



دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

بهینه سازی خطی
(بهار ۱۴۰۲)

تمرین ۵

محمد چوپان ۹۸۳۱۱۲۵

سوال اول :

سوال اول: LP زیر را با روش دوفازی حل کنید.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

پاسخ:

ابتدا مساله اصلی را استاندارد میکنیم.

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 2x_3 - e_1 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + s_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

حال مساله را به مساله فاز ۱ تبدیل می کنیم :

$$\begin{aligned} \min w &= a_1 + a_2 \\ \text{s.t.} \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - e_1 + a_1 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + a_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 + s_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, s_3, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

سپس مساله فاز ۱ را با روش سیمپلکس حل میکنیم:

نمایش سطر صفر مساله:

$$w - a_1 - a_2 = 0$$

جدول سیمپلکس متناظر:

BV	w	x_1	x_2	x_3	s_3	e_1	a_1	a_2	RHS
w	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
a_1	0	4	1	-2	0	-1	1	0	4
a_2	0	2	2	-1	0	0	0	1	6
s_3	0	1	-1	0	1	0	0	0	1

ابتدا جدول را اصلاح میکنیم

BV	w	x_1	x_2	x_3	s_3	e_1	a_1	a_2	RHS
w	1	6	3	-3	0	-1	0	0	10
a_1	0	4	1	-2	0	-1	1	0	4
a_2	0	2	2	-1	0	0	0	1	6
s_3	0	1	-1	0	1	0	0	0	1

از x_1 وارد شده و از a_1 خارج میشویم.

BV	w	x_1	x_2	x_3	s_3	e_1	a_1	a_2	RHS
w	1	0	1.5	0	0	0.5	-1.5	0	4
x_1	0	1	0.25	-0.5	0	-0.25	0.25	0	1
a_2	0	0	1.5	0	0	0.5	-0.5	1	4
s_3	0	0	-1.25	0.5	1	0.25	-0.25	0	0

حال از x_2 وارد شده و از a_2 خارج می‌شویم.

BV	w	x_1	x_2	x_3	s_3	e_1	a_1	a_2	RHS
w	1	0	0	0	0	0	-1	-1	4
x_1	0	1	0	-0.5	0	-0.33	0.33	-0.16	0.33
x_2	0	0	1	0	0	0.33	-0.33	0.66	2.66
s_3	0	0	0	0.5	1	0.66	-0.66	0.833	3.33

همه متغیرهای مصنوعی صفر اند پس وارد فاز دوم می‌شویم

یک جواب با توجه به فاز اول

$$BV = \{x_1, x_2, s_3\}, NBV = \{x_3, e_1\}$$

$$\{x_1, x_2, x_3, s_3, e_1\} = \{0.33, 2.66, 0, 3.33, 0\}$$

فاز دو ستون‌های متغیرهای مصنوعی را حذف و سطر صفر اصلی را در جدول جایگزین می‌کنیم

BV	z	x_1	x_2	x_3	s_3	e_1	RHS
z	1	-2	1	0	0	0	0
x_1	0	1	0	-0.5	0	-0.33	0.33
x_2	0	0	1	0	0	0.33	2.66
s_3	0	0	0	0.5	1	0.66	3.33

اصلاح جدول :

BV	z	x_1	x_2	x_3	s_3	e_1	RHS
z	1	0	0	-1	0	-1	-2
x_1	0	1	0	-0.5	0	-0.33	0.33
x_2	0	0	1	0	0	0.33	2.66
s_3	0	0	0	0.5	1	0.66	3.33

از x_3 وارد شده و از s_3 خارج می شویم.

BV	z	x_1	x_2	x_3	s_3	e_1	RHS
z	1	0	0	0	2	0.33	4.66
x_1	0	1	0	0	0	0.33	3.66
x_2	0	0	1	0	0	0.33	2.66
x_3	0	0	0	1	2	1.33	6.66

متغیری برای ورود نداریم پس جواب به صورت زیر است .

$$Z^* = 4.66, (x_1^*, x_2^*, x_3^*, e_1^*, s_3^*) = (3.66, 2.66, 6.66, 0, 0)$$

سوال دوم :

سوال دوم: در حل یک مسئله LP با هدف ماکزیمم‌سازی، جدول بهین به صورت زیر به دست آمده است که در آن s_1 و s_2 به ترتیب متغیرهای کمبود متناظر با قیود اول و دوم هستند. آیا این مسئله دارای جواب بهین دگرین است؟ چنانچه پاسخ شما مثبت است، مجموعه همه جواب‌های بهین را تعیین کنید.

پایه	z	x_1	x_2	s_1	s_2	سمت راست
z	1	0	0	5	0	60
x_2	0	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{1}{4}$	0	3
s_2	0	-2	0	$\frac{-1}{2}$	1	2

پاسخ:

بله به دلیل اینکه ضریب کاهش متغیر غیر پایه ای ما صفر است و پس مقدار تابع هدف ثابت است و تنها یک متغیر

گوشه ای دیگر پیدا میکنیم.

BV	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	1	0	0	5	0	60
x_2	0	-0.33	1	0.25	0	3
s_2	0	-2	0	-0.5	1	2

این پاسخ متناسب با نقطه گوشیه ای :

$$Z^* = 60, (x_1^*, x_2^*, s_1^*, s_2^*) = (0, 3, 0, 2) = A$$

است حال اگر از x_1 وارد شده . نمی توانیم خارج شویم . پس جواب بهین ما بی کران است و شعاع بهین داریم.

پس یعنی متغیر x_1 هر مقدار دلخواهی را میتواند بگیرد بدون آنکه سایر متغیر ها داخل پایه منفی گردد .

با دادن مقدار دلخواه r به متغیر x_1 به جواب بهین زیر میرسیم. همچنین S_1 را صفر میگیریم.

$$-0.33x_1 + x_2 + 0.25s_1 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 + 0.33x_1$$

$$-2x_1 + s_2 - 0.5s_1 = 2 \Rightarrow s_2 = 2 + 2x_1$$

$$Z^* = 60, (x_1^*, x_2^*, s_1^*, s_2^*) = (r, 3 + 0.33r, 0, 2 + 2r) = B$$

$$(r, 0.33r, 0, 2r) = AB$$

در نتیجه مجموع جواب های بهین ما برابر است با :

$$A + \lambda * (1, 0.33, 0, 2): \lambda \geq 0$$

سوال سوم:

سوال سوم: LP زیر را در نظر بگیرید با بکارگیری روابط جبرسیمپلکس، در هر قسمت، شدنی و بهینگی جواب پایه‌ای داده شده را تعیین کنید (s_1 و e_2 به ترتیب متغیرهای کمکی قیود اول و دوم هستند).

$$\max z = 4x_1 + 10x_2$$

s. t.

$$2x_1 + 7x_2 \leq 140$$

$$5x_1 - x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الف) $\{x_2, s_1\}$

ب) $\{x_1, e_2\}$

پاسخ :

ابتدا مساله را استاندارد سازی میکنیم :

$$\max z = 4x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 7x_2 + s_1 = 140$$

$$5x_1 - x_2 - e_2 = 20$$

$$x_1, x_2, s_1, e_2 \geq 0$$

الف :

باید جدول زیر را تکمیل کنیم :

BV	z	x_1	x_2	s_1	e_2	RHS
z	1	\bar{c}_{x_1}	\bar{c}_{x_2}	\bar{c}_{s_1}	\bar{c}_{e_2}	\bar{z}
x_2	0	\bar{a}_{x_1}	\bar{a}_{x_2}	\bar{a}_{s_2}	\bar{a}_{e_2}	\bar{b}
s_1	0	\bar{a}_{x_1}	\bar{a}_{x_2}	\bar{a}_{s_2}	\bar{a}_{e_2}	\bar{b}

حال داریم :

$$, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B, c_{BV} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

حال باید بخش های غیر از متغیر های پایه ای را محاسبه کنیم :

$$\bar{a}_{x_1} = B^{-1} * a_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_{x_1} = c_{BV}^T B^{-1} * a_{x_1} - c_{x_1} = (-50) - 4 = -54$$

$$\bar{a}_{e_2} = B^{-1} * a_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_{e_2} = c_{BV}^T B^{-1} * a_{e_2} - c_{e_2} = 10$$

$$\bar{b} = B^{-1} * b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 140 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 280 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b = -200$$

این جواب نشدنی است به دو دلیل یک اینکه متغیر x_2 بزرگتر از صفر باید باشد ولی نیست. ۲۰ - است. از طرفی z منفی شده است و در هیچ صورتی z نمی تواند منفی شود زیرا هر دو متغیر بازه بزرگ تر از صفر دارند و جمع دو عدد مثبت هیچگاه منفی نمی شود.

ب :

BV	z	x_1	x_2	s_1	e_2	RHS
z	1	\bar{c}_{x_1}	\bar{c}_{x_2}	\bar{c}_{s_1}	\bar{c}_{e_2}	\bar{z}
x_1	0	\bar{a}_{x_1}	\bar{a}_{x_2}	\bar{a}_{s_1}	\bar{a}_{e_2}	\bar{b}
e_2	0	\bar{a}_{x_1}	\bar{a}_{x_2}	\bar{a}_{s_2}	\bar{a}_{e_2}	\bar{b}

حال داریم :

$$, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = B, c_{BV} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

حال باید بخش های غیر از متغیر های پایه ای را محاسبه کنیم :

$$\bar{a}_{x_2} = B^{-1} * a_{x_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{37}{2} \end{pmatrix} \quad \bar{c}_{x_2} = c_{BV}^T B^{-1} * a_{x_2} - c_{x_2} = \frac{(14) - 10}{1} = 4$$

$$\bar{a}_{s_1} = B^{-1} * a_{s_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \bar{c}_{s_1} = c_{BV}^T B^{-1} * a_{s_1} - c_{s_1} = 2$$

$$\bar{b} = B^{-1} * b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 140 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 330 \end{pmatrix} \quad \bar{z} = c_{BV}^T B^{-1} b = 280$$

پس جدول ما به صورت زیر در می آید :

BV	z	x_1	x_2	s_1	e_2	RHS
z	1	0	4	2	0	280
x_1	0	1	3.5	0.5	0	70
e_2	0	0	18.5	2.5	1	330

پس این جواب پایه ای شدنی و است و بهینه است. زیرا در مساله ماکزیمم ضریب کاهش هزینه صفر یا منفی نداریم.