



دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

بهینه سازی خطی

(بهار ۱۴۰۲)

پروژه امتیازی

محمد چوپان ۹۸۳۱۱۲۵

با توجه به پروژه پیشنهادی استاد گرامی مبنی بر پیاده سازی مساله زمان بندی کار و مساله مالی چند دوره ای به صورت فشرده همچنین بررسی نحوه پیاده سازی مسائل دوگان در پکیج Pyomo به پیاده سازی آن ها و بررسی هر کدام می پردازیم.

مساله زمان بندی کار:

مسأله زمان بندی کار

شرکت پست به تعدادی کارکنان تمام وقت در روزهای مختلف هفته به شرح زیر نیاز دارد:

روز	شنبه (روز ۱)	یکشنبه (روز ۲)	دوشنبه (روز ۳)	سه شنبه (روز ۴)	چهارشنبه (روز ۵)	پنجشنبه (روز ۶)	جمعه (روز ۷)
تعداد کارکنان تمام وقت مورد نیاز	۱۷	۱۳	۱۵	۱۹	۱۴	۱۶	۱۱

طبق قوانین هر کارمند تمام وقت باید **۵ روز متوالی** کار کند و آنگاه دو روز در مرخصی باشد. مثلاً کارمندی که روزهای دوشنبه تا جمعه کار می کند، شنبه و یکشنبه در مرخصی است. یک مدل ارائه کنید که شرکت بتواند نیاز روزانه اش را با کمترین تعداد کارمند استخدامی تأمین کند.

پاسخ :

ابتدا تابع هدف و قیود را همانند اسلاید به صورت زیر می نویسیم:

x_i : تعداد کارمندی که در روز i ام کار خود را شروع می کنند ($i = 1, 2, \dots, 7$)

روز	شنبه (روز ۱)	یکشنبه (روز ۲)	دوشنبه (روز ۳)	سه شنبه (روز ۴)	چهارشنبه (روز ۵)	پنجشنبه (روز ۶)	جمعه (روز ۷)
تعداد کارکنان تمام وقت مورد نیاز	۱۷	۱۳	۱۵	۱۹	۱۴	۱۶	۱۱

$$\min z = x_1 + x_2 + \dots + x_7$$

s. t.

$$x_1 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 \geq 17$$

$$x_2 + x_1 + x_7 + x_6 + x_5 \geq 13$$

$$x_3 + x_2 + x_1 + x_7 + x_6 \geq 15$$

$$x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + x_7 \geq 19$$

$$x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 \geq 14$$

$$x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 \geq 16$$

$$x_7 + x_6 + x_5 + x_4 + x_3 \geq 11$$

$$x_i \geq 0, \text{Integer}$$

حال با توجه به اینکه فرم فشرده این مساله مورد نیاز ما است آن را به صورت زیر فشرده میکنیم :

فرض کنیم تعداد کارکنان تمام وقت مورد نیاز هر روز را به صورت T_i تعریف کنیم. آنگاه قیود ما به صورت زیر در می‌آیند:

$$\sum_{i=1}^7 \left(\sum_{j=0}^4 (x_{(i+j)\%7+1}) \right) \geq T_{(i+4)\%7+1}$$

که این سیگما تمامی قیود را شامل می‌شود.

<pre>x2 x3 x4 x5 x6 >=T6 x3 x4 x5 x6 x7 >=T7 x4 x5 x6 x7 x1 >=T1 x5 x6 x7 x1 x2 >=T2 x6 x7 x1 x2 x3 >=T3 x7 x1 x2 x3 x4 >=T4 x1 x2 x3 x4 x5 >=T5</pre>	<pre>for i in range(1,8): for j in range(5): print("x"+str((i+j)%7+1),end=" ") print(">=T"+str((i+4)%7+1),end=" ") print("")</pre>
---	---

و تابع هدف را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$\min z = \sum_{i=1}^7 x_i$$

حال کد آن را داخل فایل زوپیتر در pyomo مینویسیم. (در ضمیمه وجود دارد)

خروجی حاصل :

```
Variables:
  x : Size=7, Index=iset
      Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
          1 :      0 :   6.0 :   None : False : False : NonNegativeIntegers
          2 :      0 :   6.0 :   None : False : False : NonNegativeIntegers
          3 :      0 :   0.0 :   None : False : False : NonNegativeIntegers
          4 :      0 :   7.0 :   None : False : False : NonNegativeIntegers
          5 :      0 :   0.0 :   None : False : False : NonNegativeIntegers
          6 :      0 :   4.0 :   None : False : False : NonNegativeIntegers
          7 :      0 :   0.0 :   None : False : False : NonNegativeIntegers
```

با این خروجی تمامی قید ها رعایت شده اند. و اینکه مقدار تابع هدف برابر ۲۳ است.

اما خروجی جزوه متفاوت است.

برای قسمت دوم در جزوه که اگر اعداد int نبوده اند نیز تابع هدف مشابه است اما پاسخ متغیر ها متفاوت است.

Variables:

x : Size=7, Index=iset

Key	Lower	Value	Upper	Fixed	Stale	Domain
1	0	6.33333333333333	None	False	False	NonNegativeReals
2	0	3.33333333333333	None	False	False	NonNegativeReals
3	0	2.0	None	False	False	NonNegativeReals
4	0	7.33333333333333	None	False	False	NonNegativeReals
5	0	0.0	None	False	False	NonNegativeReals
6	0	3.33333333333333	None	False	False	NonNegativeReals
7	0	0.0	None	False	False	NonNegativeReals

Objectives:

obj : Size=1, Index=None, Active=True

Key	Active	Value
None	True	22.3333333333332

جواب بهین مدل LP

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*	x_7^*
4	4	2	6	0	4	3

$$z^* = 23$$

جواب بهین مدل LP

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*	x_7^*
1.3	3.3	2	7.3	0	3.3	5

$$z^* = 22.3$$

گرد کردن جواب بهین مدل LP رو به بالا

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*	x_7^*
2	4	2	8	0	4	5

$$z^* = 25$$

مساله مالی چند دوره ای:

فردی 100000 دلار سرمایه دارد و می خواهد راهکار سرمایه گذاری اش را برای سه سال آینده تعیین کند.

شرکت	سال 0	سال 1	سال 2	سال 3
A	$-x_A$ دلار	$+0.5x_A$ دلار	$+x_A$ دلار	0 دلار
B	0 دلار	$-x_B$ دلار	$+0.5x_B$ دلار	$+x_B$ دلار
C	$-x_C$ دلار	$+1.2x_C$ دلار	0 دلار	0 دلار
D	$-x_D$ دلار	0 دلار	0 دلار	$1.9x_D$ دلار
E	0 دلار	0 دلار	$-x_E$ دلار	$1.5x_E$ دلار

- ✓ فرد نمی خواهد بیشتر از 75000 دلار در هر شرکت سرمایه گذاری کند.
- ✓ فرد می تواند پولش را در بانک قرار دهد که سود بانک در هر سال معادل 8 درصد است.
- ✓ در هر سال سرمایه بازگشتی می تواند بلافاصله مجدداً سرمایه گذاری شود.
- ✓ فرد نمی تواند برای سرمایه گذاری، پول قرض بگیرد، لذا میزان پرداختی در هر سال حداکثر به اندازه پول نقد موجود است.

اندیس $j = A, B, C, D, E$ شرکت
سال $t = 0, 1, 2$

متغیر تصمیم x_j میزان سرمایه گذاری در شرکت j
 y_t میزان سرمایه گذاری در بانک در سال t

حداکثر 75000 دلار می توان در هر شرکت سرمایه گذاری کرد:

$$x_j \leq 75000 \quad \forall j = A, B, C, D, E$$

ابتدا تابع هدف و قیود را همانند اسلاید ها مینویسیم:

شرکت	سال 0	سال 1	سال 2	سال 3
A	$-x_A$ دلار	$+0.5x_A$ دلار	$+x_A$ دلار	0 دلار
B	0 دلار	$-x_B$ دلار	$+0.5x_B$ دلار	$+x_B$ دلار
C	$-x_C$ دلار	$+1.2x_C$ دلار	0 دلار	0 دلار
D	$-x_D$ دلار	0 دلار	0 دلار	$1.9x_D$ دلار
E	0 دلار	0 دلار	$-x_E$ دلار	$1.5x_E$ دلار

پرداختی = موجودی

$$100000 = x_A + x_C + x_D + y_0 \quad \text{سال صفر}$$

$$1.08y_0 + 0.5x_A + 1.2x_C = x_B + y_1 \quad \text{سال اول}$$

$$1.08y_1 + x_A + 0.5x_B = x_E + y_2 \quad \text{سال دوم}$$

$$Max \ z = 1.08y_2 + x_B + 1.9x_D + 1.5x_E \quad \text{تابع هدف}$$

$$x_j, y_t \geq 0$$

58

حال مساله را در فایل ژوپیتر پیاده سازی میکنیم. فشرده ترین حالت ممکن برای قیود همانند اسلاید است.

برای ساده سازی شرکت ها را به ترتیب از ۰ تا ۴ شماره گذاری میکنیم

پاسخ ما :

```
Variables:
x : Size=5, Index=iset
  Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
    0 :      0 : 60000.0 : 75000 : False : False : NonNegativeIntegers
    1 :      0 : 30000.0 : 75000 : False : False : NonNegativeIntegers
    2 :      0 :      0.0 : 75000 : False : False : NonNegativeIntegers
    3 :      0 : 40000.0 : 75000 : False : False : NonNegativeIntegers
    4 :      0 : 75000.0 : 75000 : False : False : NonNegativeIntegers
y : Size=3, Index=kset
  Key : Lower : Value : Upper : Fixed : Stale : Domain
    0 :      0 :      0.0 : None : False : False : NonNegativeIntegers
    1 :      0 :      0.0 : None : False : False : NonNegativeIntegers
    2 :      0 :      0.0 : None : False : False : NonNegativeIntegers

Objectives:
obj : Size=1, Index=None, Active=True
  Key : Active : Value
  None : True : 218500.0
```

پاسخ اسلاید :

1)	218500.0
VARIABLE	VALUE
Y2	0.000000
XB	30000.000000
XD	40000.000000
XE	75000.000000
XA	60000.000000
XC	0.000000
Y0	0.000000
Y1	0.000000

همانطور که میبینیم دقیقا مشابه است.

پیدا کردن متغیر دوگان در pyomo :

ما برای این کار مثال زیر از جزوه را بررسی میکنیم :
مثال:

مسئله اولیه	مسئله دوگان
$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ s. t. $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$ $2x_2 - x_3 \geq 5$ $2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\min w = 15y_1 + 5y_2 + 10y_3$ s. t. $y_1 + 2y_3 \geq 3$ $3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$ $2y_1 - y_2 - 5y_3 \geq 5$ $y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3$ آزاد

جدول بهین مسئله اولیه:

BV	z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
z	1	0	0	0	$51/23$	$58/23$	$M - 58/23$	$M + 9/23$	$565/23$
x_3	0	0	0	1	$4/23$	$5/23$	$-5/23$	$-2/23$	$15/23$
x_2	0	0	1	0	$2/23$	$-9/23$	$9/23$	$-1/23$	$65/23$
x_1	0	1	0	0	$9/23$	$17/23$	$-17/23$	$120/23$	$20/23$

مقدار بهینه متغیرهای y_i را بیابید.

برای پیدا کردن متغیرهای دوگان از دستور زیر در pyomo استفاده میکنیم.

```
model.dual=pyo.Suffix(direction=pyo.Suffix.IMPORT)
```

حال به حل مساله و مشاهده دوگان های آن میپردازیم.

```
Variables:
  x : Size=3, Index=iset
    Key : Lower : Value          : Upper : Fixed : Stale : Domain
    1 :      0 : 5.21739130434783 : None : False : False : NonNegativeReals
    2 :      0 : 2.82608695652174 : None : False : False : NonNegativeReals
    3 :      0 : 0.652173913043478 : None : False : False : NonNegativeReals

Objectives:
  obj : Size=1, Index=None, Active=True
    Key : Active : Value
    None : True : 24.56521739130436

Constraints:
  const1 : Size=1
    Key : Lower : Body          : Upper
    None : None : 15.000000000000007 : 15.0
  const2 : Size=1
    Key : Lower : Body          : Upper
    None : 5.0 : 5.000000000000002 : None
  const3 : Size=1
    Key : Lower : Body          : Upper
    None : 10.0 : 10.000000000000009 : 10.0
y1* 2.21739130434783
y2* -2.52173913043478
y3* 0.391304347826087
```

پاسخ ما:

پاسخ اسلاید ها :

$$y_1^* = \bar{c}_{s_1} = \frac{51}{23}$$

$$y_2^* = -\bar{c}_{e_2} = \frac{-58}{23}$$

$$y_3^* = \bar{c}_{a_3} \left(M \text{ با حذف عبارت شامل } \right) = \frac{9}{23}$$

$$w^* = \frac{565}{23}$$

میبینیم که دقیقا مطابق هم اند.