دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

داده کاوی

(بهار ۱۴۰۱)

تمرین اول

محمد چوپان ۹۸۳۱۱۲۵

بخش تئوری :

سوال اول :

سوال اول

به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) داده‌ی پرت[1] با نویز[2] را با یکدیگر مقایسه کنید.

ب) یک سناریو بیان کنید که در آن داده‌های پرت برای ما مفید هستند و اطلاعات ارزشمندی از آن دریافت می‌کنیم.

ج) مشخص کنید که آیا یک نویز می‌تواند داده‌ی پرت باشد یا خیر؟

پاسخ:

الف :

داده پرت و داده نویز دو مفهوم متفاوت هستند. داده پرت به داده‌ای اطلاق می‌شود که اشتباهاتی در آن وجود دارد ولی به صورت تصادفی نیست و از خطای اندازه‌گیری و یا مشکلات در جمع‌آوری داده‌ها ناشی می‌شود. از طرف دیگر، داده نویز به داده‌ای اطلاق می‌شود که شامل اشتباهات تصادفی است که به دلیل نویز در داده‌ها به وجود می‌آید.

برای مقایسه داده پرت و داده نویز، می‌توانیم از یک معیار به نام MSE یا میانگین مربعات خطا استفاده کنیم. این معیار میزان اختلاف بین داده‌های پیش‌بینی شده و داده‌های واقعی را در قالب یک مقدار عددی برمی‌گرداند. به عبارت دیگر، MSE نشان می‌دهد که در صورت استفاده از یک الگوریتم پیش‌بینی، چقدر خطای میانگین میان داده پیش‌بینی شده و داده واقعی است.

اگر داده پرت و داده نویز را با یکدیگر مقایسه کنیم، MSE برای داده پرت کمتر از MSE داده نویز خواهد بود، چرا که داده پرت حداقل از یک الگوریتم مشخص استفاده کرده است و اختلاف‌های آن نسبتا ثابت و پیش‌بینی‌پذیر هستند. از طرف دیگر، داده نویز شامل خطاهای تصادفی است که به سختی قابل پیش‌بینی و کنترل هستند.

ب :

یکی از مثال‌هایی که در آن داده‌های پرت ارزشمند هستند، ممکن است این باشد که در حوزه طب، داده‌های بیماری مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بعضی موارد، داده‌های بیماری ممکن است شامل خطاهای پرت باشد که از خطای اندازه‌گیری و یا عوامل دیگر ناشی می‌شود، اما این داده‌ها همچنان ارزشمند هستند، زیرا ممکن است حاوی اطلاعات مفید و مخفی باشد.

برای مثال، فرض کنید یک محقق در حوزه طب قصد دارد تاثیر یک درمان جدید برای یک بیماری خاص را بررسی کند. با جمع‌آوری داده‌های بیماری از بیماران مختلف، ممکن است برخی داده‌ها شامل خطاهای پرت باشند. اما اگر با استفاده از الگوریتم‌های داده کاوی، این خطاها شناسایی و از داده‌های مورد بررسی حذف شوند، ممکن است محقق اطلاعات جالبی از نحوه عملکرد درمان جدید بر روی بیماران باشند.در این حالت، داده‌های پرت از ما مفید هستند ولی با کاوش در این داده‌ها می‌توان از اطلاعات ارزشمندی به دست آورد. بنابراین، در این حالت، داده‌های پرت به دلیل اینکه حاوی اطلاعات مفیدی هستند، ارزشمند می‌شوند و حذف آنها می‌تواند باعث از دست رفتن اطلاعاتی ارزشمند شود.

ج :

بله، یک نویز می‌تواند داده‌ای پرت باشد. در واقع، نویز به عنوان یک عامل مخرب می‌تواند باعث ایجاد خطا در داده شود و باعث شود که داده‌ها پرت شوند. به طور کلی، نویز به دلیل تغییر دادن مقدار داده‌های اصلی و ایجاد اختلال در آنها، ممکن است باعث شود که داده‌ها پرت شوند و باعث کاهش دقت و قابلیت اطمینان در مدل‌سازی و پیش‌بینی شود.به عنوان مثال، در داده‌های سنجش دما، نویز می‌تواند ناشی از تقلب در داده‌های اندازه‌گیری، مشکل در دستگاه اندازه‌گیری یا نویزهای محیطی باشد. همچنین، در داده‌های صوتی، نویز می‌تواند ناشی از نویزهای محیطی، مشکلات در دستگاه ضبط صوت یا نویزهای ناشی از فرآیند فشرده‌سازی صوت باشد.بنابراین، نویز می‌تواند یکی از عواملی باشد که باعث ایجاد داده‌های پرت شود و می‌تواند اطلاعات ارزشمند در داده‌ها را به شدت کاهش دهد.

سوال دوم :

در حوزه‌ی داده‌کاوی، انبار داده[3] چیست و چه تفاوت و شباهتی با پایگاه داده[4] دارد؟

پاسخ:

انبار داده (Data Warehouse) به مجموعه ای از داده ها اطلاق می شود که برای پشتیبانی از تصمیم گیری های کسب و کار استفاده می شود. یک انبار داده معمولاً شامل داده هایی است که از منابع مختلفی جمع آوری شده اند، مانند پایگاه داده های تعاملی کاربری، سیستم های مدیریت منابع سازمانی (ERP)، سیستم های پشتیبانی از تصمیم گیری (DSS) و سایر منابع داده.هدف انبار داده ها برای کسب و کارها، تجمیع و ادغام داده های مختلف در یک محیط مرکزی است که به کاربران امکان می دهد به سرعت و با دقت بالا از آن استفاده کنند. به این ترتیب، انبار داده ها قابلیت ارائه داده های مرتبط، موجودیت های اطلاعاتی، نمودارها، گزارشات، و ابزارهای دیگر برای کاربران را دارا می باشند. همچنین انبار داده ها ترکیب شده با فرایند پاک کردن داده ها ترکیب و یا تبدیل آنها به صورت بازه ای می باشد.با استفاده از انبار داده ها، کسب و کارها قادر به ارائه تحلیل های جامع، پیش بینی ها، و تحلیل های موقعیتی می باشند که در انتخاب بهترین استراتژی های تجاری به آنها کمک می کند. همچنین، انبار داده ها به صورت مداوم بروزرسانی می شوند و به صورت پیش بینی شده، به توسعه کسب و کار کمک می کنند.هر دو انبار داده و پایگاه داده، مجموعه ای از داده ها هستند. اما تفاوت اصلی بین این دو این است که پایگاه داده برای ذخیره و به روزرسانی داده ها به کار میرود، در حالی که انبار داده برای ذخیره و استخراج داده ها به کار میرود.یک پایگاه داده معمولاً برای ذخیره و مدیریت داده های یک سیستم کاربردی مورد استفاده قرار می گیرد، مانند یک سیستم مدیریت محتوا (CMS)، سیستم مدیریت انبارها (WMS)، یا سیستم مدیریت مشتریان (CRM). داده های ذخیره شده در پایگاه داده، معمولاً در قالب جداول با رابطه های بین آنها قرار می گیرند.از طرفی، انبارداده برای جمع آوری و تجمیع داده ها از منابع مختلف استفاده می شود و برای پشتیبانی از تصمیم گیری های کسب و کار و تحلیل داده ها طراحی شده است. انبار داده معمولاً داده ها را به صورت غیر قابل تغییر و در قالب داده های مسطح (flat) ذخیره می کند. این داده ها اغلب در قالب جداول بزرگ تر با فضای بیشتری برای مقایسه و تحلیل در اختیار کاربران قرار می گیرند.

به طور خلاصه، پایگاه داده برای ذخیره و به روزرسانی داده ها استفاده می شود، در حالی که انبار داده برای استخراج و تحلیل داده ها طراحی شده است.

سوال سوم :

یکی از روش‌های یافتن داده‌های پرت استفاده از توزیع نرمال[5] و percentile ها است. در مورد این روش تحقیق کرده و آن را توضیح دهید.

پاسخ:

توزیع نرمال یا توزیع گاوسی یکی از مهم‌ترین توزیع‌های احتمالاتی است که در بسیاری از رشته‌های علوم، فناوری، مهندسی و اقتصاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. توزیع نرمال، به صورت یک منحنی گوسی به نمایش درمی‌آید که شکل آن به صورت یک پیک نواری می‌باشد که در وسط دارای میانگین و در اطراف آن، به تدریج کاهش می‌یابد.اگر داده‌های ما از یک توزیع نرمال پیروی کنند، می‌توانیم از این توزیع برای تشخیص داده‌های پرت استفاده کنیم. یعنی اگر داده‌ای که در دست داریم، بسیار دور از میانگین (یا بسیار نزدیک به نقاط کمیته) باشد، به عنوان یک داده پرت شناخته می‌شود.در مورد percentile ها، می‌توان گفت که این مفهوم به معنای محل قرار گرفتن یک داده در میان مجموعه داده‌ها است. به عبارت دیگر، اگر داده مورد نظر ما در میان ۹۰ درصد بزرگترین داده‌ها باشد، به عنوان یک داده عادی و نه پرت شناخته می‌شود. اما اگر داده‌ای در میان ۱۰ درصد کوچکترین داده‌ها باشد، به عنوان یک داده پرت شناخته می‌شود.بنابراین، با استفاده از percentile ها و توزیع نرمال، می‌توانیم داده‌های پرت را شناسایی کرده و از آن‌ها صرف نظر کنیم و یا برای پردازش داده‌های ما، به طور صحیح به آن‌ها رسیدگی کنیم.

سوال چهارم :

فرایند پاکسازی داده‌ها[6] و نمایش داده‌ها[7] را در نظر بگیرید:

الف) فرایند پاکسازی داده‌ها را تعریف کنید.

ب) اهمیت نمایش داده‌ها را بیان کنید و به یک مورد از چالش‌های آن اشاره کنید.

ج) چرا پاکسازی داده‌ها یک فرایند مهم و پیشنیاز برای نمایش داده‌ها می‌باشد؟

پاسخ :

الف :

فرایند پاکسازی داده‌ها شامل مجموعه‌ای از فعالیت‌هایی است که برای بررسی، تمیزکاری، و حذف داده‌های نامعتبر، ناهمخوانی، و پرت از داده‌های مورد نظر صورت می‌گیرد. برای پاکسازی داده‌ها، ابتدا باید داده‌های در دسترس را بررسی و ارزیابی کرده و سپس به شیوه‌ای که با توجه به نیاز مورد استفاده قرار می‌گیرد، آن‌ها را تمیز کرد. این فرایند شامل اصلاح خطاهای نگارشی و مفهومی، برطرف کردن مقادیر گمشده، تعویض و تبدیل فرمت، رفع تداخل‌های داده‌ها، و حذف داده‌های تکراری و پرت است. با پاکسازی داده‌ها، دقت و قابلیت اطمینان تحلیل داده‌ها بهبود می‌یابد.

ب :

نمایش داده‌ها یکی از مهم‌ترین مراحل در تحلیل داده‌هاست زیرا نحوه نمایش داده‌ها می‌تواند تأثیر قابل توجهی بر تفسیر و درک داده‌ها و در نتیجه تصمیم‌گیری‌های انجام شده داشته باشد. به عنوان مثال، اگر داده‌ها به شکل نامرتب و ناشیانه نمایش داده شوند، می‌تواند باعث ایجاد گمراهی و تداخل در تحلیل داده‌ها شود. از طرف دیگر، نمایش مناسب داده‌ها به

محققان کمک می‌کند تا بتوانند به راحتی پدیده‌های مهم در داده‌ها را شناسایی کرده و دقیق‌تر تحلیل کنند.یکی از چالش‌های نمایش داده‌ها، مسئله انتخاب روش نمایش مناسب برای داده‌هایی با حجم بالا است. انتخاب روش نمایش مناسب برای داده‌های حجیم به دلیل پیچیدگی و نیاز به بررسی مجموعه‌ای از متغیرها می‌تواند چالش برانگیز باشد. همچنین، در صورتی که نمایش داده‌ها نامناسب باشد، ممکن است از داده‌های مفیدی برای تحلیل چشم‌پوشی شود و در نتیجه تصمیم‌گیری‌های نادرستی اتخاذ شود.

ج :

پاکسازی داده‌ها به عنوان یکی از مراحل اصلی پردازش داده‌ها، بسیار مهم و پیش نیاز برای نمایش داده‌ها است. در صورتی که داده‌ها در مرحله پاکسازی صحیح و کاملی را پیدا نکنند، این داده‌ها نمی‌توانند به درستی تحلیل و درک شوند. علاوه بر این، داده‌های پاک‌شده می‌توانند به عنوان ورودی مناسب برای مدل‌های یادگیری ماشین و الگوریتم‌های مختلف به کار رود.در مرحله نمایش داده‌ها، داده‌های پاکسازی شده باید به گونه‌ای نمایش داده شوند که بتوانند به راحتی تحلیل و درک شوند. این نمایش می‌تواند شامل چندین متغیر و ویژگی باشد که برای توضیحات بهتر و یکپارچه‌تر داده، به یکدیگر وصل شده‌اند. این نمایش باید برای کاربران قابل فهم و قابل استفاده باشد تا بتوانند به راحتی داده‌های مورد نیاز خود را پیدا کرده و از آنها استفاده کنند.یکی از چالش‌های نمایش داده‌ها، مدیریت حجم بزرگ داده‌ها است. در صورتی که داده‌های بزرگی باید نمایش داده شوند، باید از روش‌هایی مانند فشرده‌سازی و کاهش ابعاد استفاده کرد تا بتوان حجم داده‌ها را کاهش داد و از کارایی مناسبی برخوردار بود.

سوال پنجم :

در یک آزمایشگاه ژنتیک مقدار فعالیت دو ژنوم مختلف مورد بررسی قرار گرفته و در ۱۰ بازه زمانی مختلف در به صورت زیر ثبت شده است:

Gen\time	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
G1	-3	5	8	-2	1	2	3	-5	10	-1
G2	9	20	16	8	2	10	-6	-15	25	-2

الف) با استفاده از معیار شباهت Cosine Similarity، Correlation، Mutual Information شباهت این دو ژن را مقایسه کنید.

ب) طبق نتایج هر معیار مشخص کنید آیا دو ژنوم از یکدیگر مستقل هستند یا خیر.

ج) آیا نتایج به دست آمده متفاوت است؟ اگر پاسخ مثبت است علت آن را توضیح دهید.

پاسخ :

الف :

برای شباهت کسینوسی :

$$G1.G2 = -27 + 100 + 128 - 16 + 2 + 20 - 18 + 75 + 250 + 2 = 516$$

$$||G1|| = (9 + 25 + 64 + 4 + 1 + 4 + 9 + 25 + 100 + 1)^{0.5} = 15.55$$

$$||G2|| = (81 + 400 + 256 + 64 + 4 + 100 + 36 + 225 + 625 + 4)^{0.5} = 42.36$$

$$cos(G1, G2) = \frac{G1.G2}{||G1||*||G2||} = \frac{516}{15.55*42.36} = 0.78322$$

برای Correlation :

$$Corr(x,y) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\langle x - \bar{x},\ y - \bar{y} \rangle}{||x - \bar{x}||\ ||y - \bar{y}||} = CosSim(x - \bar{x}, y - \bar{y})$$

میدانیم که پس ابتدا میانگین داده ها را محاسبه کرده و سپس داده ها را از آن ها کم میکنیم و با جداول جدید شباهت کسینوسی حساب میکنیم .

$\overline{G1} = (-3 + 5 + 8 - 2 + 1 + 2 + 3 - 5 + 10 - 1)/10 = 1.8$

$\overline{G2} = (9 + 20 + 16 + 8 + 2 + 10 - 6 - 15 + 25 - 2)/10 = 6.7$

G1’=(-4.8,3.2,6.2,-3.8,-0.8,0.2,1.2,-6.8,8.2,-2.8)

G2’=(2.3,13.3,9.3,1.3,-4.7,3.3,-12.7,-21.7,18.3,-8.7)

$G1'.G2' = 395.4$

$||G1'|| = (209.6)^{0.5} = 14.47$

$||G2'|| = (1346.1)^{0.5} = 36.69$

$$cos(G1', G2') = \frac{G1'.G2'}{||G1'||*||G2'||} = \frac{395.4}{14.47*36.69} = 0.74476$$

برای Mutual information :

$$I(X;Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(x,y) \log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)},$$

میدانیم فرمول به صورت زیر است پس برای هر خانه این را حساب کرده و جمع میکنیم .فرض میگریم همه اعداد مثبت است زیرا لگاریتم منفی نداریم.

برای هر ۲۰ خانه باید مقادیر را حساب کرده و جمع کنیم .

جمع کل خانه های ردیف اول برابر است با : ۴۰

جمع کل خانه های ردیف دوم برابر است با : ۱۱۳

جمع کل خانه ها برابر است با : ۱۵۳

جمع ستون ها به ترتیب از اول تا اخر برابر است با :

sum	12	25	24	10	3	12	9	20	35	3

حال با توجه به فرمول مقادیر برای هر خانه را حساب کرده و جمع میکنیم .

G1	-0.00038	-0.00038	0.00551	-0.00152	0.00068	-0.00255	0.00206	-0.00063	0.00252	0.00068
G2	0.00039	0.00453	-0.00465	0.00181	-0.00058	0.05428	-0.00174	0.00065	-0.00237	-0.00058

جمع خطا شباهت برابر است با : ۰/۰۵۷۷۳

ب :

برای دو معیار اول نشان میدهد دو ژنوم از یکدیگر مستقل نیستند. اما در روش سوم کاملا مستقل اند

ج :

مورد سوم با دوتای اول فرق دارد دلیل آن ها یک تبدیل اعداد به کاملا + است و دیگری اینکه تمامی موارد رو نسبت به هم مقایسه میکند و نقطه به نقطه نیست.

سوال ششم :

دو مورد از روش‌های data preprocessing روش‌های aggregation و sampling هستند. این دو روش را توضیح داده و مزایا و معایب هر یک را بنویسید.

پاسخ :

Aggregation یا تجمیع، به عملیاتی گفته می‌شود که در آن داده‌ها بر اساس یک یا چند ویژگی (فیلد) مشترک گروه بندی شده و سپس برای هر گروه، یک مقدار خلاصه یا آماری محاسبه می‌شود. به‌عنوان‌مثال، میانگین، میانه، حداکثر، حداقل و تعداد داده‌ها برای هر گروه قابل محاسبه است. این روش برای خلاصه سازی داده‌های بزرگ و پیچیده و استفاده در تحلیل‌های آماری و تصمیم‌گیری بسیار کاربردی است. مزایای این روش شامل حفظ کیفیت داده‌ها، خلاصه سازی داده‌ها و محاسبه آمار دقیق برای تصمیم‌گیری‌های بعدی می‌باشد. از معایب آن می‌توان به ازدحام داده‌های پراکنده و از دست دادن جزئیات داده‌ها اشاره کرد.

Sampling یا نمونه‌گیری، به عملیاتی گفته می‌شود که در آن برای کاهش حجم داده، یک سری داده تصادفی از مجموعه داده‌های اولیه انتخاب می‌شوند و بر روی آن‌ها تحلیل‌های آماری اعمال می‌شوند. این روش به دلیل کاهش حجم داده‌ها و هزینه کاهش محاسبات بسیار کاربردی است. مزایای این روش شامل کاهش حجم داده‌ها، کاهش هزینه محاسباتی و تقلیل پیچیدگی داده‌ها می‌باشد. از معایب آن می‌توان به از دست رفتن برخی از داده‌های مهم و احتمال ناصحیح بودن نتایج اشاره کرد.

سوال هفتم :

در رابطه با کاهش بعد تحقیق کرده و به سوالات زیر پاسخ بدهید.

الف) مفاهیم انتخاب ویژگی[۸]، استخراج ویژگی[۹] و مهندسی ویژگی[۱۰] را توضیح و تفاوت‌های بین آن‌ها را بیان کنید.

ب) الگوریتم‌های کاهش بعد به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند. تفاوت این دو دسته را توضیح داده و روش کار الگوریتم PCA از دسته خطی و الگوریتم t-sne از دسته غیرخطی را توضیح دهید.

پاسخ :

می‌کنند. به طور کلی، می‌توانیم به سه نوع ویژگی در داده‌ها اشاره کنیم:

انتخاب ویژگی (Feature Selection) :

این فرآیند به انتخاب یا حذف ویژگی‌های موجود در داده‌ها می‌پردازد. هدف اصلی این فرآیند، کاهش تعداد ویژگی‌های استفاده شده در مدل‌های یادگیری است. این کاهش می‌تواند بهبود کارایی مدل‌های یادگیری و کاهش پیچیدگی محاسباتی آن‌ها را داشته باشد.

استخراج ویژگی (Feature Extraction) :

در این روش، با استفاده از روش‌های مختلف، ویژگی‌های جدیدی از داده‌ها استخراج می‌شوند که بیانگر خصوصیات مهم آن‌ها هستند. برخلاف انتخاب ویژگی، این روش به جای حذف ویژگی‌ها، ویژگی‌های جدیدی ایجاد می‌کند.

مهندسی ویژگی (Feature Engineering) :

در این روش، ویژگی‌های موجود در داده‌ها تغییر یا بهبود می‌یابند تا بتوانند بهبود کارایی مدل‌های یادگیری را ایجاد کنند. به عبارت دیگر، در این روش، ویژگی‌های موجود به گونه‌ای تغییر داده می‌شوند که کارایی مدل‌های یادگیری بهبود یابد.

مزایا و معایب روش‌های انتخاب ویژگی، استخراج ویژگی و مهندسی ویژگی به شرح زیر است:

انتخاب ویژگی:

مزایا:

کاهش پیچیدگی مدل: با حذف ویژگی‌های غیرضروری و کم اهمیت، می‌توان پیچیدگی مدل را کاهش داد و به دقت بیشتری دست یافت.

بهبود عملکرد مدل: با حذف ویژگی‌های نامربوط و بدون ارتباط با هدف، می‌توان بهبود عملکرد مدل را به دست آورد.

معایب:

اطلاعات از دست می‌رود: با حذف ویژگی‌هایی که ممکن است در برابر هدف مدل مهم باشند، اطلاعات مهمی از دست می‌رود.نیاز به دانش خاص: برای انتخاب ویژگی‌های مناسب، نیاز به دانش خاص در زمینه داده‌ها و مدلسازی دارید.

استخراج ویژگی:

مزایا:

افزایش دقت: با استفاده از ویژگی‌های مناسب، می‌توان دقت مدل را افزایش داد.

افزایش سرعت: با کاهش تعداد ویژگی‌ها، می‌توان سرعت محاسبات را افزایش داد.

معایب:

پیچیدگی بیشتر: استخراج ویژگی‌های پیچیده، می‌تواند باعث افزایش پیچیدگی مدل شود.پردازش داده بیشتر: استخراج ویژگی‌های پیچیده، ممکن است به پردازش داده بیشتر نیاز داشته باشد.

مهندسی ویژگی :

مزایا:

افزایش دقت مدل: با ایجاد ویژگی‌های بهینه و جدید، دقت مدل‌های یادگیری بالا می‌رود و احتمال بدست آوردن پاسخ درست بیشتر می‌شود.

کاهش پیچیدگی مدل: با استفاده از ویژگی‌های بهتر و جدید، می‌توان پیچیدگی مدل‌های یادگیری را کاهش داد و باعث افزایش سرعت یادگیری می‌شود.

جلوگیری از بیش‌برازش: با استفاده از مهندسی ویژگی، می‌توان جلوگیری از بیش‌برازش کرد که در صورت وجود ویژگی‌های غیرمناسب ممکن است رخ دهد.

معایب:

نیاز به دانش کارشناسی: برای ایجاد ویژگی‌های بهتر، نیاز است که کارشناسان با دانش کافی در زمینه داده‌ها و مدل‌های یادگیری دارای تخصص و تجربه باشند.

زمان‌بر بودن: ایجاد ویژگی‌های جدید و بهتر زمان‌بر و هزینه‌بر است و نیاز به تحلیل دقیق و گاهی آزمایش تعداد زیادی از ویژگی‌ها دارد.

احتمال افزایش ابعاد داده: با افزودن ویژگی‌های جدید و بهینه، احتمال افزایش ابعاد داده و در نتیجه پیچیدگی محاسباتی افزایش می‌یابد.

ب:

الگوریتم های کاهش بعد خطی و غیر خطی با توجه به روش اعمال تغییر بر روی داده ها تفاوت دارند. در الگوریتم های کاهش بعد خطی، تغییرات بر روی داده ها به صورت خطی صورت می‌گیرد، به عبارت دیگر، خروجی به صورت ترکیب خطی از ورودی هاست. این الگوریتم ها مانند LDA ،PCA و NMF از این دسته هستند. از طرف دیگر، الگوریتم های کاهش بعد غیر خطی، تغییرات بر روی داده ها به صورت غیرخطی اعمال می‌شود و خروجی به صورت ترکیب غیرخطی از ورودی هاست. این الگوریتم ها مانند t-SNE و Kernel PCA از این دسته هستند. با توجه به این تفاوت در روش اعمال تغییرات، الگوریتم های کاهش بعد خطی برای داده هایی که قابلیت توصیف خطی دارند مناسب هستند، بنابراین از این الگوریتم ها برای داده های توصیف شده توسط ویژگی های عددی استفاده می‌شود. از طرف دیگر، الگوریتم های کاهش بعد غیرخطی برای داده هایی که قابلیت توصیف خطی ندارند، مناسب هستند، بنابراین از این الگوریتم ها برای داده هایی که توسط ویژگی های غیر عددی توصیف می‌شوند استفاده می‌شود.

الگوریتم PCE (Principal Curve Estimation) یک الگوریتم کاهش بعد غیر خطی است که به عنوان یک روش مهم در آنالیز داده‌های تصویری و شناسایی الگو به کار می‌رود. این الگوریتم قادر است برای داده‌هایی که به شکل خم‌دار و معکوس S شکل هستند، یک منحنی برتر (principal curve) را بیابد.الگوریتم PCE با ایجاد یک منحنی برتر بین داده‌ها، با توجه به نزدیکی آن‌ها به منحنی، می‌تواند اطلاعات بیشتری از داده‌ها استخراج کند. در این الگوریتم، منحنی برتر به صورتی تعریف می‌شود که بیشترین توضیح‌دهی را برای داده‌های مشاهده شده داشته باشد. برای یافتن منحنی برتر، الگوریتم

PCE از روش اختلاف مربعات نقطه‌ای استفاده می‌کند و با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی نقطه مرکزی، منحنی برتر را به دست می‌آورد.به عنوان یک الگوریتم کاهش بعد غیر خطی، الگوریتم PCE می‌تواند مزایایی مانند استخراج ویژگی‌های پیچیده از داده‌ها و ارائه نمایش‌های سطح بالا از داده‌ها را داشته باشد. اما این الگوریتم دارای معایبی نیز می‌باشد که مهمترین آنها شامل پیچیدگی محاسباتی بالا و وابستگی به انتخاب اولیه منحنی برتر و پارامترهای مشخصه الگوریتم است.

الگوریتم t-SNE یا t-Distributed Stochastic Neighbor Embedding یک الگوریتم غیر خطی برای کاهش بعد داده های پیچیده است که در کاهش بعد داده های بسیار پیچیده و چگال، مثل تصاویر، استفاده می شود. t-SNE در واقع تلاش می کند نقاط پراکنده در فضای بعد بالا را به صورت خوشه ای در فضای کم بعدی قرار دهد.با استفاده از t-SNE، نقاطی که در فضای بعد بالا به هم نزدیک بوده اند، در فضای کم بعدی نیز به هم نزدیک خواهند بود. همچنین، نقاطی که در فضای بعد بالا دور از هم بوده اند، در فضای کم بعدی نیز دور از هم خواهند بود. به این ترتیب، t-SNE برای نمایش دادن الگوهای پیچیده و تفاوت های ریز در داده ها بسیار کارآمد است.در روش کار t-SNE، ابتدا یک ماتریس شباهت برای داده ها تعریف می شود. سپس، با استفاده از الگوریتم گرادیان کاهش مرتبه دوم، ماتریس شباهت در فضای بعد کمتر قرار می گیرد. در نهایت، با استفاده از یک الگوریتم بهینه سازی، ماتریس شباهت در فضای کم بعدی به خوشه های مختلف تقسیم می شود.مزیت اصلی t-SNE این است که قادر به نمایش دادن الگوهای پیچیده و تفاوت های ریز در داده ها است. با این حال، معایبی نیز دارد، از جمله:

t-SNE یک الگوریتم محاسباتی سنگین است و زمان بر است، به خصوص برای داده های بزرگ.

t-SNE یک الگوریتم پارامتری است و نتایج آن ممکن است به شدت تحت تاثیر پارامتر هایی باشد که برای آن تعیین می شوند.

سوال هشتم :

برای داده‌های عددی زیر نمودار جعبه[11] را رسم کنید.

۴۱, ۲۸, ۳۹, ۲۵, ۴۹, ۳۶, ۲۷, ۳۳, ۲۶, ۷۰, ۲۷, ۲۹, ۱, ۳, ۲۷

پاسخ :

ابتدا اعداد را به صورت مرتب شده مینویسیم .

۷۰ ۴۹ ۴۱ ۳۹ ۳۶ ۳۳ ۲۹ ۲۸ ۲۷ ۲۷ ۲۷ ۲۶ ۲۵ ۳ ۱

با توجه به این کمترین مقدار برابر ۱

چارک اول برابر ۲۶

میانه برابر ۲۸

چارک سوم برابر ۳۹

و بیشینه برابر ۷۰ است

سوال نهم :

همانطور که می‌دانید، یکی از روش‌های مقایسه دو توزیع آماری استفاده از روش q-q plot است.

الف) نحوه کار این روش را توضیح دهید.

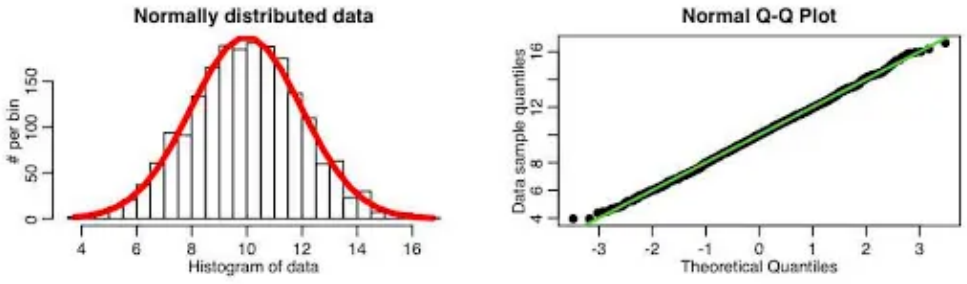
ب) نمودار q-q plot می‌تواند به شکل‌های متفاوتی نمایان شود: به طور مثال شبیه یک خط راست مورب. سه نوع از این شکل‌های متفاوت را بررسی کنید و تحلیل خود داده‌های توزیع‌های آماری ورودی به آن را بنویسید. به نظر شما از روی شکل q-q plot چه مواردی در مورد توزیع‌های آماری اولیه قابل استنتاج است؟

پاسخ :

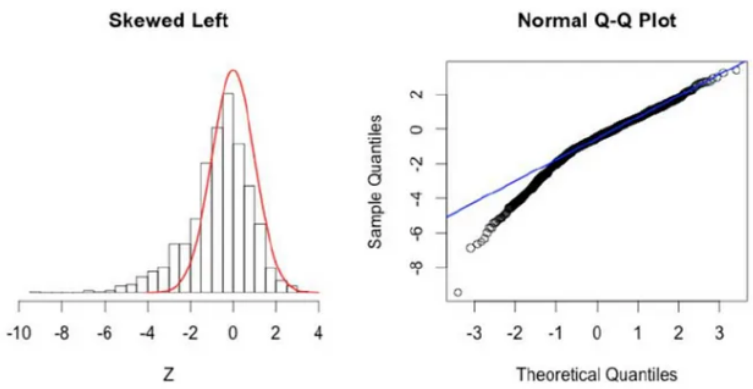
الف:

در این روش ما قسمت های مختلف دو دیتا ست را با هم مقایسه میکنیم به طوری که یک محور را برای یک دیتا ست و دیگری را برای دیتا ست دیگر در نظر میگیریم و حال داده های هر کدام را به صورت دوتایی (x,y) روی محور مختصات نشان می دهیم اگر دیتا ست ها برابر باشند روی خط x=y قرار میگیرد. با این روش میتوان پیدا کرد که داده های ما از یک توزیع خاصی استفاده میکنند یا خیر و یا میتوان داده های پرت را شناسایی کرد. و یا رابطه بین توزیع ها را که خطی اند و یا خیر.

ب :

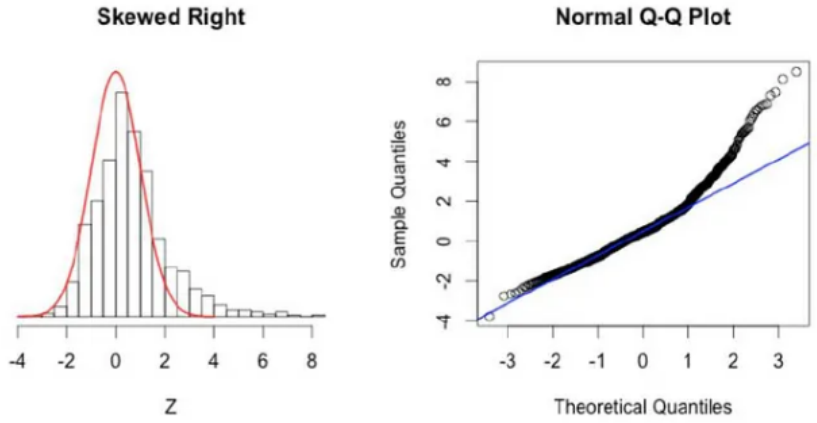


برای مثال در این تصویر می توان گفت که داده ها به صورت نرمال توزیع شده اند و مطابق قسمت الف روی خط x=y اند.



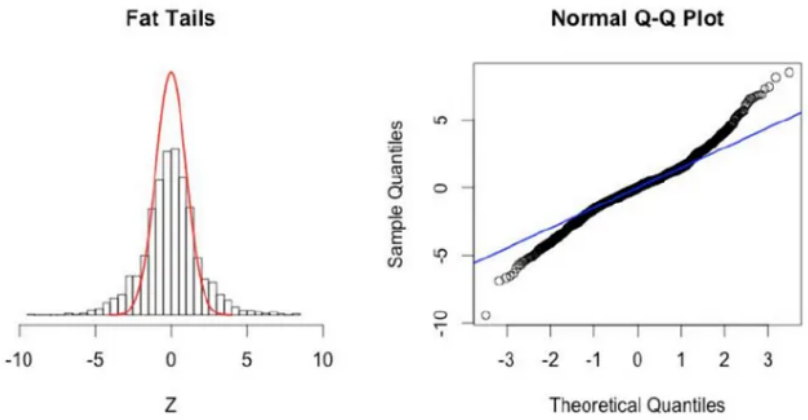
Left Skewed Q-Q plot for Normal Distribution

در این شکل نیز هم میتوان داده های پرت را تشخیص داده و هم اینکه مقایسه این دو توزیع که با توجه به q-q داده ها ابتدا روی توزیع مشخصی نیستند و سپس به سمت توزیع نرمال میروند.

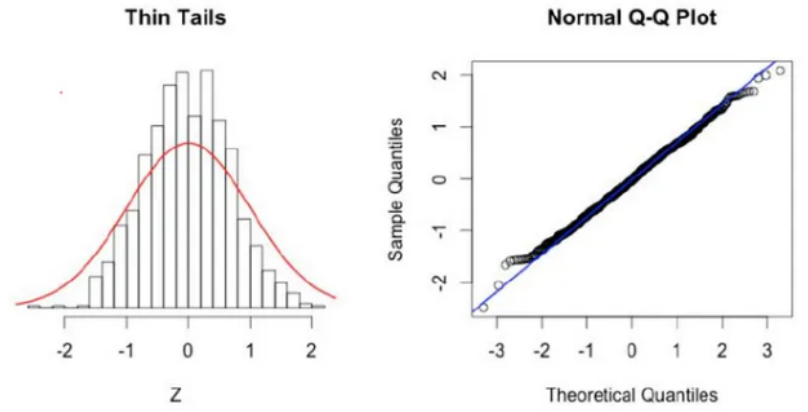


Right Skewed Q-Q plot for Normal Distribution

در این تصویر هم داده های انتها به صورت بالا هستند.



Fat-Tailed Q-Q plot for Normal DIstribution



همچنین در این می توان مقایسه انواع توزیع ها با توزیع نرمال را دید و نحوه تشخیص داده هار روی q-q

پس با توجه به نمودار میتوان پرت بودن داده و توزیع تقریبی و یا مورد انتظار خود را پیدا کرد.

سوال دهم:

برای هر یک از روش‌های نرمال‌سازی زیر تحقیق کرده و بازه‌ی اعداد را مشخص کنید.

الف) نرمال‌سازی min-max

ب) نرمال‌سازی z-score

ج) نرمال‌سازی با مقیاس‌دهی[۱۲]

پاسخ :

الف:

با استفاده از فرمول روبرو تمامی اعداد را به بازه ۰ تا ۱ تبدیل میکند .

$$x' = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}$$

ب:

در کل برای درک بهتر اختلاف از میانگین است. داده ها را از میانگین μ و انحراف معیار سیگما به مجموعه با میانگین ۰ و انحراف معیار ۱ تبدیل میکند . که فرمول آن مانند شکل زیر است. که رنج آن بین ۳- تا ۳ است.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ج :

بر اساس شیفت دادن نقطه اعشار کار میکند . تمام اعداد را به بازه ۰ تا ۱ تبدیل میکند . و یا اگر منفی باشند -۱ تا ۱ تبدیل میکند. که j توانی از ۱۰ است که بزرگترین داده را بین ۱- تا ۱ قرار می دهد.

$$U_i = \frac{V_i}{10^j}$$

سوال یازدهم :

با توجه به مقادیر ورودی X و مقادیر هدف Y می‌توان یک برازش خطی یا غیرخطی بر روی بسیاری از دادگان‌ها ایجاد کرد. با توجه به این مقادیر، به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$X = [2, 4, 1, 3, 2, 6], \qquad Y = [5, 6, 3, 6, 3, 10]$$

الف) روش محاسبه معادله نرمال[۱۳] را با استفاده از روش محاسبه مشتق جزئی باقی‌مانده[۱۴] کامل شرح دهید.

ب) یک برازش خطی ($Y = \beta_1 X + \beta_0$) را برای این دادگان محاسبه کنید. (مقدار خطای برازش را نیز به دست آورید)

ج) یک برازش غیرخطی ($Y = \beta_2 X^2 + \beta_1 X + \beta_0$) برای این دادگان محاسبه کنید. (مقدار خطای برازش را نیز به دست آورید)

پاسخ :

برای محاسبه معادله نرمال به صورت زیر عمل میکنیم :

ابتدا y را به صورت یک معادله فرض میکنیم :

$$y = \beta_0 + \beta_1 X$$

فرض کنیم باقی مانده ما به صورت زیر تعریف شود :

$$\epsilon = y - X\beta$$

حال تابع هزینه ما به صورت زیر تعریف می شود :

$$\epsilon^2 = (y - X\beta)^2 \Rightarrow \left\|\epsilon^2\right\| = (y - X\beta)^T(y - X\beta) = (X\beta)^T X\beta - (X\beta)^T y - y^T X\beta + y^T y =$$

$$(X\beta)^T X\beta - 2(X\beta)^T y + y^T y$$

برای اینکه تابع هزینه کمترین مقدار باشد مشتق آن نسبت به ضریب بتا ما باید صفر شود تا مینیم در آن حوزه به دست آید.

$$\frac{\delta\left\|\epsilon^2\right\|}{\delta\beta} = 2X^T X\beta - 2X^T y = 0 \rightarrow \beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

ب :

x= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ y= $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ $X^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 121 \end{pmatrix}$

$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 70 \end{pmatrix}$

$B = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 70 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 33 \\ 121 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$

پس $y = \frac{11}{8} + \frac{11}{8}x$

مقدار خطا نیز برابر است با $\begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ که خطای متناظر هر نقطه است .

ج :

همانند قسمت قبل

x= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix}$ y= $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ $X^T y =$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 16 & 1 & 9 & 4 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 121 \\ 545 \end{pmatrix}$

$X^T X =$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 16 & 1 & 9 & 4 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 70 \\ 18 & 70 & 324 \\ 70 & 324 & 1666 \end{pmatrix}$

$B = (X^T X)^{-1} X^T y =$ $\begin{pmatrix} 6 & 18 & 70 \\ 18 & 70 & 324 \\ 70 & 324 & 1666 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 33 \\ 121 \\ 545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1981}{890} \\ \frac{334}{445} \\ \frac{39}{445} \end{pmatrix}$

پس $y = \frac{1981}{890} + \frac{334}{445}x + \frac{39}{445}x^2$

$$= \begin{pmatrix} \frac{821}{890} \\ -\frac{561}{890} \\ -\frac{57}{890} \\ \frac{653}{890} \\ -\frac{959}{890} \\ \frac{103}{890} \end{pmatrix}$$

خطا نیز برابر است با که خطای متناظر هر نقطه است .

بخش عملی :

پاسخ سوالات عملی در فایل ژوپیتر است.