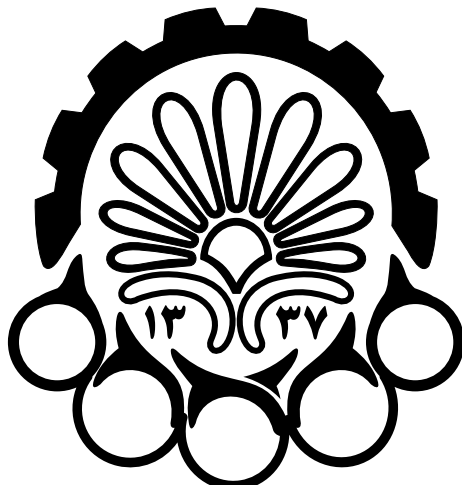


به نام خدا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین سوم: نمایش سری فوریه سیگنال‌های پیوسته-زمان متناوب

توضیحات:

- مهلت تحویل تا جمعه ۲۴ اردیبهشت در نظر گرفته شده است. لذا با توجه به حجم تمرین برنامه‌ریزی مناسبی انجام دهید.
- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- پاسخ بخش‌های تئوری و عملی تمرین را در قالب یک فایل ZIP با نام «HW3_StudentNumber.zip» در سایت درس بارگذاری کنید.
- در صورت داشتن اشکال می‌توانید از طریق ایمیل ss.spring.2021@gmail.com با تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید.



بخش تئوری (۷۰ نمره)

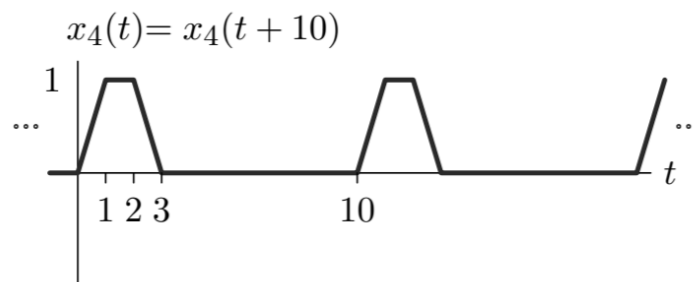
۱- ضرایب فوریه سیگنال‌ها یا سیگنال متناظر با ضرایب زیر را محاسبه کنید.

1) $x(t) = \cos \frac{2t\pi}{3} \sin \frac{2t\pi}{9}$

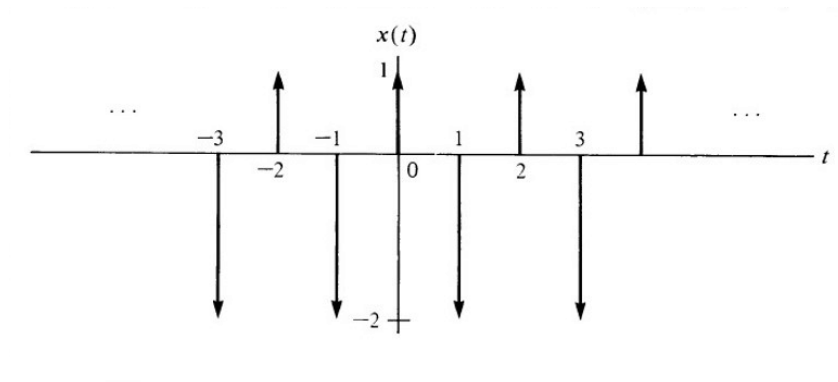
2) $f(x) = \begin{cases} -1 & -3 \leq x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{on } [-3, 3]$

3) $b_k = \begin{cases} 1; & k \text{ Odd} \\ 0; & k \text{ Even} \end{cases}$

4)



5)



۲- توان متوسط سیگنال زیر را بدست آورید.

$$x(t) = \frac{3\pi}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}t + \pi\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$$



۳- اگر چهار ویژگی زیر را برای یک سیگنال پیوسته با دوره تناوب ۳ و ضرایب سری فوریه a_k داشته باشیم، سیگنال $x(t)$ را بدست آورید.

1) $a_k = a_{k+2}$

2) $a_k = a_{-k}$

3) $\int_{-0.5}^{0.5} x(t) dt = 1$

4) $\int_1^2 x(t) dt = 2$

۴- اگر $T = 2$ $x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k$ و $z(t) \xleftrightarrow{F.S} c_k$ در موارد زیر سیگنال حاصل یا ضرایب سری فوریه خواسته شده را برحسب $x(t)$ یا a_k بدست آورید.

1) $z(t) = x^*(2t) + x(\frac{-t}{2})$, $c_k = ?$

2) $z(t) = 2 + x(t+2) + \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$, $c_k = ?$

3) $c_k = \begin{cases} a_1, & k = 1 \\ a_{-1}, & k = -1 \\ 0, & k \neq 1, -1 \end{cases} \quad z(t) = ?$

۵- یک سیستم LTI را با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

اگر سیگنال ورودی این سیستم سیگنال متناوب

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ -1, & 4 \leq t < 8 \end{cases}$$

با دوره تناوب ۸ باشد، ضرایب سری فوریه $x(t)$ و خروجی متناظر سیستم $(y(t))$ را به دست آورید.



بخش عملی (۴۰ نمره)

هشدار: ممکن است برخی از فایل‌های صوتی صدای آزاردهنده‌ای داشته باشند. مراقب باشید!

صوت نوعی موج مکانیکی پیوسته است که از لرزش ذرات هوا به وجود می‌آید. این موج وقتی به پرده گوش ما می‌رسد باعث ایجاد ارتعاش در آن می‌شود و ما صدا را می‌شنویم. اگر یکی از ذرات محیط (مثلاً یک مولکول هوا کنار گوش) را در نظر بگیریم و جابجایی آن نسبت به نقطه تعادلش را در زمان‌های مختلف رسم کنیم، شکل موج صوتی که می‌شنویم ایجاد می‌شود.

صوت دیجیتال نیز از نمونه‌برداری (در فصل ۷ در مورد نمونه‌برداری بیشتر می‌خوانید) از این موج پیوسته در فواصل زمانی کم ساخته می‌شود. به عنوان مثال صوت‌هایی که در این تمرین با آن‌ها کار می‌کنیم نرخ نمونه‌برداری برابر ۴۴۱۰۰ هرتز (یعنی نمونه‌برداری به فاصله $S = 1/44100$) دارند.

در این تمرین می‌خواهیم به محاسبه و بررسی سری فوریه چند سیگنال صوتی بپردازیم. برای این کار چهار فایل صوتی wave1 تا wave4 را که در اختیاران قرار گرفته است با scipy.io.wavfile.read باز و نمودار آن‌ها در حوزه زمان رسم کنید (توجه کنید برای محور افقی نمودار، هر ۴۴۱۰۰ نمونه برابر یک ثانیه است. همچنین برای بهتر دیده شدن سیگنال‌ها می‌توانید چند نمونه اول [مثلاً ۵۰۰ نمونه ابتدایی] را رسم کنید).

در درس خواندیم که ضرایب سری فوریه سیگنال‌های پیوسته-زمان از معادله زیر به دست می‌آیند:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

با باز کردن معادله بالا می‌توانیم بخش حقیقی (b_k) و بخش موهومی (c_k) هر ضریب را جداگانه محاسبه کنیم. یعنی:

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

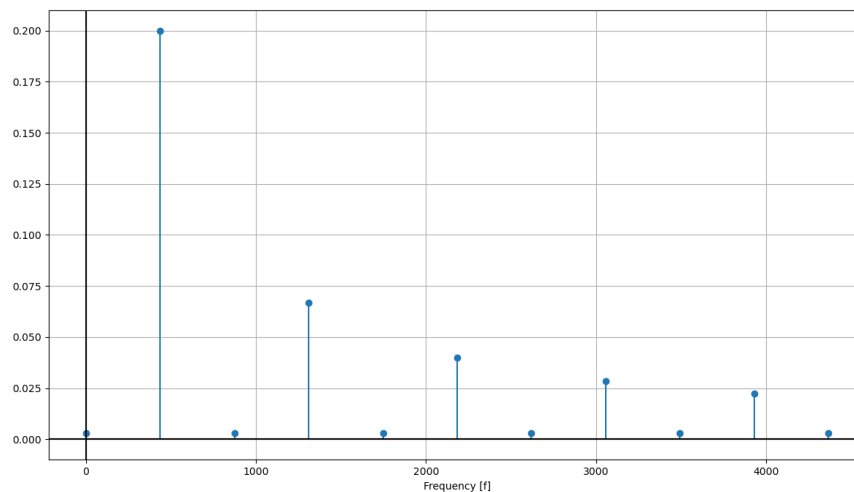
$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

$$a_k = b_k - jc_k$$



تمرین سوم: نمایش سری فوریه سیگنال‌های پیوسته-زمان متناوب

برای هر یک از چهار سیگنال داده شده، ضرایب سری فوریه (b_k و c_k) آن‌ها را برای $k = 0$ تا $k = 10$ محاسبه کنید (برای محاسبه انتگرال استفاده از توابع کتابخانه‌ای مجاز نیست). سپس نمودار $|a_k|$ ها را رسم کنید. به عنوان مثال برای یکی از سیگنال‌ها به شکل زیر می‌شود:



(امتیازی): به نظر شما کدام یک از چهار فایل صوتی صدای کامل‌تری دارند؟ این کامل‌تر بودن را با توجه به ضرایب سری فوریه آن‌ها چگونه توضیح می‌دهید؟

(امتیازی): فایل صوتی bonus را باز کنید، به کمک تابعی که نوشتید ضرایب سری فوریه آن را به دست آورید و آن‌ها را در یک نمودار رسم کنید (دوره تناوب این سیگنال تقریباً ۲۲۹.۳۴ میلی‌ثانیه است). ۵ فرکانس غالب آن چه فرکانس‌هایی هستند؟ اگر دقت کنید ۵ فرکانس موجود در این سیگنال، ضربی گویا از یکدیگر هستند. به همین دلیل صدای این سیگنال از موارد قبلی دل‌نشین‌تر است.

پاسخ بخش عملی را به یکی از شکل‌های زیر به همراه پاسخ بخش تئوری داخل فایل zip قرار دهید و ارسال کنید.

۱. نوت‌بوک ژوپیتر (استفاده از ژوپیتر نمره امتیازی دارد)

۲. کد پایتون + گزارش موارد خواسته شده