پروژه درس سیستم های مخابراتی
دکتر بهروزی

محمدحسین استادی

تیر ۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱ اثبات تابع ابهام

چون سیگنال $s(t)$ باند باریک است میتوان گفت تابع آن در حوزه فرکانس پهنای باند محدودی دارد. با توجه به این قضیه میتوانیم از آن با نرخ مناسبی نمونه برداری کنیم و این نمونه ها حاوی اطلاعات خود سیگتال باشند. از طرفی ضرب دو سیگنال در حوزه زمان تبدیل به کانولوشن در حوزه فرکانس میشود. پس پهنای باند ضرب دو سیگنال حداکثر برابر با مجموع پهنای باند دو تابع خواهد بود. پس درنهایت تابع ابهام را میتوان تبدیل فوریه یک سیگنال دید. حال به جای محاسبه انتگرال میتوان از سیگنال نمونه برداری کرد و به جای تبدیل فوریه پیوسته از تبدیل فوریه گسسته(یا همان DFT) استفاده کرد که برای این منظور الگوریتم بهینه FFT وجود دارد که اردر محاسباتی آن $Nlog(N)$ از روش پایه بسیار سریعتر است.

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau)e^{i2\pi f_d t}dt = F\{s(t)s^*(t-\tau)\}\Big|_{f=-f_d}$$

$$X(\tau, f) = \{S(f) * e^{-i2\pi f\tau}S^*(-f)\}\Big|_{f=-f_d}$$

۲ ویژگی های تابع ابهام

ویژگی ۱ مقدار ماکسیمم تابع در مبدا رخ میدهد.

$$|X(\tau, f)|^2_{max} = |X(0,0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = E_s$$

$$|X(\tau, f)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau)e^{i2\pi f_d t}dt \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)e^{i\pi f_d t}][s(t-\tau)e^{-i\pi f_d t}]^* dt \right|^2$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)e^{i\pi f_d t}|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |s(t-\tau)e^{-i\pi f_d t}|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = E_s^2$$

ویژگی ۲ حول مبدا متقارن است.

$$X(-\tau, -f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t+\tau)e^{-i2\pi f_d t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s^*(t)e^{-i2\pi f_d t}e^{i2\pi f_d \tau}dt = e^{i2\pi f_d \tau}X^*(\tau, f)$$

$$\Rightarrow |X(-\tau, -f)| = |X(\tau, f)|$$

ویژگی ۳

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\tau, f)|^2 df d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 |s(t-\tau)|^2 dt d\tau = E_s^2$$

خط اول از قاعده پارسوال استفاده شده است.

ویژگی ۴ خواص عادی تبدیل فوریه مانند شیفت زمانی و اسکیل زمانی نیز بدیهتا اینجا برقرار است. از اثبات آن صرف نظر میکنیم.

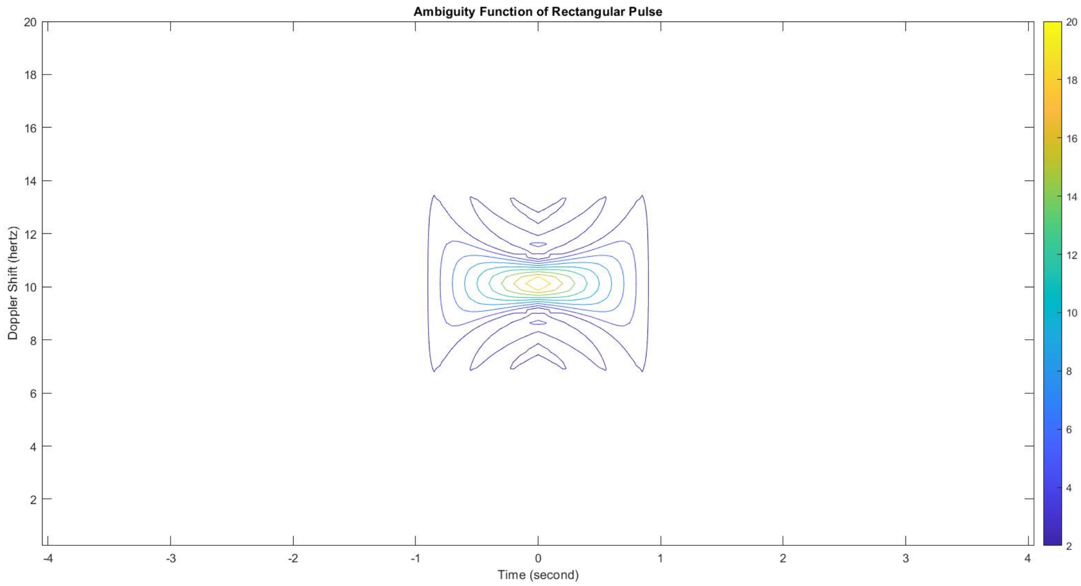
$$u(t) = s(t-\lambda) \Rightarrow X_u(\tau, f) = e^{i2\pi f_d \lambda}X_s(\tau, f)$$

$$u(t) = s(at) \Rightarrow X_u(\tau, f) = \frac{1}{|a|}X_s(a\tau, \frac{f}{a})$$

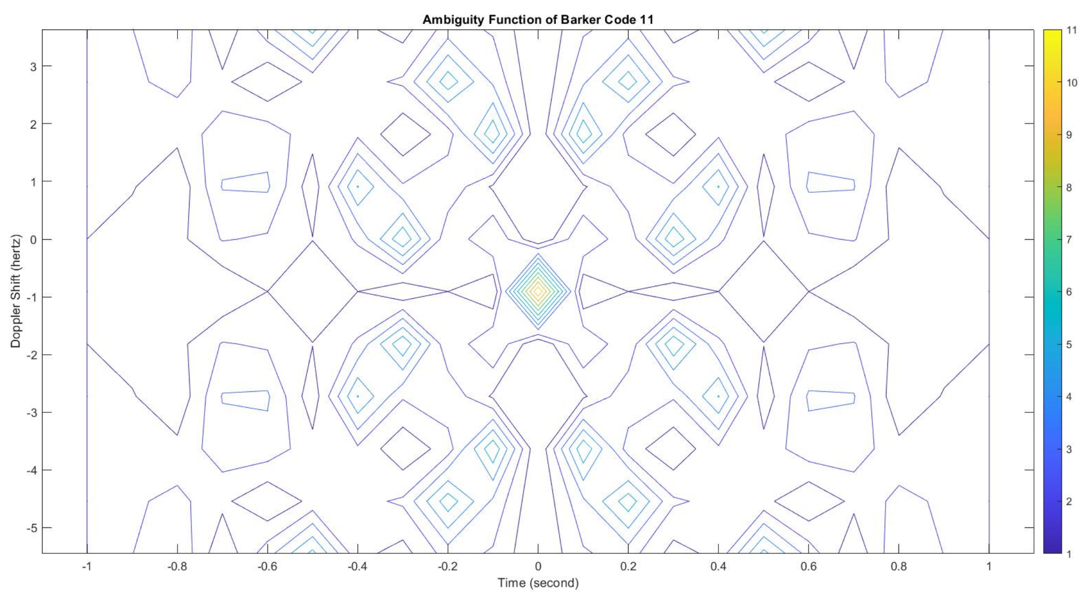
۳ ترسیم تابع برای چند سیگنال!

$$s(t) = rect(t/T) \Rightarrow X(\tau, f) = \frac{e^{i2\pi fT} - e^{-i2\pi fT}e^{i2\pi f\tau}}{i2\pi f} = e^{i\pi f\tau}\frac{sin(2\pi fT - \pi f\tau)}{\pi f}$$

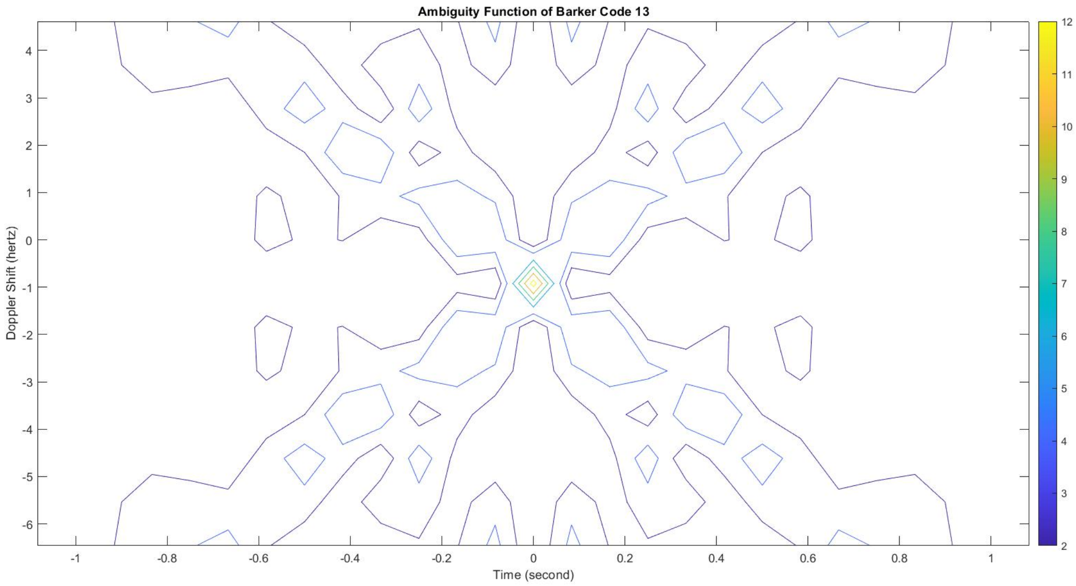
سیگنال را نمونه برداری میکنیم سپس به اندازه طول آن به سمت راست و چپ شیفت میدهیم و در سیگنال اول ضرب میکنیم. با گرفتن DFT از این سیگنال ها میتوان به تابع ابهام رسید. برای مشاهده بهتر تابع ابهام LFM کد را ران کنید و زوم کنید.



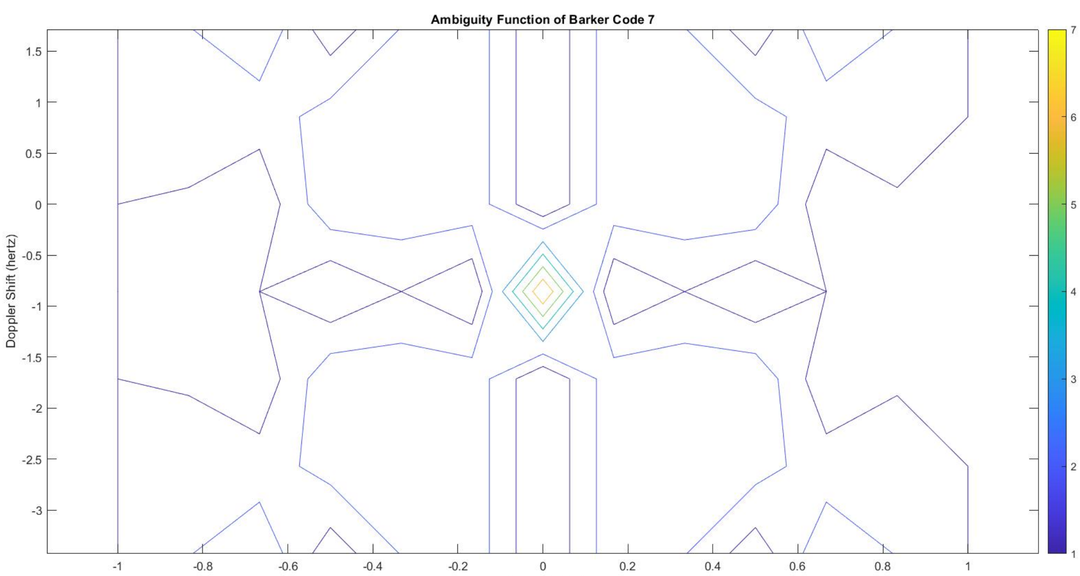
شکل ۱: تابع ابهام پالس



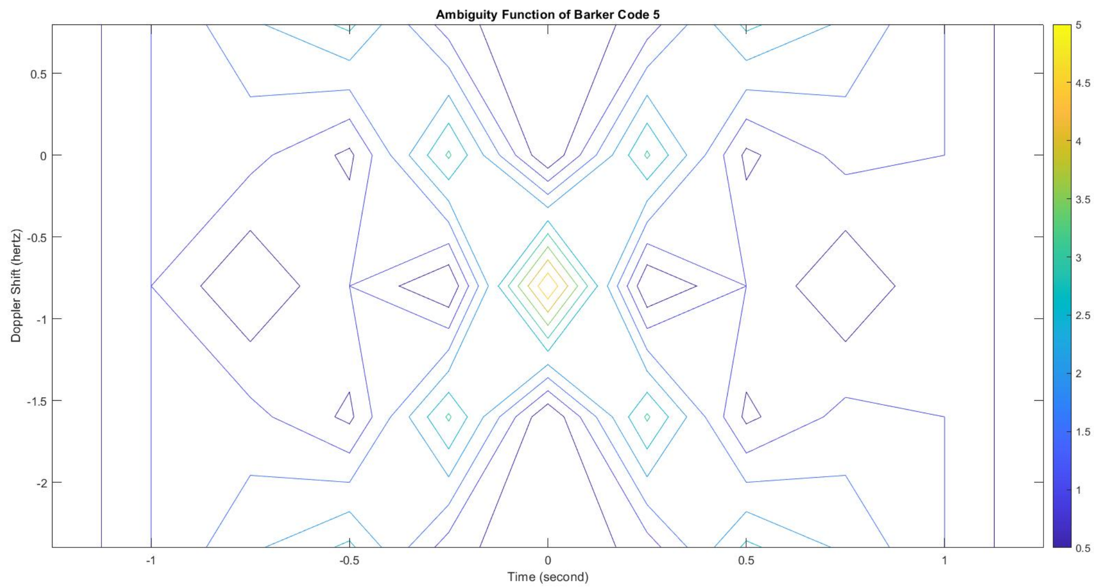
شکل ۲: تابع ابهام کد بارکر طول ۱۱



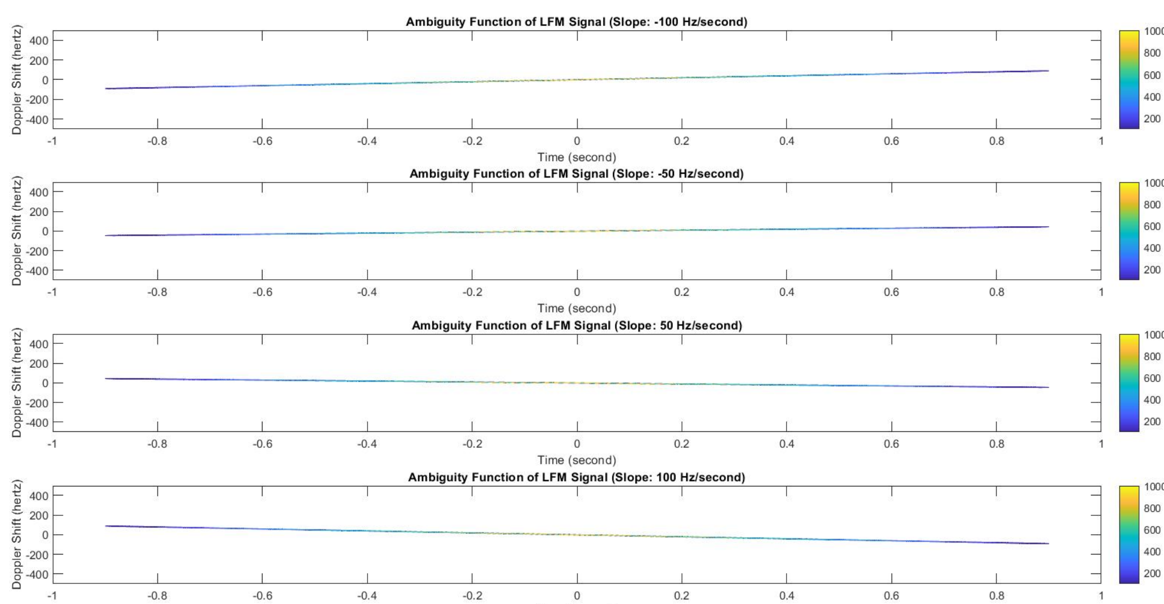
شکل ۳: تابع ابهام کد بارکر طول ۱۳



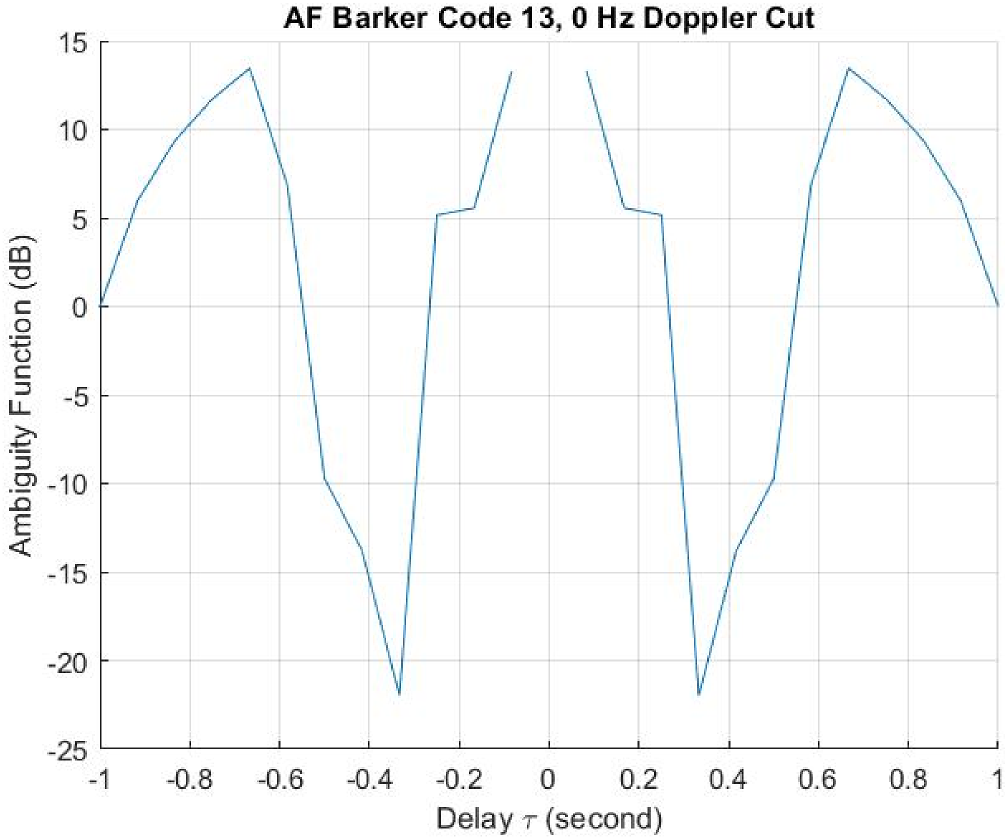
شکل ۴: تابع ابهام کد بارکر طول ۷



شکل ۵: تابع ابهام کد بارکر طول ۵



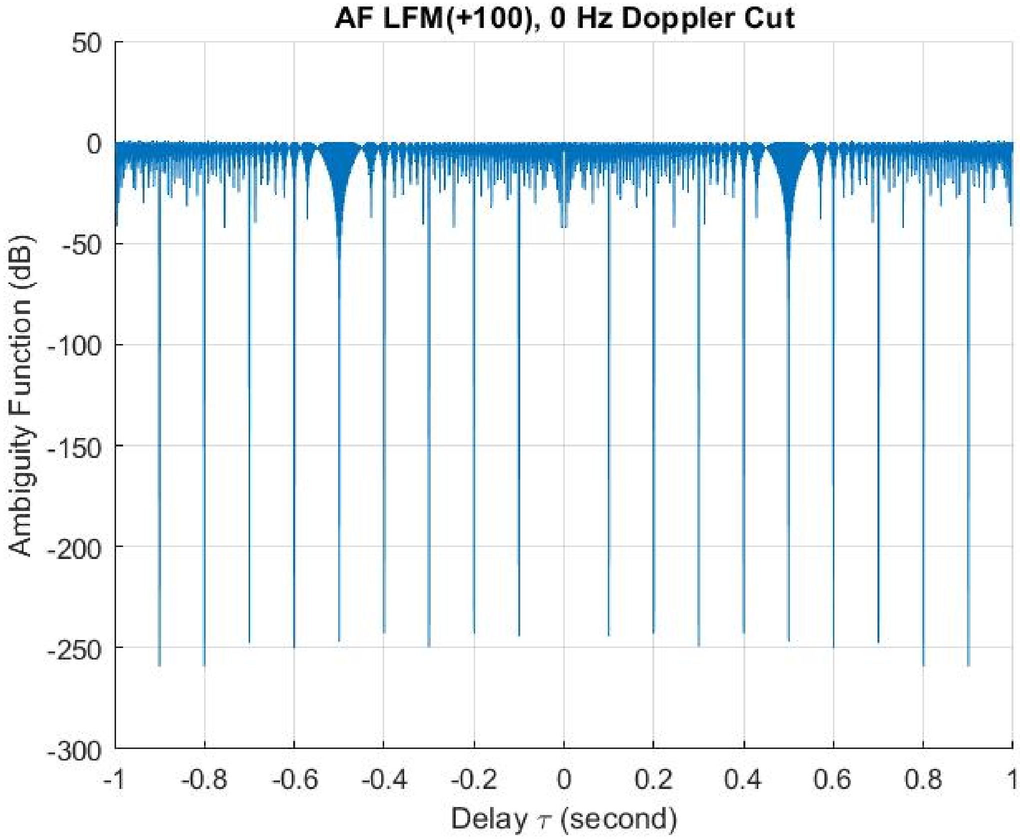
شکل ۶: تابع ابهام سیگنال های LFM



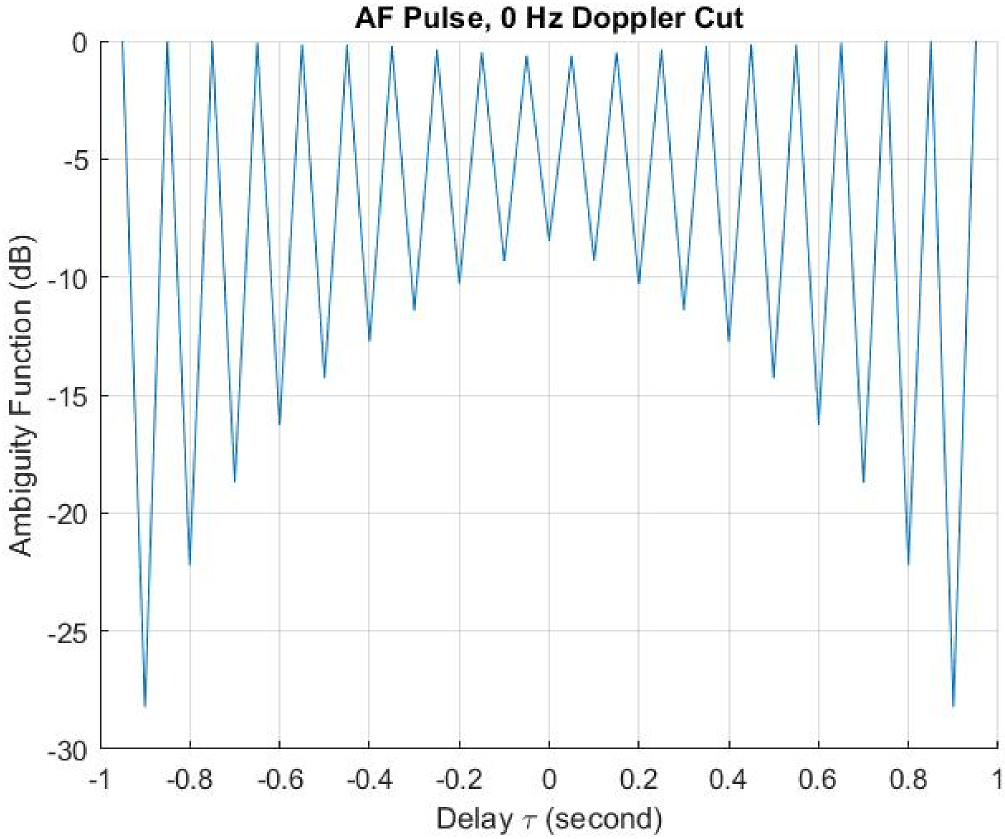
شکل ۷: تابع ابهام کد بارکر ۱۳ در فرکانس صفر

۴ مقایسه سیگنال ها

برای مقایسه سطح لوب کناری باید خروجی تابع را در فرکانس مشخص که در اینجا صفر درنظر گرفته شده است کات کنیم و آن را برحسب زمان رسم کنیم.
همانطور که از شکل ها مشخص است سطح لوب کناری برای پالس و مدولاسیون فرکانس خطی یکسان است(سطح لوب کناری با سطح لوب اصلی برابر است) اما در کد بارکر تقریبا $7db$ اختلاف بین لوب اصلی و $\mathrm{sidelobe}$ داریم.



شکل ۸: تابع ابهام LFM در فرکانس صفر

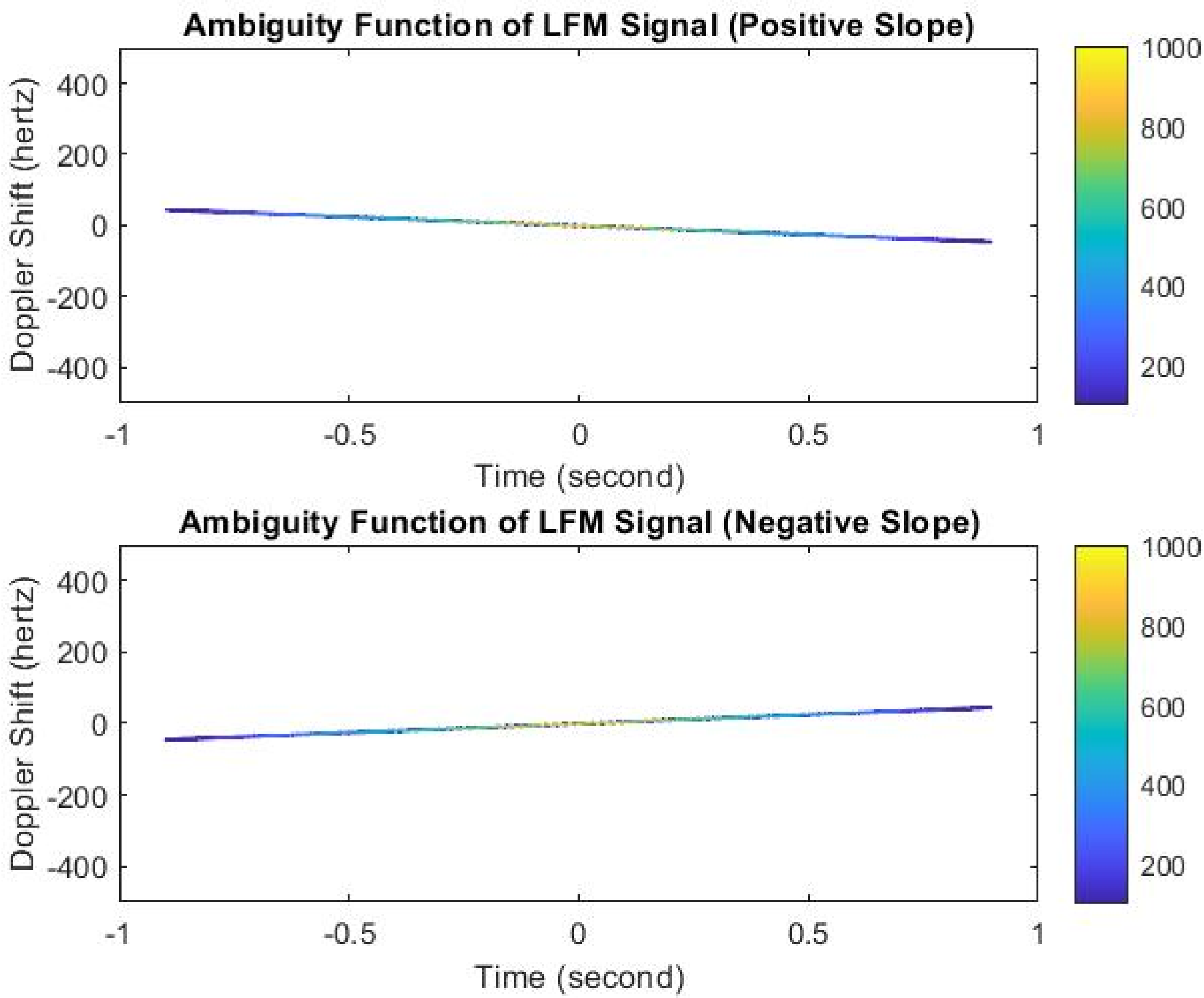


شکل ۹: تابع ابهام پالس در فرکانس صفر

۵ ابهام تابع ابهام!

تابع ابهام برای سیگنال مدولاسیون فرکانس خطی دارای ابهام است زیرا در این تابع دوگانی بین زمان و فرکانس داریم. این به این معنا است که دو سیگنال با شیب مثبت و منفی برابر بسیار شبیه هستند و تمایز آن ها از هم سخت است. سطح لوب کناری برابر است و حول زمان متقارن است.

برای حل این مشکل اطلاعات یا تکنیک اضافه نیاز است؛ مانند فیلتر منطبق و یا coherent processing.



شکل ۱۰: دو سیگنال شبیه LFM