۴

آزمایش شماره ۲: تخمین زاویه ورود با استفاده از روش جهت دهی پرتو (beamforming) کمینه واریانس

$s(t)$: سیگنال هدف

$x_m(t)$: سیگنال ثبت شده در سنسور m ام

$$x_m(t) = s(t-\tau_m) \xrightarrow{F} e^{-j\omega\tau_m} S(\omega) \approx e^{-j\omega_0\tau_m} S(\omega) \xrightarrow{FI} e^{-j\omega_0\tau_m} s(t)$$

$$\Rightarrow x_m(t) = e^{-j\omega_0\tau_m} s(t) + n_m(t)$$

$$= e^{-j\omega_0 \frac{(x_m \sin\theta \cos\varphi + y_m \sin\theta \sin\varphi + z_m \cos\theta)}{c}} \cdot s(t) + n(t)$$

مدل سیگنال تک منبع:

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-j\omega_0\tau_1} \\ e^{-j\omega_0\tau_2} \\ \vdots \\ e^{-j\omega_0\tau_M} \end{bmatrix}}_{a(\varphi,\theta)} s(t) + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_M(t) \end{bmatrix}$$

steering vector

مدل سیگنال Q منبع باند باریک:

$$\underline{X}(t) = \left[\, \underline{a}(\varphi_1,\theta_1) \quad \underline{a}(\varphi_2,\theta_2), \dots, \underline{a}(\varphi_Q,\theta_Q) \right] \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_Q(t) \end{bmatrix} + \underline{N}(t)$$

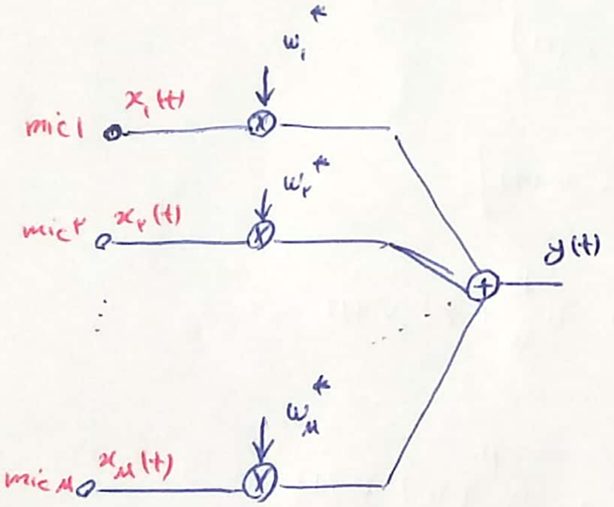
برای $\theta_i = 90^\circ$

$$\underline{X}(t) = \left[\underbrace{\underline{a}(\theta_1)}_{\text{steering vector}} \ \underline{a}(\theta_2) \ \cdots \ \underline{a}(\theta_Q)\right] \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_Q(t) \end{bmatrix} + \underline{N}(t)$$

$$\underline{X}(t) = A\,\underline{s}(t) + \underline{N}(t)$$

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_Q(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{N}(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_M(t) \end{bmatrix}$$

ساختار شکل دهنده پرتو



$$\underline{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_M \end{bmatrix} \Rightarrow y(t) = \underline{W}^H \underline{X}(t)$$

روش جهت دهی پرتو بر پایه محاسبه توان خروجی بنا نهاده شده است

$$P(\underline{W}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} |y(t)|^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \underline{W}^H \underline{X}(t)\,\underline{X}^H(t)\,\underline{W} = \underline{W}^H\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \underline{X}(t)\,\underline{X}^H(t)\right)\underline{W}$$

$$= \underline{W}^H R\, \underline{W}$$

به نظر شما ساده ترین و منطقی ترین انتخاب برای $\underline{W}$ چیست؟

ساده‌ترین انتخاب :

$$\underline{w} = a(\theta)$$

بنابراین توان خروجی شکل‌دهنده پرتو وابسته به زاویه است. می‌توان توان خروجی شکل‌دهنده پرتو را به ازای $\underline{w} = a(\theta)$ به ازای همه زوایا محاسبه نمود. زوایای متناسب با max توان، زوایای ورود سیگنال را مشخص می‌کند.

$$P(\theta) = \underline{w}^H R\, \underline{w} = \underline{a}^H(\theta)\, R\, \underline{a}(\theta)$$

سوال: به نظر شما این انتخاب ($\underline{w} = a(\theta)$) چه ارتباطی با آزمایش اول دارد؟

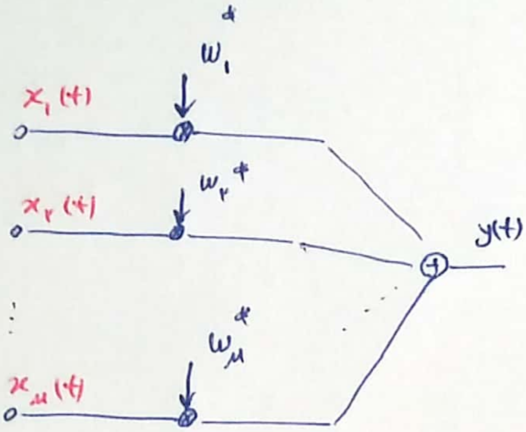
$$y(t) = \underline{w}^H \underline{x}(t) = \underline{w}^H \left(\underline{a}(\theta_0)\, s(t) + \underline{N}(t) \right)$$

$$= a^H(\theta) \left[\underline{a}(\theta_0)\, s(t) + \underline{N}(t) \right]$$

$$= a^H(\theta)\, a(\theta_0)\, s(t) + a^H(\theta)\, \underline{N}(t)$$

$$\text{if } \theta = \theta_0 \Rightarrow y(t) = M\, s(t) + a^H(\theta)\, \underline{N}(t)$$

روش MV (Minimum variance) در DoA :



$$y(t) = w^H \underbrace{X(t)}_{a\,s(t) + n(t)}$$

$$\min\ p = w^H R\, w \qquad \text{subject to} \qquad w^H a(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow w = \frac{R^{-1} a}{a^H R^{-1} a} \Rightarrow p = w^H R\, w = \frac{a^H R^{-1}}{a^H R^{-1} a} \cdot R \cdot \frac{R^{-1} a}{a^H \cdot R^{-1} \cdot a} = \frac{1}{a^H \cdot R^{-1} \cdot a}$$

$$\Rightarrow w(\varphi, \theta) = \frac{R^{-1} a(\theta, \varphi)}{a^H(\theta, \varphi)\, R^{-1} \cdot a(\theta, \varphi)}, \quad P(\theta, \varphi) = \frac{1}{a^H(\theta, \varphi)\, R^{-1} a(\theta, \varphi)}$$