



دانشکده مهندسی  
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)  
دانشکده مهندسی کامپیوتر

بهینه سازی خطی  
(پاییز ۱۴۰۱)

تمرین ۳

محمد چوپان ۹۸۳۱۱۲۵

## سوال اول :

A company produces six products in the following fashion. Each unit of raw material purchased yields four units of product 1, two units of product 2, and one unit of product 3. Up to 1,200 units of product 1 can be sold, and up to 300 units of product 2 can be sold. Each unit of product 1 can be sold or processed further. Each unit of product 1 that is processed yields a unit of product 4. Demand for products 3 and 4 is unlimited. Each unit of product 2 can be sold or processed further. Each unit of product 2 that is processed further yields 0.8 unit of product 5 and 0.3 unit of product 6. Up to 1,000 units of product 5 can be sold, and up to 800 units of product 6 can be sold. Up to 3,000 units of raw material can be purchased at \$6 per unit. Leftover units of products 5 and 6 must be destroyed. It costs \$4 to destroy each leftover unit of product 5 and \$3 to destroy each leftover unit of product 6. Ignoring raw material purchase costs, the per-unit sales price and production costs for each product are shown in Table 24. Formulate an LP whose solution will yield a profitmaximizing production schedule.

**TABLE 24**

Product	Sales Price (\$)	Production Cost (\$)
1	7	4
2	6	4
3	4	2
4	3	1
5	20	5
6	35	5

پاسخ :

ابتدا متغیر ها را تعریف میکنیم :

$x$  مقدار مواد اولیه خریداری شده .

$y_i$  مقدار محصول  $i$  فروخته شده. بازه  $i$  بین ۱ و ۶ است.

$z_j$  مقدار محصول  $j$  تبدیل شده . بازه  $j$  بین ۱ و ۲ است.

$p_k$  مقدار محصول  $k$  اضافه تولید . بازه  $k$  بین ۵ و ۶ است.

تمامی متغیر های ما بزرگتر از صفر و صحیح اند .

## حال قید ها را می نویسیم :

### قید اول :

تضمین میکند که مقدار مواد اولیه خریداری شده کمتر از ۳۰۰۰ واحد است.

$$x \leq 3000$$

### قید دوم :

حداکثر مقدار قابل فروش برای محصول ۱ برابر ۱۲۰۰ واحد است.

$$y_1 \leq 1200$$

### قید سوم :

حداکثر مقدار قابل فروش برای محصول ۲ برابر ۳۰۰ واحد است.

$$y_2 \leq 300$$

### قید چهارم :

حداکثر مقدار قابل فروش برای محصول ۵ برابر ۱۰۰۰ واحد است.

$$y_5 \leq 1000$$

### قید پنجم :

حداکثر مقدار قابل فروش برای محصول ۶ برابر ۸۰۰ واحد است.

$$y_6 \leq 800$$

### قید ششم :

مقدار محصول ۱ فروخته شده + تبدیل شده به محصول ۴ برابر است با محصول ۱ تولید شده.

$$y_1 + z_1 = 4 * x$$

### قید هفتم :

مقدار محصول ۲ فروخته شده + تبدیل شده به محصول ۵ و ۶ برابر است با محصول ۲ تولید شده .

$$y_2 + z_2 = 2 * x$$

### قید هشتم :

مقدار محصول ۱ تبدیل شده برابر است با محصول ۴ فروخته شده

$$y_4 = z_1$$

### قید نهم :

مقدار محصول ۲ تبدیل شده برابر است با جمع محصول های ۵ و ۶ با ضریب های خود.

فروخته شده ها + اضافه ها

$$z_2 = 0.8 * (y_5 + p_5) + 0.3 * (y_6 + p_6)$$

### قید دهم:

مقدار محصول ۳ فروخته شده برابر است با محصول ۳ تولید شده از مواد اولیه

$$y_3 = x$$

### تابع هدف :

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z = & (7 * y_1 + 6 * y_2 + 4 * y_3 + 3 * y_4 + 20 * y_5 + 20 * y_6) \\ & - (4 * 4 * x + 4 * 2 * x + 2 * x + 1 * z_1 + 5 * (y_5 + p_5) + 5 * (y_6 + p_6) + 4 * p_5 + 3 * p_6) \end{aligned}$$

از آنجایی که  $z_1$  همان  $y_4$  است تابع هدف را ساده میکنیم .

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z = & (7 * y_1 + 6 * y_2 + 4 * y_3 + 3 * y_4 + 20 * y_5 + 20 * y_6) \\ & - (26 * x + 1 * y_4 + 5 * (y_5 + p_5) + 5 * (y_6 + p_6) + 4 * p_5 + 3 * p_6) = \\ & (7 * y_1 + 6 * y_2 + 4 * y_3 + 2 * y_4 + 15 * y_5 + 15 * y_6) - (26 * x + 9 * p_5 + 8 * p_6) \end{aligned}$$

که همه متغیرها بزرگتر مساوی صفر اند و صحیح اند. و بازه ها در تعریف متغیر ها تعریف شده است.

## سوال دوم :

اوقات روز	حداقل تعداد فروشندگی مورد نیاز
ساعت ۹ تا ۱۰	۱۰ نفر
ساعت ۱۰ تا ۱۱	۱۲ نفر
ساعت ۱۱ تا ۱۲	۱۴ نفر
ساعت ۱۲ تا ۱۳	۱۶ نفر
ساعت ۱۳ تا ۱۴	۱۸ نفر
ساعت ۱۴ تا ۱۵	۱۷ نفر
ساعت ۱۵ تا ۱۶	۱۵ نفر
ساعت ۱۶ تا ۱۷	۱۰ نفر

فروشگاه به منظور پاسخگویی به مراجعان، استخدام فروشندگان نیمه وقت را که باید ۴ ساعت تمام به کار اشتغال ورزند تحت بررسی دارد. بنابراین، ساعت شروع کار فروشندگان نیمه وقت می تواند در رأس یکی از ساعات ۹ تا ۱۳ باشد. حال آن که ساعت کار فروشندگان تمام وقت که حداکثر ۱۲ نفرند، از ساعت ۹ تا ۱۷ است، که یک ساعت وقت استراحت و صرف ناهار به آنان داده می شود که نیمی از آنان از ساعت ۱۱ تا ۱۲ و نیم دیگر از ساعت ۱۲ تا ۱۳ از این فرصت استفاده می کنند. سیاست فروشگاه بر آن است که حداکثر تعداد ساعات کار فروشندگان نیمه وقت از ۵۰٪ ساعات کار فروشندگان تمام وقت بیشتر نباشد. میانگین دستمزد فروشندگان نیمه وقت ۴۰۰ تومان در ساعت است (یا ۱۶۰۰ تومان در روز) است و فروشندگان تمام وقت روزانه ۵۰۰۰ تومان دریافت می کنند. هدف فروشگاه تهیه یک برنامه زمان بندی برای فروشندگان با حداقل هزینه است.

## پاسخ :

ابتدا متغیر های خود را به شکل زیر تعریف میکنیم.

$x_i$  فروشندگان نیمه وقتی که در بازه  $i$  شروع به کار میکنند.

$i = \{$

1 : ساعت ۹

۲: ساعت ۱۰

۳ : ساعت ۱۱

۴ : ساعت ۱۲

۵: ساعت ۱۳

$\}$

$y$  : تعداد فروشندگان تمام وقت .

تمامی متغیر ها صحیح و بزرگ تر مساوی از صفر اند . بازه  $i$  از ۱ تا ۵

## سپس قيود را تعريف ميکنيم :

### قيود اول :

حداقل تعداد فروشندگان در هر بازه بايد رعايت شود.

برای بازه ۹ تا ۱۰ :

$$10 \leq x_1 + y$$

برای بازه ۱۰ تا ۱۱ :

$$12 \leq x_1 + x_2 + y$$

برای بازه ۱۱ تا ۱۲ :

$$14 \leq x_1 + x_2 + x_3 + y/2$$

برای بازه ۱۲ تا ۱۳ :

$$16 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y/2$$

برای بازه ۱۳ تا ۱۴ :

$$18 \leq x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y$$

برای بازه ۱۴ تا ۱۵ :

$$17 \leq x_3 + x_4 + x_5 + y$$

برای بازه ۱۵ تا ۱۶ :

$$15 \leq x_4 + x_5 + y$$

برای بازه ۱۶ تا ۱۷ :

$$10 \leq x_5 + y$$

### قيود دوم :

فروشندگان تمام وقت حداکثر ۱۲ نفرند.

$$y \leq 12$$

### قيود سوم :

حداکثر ساعت کار فروشندگان نیمه وقت از ۵۰٪ ساعت کار فروشندگان تمام وقت بیشتر نباشد.

$$4 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \leq 7 * y$$

### تابع هدف :

$$\text{MIN } Z = 1600 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 5000 * y$$

تمامی متغیرها صحیح و بزرگتر از ۰ اند و بازه ۱ نیز بین ۱ تا ۵ است.