



دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

بهینه سازی خطی
(پاییز ۱۴۰۱)

تمرین ۱

محمد چوپان ۹۸۳۱۱۲۵

سوال اول: دو شهر ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. در شهر ۱ روزانه ۵۰۰ تن و در شهر ۲ روزانه ۴۰۰ تن زباله تولید می‌شود. دو ماشین برای سوزاندن زباله‌ها در دسترس است که هر کدام می‌تواند روزانه تا سقف ۵۰۰ تن زباله را بسوزاند. هزینه سوزاندن هر تن زباله در زباله‌سوز اول و دوم به ترتیب ۴۰ و ۳۰ دلار است. ماشین زباله‌سوزی هر تن زباله را به ۰/۲ تن خاکستر مبدل می‌سازد که می‌بایست در یکی از دو زباله‌دانی تخلیه گردد. هر زباله‌دانی می‌تواند روزانه حداکثر ۲۰۰ تن خاکستر را در خود جای دهد. فاصله بین شهر ۱ و ۲ تا زباله‌سوزی‌ها بر حسب کیلومتر در جدول زیر آمده است:

	زباله‌سوزی ۱	زباله‌سوزی ۲
شهر ۱	۳۰	۵۰
شهر ۲	۳۶	۴۲

هزینه انتقال هر تن زباله از شهرها به زباله‌سوزی‌ها معادل ۴ واحد در کیلومتر است. فاصله بین زباله‌سوزی‌ها و زباله‌دانی‌ها بر حسب کیلومتر در جدول زیر آمده است:

	زباله‌دانی ۱	زباله‌دانی ۲
زباله‌سوزی ۱	۵	۸
زباله‌سوزی ۲	۹	۶

هزینه انتقال هر تن خاکستر از زباله‌سوزی‌ها به زباله‌دانی‌ها معادل ۴ واحد در کیلومتر است. هدف آن است که هر دو شهر از زباله پاک‌سازی شود. یک مدل بهینه‌سازی برای مینیمم‌سازی هزینه‌ها ارائه کنید. قیود و تابع هدف مدل باید خطی باشد اما متغیرها در صورت نیاز می‌توانند عدد صحیح نیز باشند. **تعریف متغیرها را به طور کامل بنویسید و بیان کنید هر قید چه چیزی را تضمین می‌کند.**

پاسخ :

متغیرهای خود را به صورت زیر تعریف میکنیم :

x₁₁ : تعداد تن زباله هایی که توسط شهر یک به زباله سوزی ۱ میرود.

x₁₂: تعداد تن زباله هایی که توسط شهر یک به زباله سوزی ۲ میرود.

x₂₁: تعداد تن زباله هایی که توسط شهر دو به زباله سوزی ۱ میرود.

x₂₂: تعداد تن زباله هایی که توسط شهر دو به زباله سوزی ۲ میرود.

به همین ترتیب تعداد تن زباله هایی که از زباله سوزی ۱ و ۲ به زباله دانی می رود را تعریف میکنیم.

y₁₁ : تعداد تن خاکستر که توسط زباله سوزی یک به زباله دانی ۱ میرود.

y₁₂: تعداد تن خاکستر که توسط زباله سوزی یک به زباله دانی ۲ میرود.

y₂₁: تعداد تن خاکستر که توسط زباله سوزی دو به زباله دانی ۱ میرود.

y₂₂: تعداد تن خاکستر که توسط زباله سوزی دو به زباله دانی ۲ میرود.

همه متغیرها بزرگ تر مساوی از صفر و صحیح است.

ابتدا قیود خود را تعریف میکنیم سپس تابع هدف را :

قید اول:

تضمین میکند که مجموع زباله شهر یک مساوی ۵۰۰ تن است.

$$x_{11} + x_{12} = 500$$

قید دوم:

تضمین میکند که مجموع زباله های شهر دو مساوی ۴۰۰ تن است.

$$x_{21} + x_{22} = 400$$

قید سوم :

تضمین میکند مجموعه زباله های زباله سوزی اول کمتر از ۵۰۰ تن است.

$$x_{11} + x_{21} \leq 500$$

قید چهارم :

تضمین میکند که مجموع زباله های زباله سوزی دوم نیز کمتر از ۵۰۰ تن است.

$$x_{12} + x_{22} \leq 500$$

قید پنجم :

تضمین میکند که مجموع زباله های زباله دانی یک کمتر از ۲۰۰ است .

$$y_{11} + y_{21} \leq 200$$

قید ششم:

تضمین میکند که مجموع زباله های زباله دانی دو کمتر از ۲۰۰ است .

$$y_{12} + y_{22} \leq 200$$

قید هفتم :

۲/۰ مجموع زباله های سوخته شده در زباله سوزی ۱ برابر زباله های رفته به دو زباله دانی است.

$$0.2 * (x_{11} + x_{21}) = (y_{11} + y_{12})$$

قید هشتم :

۲/۰ مجموع زباله های سوخته شده در زباله سوزی ۲ برابر زباله های رفته به دو زباله دانی است.

$$0.2 * (x_{21} + x_{22}) = (y_{21} + y_{22})$$

در نهایت تابع هدف خود را به صورت زیر تعریف میکنیم :

MIN

$$30 * 4 * x_{11} + 40 * x_{11} + 50 * 4 * x_{12} + 30 * x_{12} + 36 * 4 * x_{21} + 40 * x_{21} + 42 * 4 * x_{22} + \\ 30 * x_{22} + 5 * 4 * y_{11} + 8 * 4 * y_{12} + 9 * 4 * y_{21} + 6 * 4 * y_{22} = \\ 160 * x_{11} + 230 * x_{12} + 184 * x_{21} + 198 * x_{22} + 4 * (5 * y_{11} + 8 * y_{12} + 9 * y_{21} + 6 * y_{22})$$

و همه متغیر ها بزرگ تر مساوی از صفر و صحیح است.

سوال دوم: یک کارخانه تولید خودرو و کامیون، طی چهار ماه آینده با تقاضاهای زیر مواجه است:

	خودرو	کامیون
ماه ۱	۸۰۰	۴۰۰
ماه ۲	۳۰۰	۳۰۰
ماه ۳	۱۰۰	۲۰۰
ماه ۴	۳۰۰	۸۰۰

در طول هر ماه جمعاً حداکثر ۱۰۰۰ وسیله نقلیه می‌توان تولید کرد. تولید هر کامیون به ۲۰۰۰ کیلوگرم فولاد و تولید هر خودرو به ۱۰۰۰ کیلوگرم فولاد احتیاج دارد. در طول ماه ۱، هر کیلوگرم فولاد قیمتی معادل ۹ دلار دارد. در طول ماه ۲، هر کیلوگرم فولاد قیمتی معادل ۱۴ دلار دارد. قیمت در ماه‌های سوم و چهارم به ترتیب برابر با ماه‌های اول و دوم است. در طول هر ماه حداکثر تا سقف ۱۵۰۰۰۰ کیلوگرم فولاد می‌توان خریداری کرد (این میزان ممکن است فقط در ماهی که خریداری شده مورد استفاده قرار گیرد و قابل ذخیره‌سازی نیست).

در شروع ماه ۱، ۱۰۰ کامیون و ۲۰۰ خودرو در انبار موجودند و در پایان هر ماه به ازای هر کامیون و خودرویی که در انبار نگهداری می‌شود، به ترتیب هزینه ۱۲۰ دلار و ۱۰۰ دلار تحمیل می‌شود. هر خودرو برای پیمودن یک مایل به ۲۰ واحد سوخت و هر کامیون برای پیمودن یک مایل به ۱۰ واحد سوخت احتیاج دارد و در طول هر ماه این شاخص برای کل وسایل نقلیه تولید شده باید بطور

میانگین حداکثر ۱۶ باشد. امکان به تعویق انداختن تقاضا وجود دارد اما به ازای هر یک ماه تعویق در تحویل خودرو هزینه ۸۰ دلار و به ازای هر ماه تعویق در تحویل کامیون هزینه ۶۰ دلار تحمیل می‌گردد. همچنین همه تقاضاها باید بالاخره تا پایان ماه چهارم برآورده گردند. برای مینیمم‌سازی هزینه‌ها تحت شرایط مذکور یک مدل بهینه‌سازی ارائه کنید. **تعریف متغیرها را به طور کامل بنویسید و بیان کنید هر قید چه چیزی را تضمین می‌کند.**

پاسخ :

ابتدا متغیرها را تعریف میکنیم :

x_i مقدار خودرو تولید شده در ماه i

y_i مقدار کامیون تولید شده در ماه i

z_i مقدار خودرو انبار شده در ماه i

k_i مقدار کامیون انبار شده در ماه i

L_i مقدار خودرو تعویق شده در ماه i

z_i مقدار کامیون تعویق شده در ماه i

حال قید ها را می نویسیم :

قید اول :

تضمین میکند که مقدار وسیله نقلیه تولید شده در هر ماه کوچکتر مساوی هزار است.

$$x_i + y_i \leq 1000$$

قید دوم :

تضمین میکند مقدار فولاد مصرف شده در هر ماه کمتر از ۱۵۰۰۰۰۰ کیلوگرم است.

$$1000 * x_i + 2000 * y_i \leq 1500000$$

قید سوم :

تضمین میکند میانگین سوخت خودرو ها حداکثر ۱۶ است .

$$\frac{10x_i + 20y_i}{x_i + y_i} \leq 16$$

قید چهارم :

مجموع خودرو های تولید شده باید اندازه تقاضا باشد :

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 1500 - 200$$

قید پنجم :

مجموع کامیون های تولید شده باید اندازه تقاضا باشد :

$$\sum_{i=1}^4 y_i = 1700 - 100$$

قید ششم :

مجموع خودرو های تولید شده در ماه اول + مقدار اولیه باید برابر مقدار درخواستی منهای تعویقی ها و انبار ها باشد .

$$x_1 + 200 = 800 - L_1 + z_1$$

قید هفتم :

مجموع کامیون های تولید شده در ماه اول + مقدار اولیه باید برابر مقدار درخواستی منهای تعویقی ها و انبار ها باشد .

$$y_1 + 100 = 400 - j_1 + k_1$$

قید هشتم :

مجموع خودرو ها تولید شده در ماه دوم + خودرو های انبار شده برابر است با تقاضا ماه دوم و همچنین تعویقی ماه اول منهای تعویقی ماه دوم + انبار ماه دوم

$$z_1 + x_2 = 300 + L_1 - L_2 + Z_2$$

قید نهم :

همانند بالا برای کامیون

$$k_1 + y_2 = 300 + j_1 - j_2 + k_2$$

برای ماه سوم و چهارم برای خودرو و کامیون هم به همین ترتیب داریم :

$$z_2 + x_3 = 100 + L_2 - L_3 + Z_3$$

$$k_2 + y_3 = 200 + j_2 - j_3 + k_3$$

ماه چهارم :

با توجه به اینکه در ماه تمام می شود انبار و تعویقی نداریم .

$$z_3 + x_4 = 300 + L_1$$

$$k_3 + y_4 = 800 + j_1$$

تابع هدف :

$$\begin{aligned} \text{MIN } & x_1 * 1000 * 9 + y_1 * 9 * 2000 + z_1 * 100 + k_1 * 120 + j_1 * 60 + L_1 * 80 + \\ & x_2 * 1000 * 14 + y_2 * 14 * 2000 + z_2 * 100 + k_2 * 120 + j_2 * 60 + L_2 * 80 + \\ & x_3 * 1000 * 9 + y_3 * 9 * 2000 + z_3 * 100 + k_3 * 120 + j_3 * 60 + L_3 * 80 + \\ & x_4 * 1000 * 14 + y_4 * 14 * 2000 = \\ & 9000 * (x_1 + x_3) + 18000 * (y_1 + y_3) + 14000 * (x_2 + x_4) + 28000 * (y_2 + y_4) + 100 * (z_1 + z_2 + z_3) + \\ & 120 * (k_1 + k_2 + k_3) + 60 * (j_1 + j_2 + j_3) + 80 * (L_1 + L_2 + L_3) \end{aligned}$$

که همه متغیرها بزرگتر مساوی صفر اند و صحیح اند.