is előállítsa, eredményünk pedig gyakorlati alkalmazását teszi lehetővé az optikai kommunikációban és a nagypontosságú méréstechnikában.

A. függelék

Nyalábosztó-transzformáció

Jelen függelékben a diplomamunkában többször használt formulát, a nyalábosztó-transzformációt számítjuk ki, mely saját vezetés alapján történik. Először írjuk fel a kimenő módusok transzformációját (lásd 1.6. ábra):

$$\hat{\mathbf{a}}_3 = \frac{\hat{\mathbf{a}}_1 + i\hat{\mathbf{a}}_2}{\sqrt{2}}, \quad \hat{\mathbf{a}}_4 = \frac{\hat{\mathbf{a}}_2 + i\hat{\mathbf{a}}_1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.1})$$

Ezek alapján a bemeneti módusokra az

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \frac{\hat{\mathbf{a}}_3 - i\hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}}, \quad \hat{\mathbf{a}}_2 = \frac{\hat{\mathbf{a}}_4 - i\hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.2})$$

egyenletek érvényesülnek [47], és a konjugált alakjai [42, 48, 49]:

$$\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger = \frac{\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + i\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger = \frac{\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger + i\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.3})$$

A következőkben határozzuk meg, hogyan hat egy nyalábosztó két koherens állapotra:

$$\begin{aligned} \mathbf{BS}\left\{|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\right\} &= \mathbf{BS}\left\{e^{\alpha\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger - \alpha^*\hat{\mathbf{a}}_1} \cdot e^{\beta\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger - \beta^*\hat{\mathbf{a}}_2} |0\rangle_1|0\rangle_2\right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \exp\left[\alpha\left(\frac{\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + i\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger}{\sqrt{2}}\right) - \alpha^*\left(\frac{\hat{\mathbf{a}}_3 - i\hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}}\right)\right] \cdot \exp\left[\beta\left(\frac{\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger + i\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger}{\sqrt{2}}\right) - \beta^*\left(\frac{\hat{\mathbf{a}}_4 - i\hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}}\right)\right] |0\rangle_3|0\rangle_4. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Rendezzük át az exponenciálisok kitevőit 3-as és 4-es módus szerint a megfelelő módon:

$$\begin{aligned} \mathbf{BS}\left\{|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\right\} &\rightarrow \exp\left[\frac{\alpha\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - \alpha^*\hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}}\right] \cdot \exp\left[\frac{i\beta\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + i\beta^*\hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}}\right] \cdot \\ &\cdot \exp\left[\frac{i\alpha\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger + i\alpha^*\hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}}\right] \cdot \exp\left[\frac{\beta\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \beta^*\hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}}\right] |0\rangle_3|0\rangle_4. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Használjuk fel a Baker-Campbell-Hausdorff formula speciális alakját [11, 12, 17, 18]:

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (\text{A.6})$$

mely két nemkommutáló operátorra érvényes. Számítsuk ki a 3-as módus kommutátorát:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\alpha \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - \alpha^* \hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{i\beta \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + i\beta^* \hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}} \right) \right] = \left(\frac{\alpha \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - \alpha^* \hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{i\beta \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + i\beta^* \hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}} \right) - \\
& - \left(\frac{i\beta \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + i\beta^* \hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{\alpha \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - \alpha^* \hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} i\alpha\beta (\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger)^2 + \frac{1}{2} i\alpha\beta^* \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger \hat{\mathbf{a}}_3 - \frac{1}{2} i\alpha^* \beta \hat{\mathbf{a}}_3 \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - \\
& - \frac{1}{2} i\alpha^* \beta^* \hat{\mathbf{a}}_3^2 - \frac{1}{2} i\alpha\beta (\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger)^2 + \frac{1}{2} i\alpha^* \beta \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger \hat{\mathbf{a}}_3 - \frac{1}{2} i\alpha\beta^* \hat{\mathbf{a}}_3 \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + \frac{1}{2} i\alpha^* \beta^* \hat{\mathbf{a}}_3^2 = \\
& = \frac{1}{2} i\alpha\beta^* \underbrace{(\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger \hat{\mathbf{a}}_3 - \hat{\mathbf{a}}_3 \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger)}_{-1} + \frac{1}{2} i\alpha^* \beta \underbrace{(\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger \hat{\mathbf{a}}_3 - \hat{\mathbf{a}}_3 \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger)}_{-1} = -\frac{i}{2} (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta). \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Ezután számítsuk ki a 4-es módus kommutátorát:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{i\alpha \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger + i\alpha^* \hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{\beta \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \beta^* \hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}} \right) \right] = \left(\frac{i\alpha \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger + i\alpha^* \hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{\beta \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \beta^* \hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}} \right) - \\
& - \left(\frac{\beta \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \beta^* \hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{i\alpha \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger + i\alpha^* \hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} i\alpha\beta (\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger)^2 - \frac{1}{2} i\alpha\beta^* \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \hat{\mathbf{a}}_4 + \frac{1}{2} i\alpha^* \beta \hat{\mathbf{a}}_4 \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \\
& - \frac{1}{2} i\alpha^* \beta^* \hat{\mathbf{a}}_4^2 - \frac{1}{2} i\alpha\beta (\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger)^2 - \frac{1}{2} i\alpha^* \beta \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \hat{\mathbf{a}}_4 + \frac{1}{2} i\alpha\beta^* \hat{\mathbf{a}}_4 \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger + \frac{1}{2} i\alpha^* \beta^* \hat{\mathbf{a}}_4^2 = \\
& = \frac{1}{2} i\alpha\beta^* \underbrace{(\hat{\mathbf{a}}_4 \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \hat{\mathbf{a}}_4)}_1 + \frac{1}{2} i\alpha^* \beta \underbrace{(\hat{\mathbf{a}}_4 \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \hat{\mathbf{a}}_4)}_1 = \frac{i}{2} (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta). \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Folytatva az exponenciálisok rendezését, a következőt kapjuk eredményül:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{BS}\left\{ |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 \right\} \rightarrow \exp \left[\frac{(\alpha + i\beta) \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - (\alpha + i\beta)^* \hat{\mathbf{a}}_3}{\sqrt{2}} \right] \cdot \exp \left[\frac{(i\alpha + \beta) \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - (i\alpha + \beta)^* \hat{\mathbf{a}}_4}{\sqrt{2}} \right] \cdot \\
& \cdot \underbrace{\exp \left[-\frac{i}{4} (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta) \right]}_1 \cdot \exp \left[\frac{i}{4} (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta) \right] |0\rangle_3 |0\rangle_4 = \\
& = \hat{\mathbf{D}}_3 \left(\frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{2}} \right) \hat{\mathbf{D}}_4 \left(\frac{i\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right) |0\rangle_3 |0\rangle_4 = \left| \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \left| \frac{i\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right\rangle_4. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Tetszőleges, azaz nem rögzített paraméterek esetén a bemenő módusokra az

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{a}}_1^\dagger = e^{i\phi_T} \cos \tau \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - e^{-i\phi_R} \sin \tau \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger, \\
& \hat{\mathbf{a}}_2^\dagger = e^{i\phi_R} \sin \tau \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + e^{-i\phi_T} \cos \tau \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \tag{A.10}
\end{aligned}$$

egyenletek érvényesülnek (lásd: (1.37) egyenlet konjugált alakja). Ezek ismeretében:

$$\mathbf{BS}\left\{ |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 \right\} \rightarrow \left| \alpha e^{i\phi_T} \cos \tau + \beta e^{i\phi_R} \sin \tau \right\rangle_3 \left| -\alpha e^{-i\phi_R} \sin \tau + \beta e^{-i\phi_T} \cos \tau \right\rangle_4. \tag{A.11}$$

A teljesség kedvéért az (A.9) egyenletet kiegészítjük a destruktív interferenciával, ami akkor keletkezik, amikor a nyalábosztóra érkezik. Ezért a bemenő módus egyik tagjára $\frac{\pi}{2}$ fázistolást hajtunk végre. Tehát a nyalábosztó hatása két koherens állapotra:

$$\mathbf{BS}\left\{|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\right\} \rightarrow \left|i\frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}}\right\rangle_3 \left|-\frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}}\right\rangle_4. \quad (\text{A.12})$$

Ennek a transzformációnak a fázistolásmentes esete:

$$\mathbf{BS}\left\{|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\right\} \rightarrow \left|\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\right\rangle_3 \left|\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}\right\rangle_4. \quad (\text{A.13})$$

A nyalábosztó-transzformáció általánosítható a következő módon. Legyen

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Tetszőleges számállapotokra az alábbi általánosított transzformáció érvényes:

$$\begin{aligned} \mathbf{BS}\left\{ |m\rangle_1 |n\rangle_2 \right\} &= \mathbf{BS}\left\{ \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\hat{\mathbf{a}}_1^\dagger \right)^m \cdot \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{\mathbf{a}}_2^\dagger \right)^n |0\rangle_1 |0\rangle_2 \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \left[A'^* \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + B'^* \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right]^m \cdot \left[C'^* \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + D'^* \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right]^n |0\rangle_3 |0\rangle_4 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(A'^* \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger \right)^{m-k} \left(B'^* \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right)^k \right] \cdot \left[\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left(C'^* \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger \right)^{n-l} \left(D'^* \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right)^l \right] |0\rangle_3 |0\rangle_4 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k} \binom{n}{l} \left(A'^* \right)^{m-k} \left(B'^* \right)^k \left(C'^* \right)^{n-l} \left(D'^* \right)^l \left(\hat{\mathbf{a}}_3^\dagger \right)^{m-k+n-l} \left(\hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right)^{k+l} |0\rangle_3 |0\rangle_4, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ahol felhasználtuk az $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$ binomiális tételt.

Koherens állapotokra az általánosított nyalábosztó-transzformáció:

$$\begin{aligned} \mathbf{BS}\left\{ |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 \right\} &\rightarrow \exp \left[\alpha \left(A'^* \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + B'^* \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right) - \alpha^* \left(A' \hat{\mathbf{a}}_3 + B' \hat{\mathbf{a}}_4 \right) \right] \cdot \\ &\cdot \exp \left[\beta \left(C'^* \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger + D'^* \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger \right) - \beta^* \left(C' \hat{\mathbf{a}}_3 + D' \hat{\mathbf{a}}_4 \right) \right] |0\rangle_3 |0\rangle_4 = \\ &= \exp \left[\left(\alpha A'^* + \beta C'^* \right) \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - \left(\alpha^* A' + \beta^* C' \right) \hat{\mathbf{a}}_3 \right] \cdot \\ &\cdot \exp \left[\left(\alpha B'^* + \beta D'^* \right) \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \left(\alpha^* B' + \beta^* D' \right) \hat{\mathbf{a}}_4 \right] |0\rangle_3 |0\rangle_4 = \\ &= \exp \left[\left(\alpha A'^* + \beta C'^* \right) \hat{\mathbf{a}}_3^\dagger - \left(\alpha A'^* + \beta C'^* \right)^* \hat{\mathbf{a}}_3 \right] \cdot \\ &\cdot \exp \left[\left(\alpha B'^* + \beta D'^* \right) \hat{\mathbf{a}}_4^\dagger - \left(\alpha B'^* + \beta D'^* \right)^* \hat{\mathbf{a}}_4 \right] |0\rangle_3 |0\rangle_4 = \\ &= \hat{\mathbf{D}}_3 \left(\alpha A'^* + \beta C'^* \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_4 \left(\alpha B'^* + \beta D'^* \right) |0\rangle_3 |0\rangle_4 = |\alpha A'^* + \beta C'^* \rangle_3 |\alpha B'^* + \beta D'^* \rangle_4. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Irodalomjegyzék

- [1] ÁDÁM PÉTER: *Egydimenziós reprezentációk és a fény nemklasszikus állapotai* (Kandidátusi értekezés, 1993)
- [2] P. DOMOKOS, J. JANSZKY, S. SZABO, P. ADAM, Phys. Rev. A **51**, 4191-4193 (1995)
- [3] P. DOMOKOS, J. JANSZKY, P. ADAM, Phys. Rev. A **50**, 3340-3344 (1994)
- [4] P. ADAM, J. JANSZKY, Phys. Lett. A **149**, 67-69 (1990)
- [5] P. ADAM, J. JANSZKY, A. V. VINOGRADOV, Opt. Commun. **80**, 155-158 (1990)
- [6] P. ADAM, J. JANSZKY, A. V. VINOGRADOV, Phys. Lett. A **160**, 506-510 (1991)
- [7] P. ADAM, I. FOLDESI, J. JANSZKY, Phys. Rev. A **49**, 1281-1287 (1994)
- [8] P. ADAM, T. KISS, Z. DARAZS, I. JEX, Phys. Scr. **T140**, 014011 (2010)
- [9] DAKNA M, ANHUT T, OPATRNÝ T, KNÖLL L, WELSCH D-G, Phys. Rev. A **55**, 3184-3194 (1997); arXiv:quant-ph/9612011
- [10] P. A. M. DIRAC, *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation*, Proc. R. Soc. Lond. A 1927 **114** (1927)
- [11] WILLIAM H. LOUISELL: *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973)
- [12] CHRISTOPHER C. GERRY, PETER L. KNIGHT: *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, 2005)
- [13] E. SCHRÖDINGER, *Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)*, Annalen der Physik **79**, 361-376. (1926)
- [14] GESZTI TAMÁS: *Kvantummechanika* (Typotex Kiadó, 2007)
- [15] R. J. GLAUBER, Phys. Rev. Lett. **10**, 84-86 (1963)

- [16] R. J. GLAUBER, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963)
- [17] LEONARD MANDEL, EMIL WOLF: *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995)
- [18] MARLAN O. SCULLY, M. SUHAIL ZUBAIRY: *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997)
- [19] STEPHEN M. BARNETT, PAUL M. RADMORE: *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford University Press, 2002)
- [20] E. P. WIGNER, Phys. Rev. **40**, 749 (1932)
- [21] U. M. TITULAUER, R. J. GLABUBER, Phys. Rev. **140**, B676 (1965)
- [22] S. YA. KILIN, D. B. HOROSHKO, Phys. Rev. Lett. **74**, 5206-5207 (1995)
- [23] K. VOGEL, V. M. AKULIN, W. P. SCHLEICH, Phys. Rev. Lett. **71**, 1816-1819 (1993)
- [24] J. N. HOLLENHORST, Phys. Rev. D **19**, 1669 (1979)
- [25] RODNEY LOUDON: *The Quantum Theory of Light (3rd edition)* (Oxford University Press, Oxford, 2000)
- [26] P. A. M DIRAC: *The principles of Quantum Mechanics (4th edition)* (Oxford University Press, Oxford, 1987)
- [27] V. BUŽEK, A. VIDIELLA-BARRANCO, P. L. KNIGHT, Phys. Rev. A **45**, 6570 (1992)
- [28] E. SCHRÖDINGER, Naturwissenschaften **23**, 807 (1935)
- [29] M. HILLERY, Phys Rev. A **36**, 3796 (1987)
- [30] J. JANSZKY, A. V. VINOGRADOV, Phys. Rev. Lett. **64**, 2771 (1990)
- [31] ÁDÁM PÉTER, JANSZKY JÓZSEF: *Koherens állapotok a kvantumoptikában* (Fizikai Szemle, Magyar Fizikai folyóirat, 2006. október)
- [32] B. YURKE, D. STOLER, Phys. Rev. Lett. **57**, 13-16 (1986)
- [33] J. JANSZKY, A. V. VINOGRADOV, T. KOBAYASHI, Z. KIS, Phys. Rev. A **50**, 1777 (1994)
- [34] I. A. WAMSLEY, M. G. RAYMER, Phys. Rev. A **52**, 681 (1995)

- [35] T. CHANELIERE *et al*, Nature (London) **438**, 833 (2005)
- [36] M. D. EISAMAN *et al*, Nature (London) **438**, 837 (2005)
- [37] M. BRUNE *et al*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996)
- [38] C. MONROE *et al*, Science **272**, 1131 (1996)
- [39] A. OURJOUTSEV *et al*, Nature (London) **448**, 784 (2007)
- [40] CHRISTOPHER C. GERRY, Phys. Rev. A **59**, 4095 (1999).
- [41] R. A. CAMPOS, B. E. A. SALEH, M. C. TEICH, Phys. Rev. A **40**, 1371-1384 (1989)
- [42] C. K. HONG, Z. Y. OU, L. MANDEL, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044-2046 (1987)
- [43] J. VON NEUMANN: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*
(Princeton University Press, 1955)
- [44] M. BRUNE, S. HAROCHE, J. M. RAIMOND, Phys. Rev. A **45**, 5193-5214 (1992)
- [45] H. JEONG, T. C. RALPH, *Schrödinger Cat States for Quantum Information Processing* (2005); arXiv e-print: quant-ph/0509137v1
- [46] AMINE LAGHAOUT, JONAS S. NEERGAARD-NIELSEN, IOANNES RIGAS, CHRISTIAN KRAGH, ANDERS TIPSMARK, ULRIK L. ANDERSEN, Phys. Rev. A **87**, 043826 (2013); arXiv:1302.0268v2
- [47] R. MAR-SARAO, H. MOYA-CESSA, Optics Letters, Vol. **33**, Issue 17, pp. 1966-1968 (2008); arXiv:0808.0187v1
- [48] ULF LEONHARDT: *Measuring the quantum state of light*
(Cambridge Studies in Modern Optics, 1995)
- [49] CHRISTIAN KURTSIEFER: *Quantum Optics Devices*
(Les Houches Singapore 2009, Lecture Notes)