Date: .... Subject: ....

۱

تمرین سوم سیگنال و سیستم ها

محمد چوپان ۹۸۳۱۱۲۵

۱)

1) $x(t) = \cos\frac{2t\pi}{3}\sin\frac{2t\pi}{9}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ $\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(e^{\frac{2\pi t}{3}j} + e^{-\frac{2\pi t}{3}j}) \times$

$\sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$ $\frac{1}{2j}(e^{\frac{2\pi t}{9}j} - e^{-\frac{2\pi t}{9}j})$

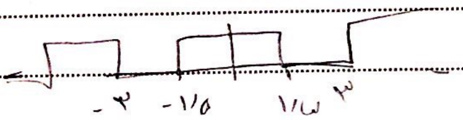
$= \frac{1}{4j}(e^{\frac{8\pi t j}{9}} - e^{\frac{4\pi t j}{9}} + e^{-\frac{4\pi t j}{9}} - e^{-\frac{8\pi t j}{9}})$

$\Rightarrow x(t) \Rightarrow \frac{1}{4j} = a_4 \quad -\frac{1}{4j} = a_2 \quad \frac{1}{4j} = a_{-2} \quad -\frac{1}{4j} = a_{-4}$

$\Rightarrow a_k = 0 \quad k \text{ o.w} \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{9})t}$

یعنی ضریب 2π

2) $f(x) \begin{cases} -1 & -3 \leq x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq 3 \end{cases}$

$x(t) =$ 

$f(x) = 2x(t - \frac{3}{2}) - 1$

$T_1 = 1.5 \quad T = 3-(-3) = 6$

$a_0 = \frac{2T_1}{T} = \frac{1}{2} \qquad a_k = \frac{\sin(k(\frac{2\pi}{T})T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}$

$\Rightarrow f(t) = 2x(t - \frac{3}{2}) - 1 \overset{FS}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 2\sin\frac{k\pi}{2} e^{-\frac{jk\pi}{2}} & k \neq 0 \\ 2\cdot\frac{1}{2} - 1 \Rightarrow 0 & k = 0 \end{cases}$

Kian

Date: .... Subject: ....

۳) $x(t) = \sum b_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\pi t/2}$

$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\pi t/2}$

$x_{2\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) + \delta(t-\frac{T}{2}-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{2j\pi kt/4}$

$+ \frac{1}{T} e^{2j\pi k(t-2)/4} = \sum \frac{1}{T} e^{j\pi kt/2}(1+e^{j\pi k})$

$= \sum \frac{2}{T} e^{j\pi kt/4}$

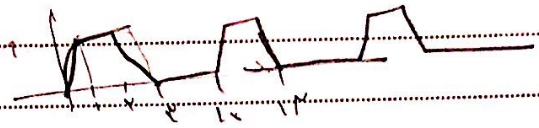
حال داریم $x(t) = T x_\delta(t) - \frac{T}{2} x_{2\delta}(t)$

$\Rightarrow x(t) = \sum 2\delta(t-4k) - 2\delta(t-2-4k)$

$\Rightarrow 2\delta(t) - 2\delta(t-2) = x(t)$

Date: .... **Subject:** ....

۴) $x_4(t) = x_4(t+10)$



دوره تناوب $T = 10$ $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j\omega_0 k t}\, dt$

$\frac{1}{10}\int_0^{10} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{10}kt}\, dt = \frac{1}{10}\int_0^1 t\, e^{-j\frac{2\pi}{10}kt}\, dt + \int_1^2 e^{-j\frac{2\pi}{10}kt}\, dt$

$+\int_2^3 (3-t)\, e^{-j\frac{2\pi}{10}kt} + \int_3^{10} 0\times e^{-j\frac{2\pi}{10}kt}\, dt = \frac{1}{10}\Big(\int_0^1 t\, e^{-j\frac{2\pi}{10}kt}\, dt$

$+\int_1^2 e^{-j\frac{2\pi}{10}kt}\, dt + \int_2^3 (3-t)\, e^{-j\frac{2\pi}{10}kt}$

$= \frac{5(-\pi j k t - 5)}{\pi^2 j^2 k^2 e^{\frac{\pi j k t}{5}}}\Big|_0^1 + \left(-e^{-\frac{k\pi j t}{5}}\frac{5}{\pi j k}\right)\Big|_1^2 + \frac{-5(3\pi k j\, e^{-\frac{k\pi j t}{5}} - \pi k j\, e^{-\frac{5kjt}{5}} \times t}{\pi^2 k^2 j^2}$

$-\frac{5 e^{-\frac{k\pi j t}{5}}}{\pi^2 k^2 j^2} = \frac{2\cdot 5}{\pi^2 j^2 k^2}\left(-e^{-\frac{5jk}{5}}\frac{\pi jk}{5} - e^{-\frac{5\pi jk}{5}} + 1\right)$

$+\frac{5}{\pi jk}\left(e^{-\frac{2\pi jk}{5}} - e^{-\frac{\pi jk}{5}}\right) + \left(\frac{-5(3\pi kj\, e^{-\frac{k\pi j 3}{5}} - \pi kj\, e^{-\frac{5kj3}{5}} \times 3}{5^2 k^2 j^2}\right.$

$-\frac{5 e^{-\frac{j\pi k 3}{5}}}{\pi^2 k^2 j^2} - \left(\frac{-5(3\pi kj\, e^{-\frac{k\pi j 2}{5}} - \pi kj\, e^{-\frac{5kj2}{5}} \times 2}{\pi^2 k^2 j^2}\right) - 5 e^{-\frac{j\pi k 2}{5}}$

مرجع اینها برابر پاسخ در حل
است.

۵.۷) $x_4'(t) = \frac{d x_4(t)}{dt} \Rightarrow c_k = j\frac{2\pi}{k} k\, d_k$

$d_k \begin{cases} \frac{1}{5} & k = 0 \\ \frac{1}{j\frac{2\pi}{10}k} c_k = \frac{-5}{2\pi^2 k^2}\left(1-e^{-\frac{3j\pi k}{5}}\right)\left(1-e^{-\frac{j\pi k}{5}}\right) & k \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{10}{\pi^2 k^2} e^{-\frac{3\pi jk}{10}} \sin\left(\frac{\pi k}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{10}\right)$

Date: Subject:

فرض کنیم $x(t)$ از ۲ ضربه جدا تشکیل شده است (5

یک

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$$

$$a_k = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$$

② $y(t) = -2(x(t-1))$

مانند سوال ۱

$$= -2\left(\frac{1}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{2}}\right) = -e^{-jk\pi}$$

سری فوریه خواص خطی بودن را داراست

$$x(t)+y(t) = a_k + b_k = \frac{1}{2} - e^{-jk\pi}$$ سیگنال نهایی

(2

$$P_{avg} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$$x(t) = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}t+\pi\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$$

$$= -\frac{3\pi}{2}\times\frac{1}{2}\left[e^{+j\frac{3\pi}{2}t}+e^{-j\frac{3\pi}{2}t}\right]\times\frac{1}{2}\left[e^{\frac{3\pi}{4}jt}+e^{-\frac{3\pi}{4}jt}\right]$$

$$= -\frac{3\pi}{8}\left(e^{\frac{9\pi}{4}jt}+e^{\frac{3\pi}{4}jt}+e^{-\frac{3\pi}{4}jt}+e^{-\frac{9\pi}{4}jt}\right)$$

$$\Rightarrow K_9 = \frac{3\pi}{8} \quad K_{-3} = \frac{3\pi}{8} \quad K_3 = \frac{3\pi}{8} \quad K_{-9} = \frac{3\pi}{8} \quad K = \text{zero}$$

$$P_{avg} = \frac{9}{64}\pi^2\times 4 = \frac{9}{16}\pi^2 \checkmark$$

(۳

$a_n = a_{-n} \Rightarrow x(t) = x(-t)$ خاصیت زوج بودن

$a_n = a_{n+2} \Rightarrow x(t) = x(t)\, e^{-j(\frac{2\pi}{3})\times 2t}$

بجای k در توان k+۲ گذاشتیم و بیرون آوردیم

$x(t) = x(t)\, e^{-j(\frac{4\pi}{3})t} \xrightarrow{\div x(t)} 1 = e^{-j(\frac{4\pi}{3})t}$

پس t مضارب $\frac{3}{2}$ است

برای t بین $-0/5$ تا $0/5$ تنها نقطه صفر است $\Rightarrow \int_{-0/5}^{0/5} x(t)\,dt = 1$

پس $x(t) = \delta(t)$ است

در $1 < t < 2$ تنها در $t = \frac{3}{2}$ برابر است $\int_{1}^{2} x(t)\,dt = 2$

پس $x(t) = 2\delta(t - \frac{3}{2})$

$\Rightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 3k) + 2\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 3k - \frac{3}{2})$

Date: .... Subject: ....

(۴

۱) $z(t) = x^*(2t) + x(-\frac{t}{2})$

$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ طبق واشنت $x^*(t) \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$

$x(-\frac{t}{2}) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$ بنا بر Time Reversal است و ضریب ۲ هم

تاثیری در a ندارد به علت TimeScaling

$x^*(2k) \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$

$\Rightarrow z(t) \to a^*_{-k} + a_{-k}$

۲) $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ بنابر timeshifting

$x(t+2) \xleftrightarrow{FS} e^{jk\omega_0 t_0} a_k \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow x(t+2) \longleftrightarrow e^{+jk2\pi} a_k$

$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ خواص مشتق را داریم

$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k \Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{FS} j^2k^2\omega_0^2 a_k = -\pi^2k^2 a_k$

$z(t) = e^{2jk\pi} a_k - \pi^2k^2 a_k \quad k \neq 0$

$e^{2jk\pi} a_k - \pi^2k^2 a_k + 2 \quad k = 0$

$\Rightarrow a_k + 2$

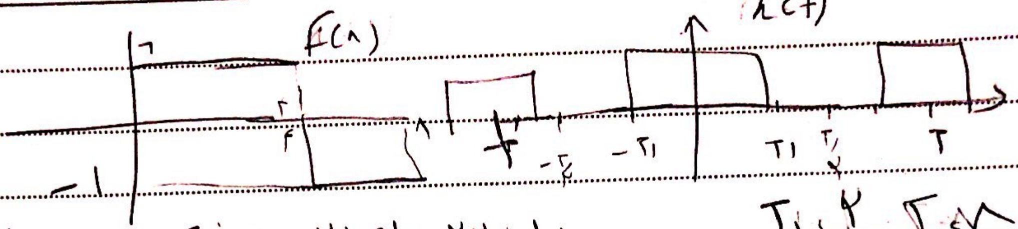
ج) طبق توضیحات کانال تابع دو ضربه با تابع ضربه‌ای است

که در ضرب شده یکسان با $x(t)$ اولیه دارد و حاصل این دو برای $z(t)$ است

پس $z(t) = x(t)\delta(t+1) + x(t)\delta(t-1)$

Date: .... **Subject:** ....

$x(t) =$



$H(j\omega) = \dfrac{\sin(j\omega)}{\omega}$ $\quad f(n) = 2x(t-2) + 1$ $\quad T_1 = 2 \;,\; T = 8$

$a_0 = \dfrac{2T_1}{T} = \dfrac{1}{2} \quad k = 0$

$a_k = \dfrac{\sin\left(k\left(\frac{2\pi}{T}\right)T_1\right)}{k\pi} = \dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \quad k \neq 0$

$$f(n) = 2x(t-2) - 1 \xleftrightarrow{FS} \begin{cases} 2a_0 e^{-jk\omega_0 2} - 1 & k = 0 \\ 2a_k e^{-\frac{2\pi}{8} jk2} & k \neq 0 \end{cases}$$

$$f(n) \longleftrightarrow \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \dfrac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}} & k \neq 0 \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

$H(j\omega) = H(jk\omega_0) = H\left(jk\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin(k\pi)}{\frac{k\pi}{4}} = \dfrac{4\sin(k\pi)}{k\pi}$

f(n) اینجا همان x(t) سوال است

$\Rightarrow y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

$\Rightarrow y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \times \dfrac{4\sin(k\pi)}{k\pi} \times e^{jk\frac{\pi}{4}t}$

جز صفر که صفر است.