



دانشکده مهندسی  
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)  
دانشکده مهندسی کامپیوتر

بهینه سازی خطی  
(پاییز ۱۴۰۱)

تمرین ۲

محمد چوپان ۹۸۳۱۱۲۵

## سوال اول:

یک شرکت باید تقاضاهای زیر را برآورده کند:

فصل ۱ : ۴۰ واحد محصول

فصل ۲: ۱۰ واحد محصول

فصل ۳: ۴۰ واحد محصول

فصل ۴: ۲۰ واحد محصول

در هر فصل، حداکثر ۳۰ واحد محصول را می‌توان با نیروی کار معمولی با هزینه ۴۰ دلار در هر واحد تولید کرد. در طول هر فصل، تعداد نامحدودی از محصولات را می‌توان با اضافه کار تولید کرد. هر یک واحد محصولی که با اضافه کار تولید می‌شود هزینه ۶۰ دلار دارد. از کل محصولات تولید شده، ۲۰ درصد نامناسب هستند و نمی‌توان از آنها برای رفع تقاضا استفاده کرد. همچنین در پایان هر فصل، ۱۰ درصد از کل محصولات موجود خراب می‌شوند و نمی‌توان از آنها برای برآوردن تقاضاهای آینده استفاده کرد. پس از رفع تقاضای هر فصل و محاسبه محصولات خراب، می‌توان محصولات مازاد را در انبار نگهداری کرد که هزینه نگهداری هر واحد ۱۰ دلار است و همچنین ۲۰ واحد محصول قابل استفاده در ابتدای فصل ۱ در انبار موجود است. اجباری به تأمین به موقع تقاضا نیست و تمام یا قسمتی از تقاضای یک فصل می‌تواند در فصل یا فصل‌های بعدی تأمین شود اما همه تقاضاها باید بالاخره تا پایان فصل چهارم برآورده گردند. به ازای هر فصلی که تأمین تقاضا به تعویق می‌افتد، هزینه ۸ دلار تحمیل می‌شود. یک مدل LP ارائه کنید که بتوان از آن برای به حداقل رساندن هزینه‌های این چهار فصل استفاده کرد. متغیرهای تصمیم را به طور کامل شرح دهید و توضیح مربوط به هر قید را بنویسید.

پاسخ :

ابتدا متغیر ها را تعریف میکنیم :

$x_i$  مقدار محصول تولید شده با نیروی معمولی در ماه  $i$

$k_i$  مقدار محصول تولید شده با نیروی اضافی در ماه  $i$

$y_i$  مقدار محصول انبار شده در ماه  $i$

$z_i$  مقدار محصول تعویق افتاده در ماه  $i$

تمامی متغیر ها بزرگ تر مساوی از ۰ و صحیح اند و بازه  $i$  بین ۱ تا ۴ است.

حال قید ها را می نویسیم :

### قید اول :

تضمین میکند که مقدار محصول تولید شده با نیروی کار معمولی کوچکتر مساوی ۳۰ است.

$$\forall_i x_i \leq 30$$

به ازای هر ماه محصول با نیروی کار عادی باید کمتر از ۳۰ باشد.

### قید دوم :

مجموع محصول های تولید شده در ماه اول + مقدار اولیه باید برابر مقدار درخواستی منهای تعویقی ها و انبار ها باشد . که در این خرابی ها نامناسب ها را هم باید حساب کرد.

$$(0.8 * (x_1 + k_1) + 20) = 40 - z_1 + y_1$$

### قید سوم :

همانند قید بالا برای ماه دوم تنها انباری های ماه اول اضافه می شوند.

$$(0.8 * (x_2 + k_2) + 0.9 * y_1) = 10 + z_1 - z_2 + y_2$$

### قید چهارم :

همانند قید بالا برای ماه سوم تنها انباری های ماه دوم اضافه می شوند.

$$(0.8 * (x_3 + k_3) + 0.9 * y_2) = 40 + z_2 - z_3 + y_3$$

### قید پنجم :

همانند قید بالا برای ماه چهارم تنها انباری های ماه سوم اضافه می شوند.

$$(0.8 * (x_4 + k_4) + 0.9 * y_3) = 20 + z_3 - z_4 + y_4$$

البته مقدار تعویقی در ماه چهارم باید ۰ باشد زیرا همه تقاضا ها باید برآورده شوند.

یعنی  $z_4=0$  است.

## تابع هدف :

$$\text{MIN } x_1 * 40 + k_1 * 60 + y_1 * 10 + z_1 * 8 +$$

$$x_2 * 40 + k_2 * 60 + y_2 * 10 + z_2 * 8 +$$

$$x_3 * 40 + k_3 * 60 + y_3 * 10 + z_3 * 8 +$$

$$x_4 * 40 + k_4 * 60 + y_4 * 10 + z_4 * 8 = 40 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 60 * (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) +$$

$$8 * (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + 10 * (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

که همه متغیرها بزرگتر مساوی صفر اند و صحیح اند. و i هم بین ۱ تا ۴ است.

## سوال دوم:

یک کارخانه بازیافت کاغذ، چهار نوع کاغذ را بازیافت می کند که این ۴ نوع عبارتند از: کارتن، مقوا، کاغذ روزنامه و کاغذ کتاب. ابتدا برای بازیافت این کاغذها باید این ۴ نوع کاغذ به خمیر تبدیل شوند و سپس می توان با استفاده از این خمیرهای تولیدی سه درجه کاغذ بازیافتی (درجه ۱ و ۲ و ۳) تولید کرد. قیمت هر تن از این چهار ورودی در جدول زیر نشان داده شده است. برای انجام پردازش روی چهار ورودی و تبدیل آن ها به خمیر می توان از دو روش استفاده کرد. با استفاده از روش اول هزینه پردازش روی هر تن از ورودی ها ۲۰ دلار است و با استفاده از روش اول، معادل ۹۰ درصد وزن مواد ورودی خمیر تولید می گردد. همچنین با استفاده از روش دوم، هزینه پردازش روی هر یک تن مواد ۱۵ دلار است و معادل ۸۰ درصد وزن مواد ورودی خمیر تولید می شود. حداکثر ۳۰۰۰ تن ورودی را می توان از طریق روش اول یا روش دوم به خمیر تبدیل کرد. کاغذ درجه ۱ فقط با خمیر کاغذ روزنامه و کاغذ کتاب تولید می شود. کاغذ درجه ۲، فقط با خمیر کاغذ کتاب، مقوا و کارتن قابل تولید است و کاغذ درجه ۳، فقط با کاغذ روزنامه، مقوا و کارتن تولید می شود. برای رفع تقاضای فعلی، این شرکت به ۵۰۰ تن خمیر برای تولید کاغذ درجه ۱، ۵۰۰ تن خمیر برای تولید کاغذ درجه ۲ و ۶۰۰ تن خمیر برای تولید کاغذ درجه ۳ نیاز دارد. یک مدل خطی ارائه کنید تا هزینه ها برای رفع تقاضای میزان خمیر مورد نیاز مینیمم شود.

قیمت خرید هر تن از انواع کاغذها

ورودی	هزینه خرید
کارتن	5
مقوا	6
کاغذ روزنامه	8
کاغذ کتاب	10

## پاسخ :

ابتدا متغیر های خود را به شکل زیر تعریف میکنیم.

$x_{ij}$  مقدار مواد اولیه خریداری شده از نوع  $i$  که به روش  $j$  پردازش می شود.

$$\{i\} = 1$$

1 : کاغذ کتاب

۲ : کاغذ روزنامه

۳ : مقوا

۴ : کارتن

{

$$\{j\} = 1$$

1: روش اول پردازش

۲: روش دوم پردازش

{

$L_k$  میزان خمیر تولید شده درجه  $k$

تمامی متغیر ها صحیح و بزرگ تر مساوی از صفر اند . بازه  $i$  از ۱ تا ۴ و بازه  $j$  نیز بین ۱ تا ۲ است. و بازه  $k$  نیز بین ۱ تا ۳ است.

سپس قیود را تعریف میکنیم :

قید اول :

جمع تن های ورودی پردازش شده باید کمتر از ۳۰۰۰ باشد.

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^4 x_{ij} \leq 3000$$

### قید دوم :

مجموع کاغذ بازیافتی تولید شده با درجه اول باید با مجموع خمیر تولید شده روزنامه و کتاب برابری کند.

$$0.9 * (x_{11} + x_{21}) + 0.8 * (x_{12} + x_{22}) = L_1 = 500$$

### قید سوم :

مجموع کاغذ بازیافتی تولید شده با درجه دوم باید با مجموع خمیر تولید شده مقوا و کتاب و کارتن برابری کند.

$$0.9 * (x_{11} + x_{31} + x_{41}) + 0.8 * (x_{12} + x_{32} + x_{42}) = L_2 = 500$$

### قید چهارم :

مجموع کاغذ بازیافتی تولید شده با درجه سوم باید با مجموع خمیر تولید شده روزنامه و مقوا و کارتن برابری کند.

$$0.9 * (x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 0.8 * (x_{22} + x_{32} + x_{42}) = L_3 = 600$$

### تابع هدف :

$$\begin{aligned} \text{MIN } Z = & 10 * (x_{11} + x_{12}) + 20 * x_{11} + 15 * x_{12} + 8 * (x_{21} + x_{22}) + 20 * x_{21} + 15 * x_{22} + \\ & 6 * (x_{31} + x_{32}) + 20 * x_{31} + 15 * x_{32} + 5 * (x_{41} + x_{42}) + 20 * x_{41} + 15 * x_{42} = \\ & 30 * x_{11} + 25 * x_{12} + 28 * x_{21} + 23 * x_{22} + 26 * x_{31} + 21 * x_{32} + 25 * x_{41} + 20 * x_{42} \end{aligned}$$