دانشکده مهندسی
کامپیوتر وفناوری اطلاعات

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

بهینه سازی خطی

(بهار ۱۴۰۲)

تمرین ۶

محمد چوپان ۹۸۳۱۱۲۵

سوال اول :

سوال اول: -فرض کنید که یک جواب بهین برای مسألهٔ زیر به صورت $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,0)$ باشد.

$$\min z = x_1 + x_2 + c_3 x_3$$
$$s.t.$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مقدار بهین متغیرهای دوگان را به سه روش زیر تعیین کنید:

الف) قضیه مکمل زائد

ب) با استفاده از فرمول $y^{*T} = c_{BV}^T B^{-1}$

ج) با استفاده از ضرایب کاهش هزینه متغیرهای مصنوعی a_1 و a_2 که در روش Mبزرگ اضافه می‌شود.

پاسخ:

الف:

ابتدا دوگان مسئله اولیه را به دست می آوریم :

مساله دوگان	مساله اولیه
$maxw = 2y_1$ s.t $y_1 - y_2 \leq 1$ $y_1 + y_2 \leq 1$ $2y_1 + y_2 \leq c_3$ y_1, y_2 آزاد	$\min z = x_1 + x_2 + c_3 x_3$ $s.t.$ $x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

با توجه به قضیه مکمل زائد تفاضل سمت چپ و راست هر قید مساله اصلی ضربدر متغیر دوگان باید صفر باشد .
حال با توجه به اینکه $x^*_1 \neq 0$ و $x^*_2 \neq 0$ پس قیود اول و دوم دوگان binding هستند در نتیجه میتوان گفت که جواب بهین ما در آن ها به صورت مساوی صدق میکنند پس میتوان گفت که $y^*_1 = 1$, $y^*_2 = 0$

ب :

با توجه به صورت مساله :

$$BV = \{x_1, x_2\}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad c_{BV} \quad$ $CBV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

پس :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

Solution

$$y^{*T} = c_{BV}^{T} * B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

در نتیجه داریم :

$$y^*_2 = 0 , \quad y^*_1 = 1$$

ج :

با توجه به جزوه میدانیم که

$$\overline{C}_{a_i} = c_{BV}^{T} * B^{-1} * a_{a_i} - C_{a_i} \pm M = y^* i \pm M$$

همچنین چون قید ها به صورت تساوی اند از هر دو طرف M حذف می شود.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution

$$\overline{C}_{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solution

$$\overline{C}_{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

در نتیجه داریم :

$$y^*_2 = 0 , \quad y^*_1 = 1$$

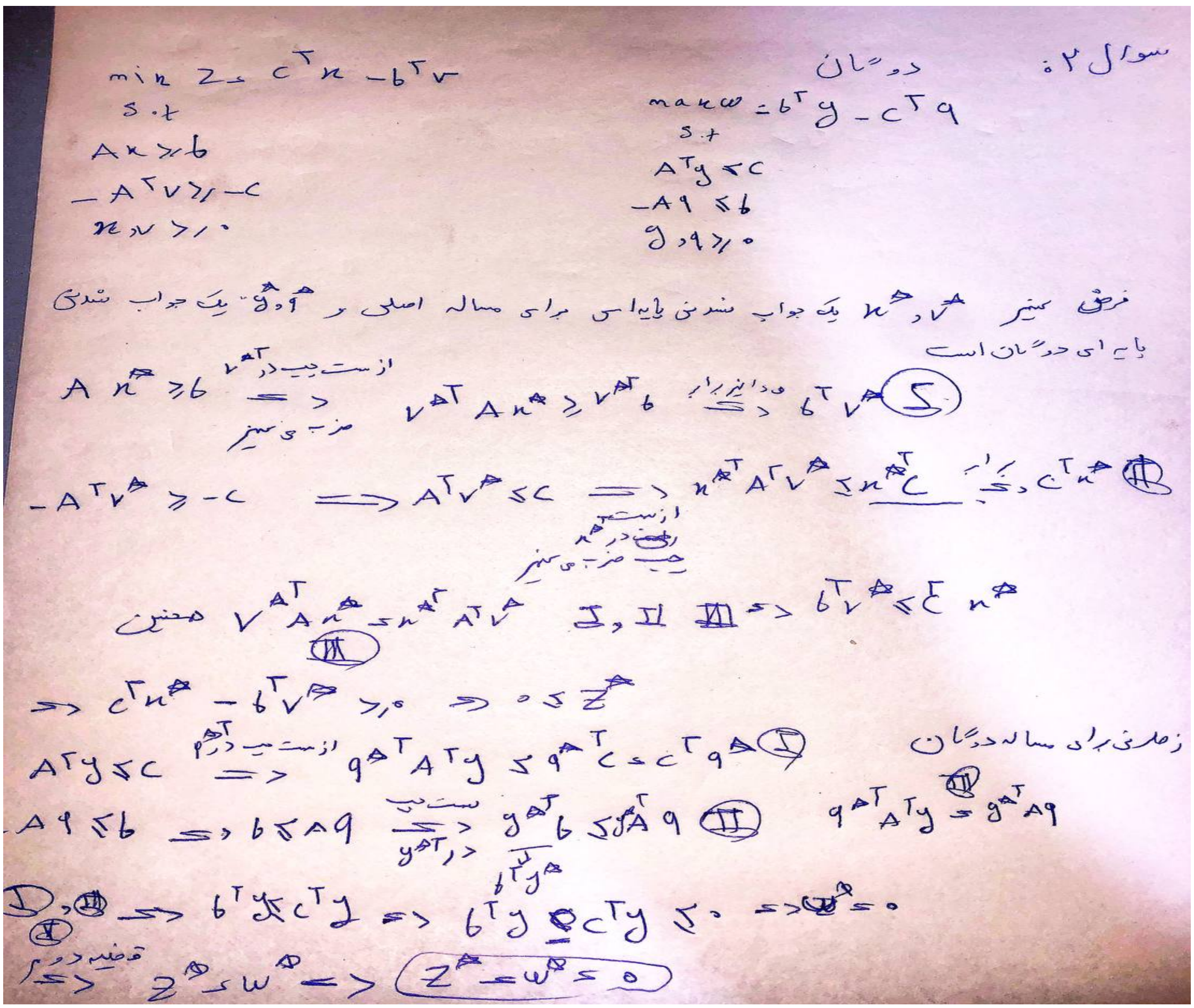
سوال دوم :

سوال دوم: مسأله زیر را در نظر بگیرید که در آن A ماتریس $m \times n$ و b بردار $m \times 1$ و c بردار $n \times 1$ است.

$$\begin{aligned}
&\min z = c^T x - b^T v \\
&s.t. \\
&Ax \geq b \\
&-A^T v \geq -c \\
&x, v \geq 0
\end{aligned}$$

دوگان مسأله فوق را بنویسید و ثابت کنید یا مسأله اولیه نشدنی است و یا دارای جواب بهینه با مقدار تابع هدف صفر است.

پاسخ :



سوال ۲: دوگان

$\min z = c^T x - b^T v$, s.t. $Ax \geq b$, $-A^T v \geq -c$, $x, v \geq 0$

$\max w = b^T y - c^T q$, s.t. $A^T y \leq c$, $-Aq \leq b$, $y, q \geq 0$

فرض کنیم v^*, x^* یک جواب شدنی پایه‌ای برای مساله اصلی و y^*, q^* یک جواب شدنی پایه‌ای دوگان است

$Ax^* \geq b \xRightarrow{\text{از سمت چپ در } v^{*T} \text{ ضرب می‌کنیم}} v^{*T} A x^* \geq v^{*T} b = b^T v^*$ (I)

$-A^T v^* \geq -c \Rightarrow A^T v^* \leq c \Rightarrow x^{*T} A^T v^* \leq x^{*T} c = c^T x^*$ (II)

از سمت چپ در x^{*T} ضرب می‌کنیم

میدانیم $v^{*T} A x^* = x^{*T} A^T v^*$ (III)

I, II, III $\Rightarrow b^T v^* \leq c^T x^*$

$\Rightarrow c^T x^* - b^T v^* \geq 0 \Rightarrow 0 \leq z^*$

از طرفی برای مساله دوگان

$A^T y \leq c \xRightarrow{\text{از سمت چپ در } q^{*T}} q^{*T} A^T y \leq q^{*T} c = c^T q^*$ (I)

$-Aq \leq b \Rightarrow b \geq Aq \xRightarrow{y^{*T}} y^{*T} b \geq y^{*T} A q$ (II)

$q^{*T} A^T y = y^{*T} A q$ (III)

I, II, III $\Rightarrow b^T y \leq c^T y \Rightarrow b^T y - c^T y \leq 0 \Rightarrow w^* \leq 0$

قضیه دوم $\Rightarrow z^* = w^* \Rightarrow z^* = w^* = 0$

در دست نوشته بالا ثابت کردیم که اگر قرار باشد جواب ما شدنی باشد یا بازه آن بزرگتر مساوی صفر و یا کوچکتر مساوی صفر است. طبق قضیه دوم میدانیم که اگر جواب بهین داشته باشیم باید $z^* = w^*$ باشد و اشتراک این دو بازه تنها حالتی است که هر دو برابر صفر باشند. در نتیجه یا جواب بهین ما مقدار ۰ را دارا است و یا نشدنی است.

سوال ۳ :

سوال سوم:) مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n}(x_i - 2y_i)$$
$$s.t.$$
$$x_i - 2y_i = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$
$$x_i \geq 0, y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

الف) دوگان مسأله فوق را بنویسید.

ب) درستی یا نادرستی گزاره زیر را برای مسأله فوق مشخص کنید (با ذکر دلیل)

مسألهٔ اولیه (مدل فوق) دارای جواب بهین دگرین است اما دوگان آن جواب بهین منحصر به فرد دارد.

پاسخ :

مساله دوگان	مساله اولیه
$minw = \sum_{i=1}^{n}(b_i w_i)$ s.t $1 \leq w_i \ \forall i = 1, 2,...., n$ $-2 \leq -2w_i \ \forall i = 1, 2,...., n$ $1 \leq w_i \leq 1 \Rightarrow 1 = w_i \ \forall i = 1, 2,...., n$ ه دو قید بالا آزاد $w_i \ \forall i = 1, 2,...., n$	$\max z = \sum_{i=1}^{n}(x_i - 2y_i)$ $s.t.$ $x_i - 2y_i = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ $x_i \geq 0, y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

ب :

درست است. زیرا در مساله دوگان مقدار wi تنها مقدار ۱ را میتواند داشته باشد پس جواب این مسئله منحصر به فرد و ثابت است.

از طرفی مساله اول برابر جمع bi ها ست که به به ازای هر x, y یک مقدار را دارا است و تغییر نمیکند در نتیجه مسئله ما جواب بهین دگرین دارد. پس جمله کاملا درست است.