Cette étude nous permettre de comparer les trois méthodes des moindres carrés, de Newton et de Gauss-Newton et ainsi trancher pour choisir celle qui donnera le moins d'erreur quant à la prédiction d'un échantillon empirique.

Introduisons les fonction logit et logistique définies respectivement par:

$$logit(p) = ln\,(p/1-p)$$

$$y(x) = \kappa/(1 + exp(\alpha - \rho x))$$

avec x une variable temporelles et les trois lettres grecques κ, α, ρ des paramètres.

Le code python pour ces deux fonction nous donne:

```
def logit(p):
    return math.log(p/(1-p))
def s(p,x):
    return p[0]/(1 + math.exp(p[1]-p[2]*x))
```

Méthode des moindres carrés

Supposons que le paramètre κ, cette méthode nous permettra d'estimer les parametres α et ρ.
à partir de la fonction logit on a:

$$\kappa/y = (1 + exp(\alpha - \rho x)\ et\ donc\ logit\,(y/\kappa) = \rho x - \alpha$$

La courbe des moindres carrés est alors données par la somme des carrés des différences tel que :

$$\sum_{i=1}^{m} (logit(y_i/\kappa) - \rho x_i - \alpha)^2$$

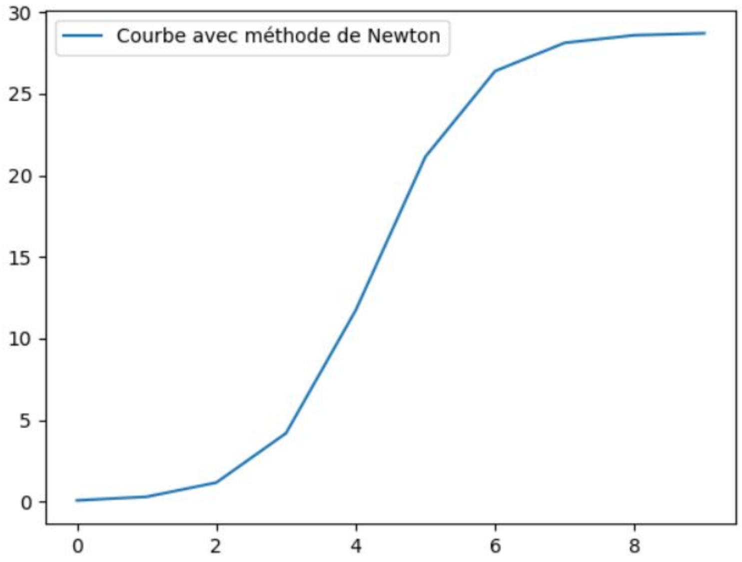
en code cela nous donne :

```
#Méthode des moindres carrés
def OLS(f,x,y,kappa):   #Fonction pour trouver alpha et rho sachant kappa = 30.54
    a = np.array([[-1]*10,x]).T # (.T) transopsé
    b = np.array([f(y[i]/kappa) for i in range(len(y))])
    Q, R = np.linalg.qr(a)
    alpha_rho = nla.solve_triangular(R,Q.T.dot(b)) # matrice nxn et vecteur
    return alpha_rho
param = np.append(param,OLS(logit,x,y,param[0]))#Ajout des nouveaux paramètres trouvés
```

On utilise la méthode QR pour résoudre l'équation : $a * v = b$ et $b = logit\,(y/\kappa)$
ou a est une matrice 10 x 2 avec une première colonne composée de -1 et deuxième colonne composée de 0 à 9, v un vecteur contenant α et ρ les paramètres inconnus et y le vecteur (.53 , .53 , 1.53 , 2.53 , 12.53 , 21.53 , 24.53 , 28.53 , 28.53 , 30.53).
on trouve alors α = 5.16 et ρ = 1.18.
Cette méthode n'est pas optimale car on à estimer κ visuellement, on a donc une grande source d'erreur.

Méthode de Newton

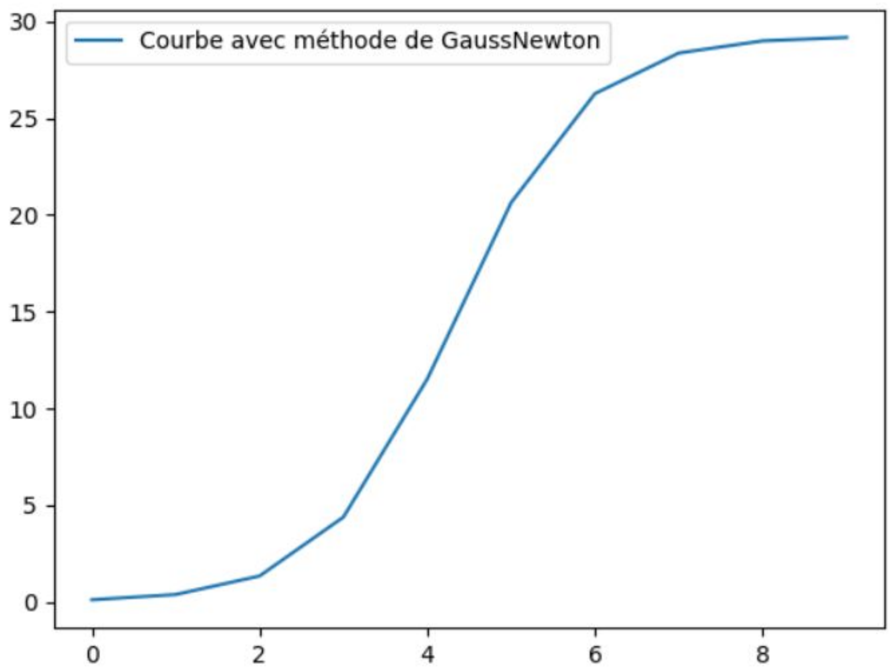
Cette méthode utilise la matrice hessienne qui sera expliquée plus tard, on alors une estimation des trois paramètres $\kappa = 28.75$ $\alpha = 5.95$ et $\rho = 1.39$



On trouve le graphique ci dessus avec une asymptote verticale qui est égale à la valeur de κ

Méthode de Gauss-Newton

On troque l'utilisation de la matrice hessienne par la matrice jacobienne et on a l’estimation suivante : $\kappa = 29.24$ $\alpha = 5.65$ et $\rho = 1.30$



On trouve le graphique ci dessus avec une asymptote verticale qui est égale à la valeur de κ

Question 2
La matrice hessienne servant à la méthode de Newton se construit comme tel :

$$H(\kappa, \alpha, \rho, x) = \begin{pmatrix} s_{\kappa,1} & s_{\alpha,1} & s_{\rho,1} \\ s_{\kappa,2} & s_{\alpha,2} & s_{\rho,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{\kappa,m} & s_{\alpha,m} & s_{\rho,m} \end{pmatrix}$$

où $S_{\kappa,i}$, $S_{\alpha,i}$ et $S_{\rho,i}$ désignent les dérivées partielles seconde de f(κ, α, ρ, x_i) par rapport à κ, α et ρ et x en x = xi , cela donne :

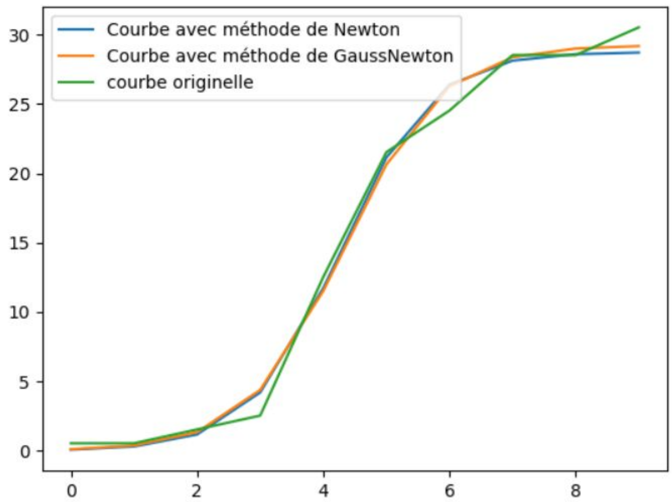
$$S_{\kappa,i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1+\rho exp(\alpha-\rho x_i)}{(1+exp(\alpha-\rho x_i))^2} \times (s(\kappa,\ \alpha,\ \rho,\ x_i) - y_i)$$

$$S_{\alpha,i} = \sum_{i=1}^{m} \kappa \frac{\rho exp(\alpha-\rho x_i)*(1+exp(\alpha-\rho x_i))^2 + \rho exp(\alpha-\rho x_i)*(1+exp(\alpha-\rho x_i))*exp(\alpha-\rho x_i)}{(1+exp(\alpha-\rho x_i))^4} \times (s(\kappa,\ \alpha,\ \rho,\ x_i) - y_i)$$

$$S_{\rho,i} = \sum_{i=1}^{m} (\kappa \frac{exp(\alpha-\rho x_i)}{(1+exp(\alpha-\rho x_i))^2} - x_i S_{\alpha,i}) \times (s(\kappa,\ \alpha,\ \rho,\ x_i) - y_i)$$

Comme expliqué dans la méthode Gauss-Newton supposons que ℓ est une itération connues et que vℓ soit calculé. la méthode de newton consiste à calculer alors tr(vℓ)*H(κℓ , αℓ , ρℓ)*vℓ.
Puis trouver les minimas liés à la fonction étudiée.

Question 3
L’utilisation de gauss-newton est plus simple car ne nécessite pas le calcul de la matrice hessienne. ci dessous les courbes des deux méthodes:



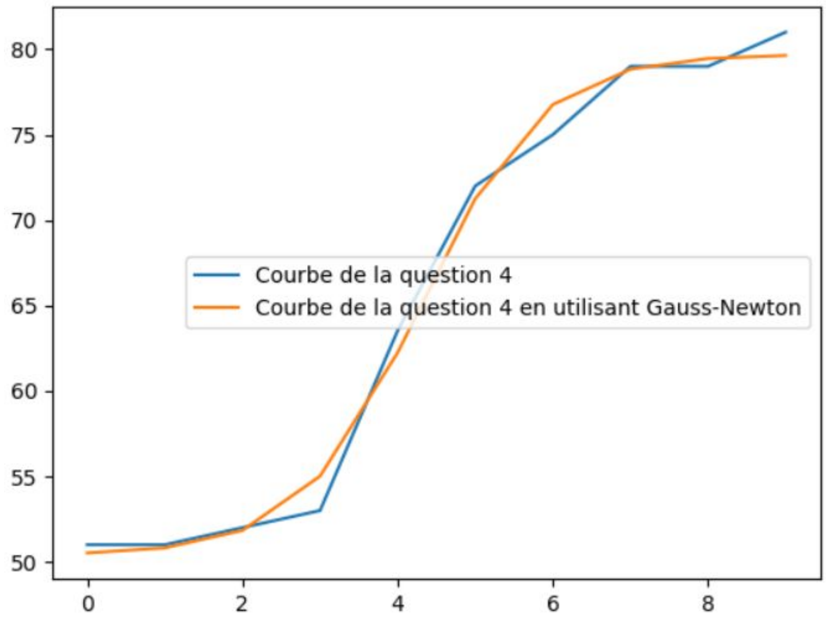
On remarque une légère différence au niveau de l'asymptote horizontale et donc pour la valeur de kappa, mais les deux méthode semble être une bonne approximation de la courbe originelle.

Question 4

Nous allons privilégier la méthode gauss-newton car plus simple à utiliser.

On trouve alors les résultats suivant : κ = 29.29 α = 5.55 ρ = 1.29 et λ = 50.40

avec la courbe suivante:



Remarque : On pourrait améliorer les valeurs obtenues en réitérons les méthodes (Newton / Gauss-Newton) pour avoir des valeurs plus optimales et plus précises.